Examen de Admisión al Programa de Posgrado
Convocatoria de Ingreso 2008

Duración máxima: 3 horas.

Primera Parte: **Examen de Cálculo**

1. Demuestre, sin usar la regla de L'Hospital, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2. Sea f una función par definida en una vecindad del origen. Demuestre que en la fórmula de Taylor alrededor de cero solamente se tienen las potencias pares de x.

3. Intercambie el orden de integración en la siguiente integral iterada

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)dydx$$

4. Demuestre que $3x^4 + 4x^3 + c = 0$ puede tener cuando más una raíz menor o igual a -1, sin importar cual sea el valor de c.

5. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Demuestre que este es un ejemplo de una función que es derivable en todo punto pero que tiene derivada no acotada.

Segunda Parte: **Examen de Álgebra Lineal**

1. Sea $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial cuyos elementos son las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sean V_1 y V_2 los siguientes subconjuntos: $V_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es una función par}\}$ y $V_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es una función impar}\}$. Demuestre que V_1 y V_2 son subespacios lineales de V y que $V = V_1 \oplus V_2$.

2. Sea $T : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por
$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Demuestre que T es una transformación lineal y
   b) Encontrar bases para $Ker(T)$ y $R(T)$ y determine las dimensiones de $Ker(T)$ y $R(T)$.
   c) Usando los cálculos anteriores determine si T es 1-1 o sobre.

3. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean β y γ bases ordenadas para $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Sea $B = [L_A]_\beta^\gamma$, donde $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la transformación lineal $L_A(x) = Ax$. Demuestre que $B = P^{-1}AQ$ donde P es la matriz de $m \times m$ con la columna j-ésima igual al vector j-ésimo en γ y Q es la matriz de $n \times n$ con la columna j-ésima igual al vector j-ésimo en β.

4. Considérese la matriz de entradas reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Determínense todos los valores propios de A.
   b) Para cada valor propio λ de A, encontrar el conjunto de vectores propios correspondientes a λ.
   c) De ser posible, encuéntrese una base para $\mathbb{R}^2$ compuesta por vectores propios de A.
   d) Si se tiene éxito en encontrar la base en c), determínese una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal, y calcúlese $Q^{-1}AQ$.