Examen de Admisión al Programa de Posgrado en Matemáticas
Convocatoria de Ingreso 2013

Primera Parte: Examen de Cálculo

1. Encuentre los valores de x donde se alcanzan los mínimos y máximos locales, así como el mínimo y máximo global de
$$f(x) = 5 + x^2 \cos(x),$$
en el intervalo $[-10\pi, 10\pi]$. Asimismo grafique la función f en el dominio dado.
2. Calcule el área delimitada por las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = x^2 - 1$
3. Muestre que
$$\int_0^x \left(\int_0^t f(z)dz \right) dt = \int_0^x f(t)(x-t)dt$$
4. ¿Convergen o divergen las siguientes series? En caso de converger, calcule el valor a donde convergen
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2 - 4} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n}$$
5. Responda Falso o Verdadero. En caso de ser falso, de contraejemplo. En caso de ser verdadero argumente su respuesta.
   a) Si $f : R \to R$ es continua en a, entonces es diferenciable en a.
   b) Si $f : R \to R$ es diferenciable en a, entonces es continua en a.
   c) Si $f : (a,b) \to R$ es diferenciable en todo el intervalo, entonces está acotada.

Segunda Parte: Examen de Álgebra Lineal

1. Encontrar una base ortonormal en R^3 que contenga al vector

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   y encontrar la descomposición del vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con respecto a esta base.

2. Suponer que se encuentra que el polinomio característico de alguna matriz cuadrada A es

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^4 (\lambda - 5)^3 (\lambda + 4)^2 (\lambda)^3$$

   Responder a las siguientes preguntas y explicar el razonamiento empleado
   a) ¿Cuál es el tamaño de A?
   b) ¿Cuáles son los eigenvalores de A?
   c) ¿Es A invertible?
   d) ¿Cuántos eigenespacios tiene A?
   e) ¿Qué se puede decir de las dimensiones de cada uno de los subespacios si se sabe que A es diagonalizable?

3. Sea $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3$. Para el operador lineal $P : R^3 \to R^3$ definido por $Px = \frac{< x, a >}{< a, a >} a$. Pruebe que $P^2 = P$ y encontrar
   1) $\text{Im}(P)$ y $Ker(P)$
   2) Valores y vectores propios

4. Sea $\{e_1, e_2\}$ una base en R^2. Sea $A : R^2 \to R^2$ un operador lineal tal que $Ae_1 = e_1 + ke_2$ y $Ae_2 = e_1 + e_2$ para $k \in R$. Encontrar los valores y vectores propios de A

5. Bajo qué condiciones sobre $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ la ecuación, $Ax = b$, $x \in R^2$ tiene una solución para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$