Examen de Admisión al Programa de Posgrado en Matemáticas

Convocatoria de Ingreso 2010

Duración máxima: 3 horas

NOMBRE:____

Primera Parte: **Cálculo**

1. Considere la función $f(x) = \frac{x^2-x+1}{2(x-1)}$, con $x \neq 1$. Determine
   (i) máximos y mínimos,
   (ii) asíntotas,
   (iii) un bosquejo de la gráfica de f.

2. Demuestre que
$$\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

3. Calcule
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{3^k} - \frac{3}{4^{k-1}} \right)$$

4. Sean $f(x,y) = xy(1-x-y)$ y $S = \{\, (x,y) \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1 \,\}$. Determine todos los puntos en S en los que f alcanza valores extremos, y determine si son máximos o mínimos.

5. Calcule el área encerrada por las curvas $x+y=2$ y $y=x^2$.

Segunda Parte: **Algebra Lineal**

1. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, determine los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Para cuáles valores de ε existe una base de $\mathbb{R}^2$ que consiste de los vectores propios de A?

2. Bajo qué condiciones sobre $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, la ecuación $Ax = b$ tiene una solución $x \in \mathbb{R}^2$, para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. (i) Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dos transformaciones lineales. Pruebe que la composición $P \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un operador lineal no invertible.

   (ii) Encuentre dos operadores lineales $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tales que $T_1 \circ T_2 = 0$, pero que $T_2 \circ T_1 \neq 0$.

4. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador de proyección

$$P(x) = < x, a > a,$$

donde $a = (1, -1, 1)$.

   (i) Encuentre la matriz asociada a la proyección P.

   (ii) Calcule el rango y el espacio nulo (kernel) de P.

   (iii) Encuentre una base para la imagen de P (Im P) y demuestre que

$$\mathbb{R}^3 = \ker P \oplus \mathrm{Im}\ P.$$

5. Sea A una matriz $n \times n$ real diagonalizable sobre $\mathbb{C}$, con $\det A = -1$. Pruebe que las siguientes matrices son diagonalizables y calcule sus determinantes,

$$A^3,\ A^{-1},\ A^T$$