Examen de Admisión al Programa de Posgrado
Convocatoria de Ingreso 2012

Primera Parte: **Examen de Álgebra Lineal**

1. Sea V un espacio vectorial y T un operador lineal en V tal que $T^2 = T$. Muestra que existen subespacios M y N de V tales que $V = M \oplus N$, T se anula en M y T restringido a N coincide con el operador identidad.

2. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z + 4w \\ x - y + 2w \\ 2x + y - z \end{pmatrix}.$$

a) Demuestra que T es suprayectiva.

b) Determina el kernel de T.

3. Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determinar el polinomio característico de A.

b) Determinar los espacios propios de A.

c) ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo, determinar la matriz de cambio de base que diagonaliza a A, así como también la matriz diagonal que es similar a A.

4. Sean V un espacio vectorial complejo no cero y de dimensión finita y $T : V \to V$ un operador lineal. Demuestra que T tiene por lo menos un valor propio.

5. Sea V un espacio vectorial no cero de dimensión finita, con un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Demuestra:

a) V tiene una base ortonormal.

b) Si φ es una funcional lineal en V, entonces existe un único vector $v \in V$ tal que $\varphi(u) = \langle u, v \rangle$ para todo $u \in V$.

Examen de Admisión al Programa de Posgrado
Convocatoria de Ingreso 2012

Segunda Parte: **Examen de Cálculo**

1. Sea f una función diferenciable en a. Calcular el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}.$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función definida como

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 6 \quad si \quad 0 < x+y+z < 1,\ x,y,z > 0 \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{otro caso} \end{cases}$$

Calcular $\displaystyle\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz.$

3. Sea f una función continua y g una función diferenciable en $\mathbb{R}$. Calcular la derivada de la función:

$$F(x) = \int\limits_0^{g(x)} f(s)ds.$$

4. Diga si cada una de la siguientes afirmaciones es verdadera o falsa y justifique su respuesta:

a) Si f es una función acotada definida en $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, entonces f alcanza su mínimo y su máximo.

b) Toda función continua definida en (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$, es acotada.

5. Encuentre para qué valores de x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge y calcular su suma.