Examen de Admisión al Programa de Posgrado en Matemáticas
Universidad de Sonora
Convocatoria de Ingreso 2016

Primera Parte: **Examen de Álgebra Lineal**

1. Falso o Verdadero (Falso: Dar contraejemplo. Verdadero: Argumentar). Si λ es eigenvalor de A y γ es eigenvalor de B
   (a) λ^2 es eigenvalor de A^2
   (b) Si $\lambda \neq 0$ y A es invertible, λ^{-1} es eigenvalor de A^{-1}
   (c) $\lambda + \gamma$ es eigenvalor de $A + B$.

2. Encuentre una base para el rango y el espacio nulo para la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Dar tres ejemplos de subespacios lineales de R^3.

4. Si B es la inversa de A^2 muestre que AB es la inversa de A.

5. Sea $\mathcal{P}_k$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que k y definamos el mapeo lineal $L : \mathcal{P}_k \to \mathcal{P}_{k+1}$ mediante $(Lp)(x) = p''(x) + xp(x)$.
   (a) Demuestre que el polinomio $q(x) = 1$ no estÃ¡ en la imagen de L. [Sugerencia: intente primero el caso $k = 2$.]
   (b) Sea $V = \{q(x) \in \mathcal{P}_{k+1} \big| q(0) = 0\}$. Demuestre que el mapeo $L : \mathcal{P}_k \to V$ es invertible. [Sugerencia: de nuevo, intente primero el caso $k = 2$.]

6. Supongamos que A es una matriz 3×3 con eigenvalores $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_2 = 1$ y eigenvectores correspondientes $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Encuentre la matriz A.
   (b) Calcule la matriz A^{34}.

Examen de Admisión al Programa de Posgrado en Matemáticas
Universidad de Sonora
Convocatoria de Ingreso 2016

Segunda Parte: **Examen de Cálculo**

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(0) = 1$, f es derivable en $x = 0$ y

$$f(x + y) = f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que f es derivable en $\mathbb{R}$ y determine $f'(x)$.

2) Demuestre o de un contraejemplo para la siguiente afirmación: Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones tales que

$$\lim_{t\to a} g(t) = b \quad \text{y} \quad \lim_{t\to b} f(t) = c,$$

entonces $\lim_{t\to a} f(g(t)) = c$.

3) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x - y)^2, & \text{si} \quad 0 \le x < y \le 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar el valor de c tal que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = 1.$$

4) (a) Demostrar que si $a > 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{a^n} = 0$$

(b) Demuestre que la sucesión (x_n) definida por

$$x_n = \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \cdots + \frac{2n}{n^2}$$

converge y determinar el valor del límite.

5) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que para a y b, números reales positivos,

$$\int_{-b/a}^{0} f(b + ax)dx = \int_{0}^{b/a} f(b - ax)dx.$$