Examen de Admisión al Programa de Posgrado
Convocatoria de Ingreso 2007

Duración máxima: 3 horas.

Primera Parte: **Examen de Cálculo**

1. Sea $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$. Dar un bosquejo de la gráfica de f.

2. Sea

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   a) Demuestre que g es derivable en $\mathbb{R}$ y $g'(0) > 0$
   b) Demuestre que g no es creciente en ningún intervalo abierto que contiene al cero.

3. ¿Cuál es el valor de la derivada en el punto $x = 1$ de la función

$$f(x) = \sin\left(\int_1^{x^2} \sqrt{s^4 + 3s} ds\right)?$$

4. Intercambie el orden de integración en la siguiente integral iterada

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} f(x,y) dx dy$$

5. Demuestre que si $0 < r < 1$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Segunda Parte: **Examen de Algebra Lineal**

1. Sea $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y sean $W_1 = \{A \in V : A = A^t\}$ y $W_2 = \{A \in V : A = -A^t\}$.

a) Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios de V.

b) Pruebe que $V = W_1 \oplus W_2$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita n y sea $\alpha = \{x_1, ..., x_n\}$ una base ordenada para V. Sea P una matriz invertible de $n \times n$ con entradas $P_{ij} \in \mathbb{R}$. Defínase para $j = 1, ..., n$

$$y_j = P_{1j}x_1 + P_{2j}x_2 + ...P_{nj}x_n$$

y sea $\beta = \{y_1, ..., y_n\}$.

a) Demostrar que β es base para V.

b) Pruebe que si Q es la matriz de cambio de coordenadas que transforma coordenadas de β en coordenadas de α, entonces $Q = P$.

3. Considere el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $T(x, y) = (-2y, x + 3y)$.

a) Demuestre que T es diagonalizable y encuentre una base β tal que $[T]_\beta$ sea diagonal.

b) Si γ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, encuentre una matriz invertible Q tal que $[T]_\beta = Q^{-1}[T]_\gamma Q$.

c) Si $A = [T]_\gamma$, use b) para calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Demuestre la *Identidad de Parseval*, esto es: Si $(V, \langle \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interior y $\{x_1, ..., x_n\}$ es una base ortonormal para V, entonces para cualesquiera x, $y \in V$ se tiene que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle \overline{\langle y, x_i\rangle}.$$