UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Posgrado en Matemáticas

Espacios tipo Herz rectangulares y operadores promedio

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Doctora en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Carolina Espinoza Villalva

Directora de Tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, 8 de Septiembre de 2017

SINODALES

Dr. Martín Gildardo García Alvarado
Universidad de Sonora.

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida
Universidad de Sonora.

Dr. Fernando Luque Vásquez
Universidad de Sonora.

Dr. Salvador Pérez Esteva
Universidad Nacional Autónoma de México

Dr. Jorge Rivera Noriega
Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

A la niña que soñó que podría hacerlo,
a la joven que aún con miedo lo intentó,
y a la mujer que lo logró.
Nunca dudes de ti.

Agradecimientos

Gracias a Dios, por todo.

A mi familia, gracias por apoyarme durante todo este proceso, en especial a mis papás. Abel, gracias por ser mi soporte durante todo este tiempo e impulsarme a seguir adelante cada vez que lo necesité.

Agradezco profundamente a la Dra. Martha Guzmán, por todo el esfuerzo realizado para dirigir este trabajo, por sus valiosos consejos y por sembrar en mí el amor por el análisis. Gracias por creer en mí.

Quiero agradecer a mis sinodales, Dr. Martín García, Dr. Fernando Luque, Dr. Salvador Pérez Esteva y Dr. Jorge Rivera, no solo por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis, sino porque cada uno intervino de forma importante en mi formación académica.

Estoy agradecida de forma muy especial con el Departamento de Matemáticas y la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora, por todo el apoyo recibido durante la realización de mis estudios.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca de manutención recibida, sin la cual esto no habría sido posible.

Carolina Espinoza Villalva
Hermosillo, Sonora
Septiembre de 2017

Índice general

Introducción

A principios de la década de los años 30, en sus trabajos “Generalized harmonic analysis”[38] y “Tauberian theorems”[39], Norbert Wiener buscaba formas alternativas a los símbolos de Landau para describir el comportamiento de una función en infinito. Para ello consideró algunas posibilidades, entre las que destacan

1. $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx$ es acotado para T grande,
2. $\displaystyle\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^2\,dx = 0,$
3. $\displaystyle\frac{1}{T^{1-\alpha}}\int_0^T |f(x)|\,dx$ es acotado para algún $\alpha \in (0,1)$ y para toda $T > 0$.

Wiener también observó que estas condiciones se encuentran relacionadas con ciertos espacios L^p con pesos.

Casi 30 años después, Arne Beurling [3] definió un par dual de espacios de Banach, A^p y $B^{p'}$ con p y p' exponentes conjugados, con el objeto de encontrar un entorno más general donde el Teorema de Wiener-Lèvy y el Teorema de Aproximación de Wiener aún se cumplieran. El espacio A^p es actualmente llamado álgebra de Beurling y es un álgebra de Banach con respecto a la convolución que se puede expresar como la unión de espacios L^p con pesos, mientras que $B^{p'}$ puede verse como la intersección de espacios $L^{p'}$ con pesos o equivalentemente, como un espacio de funciones con promedio central de orden p' acotado. Para finales de los años sesenta, los espacios A^p definidos por A. Beurling fueron generalizados por C. Herz [29] al añadir a éstos un nuevo parámetro.

Más adelante, en [21], H. Feichtinger observó que es posible describir al espacio B^p por medio de la condición

$$\|f\|_{B^p} = \sup_{k\geq 0}\left(2^{-kn/p}\|f\chi_k\|_p\right) < \infty,$$

con χ_0 la función característica de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$ y χ_k la función característica del anillo $\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} < |x| \leq 2^k\}$ para $k \in \mathbb{N}$. Como consecuencia de esta descripción y por dualidad, fue posible describir al álgebra de Beurling A^p con la condición

$$\|f\|_{A^p} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kn/p'}\|f\chi_k\|_p < \infty.$$

Esta representación para las álgebras de Beurling evidencia la relación de éstas con los espacios de Herz clásicos. De acuerdo con la definición clásica una función medible f pertenece al espacio de Herz $K^{\alpha}_{p,q}$, $1 \leq p, q < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\|f\|_{K^{\alpha}_{p,q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{nk\alpha q}\|f\chi_k\|_p^q\right)^{1/q} < \infty, \tag{1}$$

y para $q = \infty$

$$\|f\|_{K^{\alpha}_{p,\infty}} := \sup_{k\geq 0}\left(2^{nk\alpha}\|f\chi_k\|_p\right) < \infty. \tag{2}$$

con χ_k igual que antes.

Tomando $q = 1$ y $\alpha = 1/p'$ en (1) o $\alpha = -1/p$ en (2) observamos que los espacios A^p y B^p son en realidad casos particulares de los espacios de Herz.

Utilizando la descripción de las álgebras de Beurling dada por Feichtinger, Y. Chen y K. Lau [10] y J. García-Cuerva [25] definieron un espacio de Hardy HA^p asociado al álgebra de Beurling A^p y obtuvieron una descomposición atómica para éste, los primeros en el caso de $\mathbb{R}$ con $1 < p \leq 2$, y García-Cuerva para $1 < p < \infty$ y con un método que funciona incluso para dimensiones mayores. El resultado de García-Cuerva se basó principalmente en la caracterización que obtuvo para HA^p en términos de algunas funciones maximales (Ver [25], Teorema 3.1), en particular, de la gran función maximal.

Otra caracterización del espacio de Hardy asociado a A^p dada por estos autores, consiste en una descomposición atómica, la cual permitió identificar al espacio dual de HA^p con el espacio $CMO^{p'}$, el cual se define por la condición:

$$\|f\|_{CMO^{p'}} = \sup_{R\geq 1}\left(\frac{1}{|B(0,R)|}\int_{B(0,R)}|f(x)-f_R|^{p'}dx\right)^{1/p'},$$

donde $B(0,R)$ es la bola con centro en el origen y radio R, $|B(0,R)|$ denota a su medida de Lebesgue y f_R es el promedio de f en dicha bola. Resulta evidente que tanto BMO como $B^{p'}$ son subespacios de $CMO^{p'}$, pero a diferencia de lo que sucede en BMO, tomar distintos valores para p', genera distintos espacios $CMO^{p'}$, es decir, $CMO^{p'}$ realmente depende del parámetro p'. Lo anterior fue demostrado por Chen y Lau por medio de un contraejemplo.

La importancia del resultado sobre la dualidad entre HA^p y $CMO^{p'}$ radica en que extiende el resultado de dualidad entre H^1 y BMO obtenido por C. Fefferman y E. Stein en [20]. García-Cuerva incluso fue capaz de extender la caracterización de BMO dada por Fefferman y Stein como la imagen de funciones en L^∞ bajo las transformadas de Riesz de la siguiente forma:

Teorema. *Dada $1 < p < \infty$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$g \in CMO^{p'}$.*

2. *$g = g_0 + \sum_{j=1}^n R_j g_j$, $g_0, g_1, \ldots, g_n \in B^{p'}$,*

donde $R_1, \ldots, R_n$ denotan a las transformadas de Riesz en $\mathbb{R}^n$.

En 1976, R. Coifman, R. Rochberg y G. Weiss obtuvieron una caracterización distinta para BMO en términos del conmutador de operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund. En [12], probaron que si T es un operador de esta clase, entonces $b \in BMO$ si y sólo si el conmutador generado por b y T, $[b, T]f = bT(f) - T(bf)$, es acotado en L^p. Inspirados por esta caracterización, Fu et al. [24] consiguieron caracterizar a las funciones en una versión homogénea del espacio CMO^p por medio de los conmutadores de una generalización del operador de Hardy y de su adjunto.

Recientemente, los espacios A^p, B^p, CMO^p y HA^p han sido objeto de estudio de varios autores, los cuales han buscado extender el conocimiento de sus propiedades, examinar el comportamiento de operadores clásicos del análisis armónico en ellos o estudiar versiones más generales de los mismos (ver por ejemplo [26], [2],[34]).

En este trabajo de tesis, se abordará este problema desde la persepectiva de espacios producto. El objetivo general es estudiar las propiedades de las versiones rectangulares homogéneas de los espacios A^p, HA^p, $B^{p'}$ y $CMO^{p'}$ primero en el espacio producto más sencillo, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y después en dimensiones mayores; también estamos interesados en examinar el comportamiento de operadores de tipo promedio en estos espacios y en obtener generalizaciones de los mismos al anãdir otros parámetros a su definición. Nuestro interés en el estudio de espacios producto nace de la diferencia significativa que existe entre el análisis armónico uniparamétrico y el multiparamétrico. Para ilustrar esto, demos un vistazo al comportamiento de la función maximal de Hardy-Littlewood en ambos casos: en el caso uniparamétrico, este operador se define como

$$M(f)(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se calcula sobre todos los cubos con lados paralelos a los ejes coordenados que contienen a x, y $|Q|$ denota a la medida de Lebesgue del cubo Q. Es bien sabido que este operador es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p \leq \infty$ y de tipo $(1, 1)$-

débil. Sin embargo, su versión multiparamétrica, conocida como la función maximal fuerte y definida por

$$M_S(f)(x) = \sup_R \frac{1}{|R|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde ahora el supremo se calcula sobre los rectángulos con lados paralelos a los ejes que contienen al punto x, sigue siendo continua en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p \leq \infty$ pero no es de tipo $(1,1)$-débil. Otra diferencia importante entre el análisis armónico clásico y el desarrollado en espacios producto se encuentra en la elección del tipo de conjunto que se utiliza como soporte para átomos en H^p y para medidas de Carleson. En 1974, L. Carleson [5] construyó una medida que satisface $\mu(S(R)) \leq C|R|$ para cualquier rectángulo $R = I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pero que no satisface el Teorema de encaje de Carleson:

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+} P_{t_1,t_2}(f)^p(x_1,x_2)\, d\mu < C \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x_1,x_2)|^p \, dx_1 dx_2 \qquad p > 1,$$

donde $P_{t_1,t_2}(f)$ es la integral de Poisson de f. Este ejemplo sirvió para mostrar que el espacio $BMO_{Rect}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, definido por R. Fefferman como aquel formado por las funciones que satisfacen

$$\sup_{I,J} \frac{1}{|I|} \frac{1}{|J|} \int_I \int_J |f(x_1,x_2) - f_J(x_1) - f_I(x_2) + f_{I\times J}|^2 \, dx_1 dx_2 < \infty,$$

donde $f_J(x_1)$ es el promedio de $f(x_1,\cdot)$ sobre el intervalo J, $f_I(x_2)$ es el promedio de $f(\cdot,x_2)$ sobre el intervalo I y $f_{I\times J}$ es el promedio de $f(x_1,x_2)$ sobre el rectángulo $I \times J$, no es el espacio dual de $H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, pues resulta ser demasiado grande. Lo anterior nos hace preguntarnos cuál será la descripcin adecuada para $BMO(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ de forma que el espacio que se obtenga sea el dual de $H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. La descripción de BMO en el caso radial hace natural proponer como solución al espacio $bmo(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, el cual está descrito por la condición

$$\sup_{I,J} \frac{1}{|I \times J|} \int_{I\times J} |f(x_1,x_2) - f_{I\times J}| \, dx_1 dx_2 < \infty.$$

Pero de nuevo, este espacio tampoco resulta ser apropiado por ser muy pequeño. La dificultad de identificar al espacio $BMO(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y el que los rectángulos no fueran los conjuntos más apropiados para estudiar las medidas de Carleson mantuvo el estudio de los espacios H^p producto estancado durante varios años. Otro obstáculo en el desarrollo de esta teoría fue el encontrar la descomposición atómica adecuada para $H^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. La solución a este problema fue dada entre 1980 y 1985 por S.-Y. A. Chang y R. Fefferman (ver [8] y [9]). La idea fundamental fue obtener una descomposición atómica utilizando todos los conjuntos abiertos acotados del plano en lugar de rectángulos. La definición exacta de los átomos utilizados fue la siguiente:

Definición. Sea $0 < p \leq 1$. Una función $a(x_1, x_2)$ es un $(2,p)$-átomo en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si satisface las siguientes condiciones

1. $sop(a) \subset O$, con O un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
2. a puede descomponerse de la siguiente forma
$$a = \sum_{R\in\mathcal{D}(O)} a_R,$$
donde $\mathcal{D}(O)$ es la colección de rectángulos diádicos contenidos en O y cada a_R satisface
   a) $sop(a_R) \subset 3R$,
   b) $\int_{\mathbb{R}} a_R(x_1,x_2)x_1^{k_1}\,dx_1 = 0$ para todo x_2 y $0 \leq k_1 \leq [1/p-1]$,
   c) $\int_{\mathbb{R}} a_R(x_1,x_2)x_2^{k_2}\,dx_2 = 0$ para todo x_1 y $0 \leq k_2 \leq [1/p-1]$,

   con k_1 y k_2 enteros no negativos.
3. $\|a\|_{L^2}^2 \leq |O|^{1-2/p}$ y $\sum_{R\in\mathcal{D}(O)} \|a_R\|_{L^2}^2 \leq |O|^{1-2/p}$.

Por otro lado, el problema de identificar al espacio $BMO(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ fue resuelto también por S.-Y. A. Chang y R. Fefferman por medio de la siguiente caracterización:

Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $g \in BMO(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

2. *Existen* $g_j \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $j = 0, 1, 2, 3$, *tales que*

$$g = g_0 + H_1(g_1) + H_2(g_2) + H_1H_2(g_3)$$

donde H_j, $j = 1, 2$ *es la transformada de Hilbert con respecto a la variable* x_j.

3. $d\mu(y,t) = |\nabla_1\nabla_2 u|^2 t_1t_2dydt$ *es una medida de Carleson definida en* $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$, *donde* $u = P(g)$ *es la integral de Poisson de* g.

4. $|\Psi_t * g|^2 \dfrac{dydt}{t}$ *es una medida de Carleson definida en* $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$, *donde* $\Psi(x) = \psi(x_1)\psi(x_2)$ *con* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *y* $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0$.

Lo anterior proporciona una forma sencilla de construir funciones en $BMO(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ a partir de funciones acotadas, pero mantiene abierta una interrogante fundamental: ¿cómo determinar si una función f pertenece o no al espacio $BMO(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$? La respuesta a esta pregunta fue proporcionada por S. H. Ferguson y M. Lacey en [22] al considerar ahora un conmutador anidado de f con dos transformadas de Hilbert unidimensionales.

En la búsqueda del espacio $BMO(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ adecuado, es decir, aquel que fuera el dual de $H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, los espacios $BMO_{rect}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ y $bmo(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ fueron desestimados por no poseer tan valiosa propiedad, sin embargo ambos espacios poseen características interesantes para analizar. Por ejemplo, $BMO_{Rect}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ admite una descomposición atómica rectangular y es posible describirlo por medio de medidas de Carleson definidas en rectángulos. Por otro lado, el espacio $bmo(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ se encuentra estrechamente relacionado con la clase A_p^* de pesos en espacios producto y es posible caracterizarlo de la siguiente forma ([13],[23]): $f \in bmo(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ si y sólo si $[f, H_1H_2]$ es acotado en $L^2(\mathbb{R}^2)$, con H_i la transformada de Hilbert unidimensional actuando sobre la i-ésima coordenada (si se desea profundizar más sobre el desarrollo histórico de la teoría del espacio BMO en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y sobre su relación con medidas de Carleson, descomposiciones atómicas y operadores conmutadores en $\mathbb{R}^n$ sugerimos consultar [7]).

Motivados por lo anterior, en este trabajo decidimos optar por una definición de átomo más cercana a la definición clásica, en lugar de aquella considerada por S.-Y. A. Chang y R. Fefferman. Esto dio como resultado que al calcular el dual del espacio de Hardy asociado a la versión rectangular de A^p se obtuviera un espacio más parecido a $bmo(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ que al espacio $BMO(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Este trabajo consta de tres capítulos organizados de la siguiente manera: en el primer capítulo introducimos las versiones rectangulares homogéneas de las álgebras de Beurling A^p y $B^{p'}$ definidas en $\mathbb{R}^2$ y comentamos algunas de sus propiedades básicas. Enseguida, definimos el espacio de Hardy atómico asociado a nuestra álgebra de Beurling e identificamos su dual con el espacio de funciones con oscilación promedio central rectangular de orden p' acotada.

En el segundo capítulo, extendemos la definición de nuestros espacios a dimensiones mayores y examinamos el comportamiento de operadores de tipo promedio tales como operadores promedio de Hardy-Littlewood con peso y el operador de Hardy rectangular n-dimensional en ellos. Posteriormente establecemos un resultado de continuidad en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para el conmutador de funciones con oscilación promedio central rectangular de orden p acotada y el operador de Hardy rectangular n-dimensional.

Finalmente, en el tercer capítulo añadimos un parámetro a nuestros espacios para obtener versiones rectangulares homogéneas de los espacios de Morrey-Campanato y analizamos la acción del operador de Hardy rectangular n-dimensional en nuestros nuevos espacios. En este capítulo también consideramos el problema de la continuidad en un espacio de Morrey rectangular del conmutador de una función en un espacio de Campanato rectangular y el operador de Hardy rectangular n-dimensional. Cerramos este capítulo inspeccionando el comportamiento del operador de Hausdorff en una clase distinta de espacios denotados por Q_α y definidos incialmente por M. Essén et al. en [19].

A pesar de que la notación utilizada a lo largo de este trabajo es estándar, es importante hacer algunas aclaraciones sobre ella. Los símbolos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}_0$ denotan a los conjuntos de los número enteros, enteros positivos y enteros no negativos respectivamente. Como es usual, C_c, C_c^∞, L^p y L^∞ indican a los espacios clásicos de funciones definidas en $\mathbb{R}^n$, y cuando sea necesario aclarar el dominio en el cual estamos trabajando escribieremos $C_c(E)$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ o $L^p(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos por $\|\cdot\|_p$ a la norma en el espacio L^p y por $\|T\|_{X\to Y}$ a la norma de una transformación lineal T entre los espacios vectoriales normados X y Y. Si E es un conjunto Lebesgue medible, escribiremos $|E|$ para denotar su medida de Lebesgue. Por último, adoptaremos la convención de denotar por C a una constante que podría ir cambiando renglón tras renglón y cuando esta constante dependa de uno o más parámetros que deseamos enfatizar, agregaremos subíndices a la constante como C_n o $C_{n,p}$.

Por último, vale la pena mencionar que los resultados presentados a lo largo del primer capítulo se encuentran publicados en [16]. En [18] y [17] pueden encontrarse los resultados correspondientes al capítulo 2 y a la sección 3.2 y el contenido de la sección 3.1 conforma un breve manuscrito que actualmente se encuentra sometido para su publicación [15].

Capítulo 1

Espacios de Herz rectangulares

En la primera sección de este capítulo, presentaremos las versiones rectangulares homogéneas en el plano de los espacios A^p y $B^{p'}$ estudiados por García-Cuerva en [25] y probaremos algunas de sus propiedades básicas. En la segunda sección definiremos la clase de átomos que nos permitirán construir un espacio de Hardy atómico asociado a la versión rectangular de A^p estudiada en la sección previa e identificaremos su dual con el espacio de funciones con oscilación promedio rectangular acotada.

1.1. Propiedades básicas de los espacios de Herz rectangulares

En el caso clásico, al considerar funciones en un espacio de Herz, observamos su comportamiento en conjuntos definidos radialmente, para ser exactos, en anillos diádicos centrados en el origen. En el caso producto, los conjuntos que consideraremos para definir los espacios estarán dados por dos parámetros:

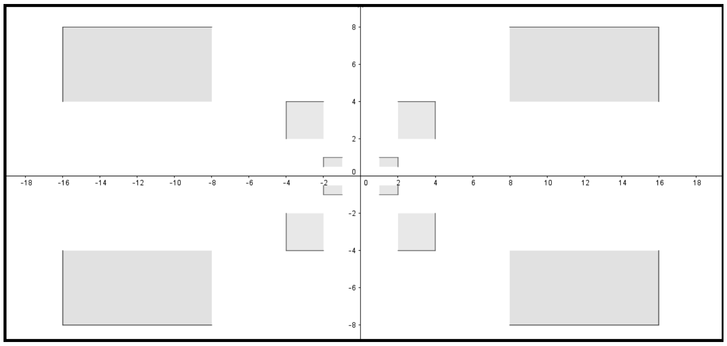

Figura 1.1: Conjuntos $C_{4,3}$ en azul, $C_{2,2}$ en verde y $C_{1,0}$ en rojo.

Para cada par de números enteros j_1 y j_2, consideremos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$$C_{j_1,j_2} = C_{j_1} \times C_{j_2},$$

donde $C_j = \{x \in \mathbb{R} : 2^{j-1} < |x| \leq 2^j\}$ y denotemos por χ_{j_1,j_2} a su función característica. Observemos que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j_1=-\infty}^{\infty} \bigcup_{j_2=-\infty}^{\infty} C_{j_1,j_2}.$$

Definiremos ahora los espacios que estudiaremos.

Definición 1.1. Sea $1 < p < \infty$ y denotemos por p' al exponente conjugado de p. Llamaremos $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ al espacio que consiste de todas las funciones $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ para las cuales

$$\sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} 2^{(j_1+j_2)/p'} \left\| f\chi_{j_1,j_2} \right\|_p < \infty. \tag{1.1}$$

Un cálculo estándar permite mostrar que la expresión del lado izquierdo en (1.1) define una norma en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ que lo convierte en un espacio de Banach. Denotaremos dicha norma con el símbolo $\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{A}}^p}$. También es sencillo comprobar que si $1 < p_1 \leq p_2 < \infty$, se satisface que $\dot{\mathcal{A}}^{p_2}(\mathbb{R}^2) \subset \dot{\mathcal{A}}^{p_1}(\mathbb{R}^2) \subset L^1(\mathbb{R}^2)$.

Observación. Cualquier función f que pertenece al espacio clásico $\dot{A}^p(\mathbb{R}^2)$, también pertenece a $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$.

En efecto, dada $f \in \dot{A}^p(\mathbb{R}^2)$, sabemos que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{2j/p'} \|f\chi_j\|_p < \infty,$$

donde χ_j denota a la función característica del conjunto

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2^{j-1} < |x| \leq 2^j\}.$$

Observemos ahora que si denotamos por j al máximo entre j_1 y j_2, el conjunto C_{j_1,j_2} se encuentra contenido en $E_j \cup E_{j+1}$. Lo anterior se debe a que si $(x_1, x_2) \in C_{j_1,j_2}$, claramente $x_1^2 + x_2^2 > 2^{2(j-1)}$ y dado que $2^{j_i-1} < |x_i| \leq 2^{j_i}$ para $i = 1, 2$, también se tiene

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2^{2j_1} + 2^{2j_2} \leq 2^{2(j+1)}.$$

Para estimar la norma de f en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ notemos que para cada $N \in \mathbb{N}$ se satisfacen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\sum_{j_1=-N}^{N}\sum_{j_2=-N}^{N} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p &\leq \sum_{j_1=-N}^{N} 2 \sum_{j_2=-N}^{j_1} 2^{(j_1+j_2)/p'} \left(\|f\chi_{j_1}\|_p + \|f\chi_{j_1+1}\|_p\right) \\
&= \sum_{j_1=-N}^{0} 2 \sum_{j_2=-N}^{j_1} 2^{(j_1+j_2)/p'} \left(\|f\chi_{j_1}\|_p + \|f\chi_{j_1+1}\|_p\right) \\
&+ \sum_{j_1=1}^{N} 2 \sum_{j_2=-N}^{j_1} 2^{(j_1+j_2)/p'} \left(\|f\chi_{j_1}\|_p + \|f\chi_{j_1+1}\|_p\right) \\
&= S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Para S_1 observemos que

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{j_1=-N}^{0} 2 \cdot 2^{j_1/p'} \left(\|f\chi_{j_1}\|_p + \|f\chi_{j_1+1}\|_p\right) \sum_{j_2=-j_1}^{N} 2^{-j_2/p'} \\
&= \sum_{j_1=-N}^{0} 2 \cdot 2^{j_1/p'} \left(\frac{2^{j_1/p'} - 2^{-(N+1)/p'}}{1 - 2^{-1/p'}}\right) \left(\|f\chi_{j_1}\|_p + \|f\chi_{j_1+1}\|_p\right) \\
&\leq \sum_{j_1=-N}^{0} 2 \cdot \left(\frac{2^{2j_1/p'}}{1 - 2^{-1/p'}}\right) \left(\|f\chi_{j_1}\|_p + \|f\chi_{j_1+1}\|_p\right).
\end{aligned}$$

Del mismo modo, para S_2 tenemos

$$S_2 \leq \sum_{j_1=1}^{N} 2 \cdot \left(\frac{2^{2j_1/p'}}{1-2^{-1/p'}} \right) \left(\|f\chi_{j_1}\|_p + \|f\chi_{j_1+1}\|_p \right).$$

Con las estimaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=-N}^{N} \sum_{j_2=-N}^{N} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p &\leq \frac{2}{1-2^{-1/p'}} \sum_{j_1=-N}^{N} 2^{2j_1/p'} \left(\|f\chi_{j_1}\|_p + \|f\chi_{j_1+1}\|_p \right) \\ &\leq \frac{2(1+2^{-2/p'})}{1-2^{-1/p'}} \sum_{j_1=-(N+1)}^{N+1} 2^{2j_1/p'} \|f\chi_{j_1}\|_p \\ &\leq \frac{2(1+2^{-2/p'})}{1-2^{-1/p'}} \|f\|_{\dot{A}^p}. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo N tender a infinito concluimos que

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{A}}^p} \leq \frac{2+2^{-2/p'}}{1-2^{-1/p'}} \|f\|_{\dot{A}^p}.$$

Definición 1.2. Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$ consiste de todas las funciones $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ tales que

$$\sup_{\substack{R_j>0 \\ j=1,2}} \left[\frac{1}{4R_1R_2} \int_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |f(x_1,x_2)|^p \, dx_1 \, dx_2 \right]^{1/p} < \infty. \tag{1.2}$$

Denotaremos la expresión del lado izquierdo de (1.2) por $\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}$. Alternativamente podemos definir

$$\|f\|^*_{\dot{\mathcal{B}}^p} = \sup_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}} 2^{-(j_1+j_2)/p} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p. \tag{1.3}$$

Veamos que es posible describir al espacio $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$ en términos del comportamiento de sus funciones en los conjuntos C_{j_1,j_2} por medio de (1.3).

Proposición 1.1. *Una función f pertenece al espacio $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$ si y sólo si*

$$\|f\|^*_{\dot{\mathcal{B}}^p} = \sup_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}} 2^{-(j_1+j_2)/p} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p < \infty.$$

Más aún, $\|f\|^*_{\dot{\mathcal{B}}^p}$ y $\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}$ son comparables.

Demostración. Fijemos $f \in \dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$. Para cualquier par de números enteros j_1 y j_2 tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\chi_{j_1,j_2}\|_p^p &= \int\limits_{C_{j_1,j_2}} |f(x_1,x_2)|^p\, dx_1\, dx_2 \\
&\leq \int\limits_{[-2^{j_1},2^{j_1}]\times[-2^{j_2},2^{j_2}]} |f(x_1,x_2)|^p\, dx_1\, dx_2 \\
&\leq 2^2 \cdot 2^{j_1+j_2} \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}^p .
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}^* = \sup_{j_1 j_2 \in \mathbb{Z}} 2^{-(j_1+j_2)/p} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p \leq 2^{2/p} \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}.$$

Supongamos ahora que el supremo en (1.3) es finito. Para cada par de números positivos R_1 y R_2 podemos encontrar enteros k_1 y k_2 tales que $2^{k_i-1} < R_i \leq 2^{k_i}$ para $i = 1, 2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |f(x_1,x_2)|^p\, dx_1\, dx_2 &\leq \sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \sum_{j_2=-\infty}^{k_2} \int\limits_{C_{j_1,j_2}} |f(x_1,x_2)|^p\, dx_1\, dx_2 \\
&\leq \sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \sum_{j_2=-\infty}^{k_2} 2^{j_1+j_2} (\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}^*)^p \\
&\leq 2^{k_1+k_2+2} (\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}^*)^p \\
&\leq (4R_1R_2)(\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}^*)^p .
\end{aligned}$$

Consecuentemente $\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p} \leq \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}^*$. ■

Es fácil verificar que tanto $\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}$ como $\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}^*$ definen una norma en $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$. Más aún, mediante un cálculo sencillo, es posible mostrar que $(\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}^*)$ es un espacio de Banach, y puesto que $\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}$ y $\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}^*$ inducen la misma topología en $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$, también $(\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_{\dot{\mathcal{B}}^p})$ es un espacio de Banach.

A continuación, examinaremos qué relación de contención existe entre el espacio clásico $\dot{B}^p(\mathbb{R}^2)$ y el espacio rectangular $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$ que acabamos de definir.

Proposición 1.2. *El espacio $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$ es un subespacio de $\dot{B}^p(\mathbb{R}^2)$.*

Demostración. Fijemos $f \in \dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$. Queremos mostrar que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-2j/p}\|f\chi_j\|_p < \infty,$$

donde χ_j denota a la función característica del conjunto $E_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2^{j-1} < |x| \leq 2^j\}$.

Nótese que para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos la siguiente contención

$$E_j \subset \left(\bigcup_{j_1=-\infty}^{j} \bigcup_{j_2=-\infty}^{j} C_{j_1,j_2}\right) \bigcap \left(\bigcup_{j_1=-\infty}^{j-2} \bigcup_{j_2=-\infty}^{j-2} C_{j_1,j_2}\right)^c,$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
\left(\int_{E_j} |f(x_1,x_2)|^p \, dx_1 \, dx_2\right)^{1/p} &\leq \sum_{j_1=j-1}^{j} \sum_{j_2=-\infty}^{j} \left(\int_{C_{j_1,j_2}} |f(x_1,x_2)|^p \, dx_1 \, dx_2\right)^{1/p} \\
&+ \sum_{j_2=j-1}^{j} \sum_{j_1=-\infty}^{j} \left(\int_{C_{j_1,j_2}} |f(x_1,x_2)|^p \, dx_1 \, dx_2\right)^{1/p} \\
&\leq \sum_{j_1=j-1}^{j} \sum_{j_2=-\infty}^{j} 2^{\frac{j_1+j_2}{p}} \|f\|^*_{\dot{\mathcal{B}}^p} + \sum_{j_1=j-1}^{j} \sum_{j_2=-\infty}^{j} 2^{\frac{j_1+j_2}{p}} \|f\|^*_{\dot{\mathcal{B}}^p} \\
&\leq 2 \cdot 2^{2j/p} \frac{2^{1/p}+1}{2^{1/p}-1} \|f\|^*_{\dot{\mathcal{B}}^p} \\
&\leq 2 \cdot 4 \cdot 2^{2j/p} \frac{2^{1/p}+1}{2^{1/p}-1} \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}.
\end{aligned}$$

Con lo que finalmente obtenemos

$$\|f\|_{\dot{B}^p} \leq 8 \cdot \frac{2^{1/p}+1}{2^{1/p}-1} \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}.$$

■

Nuestro siguiente objetivo es mostrar la densidad del espacio de funciones suaves con soporte compacto en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$, lo cual será de gran utilidad más adelante.

Proposición 1.3. *El espacio* $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ *es un subespacio denso de* $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ *para todo* $1 < p < \infty$.

Demostración. Sea $f \in \dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ y tomemos $\epsilon > 0$. Dado que

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{A}}^p} = \lim_{\substack{k_1\to\infty \\ k_2\to\infty}} \sum_{j_1=-k_1}^{k_1} \sum_{j_2=-k_2}^{k_2} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p,$$

podemos elegir números naturales K_1 y K_2 tales que

$$\left| \sum_{j_1=-K_1}^{K_1} \sum_{j_2=-K_2}^{K_2} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p - \|f\|_{\dot{\mathcal{A}}^p} \right| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Como consecuencia

$$S_1^- = \sum_{j_1=-\infty}^{-(K_1+1)} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p < \frac{\epsilon}{5}$$

$$S_1^+ = \sum_{j_1=K_1+1}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p < \frac{\epsilon}{5}$$

$$S_2^- = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-(K_2+1)}^{\infty} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p < \frac{\epsilon}{5}$$

$$S_2^+ = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=K_2+1}^{\infty} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p < \frac{\epsilon}{5}.$$

Puesto que $f\chi_{j_1,j_2} \in L^p(C_{j_1,j_2})$ y $C_c^\infty(C_{j_1,j_2})$ es denso en $L^p(C_{j_1,j_2})$, para cada par de índices j_1 y j_2 con $-K_1 \le j_1 \le K_1$ y $-K_2 \le j_2 \le K_2$, podemos elegir una función $g_{j_1,j_2} \in C_c^\infty(C_{j_1,j_2})$ con la siguiente propiedad:

$$\|f\chi_{j_1,j_2} - g_{j_1,j_2}\|_p < \frac{\epsilon}{5 \cdot 2^{(j_1+j_2)/p'}(2K_1+1)(2K_2+1)}.$$

Definiendo

$$g = \sum_{j_1=-K_1}^{K_1} \sum_{j_2=-K_2}^{K_2} g_{j_1,j_2}$$

obtenemos una función suave con soporte compacto y tal que

$$\|f-g\|_{\dot{\mathcal{A}}^p} = S_1^+ + S_1^- + S_2^+ + S_2^- + \sum_{j_1=-K_1}^{K_1} \sum_{j_2=-K_2}^{K_2} 2^{(j_2+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2} - g_{j_1,j_2}\|_p$$

$$< \frac{4\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5}.$$

■

El siguiente resultado de dualidad será demostrado haciendo uso de la densidad que acabamos de probar.

Teorema 1.4. *Sea $1 < p < \infty$ y denotemos por p' al exponente conjugado de p. Entonces $(\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2))^* = \dot{\mathcal{B}}^{p'}(\mathbb{R}^2)$ en el siguiente sentido:*

Para cada $g \in \dot{\mathcal{B}}^{p'}(\mathbb{R}^2)$, el funcional lineal Λ_g definido como

$$\Lambda_g(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

es continuo en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ y su norma en $(\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2))^*$ satisface $\|\Lambda_g\| \leq 4\|g\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p'}}$. Recíprocamente, dado $\Lambda \in (\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2))^*$, existe una única función $g \in \dot{\mathcal{B}}^{p'}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\Lambda = \Lambda_g$. Más aún, $\|g\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p'}} \leq \|\Lambda\|$.

Demostración. Fijemos $g \in \dot{\mathcal{B}}^{p'}(\mathbb{R}^2)$. Dada $f \in \dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ suave con soporte compacto, sean k_1 y k_2 los enteros más pequeños que satisfacen que $sop(f) \subset [-2^{k_1}, 2^{k_1}] \times [-2^{k_2}, 2^{k_2}]$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\Lambda_g(f)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \right| \\
&= \left| \int_{[-2^{k_1}, 2^{k_1}] \times [-2^{k_2}, 2^{k_2}]} f(x_1, x_2) g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \right| \\
&= \left| \sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \sum_{j_2=-\infty}^{k_2} \int_{C_{j_1, j_2}} f(x_1, x_2) g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \right| \\
&\leq \sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \sum_{j_2=-\infty}^{k_2} \int_{C_{j_1, j_2}} |f(x_1, x_2)||g(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \sum_{j_2=-\infty}^{k_2} 2^{-(j_1+j_2)/p'} \|g\chi_{j_1,j_2}\|_{p'} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p \\
&\leq \|g\|^*_{\dot{\mathcal{B}}^{p'}} \|f\|_{\dot{\mathcal{A}}^p} \\
&\leq \|g\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p'}} \|f\|_{\dot{\mathcal{A}}^p}.
\end{aligned}$$

Por lo anterior, tenemos que Λ_g es un funcional lineal continuo en el subespacio formado por las funciones suaves con soporte compacto, cuya norma es menor o igual que la norma de g en $\dot{\mathcal{B}}^{p'}(\mathbb{R}^2)$. Dado que $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ es denso en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$, Λ_g se puede extender de forma única a un funcional lineal continuo en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$, el cual seguiremos denotando de la misma forma y que satisface $\|\Lambda_g\| \leq \|g\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p'}}$.

Para el recíproco, primero notemos que para cada par de índices j_1 y j_2, $L^p(C_{j_1,j_2})$ se encuentra continuamente incluido en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ con

$$\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{A}}^p} = 2^{(j_1+j_2)/p'} \|\cdot\|_{L^p(C_{j_1,j_2})}.$$

En este sentido, cualquier $\Lambda \in (\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2))^*$ induce un funcional lineal continuo en $L^p(C_{j_1,j_2})$ cuya norma en $(L^p(C_{j_1,j_2}))^*$ está mayorada por $2^{(j_1+j_2)/p'}\|\Lambda\|$. Lo anterior junto con la dualidad entre $L^p(C_{j_1,j_2})$ y $L^{p'}(C_{j_1,j_2})$ da como resultado la existencia de una función $g_{j_1,j_2} \in L^{p'}(C_{j_1,j_2})$ con norma menor o igual que $2^{(j_1+j_2)/p'}\|\Lambda\|$, tal que

$$\Lambda(f) = \int_{C_{j_1,j_2}} f(x_1,x_2) g_{j_1,j_2}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$$

para toda $f \in L^p(C_{j_1,j_2})$. Definamos ahora

$$g = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} g_{j_1,j_2}\chi_{j_1,j_2}.$$

Claramente $g \in \dot{\mathcal{B}}^{p'}$ y $\|g\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p'}} \leq \|\Lambda\|$. Además, un cálculo bastante sencillo muestra que para cualquier función f suave con soporte compacto se satisface $\Lambda(f) = \Lambda_g(f)$, de modo que de nuevo por la densidad de $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ concluimos que $\Lambda = \Lambda_g$. ■

Como consecuencia obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.5. *Sea* $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$*. Entonces* $f \in \dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ *si y solo si*

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \right| < \infty \tag{1.4}$$

para cada $g \in \dot{\mathcal{B}}^{p'}(\mathbb{R}^2)$*. En este caso,*

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{A}}^p} = \sup \left\{ \left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \right| : \|g\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p'}} \leq 1 \right\}.$$

Demostración. Cuando $f \in \dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$, el resultado se sigue inmediatamente del teorema anterior y del Teorema de Hahn-Banach.

Tomemos ahora $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ tal que (1.4) se satisface siempre que $g \in \dot{\mathcal{B}}^{p'}(\mathbb{R}^2)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f \geq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos Λ_n en $\dot{\mathcal{B}}^{p'}(\mathbb{R}^2)$ como

$$\Lambda_n(g) = \sum_{j_1=-n}^{n} \sum_{j_2=-n}^{n} \int\limits_{C_{j_1,j_2}} f(x_1, x_2) g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Es fácil ver que

$$\|\Lambda_n\| = \sum_{j_1=-n}^{n} \sum_{j_2=-n}^{n} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p.$$

Además, si fijamos $g \in \dot{\mathcal{B}}^{p'}(\mathbb{R}^2)$, para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} |\Lambda_n(g)| &= |\Lambda_n(g^+) - \Lambda_n(g^-)| \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) g^+(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) g^-(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

donde $g^+(x_1, x_2) = \text{máx}\{g(x_1, x_2), 0\}$ y $g^-(x_1, x_2) = \text{máx}\{-g(x_1, x_2), 0\}$. Lo anterior garantiza que la familia de funcionales lineales continuos $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está puntualmente acotada y como consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus, $\sup\{\|\Lambda_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ es finito. Así

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j_1=-n}^{n} \sum_{j_2=-n}^{n} 2^{(j_1+j_2)/p'} \|f\chi_{j_1,j_2}\|_p = \sup\{\|\Lambda_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

de modo que $f \in \dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$. ■

1.2. Átomos y oscilación promedio central rectangular

En esta sección construiremos un espacio de Hardy atómico asociado a $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ y nuestro objetivo principal es identificar al dual de éste. Con tal fin, definiremos el tipo de átomos con los cuales realizaremos esta construcción e introduciremos al espacio de funciones con oscilación media central rectangular acotada.

Definición 1.3. Sea $1 < p < \infty$. Un $(1, p)$-átomo central rectangular es una función $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuyo soporte está contenido en un rectángulo $[-R_1, R_1] \times [-R_2, R_2]$, que satisface las siguientes condiciones

1. $$\left[\frac{1}{4R_1R_2} \int\limits_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |a(x_1, x_2)|^p \, dx_1 \, dx_2\right]^{1/p} \leq \frac{1}{4R_1R_2}.$$

2. $$\int\limits_{\mathbb{R}^2} a(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = 0.$$

Observación. En la definición anterior podemos considerar el rectángulo centrado en el origen con lados paralelos a los ejes coordenados más pequeño que contenga al soporte de a.

En efecto, si la condición 1 se satisface para algún rectángulo $[-R_1, R_1] \times [-R_2, R_2]$ que contiene al soporte de a y $[-\tilde{R}_1, \tilde{R}_1] \times [-\tilde{R}_2, \tilde{R}_2]$ es cualquier otro rectángulo con $\tilde{R}_1 \leq R_1$ y $\tilde{R}_2 \leq R_2$ que también contiene al soporte de a, entonces

$$\begin{aligned}
\left[\int\limits_{[-\tilde{R}_1,\tilde{R}_1]\times[-\tilde{R}_2,\tilde{R}_2]} |a(x_1, x_2)|^p \, dx_1 \, dx_2\right]^{1/p} &\leq \left[\int\limits_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |a(x_1, x_2)|^p \, dx_1 \, dx_2\right]^{1/p} \\
&\leq \frac{1}{(4R_1R_2)^{1-1/p}} \\
&\leq \frac{1}{(4\tilde{R}_1\tilde{R}_2)^{1-1/p}}.
\end{aligned}$$

Otra observación importante es que todos los $(1,p)$-átomos centrales rectangulares se encuentran contenidos en una bola cerrada en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$: supongamos que $sop(a) \subset [-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]$ y tomemos k_1 y k_2 tales que $2^{k_1-1} < R_1 \leq 2^{k_1}$ y $2^{k_2-1} < R_1 \leq 2^{k_2}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\dot{\mathcal{A}}^p} &= \sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\sum_{j_2=-\infty}^{\infty} 2^{(j_1+j_2)/p'}\|a\chi_{j_1,j_2}\|_p \\
&= \sum_{j_1=-\infty}^{k_1}\sum_{j_2=-\infty}^{k_2} 2^{(j_1+j_2)/p'}\|a\chi_{j_1,j_2}\|_p \\
&\leq \left(\int_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |a(x_1,x_2)|^p\,dx_1\,dx_2\right)^{1/p} \sum_{j_1=-\infty}^{k_1}\sum_{j_2=-\infty}^{k_2} 2^{(j_1+j_2)/p'} \\
&\leq C(4R_1R_2)^{\frac{1}{p}-1}2^{(k_1+k_2)/p'} \\
&\leq C(2^{k_1+k_2})^{\frac{1}{p}-1}2^{(k_1+k_2)/p'} \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

con C una constante que depende de p, pero no de a.

Ahora estamos listos para definir nuestro espacio de Hardy.

Definición 1.4. Sea $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Decimos que f pertenece a $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ si existe una sucesión de $(1,p)$-átomos centrales rectangulares (a_j) y una sucesión de números reales (λ_j) tales que $\sum|\lambda_j| < \infty$ y $f = \sum \lambda_j a_j$ en $L^1(\mathbb{R}^2)$.

La condición que define a $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ también nos permite definir una norma en dicho espacio de la siguiente manera: si $f \in H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ escribimos

$$\|f\|_{H\dot{\mathcal{A}}^p} = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j| : f = \sum \lambda_j a_j\right\}.$$

donde el ínfimo se calcula sobre todas las descomposiciones atómicas posibles de f. No es difícil demostrar que la norma definida previamente es, en efecto, una norma en $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ y que además, hace de éste un espacio de Banach continuamente incluido en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$. De hecho, en general cualquier espacio atómico construido de esta forma y dotado con una norma atómica como la que acabamos de definir es un espacio de Banach (Ver por ejemplo [1]).

A continuación presentaremos al espacio de funciones con oscilación promedio central rectangular acotada y discutiremos su relación con $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$.

Definición 1.5. Para $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^2) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2) : \|f\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p} = \sup_{\substack{R_j>0\\ j=1,2}} \left[\frac{1}{4R_1R_2} \int\limits_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |f(x_1,x_2) - f_{R_1,R_2}|^p \, dx_1 \, dx_2\right]^{1/p},$$

y f_{R_1,R_2} es el promedio de f en $[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]$.

No es difícil probar que $(\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p})$ es un espacio de Banach después de identificar funciones que difieren por una constante casi en todas partes. Además, es posible verificar que una función f pertenece a $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^2)$ si y solo si

$$\sup_{\substack{R_j>0\\ j=1,2}} \inf_{a\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{4R_1R_2} \int\limits_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |f(x_1,x_2) - a|^p \, dx_1 \, dx_2\right]^{1/p} < \infty. \tag{1.5}$$

De hecho, el supremo en (1.5) define una norma en $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^2)$ comparable con $\|f\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p}$. Claramente $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^2)$ continuamente para $1 < p < \infty$, mientras que $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^2)$ es un subespacio del espacio $C\dot{M}O^p(\mathbb{R}^2)$ clásico estudiado en [10] y [25]. Además, para $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ se tiene la inclusión $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p_2}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p_1}(\mathbb{R}^2)$.

Mostraremos ahora que toda función en $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p'}(\mathbb{R}^2)$ induce un funcional lineal continuo en $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ siempre que $p > 1$ y p' sea el exponente conjugado de p. De hecho, todo funcional lineal continuo en $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ está inducido por una función en $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p'}(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 1.6. *Sea* $1 < p < \infty$ *y denotemos por* p' *a su exponente conjugado. Dada* $g \in \mathcal{C\dot{M}O}^{p'}(\mathbb{R}^2)$*, el funcional* Λ_g *definido sobre las funciones de soporte compacto como*

$$\Lambda_g(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

se extiende de forma única a un funcional lineal continuo $\Lambda_g \in (H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2))^*$ *cuya norma en* $(H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2))^*$ *satisface* $\|\Lambda_g\| \leq C\|g\|_{\mathcal{C\dot{M}O}^{p'}}$.

Recíprocamente, dado $\Lambda \in (H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2))^*$*, existe una función* $g \in \mathcal{C\dot{M}O}^{p'}(\mathbb{R}^2)$*, única salvo constantes, tal que* $\Lambda = \Lambda_g$*. Más aún,* $\|g\|_{\mathcal{C\dot{M}O}^{p'}} \leq C\|\Lambda_g\|$.

Demostración. Fijemos $g \in \mathcal{C\dot{M}O}^{p'}(\mathbb{R}^2)$. Si a es un $(1, p)$-átomo central rectangular soportado en $[-R_1, R_1] \times [-R_2, R_2]$, entonces

$$\begin{aligned}
|\Lambda_g(a)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} a(x_1, x_2)g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \right| \\
&= \left| \int_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} a(x_1, x_2)g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \right| \\
&= \left| \int_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} a(x_1, x_2)(g(x_1, x_2) - g_{R_1,R_2})\, dx_1\, dx_2 \right| \\
&\leq 4R_1R_2 \left[\frac{1}{4R_1R_2} \int_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |a(x_1, x_2)|^p\, dx_1\, dx_2 \right]^{1/p} \\
&\quad \times \left[\frac{1}{4R_1R_2} \int_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |g(x_1, x_2) - g_{R_1,R_2}|^{p'}\, dx_1\, dx_2 \right]^{1/p'} \\
&\leq \|g\|_{\mathcal{C\dot{M}O}^{p'}}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si $f \in H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ y tiene soporte compacto, podemos escribir

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j, \tag{1.6}$$

donde las funciones a_j son $(1,p)$-átomos rectangulares, todos soportados en un rectángulo fijo $[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\le C\|f\|_{H\dot{\mathcal{A}}^p}.$$

La desigualdad anterior asegura que la serie en (1.6) converge absolutamente en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ y por tanto converge en $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$. Notemos que la serie también converge en $L^p([-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2])$ y puesto que $g\in L^{p'}([-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2])$, tenemos que

$$\Lambda_g(f)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\Lambda_g(a_j),$$

de donde se sigue que

$$|\Lambda_g(f)|\le C\|g\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p'}}\|f\|_{H\dot{\mathcal{A}}^p}.$$

Notemos que la clase de funciones con soporte compacto en $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ incluye al subespacio formado por las combinaciones lineales de $(1,p)$-átomos centrales rectangulares y éste último es denso en $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$. Como consecuencia, Λ_g se puede extender continuamente a un funcional lineal (que denotaremos de la misma forma) $\Lambda_g\in(H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2))^*$ que satisface $\|\Lambda_g\|\le C\|g\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p'}}$.

Hasta aquí, hemos demostrado que toda función en $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p'}(\mathbb{R}^2)$ induce un funcional lineal continuo en $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$. Veamos ahora que todo funcional lineal continuo en $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ proviene de una función en $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p'}(\mathbb{R}^2)$.

Tomemos $\Lambda\in(H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2))^*$ y fijemos $R_1>0$ y $R_2>0$. Consideremos el espacio $L_0^p([-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2])$ definido como

$$\left\{f\in L^p\left([-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]\right):\quad\int_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]}f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=0\right\}.$$

Claramente, $L_0^p([-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2])$ está continuamente incluido en $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$ con $\|\cdot\|_{H\dot{\mathcal{A}}^p}\le(4R_1R_2)^{1/p'}\|\cdot\|_p$. De la dualidad entre L^p y $L^{p'}$ y el comentario previo obtenemos una función $f \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ que nos permite representar a Λ en el espacio de funciones con soporte compacto y promedio cero como

$$\Lambda(h) = \Lambda_g(h) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2) h(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Veamos ahora que g pertenece a $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p'}(\mathbb{R}^2)$. Dados $R_1, R_2 > 0$, la integral

$$\left[\int_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |g(x_1,x_2) - g_{R_1,R_2}|^{p'}\, dx_1\, dx_2 \right]^{1/p'}$$

es igual a

$$\sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^2} (g(x_1,x_2) - g_{R_1,R_2}) h(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 \right| : \|h\|_{L^p([-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2])} = 1 \right\}.$$

Pero

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} (g(x_1,x_2) - g_{R_1,R_2}) h(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} g(x_1,x_2)(h(x_1,x_2) - h_{R_1,R_2})\, dx_1\, dx_2 \\
&= \Lambda_g(h - h_{R_1,R_2}) \\
&= \Lambda(h - h_{R_1,R_2}),
\end{aligned}$$

y puesto que $\|h - h_{R_1,R_2}\|_{H\dot{\mathcal{A}}^p} \leq C(4R_1R_2)^{1/p'}$, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{[-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2]} |g(x_1,x_2) - g_{R_1,R_2}|^{p'}\, dx_1\, dx_2 \right]^{1/p'} \\
&\leq \sup \left\{ |\Lambda(h)| : \|h\|_{L^p([-R_1,R_1]\times[-R_2,R_2])} \leq C \right\} \\
&\leq \|\Lambda\| (4R_1R_2)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Dado que esto es válido para todo $R_1 > 0$ y $R_2 > 0$, concluimos que $\|g\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p'}} \leq C\|\Lambda\|$.

$\blacksquare$

Con lo anterior damos por terminado el estudio de las propiedades básicas de los espacios $\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$, $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^2)$ y $H\dot{\mathcal{A}}^p(\mathbb{R}^2)$. En los capítulos siguientes abordaremos su estudio desde una perspectiva diferente, proponiendo generalizaciones en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ para $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$ y $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^2)$ y después agregando parámetros a la definición original, además examinaremos el comportamiento de algunos operadores clásicos del análisis armónico en estos espacios.

Capítulo 2

Continuidad de operadores de tipo promedio en espacios de Herz rectangulares

A lo largo de este capítulo restringiremos nuestra atención al estudio de la continuidad de algunos operadores clásicos en los espacios $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n)$. Iniciaremos con el estudio de una versión discreta del operador promedio de Hardy, para después pasar a una versión continua.

2.1. Espacios de Herz rectangulares en $\mathbb{R}^n$

Hasta ahora hemos trabajado solamente en el contexto de $\mathbb{R}^2$, sin embargo, es posible definir versiones en $\mathbb{R}^n$ de $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^2)$ y $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^2)$ de forma muy natural haciendo los ajustes adecuados:

Para $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p} = \sup_{\substack{R_j>0 \\ j=1,\dots,n}} \left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j,R_j]} |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p} . \tag{2.1}$$

Nótese que si $n = 1$, los espacios $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R})$ y $\dot{B}^p(\mathbb{R})$ coinciden. De nuevo, usando argumentos estándar podemos ver que $(\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n), \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p})$ es un espacio de Banach y que $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{B}}^p} \leq C\|\cdot\|_{\dot{B}^p}$.

Al igual que en el caso $n = 2$, podemos describir de forma alternativa a $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ utilizando los conjuntos

$$C_{j_1,\dots,j_n} = C_{j_1} \times \cdots \times C_{j_n},$$

donde $C_j = \{x \in \mathbb{R} : 2^{j-1} < |x| \leq 2^j\}$ con $j \in \mathbb{Z}$. Si para $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\|f\|^*_{\dot{\mathcal{B}}^p} = \sup_{\substack{j_i \in \mathbb{Z} \\ i=1,\dots,n}} 2^{-\frac{j_1+\cdots+j_2}{p}} \|f\chi_{C_{j_1,\dots,j_n}}\|_p,$$

entonces $f \in \dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $\|f\|^*_{\dot{\mathcal{B}}^p} < \infty$. Más aún, $\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}$ y $\|f\|^*_{\dot{\mathcal{B}}^p}$ son normas equivalentes.

También podemos extender la definición que tenemos de $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^2)$ a $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ de la siguiente forma: para $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p} = \sup_{\substack{R_j>0 \\ j=1,\dots,n}} \left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_2} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j,R_j]} |f(x) - f_{R_1,\dots,R_n}|^p \, dx \right]^{1/p}$$

y $f_{R_1,\dots,R_n}$ es el promedio de f en $\Pi_{j=1}^n[-R_j, R_j]$.

Al igual que en el plano, $(\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p})$ es un espacio de Banach después de identificar funciones que difieren por una constante casi en todas partes en $\mathbb{R}^n$.

Además, la cantidad

$$\sup_{\substack{R_j>0\\ j=1,\dots,n}} \inf_{a\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2^n R_1\cdots R_n} \int\limits_{\Pi_{j=1}^n[-R_j,R_j]} |f(x)-a|^p\,dx \right]^{1/p} < \infty.$$

define una norma equivalente a $\|\cdot\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p}$. También se tienen las mismas contenciones que en el plano para los espacios $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n)$ y $C\dot{M}O^p(\mathbb{R}^n)$.

Analicemos ahora la acción de operadores promedio en estos espacios.

2.2. Operador promedio de Hardy-Littlewood con peso

El operador H_φ presentado por Carton-Lebrun y Foset en [6] y por Xiao en [40] se define puntualmente como

$$H_\varphi f(x) = \int_0^1 f(tx)\varphi(t)\,dt. \tag{2.2}$$

En [40], Xiao demostró que bajo condiciones apropiadas sobre φ, H_φ es continuo en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \le p \le \infty$, y en $BMO(\mathbb{R}^n)$. Este operador se encuentra estrechamente relacionado con los operadores maximales de Hardy-Littlewood en análisis armónico. Por ejemplo, si tomamos $\varphi = 1$ y $n = 1$, H_φ se reduce al operador de Hardy unidimensional

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt, \qquad x \neq 0,$$

para el cual, Hardy, Littlewood y Polya, probaron en [28] que

$$\int_0^\infty |Hf(x)|^p\,dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p\,dx, \qquad p \in (1,\infty)$$

siendo $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ la mejor constante posible.

El objetivo de esta sección es probar la continuidad del operador H_φ y otros relacionados con éste en los espacios $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n)$.

Comenzaremos considerando la siguiente versión discreta de (2.2):

Sea $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $(0,1]$ estrictamente decreciente con $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función Lebesgue medible y $\varphi : \{r_k : k \in \mathbb{N}\} \to (0,\infty)$ es cualquier función, definiremos formalmente el operador H_φ^d como

$$H_\varphi^d f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(r_k) f(r_k x).$$

Observación. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de H_φ^d como operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ es que

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-n/p} \varphi(r_k) < \infty. \tag{2.3}$$

En efecto, si suponemos que se tiene la convergencia de la serie en (2.3), dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \le p < \infty$, la desigualdad de Minkowski da como resultado

$$\begin{aligned} \|H_\varphi^d f\|_p &\le \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(r_k) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(r_k x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &= \|f\|_p \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-n/p} \varphi(r_k). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\|H_\varphi^d\|_{L^p \to L^p} \le \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-n/p} \varphi(r_k).$$

Si suponemos que H_φ^d es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, podemos proceder como en [40] para obtener la convergencia de la serie en (2.3): consideremos la función

$$f_\epsilon(x) = |x|^{-\frac{n}{p}-\epsilon} \chi_{\{|x|>1\}},$$

con $0 < \epsilon < 1$. Entonces $\|f_\epsilon\|_p = \frac{C_n}{\epsilon p}$, con

$$C_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}.$$

Por otro lado, dado que

$$H_\varphi^d f_\epsilon(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\varphi(r_k)\right)|x|^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\chi_{\{|x|>1\}}$$

y $\epsilon^{-1} > 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|H_\varphi^d\|_{L^p\to L^p}^p \|f_\epsilon\|_p^p &\geq \|H_\varphi^d f_\epsilon\|_p^p \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\varphi(r_k)\right)^p \int_{\{|x|>1\}} |x|^{-n-p\epsilon}\,dx \\
&\geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\varphi(r_k)\right)^p \int_{\{|x|>\epsilon^{-1}\}} |x|^{-n-p\epsilon}\,dx \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\varphi(r_k)\right)^p \|f_\epsilon\|_p^p \epsilon^{\epsilon p},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\frac{\|H_\varphi^d\|_{L^p\to L^p}}{\epsilon^\epsilon} \geq \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-\frac{n}{p}-\epsilon}\varphi(r_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-\frac{n}{p}}\varphi(r_k).$$

Finalmente, haciendo ϵ tender a cero obtenemos la convergencia deseada.

Con lo anterior, hemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *El operador H_φ^d es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$, si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-\frac{n}{p}}\varphi(r_k) < \infty$. En tal caso,*

$$\|H_\varphi^d\|_{L^p\to L^p} = \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-\frac{n}{p}}\varphi(r_k).$$

También podríamos considerar la siguiente generalización del operador H_φ^d: sea $\Phi : \{r_{k_1}^{(1)} : k_1 \in \mathbb{N}\} \times \cdots \times \{r_{k_n}^{(n)} : k_n \in \mathbb{N}\} \to (0,\infty)$ cualquier función, donde para cada $j = 1,\ldots,n$, la sucesión $\{r_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^{\infty}$ está contenida en $(0,1]$, es estrictamente decreciente y $\lim_{k_j\to\infty} r_{k_j}^{(j)} = 0$. Para una función Lebesgue medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos formalmente

$$\mathbb{H}_\Phi^d f(x) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi\left(r_{k_1}^{(1)},\ldots,r_{k_n}^{(n)}\right) f\left(r_{k_1}^{(1)}x_1,\ldots,r_{k_n}^{(n)}x_n\right). \tag{2.4}$$

Con la misma prueba que en el Teorema 2.1, podemos mostrar:

Teorema 2.2. *El operador $\mathbb{H}_\Phi^d$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$ si y solo si*

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi\left(r_{k_1}^{(1)}, \ldots, r_{k_n}^{(n)}\right) \left(r_{k_1}^{(1)}\right)^{-1/p} \cdots \left(r_{k_n}^{(n)}\right)^{-1/p} < \infty.$$

En tal caso

$$\|\mathbb{H}_\Phi^d\|_{L^p \to L^p} = \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi\left(r_{k_1}^{(1)}, \ldots, r_{k_n}^{(n)}\right) \left(r_{k_1}^{(1)}\right)^{-1/p} \cdots \left(r_{k_n}^{(n)}\right)^{-1/p}.$$

Ahora nos gustaría examinar el comportamiento del operador $\mathbb{H}_\Phi^d$ en nuestros espacios de Herz rectangulares. La prueba de la continuidad de $\mathbb{H}_\Phi^d$ en $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ es bastante sencilla:

Teorema 2.3. *El operador $\mathbb{H}_\Phi^d$ es acotado en $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$, si y solo si*

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi\left(r_{k_1}^{(1)}, \ldots, r_{k_n}^{(n)}\right) < \infty. \tag{2.5}$$

Más aún,

$$\|\mathbb{H}_\Phi^d\|_{\dot{\mathcal{B}}^p \to \dot{\mathcal{B}}^p} = \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi\left(r_{k_1}^{(1)}, \ldots, r_{k_n}^{(n)}\right).$$

Demostración. Supongamos que la condición (2.5) se satisface y tomemos $R_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Usando la desigualdad de Minkowski y haciendo un cambio de variables podemos ver que

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int\limits_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} |\mathbb{H}_\Phi^d f(x)|^p \, dx\right]^{1/p} \\
&\leq \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi\left(r_{k_1}^{(1)}, \ldots, r_{k_n}^{(n)}\right) \left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int\limits_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} \left|f\left(r_{k_1}^{(1)} x_1, \ldots, r_{k_n}^{(n)} x_n\right)\right|^p dx\right]^{1/p} \\
&\leq \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} \Phi\left(r_{k_1}^{(1)}, \ldots, r_{k_n}^{(n)}\right) \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p},
\end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$\|\mathbb{H}_{\Phi}^{d}\|_{\dot{\mathcal{B}}^p\to\dot{\mathcal{B}}^p} \leq \sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\Phi\left(r_{k_1}^{(1)},\ldots,r_{k_n}^{(n)}\right).$$

Si ahora suponemos que el operador $\mathbb{H}_{\Phi}^{d}$ es acotado en $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$, es suficiente considerar la función $f_0 \equiv 1$ para obtener la desigualdad opuesta.

■

Para continuar con nuestro estudio, quisiéramos examinar una versión continua del operador $\mathbb{H}_{\Phi}^{d}$ la cual estará definida de la siguiente manera: para una función Lebesgue medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\phi : [0,1]^n \to (0,\infty)$ definimos

$$\mathbb{H}_{\phi}f(x) = \int\limits_{[0,1]^n} f(t_1x_1,\ldots,t_nx_n)\phi(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots\,dt_n. \tag{2.6}$$

La misma prueba dada por Xiao en [40], muestra que el operador $\mathbb{H}_{\phi}$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, si y solo si

$$\int\limits_{[0,1]^n} t_1^{-1/p}\cdots t_n^{-1/p}\phi(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots\,dt_n < \infty.$$

A continuación daremos condiciones necesarias y suficientes para que el operador $\mathbb{H}_{\phi}$ sea continuo en $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ y en $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.4. *El operador $\mathbb{H}_{\phi}$ es un operador acotado en $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$, si y solo si*

$$\int\limits_{[0,1]^n} \phi(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots\,dt_n < \infty.$$

Además

$$\|\mathbb{H}_{\phi}\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p\to\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p} \leq \|\mathbb{H}_{\phi}\|_{\dot{\mathcal{B}}^p\to\dot{\mathcal{B}}^p} = \int\limits_{[0,1]^n} \phi(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots\,dt_n. \tag{2.7}$$

Demostración. Probaremos solamente la desigualdad para el espacio $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n)$ puesto que la del espacio $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ se obtiene de forma similar.

Supongamos que la integral en (2.7) es finita. Si tomamos $R_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$ y $f \in \mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p(\mathbb{R}^n)$, entonces es fácil ver que

$$(\mathbb{H}_\phi f)_{R_1,\ldots,R_n} = \int\limits_{[0,1]^n} f_{t_1R_1,\ldots,t_nR_n}\phi(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Si ahora usamos la desigualdad de Minkowski seguida de un cambio de variables apropiado obtenemos

$$\left[\frac{1}{2^nR_1\cdots R_n}\int\limits_{\Pi_{j=1}^n[-R_j,R_j]} |\mathbb{H}_\phi f(x) - (\mathbb{H}_\phi f)_{R_1,\ldots,R_n}|^p dx_1 \ldots dx_n\right]^{1/p}$$

$$\leq \int\limits_{[0,1]^n}\left[\frac{1}{2^nR_1\cdots R_n}\int\limits_{\Pi_{j=1}^n[-R_j,R_j]} |f(t_1x_1, \ldots, t_nx_n) - f_{t_1R_1,\ldots,t_nR_n}|^p dx_1 \ldots dx_n\right]^{1/p}$$

$$\times\, \phi(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \cdots dt_n$$

$$\leq \|f\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p}\int\limits_{[0,1]^n} \phi(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n,$$

lo cual implica que

$$\|\mathbb{H}_\phi\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p\to\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p} \leq \int\limits_{[0,1]^n} \phi(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Para el obtener la igualdad en $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ es suficiente considerar la función $f_0 \equiv 1$. ■

2.3. El operador de Hardy rectangular n-dimensional

En la sección anterior presentamos de forma muy breve al operador promedio de Hardy clásico, definido puntualmente como

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt, \qquad x \neq 0.$$

En 1995, Christ y Grafakos [11] definieron una versión n-dimensional de este operador, H_n, como

$$H_n f(x) = \frac{1}{c_n|x|^n} \int\limits_{B(0,|x|)} |f(y)|dy,$$

donde c_n es la medida de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$ y $B(0,|x|)$ es la bola con centro en el origen y radio $|x|$. Para este operador, demostraron que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$, entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{c_n|x|} \int_{B(0,|x|)} |f(y)|dy \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

siendo $p' = p/p-1$ la mejor constante posible. En esta sección, en lugar del operador radial H_n, consideraremos un operador que actúa sobre cada coordenada por separado como sigue

$$H_n^R f(x) = \frac{1}{|x_1| \cdots |x_n|} \int_{\Pi_{j=1}^n [-|x_j|,|x_j|]} |f(y)|dy,$$

con $x_j \neq 0$ para toda $j = 1, \ldots, n$. Llamaremos a H_n^R el operador de Hardy rectangular n-dimensional. Notemos que bajo un cambio de variables adecuado, H_n^R se puede expresar de la siguiente manera:

$$H_n^R f(x) = \int_{[-1,1]^n} |f(z_1|x_1|, \ldots, z_n|x_n|)| \, dz.$$

Antes de estudiar el comportamiento de este operador en los espacios $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ y $\dot{\mathcal{CMO}}^p(\mathbb{R}^n)$, es natural preguntarnos si H_n^R es continuo en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para algún valor de p. Cuando $1 < p \leq \infty$, es sencillo responder esta interrogante, pues la función maximal fuerte M_S, definida como

$$M_S f(x) = \sup_{x \in P} \frac{1}{|P|} \int_P |f(y)|dy,$$

donde el supremo se calcula sobre todos los rectángulos P con lados paralelos a los ejes coordenados que contienen a x, es continua en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p \leq \infty$ y satisface que

$$\begin{aligned} H_n^R f(x) &\leq \frac{4^n}{4|x_1|\cdots 4|x_n|}\int_{\Pi_{j=1}^n[-2|x_j|,2|x_j|]} |f(y)|\,dy \\ &\leq 4^n M_S f(x). \end{aligned}$$

Estas dos afirmaciones dan como resultado la continuidad de H_n^R en $L^p(\mathbb{R})$ si $1 < p \leq \infty$. Veamos ahora lo que sucede en nuestros espacios de interés:

Teorema 2.5. *Para $1 < p < \infty$, H_n^R es un operador acotado en $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ con norma*

$$\|H_n^R\|_{\dot{\mathcal{B}}^p \to \dot{\mathcal{B}}^p} = 2^n.$$

Demostración. Sean $R_1, \ldots, R_n$ números reales positivos. Usando la desigualdad de Minkowski para integrales y la simetría del dominio de integración podemos obtener las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{2^n R_1\cdots R_n}\int_{\Pi_{j=1}^n[-R_j,R_j]} |H_n^R f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\ &= \left[\frac{1}{2^n R_1\cdots R_n}\int_{\Pi_{j=1}^n[-R_j,R_j]}\left|\int_{[-1,1]^n} |f(z_1|x_1|,\ldots,z_n|x_n|)|\,dz\,\right|^p dx\right]^{1/p} \\ &\leq \int_{[-1,1]^n}\left[\frac{1}{2^n R_1\cdots R_n}\int_{\Pi_{j=1}^n[-R_j,R_j]} |f(|z_1|x_1,\ldots,|z_n|x_n)|^p\,dx\right]^{1/p} dz \\ &= \int_{[-1,1]^n}\left[\frac{1}{2^n |z_1|R_1\cdots |z_n|R_n}\int_{\Pi_{j=1}^n[-|z_j|R_j,|z_j|R_j]} |f(u_1,\ldots,u_n)|^p\,du\right]^{1/p} dz \\ &\leq 2^n\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^p}. \end{aligned}$$

Esto prueba que H_n^R es acotado en $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\|H_n^R\|_{\dot{\mathcal{B}}^p \to \dot{\mathcal{B}}^p} \leq 2^n.$$

La desigualdad opuesta se obtiene al observar que para la función constante $f_0 \equiv 1$ se tiene que $H_n^R f_0(x) = 2^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

En el siguiente teorema establecemos la continuidad del operador H_n^R en el espacio $C\dot{\mathcal{M}}O^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.6. *Para* $1 < p < \infty$, H_n^R*es un operador acotado en* $C\dot{\mathcal{M}}O^p(\mathbb{R}^n)$ *con norma*

$$\|H_n^R\|_{C\dot{\mathcal{M}}O^p \to C\dot{\mathcal{M}}O^p} \leq 2^n.$$

Demostración. Tomemos $f \in C\dot{\mathcal{M}}O^p(\mathbb{R}^n)$ y elijamos $R_1, \ldots, R_n > 0$. Primero calcularemos $(H_n^R f)_{R_1,\ldots,R_n}$, usando la simetría del dominio de integración y haciendo un cambio de variables adecuado:

$$\begin{aligned}
(H_n^R f)_{R_1,\ldots,R_n} &= \frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} H_n^R f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} \int_{[-1,1]^n} |f(z_1|x_1|, \ldots, z_n|x_n|)|\, dz\, dx \\
&= \int_{[-1,1]^n} \frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} |f(z_1|x_1|, \ldots, z_n|x_n|)|\, dx\, dz \\
&= \int_{[-1,1]^n} \frac{|z_1| \cdots |z_n|}{2^n |z_1| R_1 \cdots |z_n| R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} |f(|z_1| x_1, \ldots, |z_n| x_n)|\, dx\, dz \\
&= \int_{[-1,1]^n} \frac{1}{2^n |z_1| R_1 \cdots |z_n| R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-|z_j| R_j, |z_j| R_j]} |f(x_1, \ldots, x_n)|\, dx\, dz \\
&= \int_{[-1,1]^n} |f|_{|z_1| R_1, \ldots, |z_n| R_n}\, dz.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el cálculo previo y utilizando la desigualdad de Minkowski para integrales obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} |H_n^R f(x) - (H_n^R f)_{R_1,\ldots,R_n}|^p dx\right]^{1/p} \\
&\leq \int_{[-1,1]^n} \left[\frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} \left||f(|z_1| x_1, \ldots, |z_n| x_n)| - |f|_{|z_1| R_1, \ldots, |z_n| R_n}\right|^p dx\right]^{1/p} dz \\
&= \int_{[-1,1]^n} \left[\frac{1}{2^n |z_1| R_1 \cdots |z_n| R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-|z_j| R_j, |z_j| R_j]} \Big||f(x_1, \ldots, x_n)| \right. \\
&\left. - |f|_{|z_1| R_1, \ldots, |z_n| R_n}\Big|^p dx\right]^{1/p} dz
\end{aligned}$$

$\leq 2^n \|f\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p}$.

Con todo lo anterior, concluimos que

$$\|H_n^R\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p \to \mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p} \leq 2^n,$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

A continuación, probaremos que el conmutador del operador de Hardy rectangular n-dimensional y una función b en el espacio $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^q(\mathbb{R}^n)$ para cierto valor de q, es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$. El conmutador antes mencionado está definido para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ como sigue:

$$H_b^R f = bH_n^R(f) - H_n^R(fb)$$

con b una función localmente integrable.

El siguiente lema será de gran utilidad para probar la continuidad del conmutador definido previamente.

Lema 2.7. *Si b es una función en $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier conjunto de $2n$ enteros $k_1, \ldots, k_n, s_1 \ldots, s_n$, se tiene*

$$|b(t_1, \ldots, t_n) - b_{2^{k_1}, \ldots, 2^{k_n}}| \leq |b(t_1, \ldots, t_n) - b_{2^{s_1}, \ldots, 2^{s_n}}| + C\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1} \sum_{j=1}^{n} |k_j - s_j|.$$

Demostración. Notemos primero que si $k_1 < s_1$

$$|b(t_1, \ldots, t_n) - b_{2^{k_1}, \ldots, 2^{k_n}}| \leq |b(t_1, \ldots, t_n) - b_{2^{s_1}, \ldots, 2^{k_n}}| + \sum_{j=k_1}^{s_1 - 1} |b_{2^j, \ldots, 2^{k_n}} - b_{2^{j+1}, \ldots, 2^{k_n}}|.$$

Análogamente, cuando $s_1 < k_1$

$$|b(t_1, \ldots, t_n) - b_{2^{k_1}, \ldots, 2^{k_n}}| \leq |b(t_1, \ldots, t_) - b_{2^{s_1}, \ldots, 2^{k_n}}| + \sum_{j=s_1}^{k_1 - 1} |b_{2^j, \ldots, 2^{k_n}} - b_{2^{j+1}, \ldots, 2^{k_n}}|.$$

Adicionalmente, para cada n-ada de índices $j_1, \ldots, j_n$, tenemos

$$|b_{2^{j_1}, \ldots, 2^{j_n}} - b_{2^{j_1+1}, \ldots, 2^{j_n}}| = \left| \frac{1}{2^n 2^{j_1} \cdots 2^{j_n}} \int_{\Pi_{i=1}^n [-2^{j_i}, 2^{j_i}]} (b(x_1, \ldots, x_n) - b_{2^{j_1+1}, \ldots, 2^{j_n}}) \, dx \right|$$

$$\leq \frac{2}{2^n 2^{j_1+1} \cdots 2^{j_n}} \int\limits_{[-2^{j_1+1}, 2^{j_1+1}] \times \Pi_{i=2}^{n} [-2^{j_i}, 2^{j_i}]} |b(x_1, \dots, x_n) - b_{2^{j_1+1}, \dots, 2^{j_n}}| \, dx$$

$$\leq 2\|b\|_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1}.$$

En consecuencia

$$|b(t_1, \dots, t_n) - b_{2^{k_1}, \dots, 2^{k_n}}| \leq |b(t_1, \dots, t_n) - b_{2^{s_1}, \dots, 2^{k_n}}| + C|k_1 - s_1| \|b\|_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1}.$$

De forma similar es posible obtener

$$|b(t_1, \dots, t_n) - b_{2^{s_1}, 2^{k_2}, \dots, 2^{k_n}}| \leq |b(t_1, \dots, t_n) - b_{2^{s_1}, 2^{s_2}, \dots, 2^{k_n}}| + C|k_2 - s_2| \|b\|_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1}.$$

Todo esto da como resultado que

$$\begin{aligned} |b(t_1, \dots, t_n) - b_{2^{k_1}, 2^{k_2} \dots, 2^{k_n}}| &\leq |b(t_1, \dots, t_n) - b_{2^{s_1}, 2^{k_2}, \dots, 2^{k_n}}| + C|k_1 - s_1| \|b\|_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1} \\ &\leq |b(t_1, \dots, t_n) - b_{2^{s_1}, 2^{s_2}, \dots, 2^{k_n}}| + C(|k_1 - s_1| \\ &+ |k_2 - s_2|) \|b\|_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1}. \end{aligned}$$

Repitiendo este proceso concluimos que

$$|b(t_1, \dots, t_n) - b_{2^{k_1}, \dots, 2^{k_n}}| \leq |b(t_1, \dots, t_n) - b_{2^{s_1}, \dots, 2^{s_n}}| + C\|b\|_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1} \sum_{j=1}^{n} |k_j - s_j|.$$

■

Con el fin de facilitar la lectura de la demostración del siguiente teorema, utilizaremos la siguiente notación: para $k \in \mathbb{Z}$, denotemos por S_k al conjunto $[-2^k, 2^k]^n$ y definamos $C_k = S_k \setminus S_{k-1}$. Observemos que $C_k \cap C_j = \emptyset$ si $k \neq j$ y que $\mathbb{R}^n = \cup_{k \in \mathbb{Z}} C_k$.

Con esta notación, para cualquier función f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ podemos escribir

$$\|f\|_p^p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|f_k\|_p^p,$$

donde $f_k = f\chi_{C_k}$.

Por último, para una función localmente integrable b utilizaremos el símbolo b_{2^k} para denotar al promedio de b en el cubo S_k.

Pasaremos ahora a enunciar nuestro resultado:

Teorema 2.8. *Sean $1 < p < \infty$ y $b \in \mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{\text{máx}\{p,p'\}}(\mathbb{R}^n)$, donde p' es el exponente conjugado de p. Entonces H_b^R es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con norma*

$$\|H_b^R\|_{L^p\to L^p} \leq C\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{\text{máx}\{p,p'\}}}.$$

Demostración. Primero examinaremos $\|(H_b^R f)_k\|_p^p$.

$$\begin{aligned}
\|(H_b^R f)_k\|_p^p = \int_{C_k} \Bigg| \frac{1}{|x_1|\cdots|x_n|} \int_{\Pi_{j=1}^n[-|x_j|,|x_j|]} & f(t_1,\ldots,t_n) \\
&\times (b(x_1,\ldots,x_n) - b(t_1,\ldots,t_n))\,dt\Bigg|^p dx \\
&\leq \int_{C_k} \frac{1}{|x_1|^p\cdots|x_n|^p}\left(\int_{S_k} |f(t_1,\ldots,t_n)||b(x_1,\ldots,x_n) - b(t_1,\ldots,t_n)|\,dt\right)^p dx \\
&\leq C2^{-nkp}\int_{C_k}\left(\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{C_i} |f(t_1,\ldots,t_n)||b(x_1,\ldots,x_n) - b(t_1,\ldots,t_n)|\,dt\right)^p dx \\
&\leq C2^{-nkp}\int_{C_k}\left(\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{C_i} |f(t_1,\ldots,t_n)||b(x_1,\ldots,x_n) - b_{2^k}|\,dt\right)^p dx \\
&+ C2^{-nkp}\int_{C_k}\left(\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{C_i} |f(t_1,\ldots,t_n)||b(t_1,\ldots,t_n) - b_{2^k}|\,dt\right)^p dx \\
&= C2^{-nkp}\left(\int_{C_k} |b(x_1,\ldots,x_n) - b_{2^k}|^p\,dx\right)\left(\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{C_i} |f(t_1,\ldots,t_n)|\,dt\right)^p \\
&+ C2^{-nkp}|C_k|\left(\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{C_i} |f(t_1,\ldots,t_n)||b(t_1,\ldots,t_n) - b_{2^k}|\,dt\right)^p \\
&= I + J.
\end{aligned}$$

Para estimar I observemos que

$$\begin{aligned}
I &\leq C2^{-nkp}\left(\int_{S_k} |b(x_1,\ldots,x_n) - b_{2^k}|^p\,dx\right) \\
&\times \left(\sum_{i=-\infty}^{k}\left(\int_{C_i} |f(t_1,\ldots,t_n)|^p\,dt\right)^{1/p}|C_i|^{1/p'}\right)^p \\
&\leq C2^{-nkp/p'}\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p}^p\left(\sum_{i=-\infty}^{k} 2^{ni/p'}\|f_i\|_p\right)^p
\end{aligned}$$

$$= C\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p}\left(\sum_{i=-\infty}^{k} 2^{n(i-k)/p'}\|f_i\|_p\right)^p.$$

Ahora estimaremos J usando el Lema 2.7.

$$\begin{aligned}
J &= C\left(2^{-nk/p'}\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{C_i}|f(t_1,\ldots,t_n)||b(t_1,\ldots,t_n)-b_{2^k}|\,dt\right)^p\\
&\leq C\left(2^{-nk/p'}\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{C_i}|f(t_1,\ldots,t_n)||b(t_1,\ldots,t_n)-b_{2^i}|\,dt\right)^p\\
&+ C\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1}\left(2^{-nk/p'}\sum_{i=-\infty}^{k}(k-i)\int_{C_i}|f(t_1,\ldots,t_n)|\,dt\right)^p\\
&= J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Para el primer término tenemos que

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq C\left(2^{-nk/p'}\sum_{i=-\infty}^{k}\left[\int_{C_i}|f(t_1,\ldots,t_n)|^p\,dt\right]^{1/p}\right.\\
&\left.\times\left[\int_{C_i}|b(t_1,\ldots,t_n)-b_{2^i}|^{p'}\,dt\right]^{1/p'}\right)^p\\
&\leq C\left(\sum_{i=-\infty}^{k}2^{n(i-k)/p'}\|f_i\|_p\left[\frac{1}{|S_i|}\int_{S_i}|b(t_1,\ldots,t_n)-b_{2^i}|^{p'}\,dt\right]^{1/p'}\right)^p\\
&\leq C\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p'}}\left(\sum_{i=-\infty}^{k}2^{n(i-k)/p'}\|f_i\|_p\right)^p.
\end{aligned}$$

Para el segundo término, podemos usar la desigualdad de Hölder para obtener

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq C\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1}\left(2^{-nk/p'}\sum_{i=-\infty}^{k}(k-i)\|f_i\|_p|C_i|^{1/p'}\right)^p\\
&\leq C\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1}\left(\sum_{i=-\infty}^{k}2^{n(i-k)/p'}(k-i)\|f_i\|_p\right)^p.
\end{aligned}$$

De todos los cálculos anteriores podemos concluir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|(H_b^R f)_k\|_p^p \leq C\left(\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^p}+\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p'}}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=-\infty}^{k}2^{n(i-k)/p'}\|f_i\|_p\right)^p$$

$$
\begin{aligned}
&+ C\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=-\infty}^{k} 2^{n(i-k)/p'} (k-i) \|f_i\|_p \right)^p \\
&\leq C\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{\max\{p,p'\}}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=-\infty}^{k} 2^{n(i-k)/p'} (k-i) \|f_i\|_p \right)^p \\
&\leq C\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{\max\{p,p'\}}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=-\infty}^{k} 2^{n(i-k)/2} (k-i)^{p'} \right)^{p/p'} \\
&\times \left(\sum_{i=-\infty}^{k} 2^{(i-k)np/2p'} \|f_i\|_p^p \right).
\end{aligned}
$$

Puesto que la serie $\sum_{i=-\infty}^{k} 2^{n(i-k)/2}(k-i)^{p'}$ converge al mismo valor para todo entero k, podemos usar el teorema de Tonelli para obtener

$$
\begin{aligned}
\|H_b^R f\|_p^p &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|(H_b^R f)_k\|_p^p \\
&\leq C\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{\max\{p,p'\}}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \|f_i\|_p^p \left(\sum_{k=i}^{\infty} 2^{n(i-k)p/2p'} \right).
\end{aligned}
$$

Pero de nuevo, para cada número entero i, la serie $\sum_{k=i}^{\infty} 2^{n(i-k)p/2p'}$ converge al mismo valor. Así, finalmente tenemos

$$
\|H_b^R f\|_p \leq C\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{\max\{p,p'\}}} \|f\|_p.
$$

■

Con esto concluimos el segundo capítulo de este trabajo.

Capítulo 3

Operadores de tipo promedio en otros espacios

El último capítulo de este trabajo estará dividido en dos secciones. En la primera abordaremos el problema de definir versiones rectangulares homogéneas de los espacios centrados de Morrey-Campanato y estudiar el comportamiento del operador de Hardy rectangular n-dimensional y su conmutador en estos espacios. En la segunda sección consideraremos el operador de Hausdorff actuando en los espacios $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ definidos por M. Essén et al. en [19].

3.1. Espacios de Morrey-Campanato rectangulares y el operador de Hardy rectangular n-dimensional

La teoría de los espacios de Campanato tiene sus orígenes en el trabajo realizado por S. Campanato [4] y G. Stampacchia [37] a principios de la década de los sesenta. Los espacios de Campanato son una generalización del espacio de funciones con oscilación media acotada $BMO(\mathbb{R}^n)$ definido por F. John y J. Nirenberg en 1961 [30], el cual está descrito por la siguiente seminorma

$$\|f\|_{BMO} = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| \, dx,$$

donde B denota a cualquier bola en $\mathbb{R}^n$, y f_B es el promedio de f en B, esto es

$$f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(x) \, dx.$$

Para $1 \leq p < \infty$ y $-1/p \leq \lambda \leq 1/n$, el espacio de Campanato clásico $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ se define como aquel formado por todas las funciones Lebesgue medibles para las cuales

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|^{1+\lambda p}} \int_B |f(x) - f_B|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty,$$

donde B es cualquier bola en $\mathbb{R}^n$ y f_B es el promedio de f en B.

Asociado a los espacios de Campanato, encontramos a los espacios de Morrey, los cuales fueron definidos en 1938 por C. Morrey [35] con el fin de estudiar el comportamiento local de las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales elipticas de segundo orden. La norma que describe a los espacios de Morrey clásicos $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ se define como sigue

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|^{1+\lambda p}} \int_B |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

para $1 \leq p < \infty$ y $-1/p \leq \lambda \leq 1/n$. No es difícil ver que $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Tanto los espacios de Morrey como los espacios de Campanato han sido generalizados de diversas maneras con el objetivo de obtener existencia y unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales parciales.

Los espacios presentados por García-Cuerva en [25] y por S. Lu y D. Yang en [33] son versiones centrales radiales de los espacios de Morrey y Campanato. En este capítulo concentraremos nuestra atención en versiones centrales rectangulares de los espacios de Morrey y Campanato en $\mathbb{R}^n$. Nuestro objetivo es explorar el comportamiento del operador de Hardy rectangular n-dimensional en dichos espacios y del conmutador de este operador con una función en el espacio central rectangular de

Campanato. El interés en este último conmutador viene de la caracterización, en el caso radial, del espacio central de Campanato vía este operador dada en [36] por S. Shi y S. Lu.

A continuación definiremos las versiones centrales rectangulares de los espacios de Morrey y Campanato.

Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y $-1/p \leq \lambda \leq 0$, el espacio de Morrey central rectangular se define como

$$\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} = \sup_{\substack{R_j>0 \\ j=1,\ldots,n}} \left(\frac{1}{(2^n R_1 \ldots R_n)^{1+\lambda p}} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j,R_j]} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Notemos que si $\lambda = 0$ obtenemos el espacio $\dot{\mathcal{B}}^p(\mathbb{R}^n)$ que estudiamos en las secciones anteriores, mientras que $\dot{\mathcal{B}}^{p,-1/p}(\mathbb{R}^n)$ es simplemente el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$. Mediante argumentos estándar es posible demostrar que $\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach. Si denotamos por $\dot{B}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ al espacio que se obtiene al utilizar bolas centradas en el origen en lugar de rectángulos, el cual nombraremos espacio de Morrey central, es sencillo probar que $\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ con $\|\cdot\|_{\dot{B}^{p,\lambda}} < C \|\cdot\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}}$.

Bajo las mismas condiciones para p y λ, el espacio central rectangular de Campanato, denotado por $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ se define como el espacio que consiste de todas aquellas funciones $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para las cuales

$$\sup_{\substack{R_j>0 \\ j=1,\ldots,n}} \left(\frac{1}{(2^n R_1 \cdots R_n)^{1+\lambda p}} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j,R_j]} |f(x) - f_{R_1,\ldots,R_n}|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \tag{3.1}$$

donde

$$f_{R_1,\ldots,R_n} = \frac{1}{2^n R_1 \cdots R_n} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j,R_j]} f(x) \, dx.$$

Cuando es finita, denotamos a la cantidad en (3.1) por $\|f\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}}$.

Al igual que sucede con $BMO(\mathbb{R}^n)$, una vez que identificamos a las funciones que difieren por una constante casi en todas partes, no es difícil mostrar que $(\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}})$ es un espacio de Banach. Además un cálculo sencillo muestra que $\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y si denotamos por $C\dot{M}O^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ al espacio de Campanato centrado en el origen tendremos que $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset C\dot{M}O^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, $\|\cdot\|_{C\dot{M}O^{p,\lambda}} \leq C\,\|\cdot\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}}$, puesto que las medidas de Lebesgue de bolas y cubos son comparables.

Estos espacios también pueden verse como versiones rectangulares de los espacios estudiados por Alvarez, Guzmán-Partida y Lakey en [2].

El objetivo de este capítulo es examinar el comportamiento del conmutador del operador de Hardy con funciones en el espacio $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ cuando actúa en un espacio de Morrey rectangular.

Antes de comenzar, observemos que las pruebas de los teoremas 2.5 y 2.6 se pueden modificar de forma bastante simple para obtener un resultado más general:

Teorema 3.1. *Sean $1 < p < \infty$ y $-1/p \leq \lambda \leq 0$. El operador H_n^R es un operador acotado en $\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y en $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ con norma*

1. $\|H_n^R\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}\to\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} = \frac{2^n}{(1+\lambda)^n}$.

2. $\|H_n^R\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}\to\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}} \leq \frac{2^n}{(1+\lambda)^n}$.

Demostración. La prueba de que ambas normas son menores o iguales que $2^n/(1+\lambda)^n$ se puede hacer igual que en las demostraciones de los teoremas 2.5 y 2.6, lo único que nos quedaría por demostrar en este caso, es que en $\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}$ la norma del operador H_n^R alcanza este valor. Para lo anterior, consideremos la función

$$\Phi(x) = (|x_1|\cdots|x_n|)^\lambda$$

y observemos que $\Phi \in \dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, pues

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} &= \sup_{\substack{R_j>0\\ j=1,\dots,n}} \left(\frac{1}{(2^n R_1\cdots R_n)^{(1+\lambda p)}} \int_{\Pi_{j=1}^n[-R_j,R_j]} (|x_1|\cdots|x_n|)^{\lambda p}\, dx \right)^{1/p} \\ &= \frac{2^n}{(1+\lambda p)^n}.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} H_n^R\Phi(x) &= \int_{[-1,1]^n} |\Phi(z_1|x_1|,\dots,z_n|x_n|)|\, dz \\ &= (|x_1|\cdots|x_n|)^{\lambda} \int_{[-1,1]^n} (|z_1|\cdots|z_n|)^{\lambda}\, dz \\ &= \Phi(x)\frac{2^n}{(1+\lambda)^n},\end{aligned}$$

lo cual implica

$$\frac{\|H_n^R\Phi\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}}}{\|\Phi\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}}} = \frac{2^n}{(1+\lambda)^n},$$

con lo cual concluimos

$$\|H_n^R\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p}\to\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} = \frac{2^n}{(1+\lambda)^n}.$$

■

Nuestro primer resultado sobre la continuidad del operador H_b^R estará dado bajo la suposición de que para la función b, existe una constante $C>0$ tal que para cualquier rectángulo $\tilde{R}\subset\mathbb{R}^n$ se satisface

$$\sup_{x\in\tilde{R}} |f(x)-f_{\tilde{R}}| \leq \frac{C}{|\tilde{R}|}\int_{\tilde{R}} |f(y)-f_{\tilde{R}}|\, dy, \tag{3.2}$$

donde $f_{\tilde{R}}$ es el promedio de f en $\tilde{R}$. A pesar de que esta suposición podría parecer un poco artificial, está basada en la condición que define a la clase de Hölder reversa (más información sobre este tema puede consultarse en [27] y [14]).

Pasemos ahora a nuestro resultado:

Teorema 3.2. *Sean* $1 < p < \infty$, $-1/p < \lambda < 0$, $-1/p_i < \lambda_i < 0$, $i = 1, 2$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ *y sea* b *una función en* $\dot{\mathcal{CMO}}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ *que satisface* (3.2). *Entonces* $H_b^R : \dot{\mathcal{B}}^{p_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n) \to \dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *es acotado con*

$$\left\| H_b^R \right\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p_2,\lambda_2} \to \dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} \leq C \left\| b \right\|_{\dot{\mathcal{CMO}}^{p_1,\lambda_1}} .$$

Demostración. Con el objetivo de simplificar la lectura de la demostración, estableceremos la siguiente notación: para cualquier n-ada de números enteros $k_1, \dots, k_n$ escribiremos

1. $I_{k_1,\dots,k_n} = [-2^{k_1}, 2^{k_1}] \times \cdots \times [-2^{k_n}, 2^{k_n}]$,
2. $C_{k_1,\dots,k_n} = \{(x_1, \dots, x_n) : 2^{k_j - 1} < |x_j| \leq 2^{k_j}, j = 1, \dots, n\}$,
3. $b_{k_1,\dots,k_n} = 2^{-(k_1+\cdots+k_n+n)} \displaystyle\int_{I_{k_1,\dots,k_n}} b(x)\, dx$.

Consideremos un rectángulo arbitrario $[-R_1, R_1] \times \cdots \times [-R_n, R_n] \subset \mathbb{R}^n$ y tomemos $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ tales que $2^{k_j - 1} < R_j \leq 2^{k_j}$ para $j = 1, \dots, n$. Entonces

$$\frac{1}{(2^n R_1 \cdots R_n)^{1+\lambda p}} \int_{\Pi_{j=1}^n [-R_j, R_j]} |f(x)|^p \, dx \leq C \frac{1}{2^{(k_1+\cdots+k_n+n)(1+\lambda p)}} \int_{I_{k_1,\dots,k_n}} |f(x)|^p \, dx,$$

con C una constante independiente de $R_1, \dots, R_n$.

Como consecuencia, será suficiente mostrar que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{2^{(k_1+\cdots+k_n+n)(1+\lambda p)}} \int_{I_{k_1,\dots,k_n}} |H_b^R f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq C \left\| f \right\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p_2,\lambda_2}} , \tag{3.3}$$

para toda n-ada de enteros $k_1, \dots, k_n$.

De la definición de H_b^R tenemos

$$\int_{I_{K_1,\dots,K_n}} |H_b^R f(x)|^p \, dx$$
$$= \int_{I_{K_1,\dots,K_n}} \left| \frac{1}{|x_1| \cdots |x_n|} \int_{\Pi_{j=1}^n [-|x_j|, |x_j|]} [b(x_1, \dots, x_n) - b(y_1, \dots, y_n)] \, f(y_1, \dots, y_n) \, dy_1 \cdots dy_n \right|^p$$

$$\times\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$\leq \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\frac{1}{|x_1|\cdots|x_n|} \int_{I_{k_1,\ldots,k_n}} |b(x_1,\ldots,x_n) - b(y_1,\ldots,y_n)| \right.$$

$$\left. \times |f(y_1,\ldots,y_n)|\, dy_1 \cdots dy_n \right)^p dx_1 \cdots dx_n$$

$$\leq C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\frac{1}{|x_1|\cdots|x_n|} \sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \int_{C_{j_1,\ldots,j_n}} |b(x_1,\ldots,x_n) \right.$$

$$\left. - b_{k_1,\ldots,k_n}||f(y_1,\ldots,y_n)|\, dy_1 \cdots dy_n \right)^p dx_1 \cdots dx_n$$

$$+ C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\frac{1}{|x_1|\cdots|x_n|} \sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \int_{C_{j_1,\ldots,j_n}} |b(y_1,\ldots,y_n) \right.$$

$$\left. - b_{k_1,\ldots,k_n}||f(y_1,\ldots,y_n)|dy_1 \cdots dy_n \right)^p dx_1 \ldots dx_n$$

$$= I + J.$$

Podemos estimar el primer término usando la desigualdad de Hölder para p_1/p y $(p_1/p)'$ y para p_2 y p_2' como sigue

$$I \leq C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} 2^{-(k_1+\cdots+k_n)p} \int_{I_{k_1,\ldots,k_n}} |b(x_1,\ldots,x_n) - b_{k_1,\ldots,k_n}|^p\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$\times \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \int_{I_{j_1,\ldots,j_n}} |f(y_1,\ldots,y_n)|\, dy_1 \cdots dy_n \right)^p$$

$$\leq C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} 2^{-(k_1+\ldots+k_n)p} \left(\int_{I_{k_1,\ldots,k_n}} |b(x_1,\ldots,x_n) - b_{k_1,\ldots,k_n}|^{p_1}\, dx_1 \cdots dx_n \right)^{p/p_1}$$

$$\times |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{1/(p_1/p)'} \left[\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \left(\int_{I_{j_1,\ldots,j_n}} |f(y_1,\ldots,y_n)|^{p_2}\, dy_1 \cdots dy_n \right)^{1/p_2} |I_{j_1,\ldots,j_n}|^{1/p_2'} \right]^p$$

$$\leq C\, \|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p_1,\lambda_1}} \|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p_2,\lambda_2}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{(\lambda_1-1)p+1} \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} |I_{j_1,\ldots,j_n}|^{\lambda_2+1} \right)^p$$

$$\leq C\,\|b\|^p_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p_1,\lambda_1}}\,\|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p_2,\lambda_2}}\sum_{k_1=-\infty}^{K_1}\cdots\sum_{k_n=-\infty}^{K_n}|I_{k_1,\ldots,k_n}|^{\lambda p+1}$$

$$\leq C\,\|b\|^p_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p_1,\lambda_1}}\,\|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p_2,\lambda_2}}\,|I_{K_1,\ldots,K_n}|^{\lambda p+1}.$$

El segundo término se puede estimar usando la desigualdad de Hölder iteradamente, primero para p y p' y después para p_1/p y p_2/p, y usando el hecho de que b satisface (3.2):

$$J\leq C\sum_{k_1=-\infty}^{K_1}\cdots\sum_{k_n=-\infty}^{K_n}2^{-(k_1+\cdots+k_2)p}\int_{C_{k_1,\ldots,k_n}}\left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1}\cdots\sum_{j_n=-\infty}^{k_n}\int_{I_{j_1,\ldots,j_n}}|b(y_1,\ldots,y_n)-b_{k_1,\ldots,k_n}|\right.$$

$$\left.\times|f(y_1,\ldots,y_n)|\,dy_1\cdots dy_n\right)^p\,dx_1\cdots dx_n$$

$$\leq C\sum_{k_1=-\infty}^{K_1}\cdots\sum_{k_n=-\infty}^{K_n}2^{-(k_1+\cdots+k_n)p}\int_{C_{k_1,\ldots,k_n}}\left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1}\cdots\sum_{j_n=-\infty}^{k_n}\left[\int_{I_{j_1,\ldots,j_n}}|b(y_1,\ldots,y_n)-b_{k_1,\ldots,k_n}|^p\right.\right.$$

$$\left.\left.\times|f(y_1,\ldots,y_n)|^p\,dy_1\ldots dy_n\right]^{1/p}\,|I_{j_1,\ldots,j_2}|^{1/p'}\right)^p\,dx_1\cdots dx_n$$

$$\leq C\sum_{k_1=-\infty}^{K_1}\cdots\sum_{k_n=-\infty}^{K_n}2^{-(k_1+\cdots+k_n)p}\int_{C_{k_1,\ldots,k_n}}\left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1}\cdots\sum_{j_n=-\infty}^{k_n}\left[\int_{I_{j_1,\ldots,j_n}}|b(y_1,\ldots,y_n)-b_{k_1,\ldots,k_n}|^{p_1}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times dy_1\cdots dy_n\right]^{1/p_1}\left[\int_{I_{j_1,\ldots,j_n}}|f(y_1,\ldots,y_n)|^{p_2}\,dy_1\cdots dy_n\right]^{1/p_2}\,|I_{j_1,\ldots,j_n}|^{1/p'}\right)^p\,dx_1\ldots dx_n$$

$$\leq C\,\|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p_2,\lambda_2}}\sum_{k_1=-\infty}^{K_1}\cdots\sum_{k_n=-\infty}^{K_n}2^{-(k_1+\cdots+k_n)p}\int_{C_{k_1,\ldots,k_n}}\left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1}\cdots\sum_{j_n=-\infty}^{k_n}|I_{j_1,\ldots,j_n}|^{1/p_1+1/p_2+1/p'+\lambda_2}\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{|I_{k_1,\ldots,k_n}|}\int_{I_{k_1,\ldots,k_n}}|b(y_1,\ldots,y_n)-b_{k_1,\ldots,k_n}|^{p_1}\right]^{1/p_1}\right)^p\,dx_1\cdots dx_n$$

$$\leq C\,\|b\|^p_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p_1,\lambda_1}}\,\|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p_2,\lambda_2}}\sum_{k_1=-\infty}^{K_1}\cdots\sum_{k_n=-\infty}^{K_n}|I_{k_1,\ldots,k_n}|^{(\lambda_1-1)p+1}$$

$$\times\left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1}\cdots\sum_{j_n=-\infty}^{k_n}|I_{j_1,\ldots,j_n}|^{\lambda_2+1}\right)^p$$

$$\leq C\,\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p_1,\lambda_1}}\,\|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p_2,\lambda_2}}\sum_{k_1=-\infty}^{K_1}\cdots\sum_{k_n=-\infty}^{K_n}|I_{k_1,\ldots,k_2}|^{\lambda p+1}$$

$$\leq C\,\|b\|^p_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p_1,\lambda_1}}\,\|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p_2,\lambda_2}}\,|I_{K_1,\ldots,K_n}|^{\lambda p+1}.$$

Combinando las estimaciones previas para I y J, la desigualdad (3.3) queda probada. ■

Ahora quisiéramos obtener un resultado de continuidad para H_b^R cuando b es una función para la cual (3.2) no necesariamente se satisface. Para lograrlo, necesitamos imponer condiciones más fuertes sobre p y λ, además del siguiente lema.

Lema 3.3. *Sean $1 < p < \infty$, $-1/p < \lambda < 0$, $k_j, l_j \in \mathbb{Z}$ para $j = 1,\ldots,n$ y $b \in \mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Con la misma notación que en la demostración del teorema anterior, se satisface lo siguiente: si llamamos M al máximo entre $|I_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n}|^\lambda$, $|I_{l_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n}|^\lambda$,$|I_{l_1,l_2,\ldots,k_{n-1},k_n}|^\lambda$,$\ldots,|I_{l_1,l_2,\ldots,l_{n-1},k_n}|^\lambda$ y $|I_{l_1,l_2,\ldots,l_{n-1},l_n}|^\lambda\}$, entonces*

$$|b(x_1,\ldots,x_n) - b_{k_1,\ldots,k_n}| \leq |b(x_1,\ldots,x_n) - b_{l_1,\ldots,l_n}| + CM\,\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}}\,.$$

Demostración. Primero observemos que

$$\begin{aligned}|b_{k_1,k_2,\ldots,k_n} - b_{k_1+1,k_2,\ldots,k_n}| &\leq \frac{1}{|I_{k_1,k_2,\ldots,k_n}|}\int_{I_{k_1,k_2,\ldots,k_n}}|b(x) - b_{k_1+1,k_2,\ldots,k_n}|\,dx\\ &\leq 2\left(\frac{1}{|I_{k_1+1,k_2,\ldots,k_n}|}\int_{I_{k_1+1,k_2,\ldots,k_n}}|b(x) - b_{k_1,k_2+1}|^p\,dx\right)^{1/p}\\ &\leq 2\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}}|I_{k_1+1,k_2,\ldots,k_n}|^\lambda.\end{aligned}$$

Ahora notemos que si $k_1 < l_1$

$$\begin{aligned}|b(x_1,\ldots,x_n) - b_{k_1,k_2,\ldots,k_n}| &\leq |b(x_1,\ldots,x_n) - b_{l_1,k_2,\ldots,k_n}| + \sum_{j=k_1}^{l_1-1}|b_{j,k_2,\ldots,k_n} - b_{j+1,k_2,\ldots,k_n}|\\ &\leq |b(x_1,\ldots,x_n) - b_{l_1,k_2,\ldots,k_n}| + 2\,\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}}\sum_{j=k_1}^{l_1-1}|I_{j+1,k_2,\ldots,k_n}|^\lambda\end{aligned}$$

$$\leq |b(x_1,\dots,x_n)-b_{l_1,k_2,\dots,k_n}|+C\,\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}}\,|I_{k_1,k_2,\dots,k_n}|^{\lambda}.$$

Similarmente, si $k_1 > l_1$

$$|b(x_1,\dots,x_n)-b_{k_1,\dots,k_n}|\leq |b(x_1,\dots,x_n)-b_{l_1,\dots,k_n}|+C\,\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}}\,|I_{l_1,\dots,k_n}|^{\lambda}.$$

Por los cálculos previos tenemos

$$\begin{aligned}|b(x_1,\dots,x_n)-b_{k_1,\dots,k_n}|\leq&|b(x_1,\dots,x_n)-b_{l_1,\dots,k_n}|\\&+C\,\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}}\,\text{máx}\{|I_{k_1,k_2,\dots,k_n}|^{\lambda},|I_{l_1,k_2,\dots,k_n}|^{\lambda}\}.\end{aligned}$$

Haciendo el mismo cálculo para k_2 y l_2 en el primer término del lado derecho de la última desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned}|b(x_1,\dots,x_n)-b_{k_1,k_2,\dots,k_n}|\leq&|b(x_1,\dots,x_n)-b_{l_1,l_2,\dots,k_n}|\\&+C\,\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}}\,\text{máx}\{|I_{k_1,k_2,\dots,k_n}|^{\lambda},|I_{l_1,k_2,\dots,k_n}|^{\lambda},|I_{l_1,l_2,\dots,k_n}|^{\lambda}\}.\end{aligned}$$

Continuando este proceso obtenemos el resultado deseado. ■

Teorema 3.4. *Sean $2<p<\infty$ y $-1/2p<\lambda<0$. Si $b\in\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, entonces $H_b^R:\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)\to\dot{\mathcal{B}}^{p,2\lambda}(\mathbb{R}^n)$ es acotado con*

$$\left\|H_b^R\right\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)\to\dot{\mathcal{B}}^{p,2\lambda}(\mathbb{R}^n)}\leq C\,\|b\|_{\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}}\,.$$

Demostración. Continuaremos utilizando la notación de la prueba del Teorema 3.2. De nuevo será suficiente probar que existe una constante $C>0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|I_{K_1,\dots,K_n}|^{1+2\lambda p}}\int_{I_{K_1,\dots,K_n}}|H_b^R f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leq C\,\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}}\,. \tag{3.4}$$

Para obtener (3.4) notemos que

$$\begin{aligned}&\int_{I_{K_1,\dots,K_n}}|H_b^R f(x_1,\dots,x_n)|^p\,dx\\&\leq\int_{I_{K_1,\dots,K_n}}\left(\frac{1}{|x_1|\cdots|x_n|}\int_{\{|y_j|<|x_j|\}}|b(x_1,\dots,x_n)-b(y_1,\dots,y_n)||f(y_1,\dots,y_n)|\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times dy_1 \cdots dy_n\Bigg)^p \, dx_1 \cdots dx_n \\
&\leq C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\frac{1}{|x_1|\cdots|x_n|} \int_{I_{k_1,\ldots,k_n}} |b(x_1,\ldots,x_n) - b_{k_1,\ldots,k_n}| \right. \\
&\left. \times |f(y_1,\ldots,y_n)| \, dy_1 \cdots dy_n \right)^p \, dx_1 \cdots dx_n \\
&+ C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\frac{1}{|x_1|\cdots|x_n|} \int_{I_{k_1,\ldots,k_n}} |b(y_1,\ldots,y_n) - b_{k_1,\ldots,k_n}| \right. \\
&\left. \times |f(y_1,\ldots,y_n)| \, dy_1 \cdots dy_n \right)^p \, dx_1 \cdots dx_n \\
&= I + J.
\end{aligned}
$$

El término I puede ser estimado usando la desigualdad de Hölder como sigue

$$
\begin{aligned}
I &\leq C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} 2^{-(k_1+\cdots+k_n)p} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} |b(x_1,\ldots,x_n) - b_{k_1,\ldots,k_n}|^p \, dx_1 \cdots dx_n \\
&\times \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \int_{C_{j_1,\ldots,j_n}} |f(y_1,\ldots,y_n)| \, dy_1 \cdots dy_n \right)^p \\
&\leq C \, \|b\|^p_{\dot{\mathcal{CMO}}^{p,\lambda}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{(\lambda-1)p+1} \\
&\times \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \left[\int_{I_{j_1,\ldots,j_n}} |f(y_1,\ldots,y_n)|^p \, dy_1 \cdots dy_n \right]^{1/p} |I_{j_1,\ldots,j_n}|^{1/p'} \right)^p \\
&\leq C \, \|b\|^p_{\dot{\mathcal{CMO}}^{p,\lambda}} \, \|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{(\lambda-1)p+1} \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} |I_{j_1,\ldots,j_n}|^{\lambda+1} \right)^p \\
&\leq C \, \|b\|^p_{\dot{\mathcal{CMO}}^{p,\lambda}} \, \|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{2\lambda p+1} \\
&\leq C \, \|b\|^p_{\dot{\mathcal{CMO}}^{p,\lambda}} \, \|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} \, |I_{K_1,\ldots,K_n}|^{2\lambda p+1},
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad se satisface porque $2p\lambda > -1$.

Para acotar J usaremos el Lema 3.3 y el hecho de que el máximo entre $|I_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n}|^\lambda$, $|I_{j_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n}|^\lambda$,$|I_{j_1,j_2,\ldots,k_{n-1},k_n}|^\lambda$,$\ldots$, $|I_{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1},k_n}|^\lambda$ y $|I_{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1},j_n}|^\lambda$, es $|I_{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1},j_n}|^\lambda$ cuando $k_i > j_i$, $i = 1,\ldots,n$ como sigue

$$\begin{aligned}
J &\leq C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} 2^{-(k_1+\cdots+k_n)p} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \int_{C_{j_1,\ldots,j_n}} |b(y_1,\ldots,y_n) - b_{k_1,\ldots,k_n}| \right. \\
&\left. \times |f(y_1,\ldots,y_n)|\, dy_1 \cdots dy_n \right)^p dx_1 \cdots dx_n \\
&\leq C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} 2^{-(k_1+\cdots+k_n)p} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \int_{I_{j_1,\ldots,j_n}} |b(y_1,\ldots,y_n) - b_{k_1,\ldots,k_n}| \right. \\
&\left. \times |f(y_1,\ldots,y_n)|\, dy_1 \cdots dy_n \right)^p dx_1 \cdots dx_n \\
&\leq C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} 2^{-(k_1+\cdots+k_n)p} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \int_{I_{j_1,\ldots,j_n}} |b(y_1,\ldots,y_n) - b_{j_1,\ldots,j_n}| \right. \\
&\left. \times |f(y_1,\ldots,y_n)|\, dy_1 \cdots dy_n \right)^p dx_1 \cdots dx_n \\
&+ C \,\|b\|^p_{\dot{\mathcal{CMO}}^{p,\lambda}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} 2^{-(k_1+\cdots+k_n)p} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \int_{I_{j_1,\ldots,j_n}} |I_{j_1,\ldots,j_n}|^\lambda \right. \\
&\left. \times |f(y_1,\ldots,y_n)|\, dy_1 \cdots dy_n \right)^p dx_1 \cdots dx_n \\
&= J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

De nuevo por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq C \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{-p} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} \left[\int_{I_{j_1,\ldots,j_n}} |b(y_1,\ldots,y_n) - b_{j_1,\ldots,j_n}|^{p'} \right.\right. \\
&\left.\left. \times dy_1 \ldots dy_n \right]^{1/p'} \left[\int_{I_{j_1,\ldots,j_n}} |f(y_1,\ldots,y_n)|^p \, dy_1 \cdots dy_n \right]^{1/p} \right)^p dx_1 \cdots dx_n \\
&\leq C \,\|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{-p} \int_{C_{k_1,\ldots,k_n}} \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} |I_{j_1,\ldots,j_n}|^{\lambda+1/p'} \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left[\int_{I_{j_1,\ldots,j_n}} |b(y_1,\ldots,y_n) - b_{j_1,\ldots,j_n}|^p \, dy_1 \cdots dy_n\right]^{1/p}\Bigg)^p \, dx_1 \cdots dx_n \\
&\leq C \|b\|^p_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}} \|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{-p+1} \left(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} |I_{j_1,\ldots,j_n}|^{2\lambda+1}\right)^p \\
&\leq C \|b\|^p_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}} \|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{2\lambda p+1} \\
&\leq C \|b\|^p_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}} \|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} |I_{K_1,\ldots,K_n}|^{2\lambda p+1}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, J_2 se puede estimar de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
J_2 &\leq C \|b\|^p_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} 2^{-(k_1+\cdots+k_n)p} \int_{I_{k_1,\ldots,k_n}} \Bigg(\sum_{j_1=-\infty}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{k_n} |I_{j_1,\ldots,j_n}|^{\lambda+1/p'} \\
&\times \left[\int_{I_{j_1,\ldots,j_n}} |f(y_1,\ldots,y_n)|^p \, dy_1 \cdots dy_n\right]^{1/p}\Bigg)^p \, dx_1 \cdots dx_n \\
&\leq C \|b\|^p_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}} \|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{-p} \int_{I_{k_1,\ldots,k_n}} \left(|I_{k_1,\ldots,k_n}|^{2\lambda+1}\right)^p \, dx_1 \cdots dx_n \\
&\leq C \|b\|^p_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}} \|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} \sum_{k_1=-\infty}^{K_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{K_n} |I_{k_1,\ldots,k_n}|^{2\lambda p+1} \\
&\leq C \|b\|^p_{C\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}} \|f\|^p_{\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}} |I_{K_1,\ldots,K_n}|^{2\lambda p+1},
\end{aligned}
$$

lo cual completa la prueba del Teorema 3.4. ■

3.2. El operador de Hausdorff en $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$

En esta sección consideraremos el operador de Hausdorff

$$
\mathcal{H}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(u) f(xA(u)) \, du \tag{3.5}
$$

donde Φ es una función medible y $A = A(u)$ es una matriz de $n \times n$ cuyas componentes $A_{i,j}(u)$ son funciones medibles en la variable u. Además, A puede ser degenerada a lo más en un conjunto de medida cero y $xA(u)$ es el vector renglón que se obtiene al multiplicar el vector renglón x por la matriz A. Este operador ha sido estudiado por varios autores, en particular, fue tratado por E. Liflyand en el artículo [32].

El operador de Hardy H_φ que mencionamos en la sección 2.2, puede verse como un caso particular del operador (3.5). Recordemos que

$$H_\varphi f(x) = \int_0^1 f(tx)\varphi(t)\,dt, \tag{3.6}$$

de forma que si en (3.5) tomamos $n = 1$, $A(u) = u$ y $\Phi(u) = \chi_{(0,1)}(u)\varphi(u)$ obtenemos (3.6).

A. Lerner y E. Liflyand probaron en [31] la continuidad del operador (3.5) en el espacio $BMO(\mathbb{R}^n)$. Por la forma en que hemos desarrollado este trabajo, resulta natural preguntarnos ¿por qué no estudiar este operador en los espacios $\dot{\mathcal{B}}^{p,\lambda}$ y $\mathcal{C}\dot{\mathcal{M}}\mathcal{O}^{p,\lambda}$ que presentamos en la sección anterior? La razón es que la transformación lineal definida por A no preserva la simetría de los dominios de integración que aparecen en la definición de estos espacios. En su lugar, estudiaremos la acción de $\mathcal{H}$ en los espacios $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Los espacios $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ fueron definidos por M. Essén et al. en [19] y generalizados después por otros autores, entre ellos D. Yang y W. Yuan (ver [41]). Los espacios $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ están definidos por la siguiente condición: una función medible f pertenece a $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ si y solo si

$$\|f\|_{Q_\alpha} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|^{1-2\alpha/n}} \int_Q \int_Q \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\, dxdy \right)^{1/2} < \infty, \tag{3.7}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes coordenados. Estos espacios son espacios de Banach, después de identificar todas las funciones que difieren por una constante casi en todas partes, además estan continuamente incluidos en $BMO(\mathbb{R}^n)$.

En [19], Essén et al. probaron que $Q_\alpha(\mathbb{R}^n) = BMO(\mathbb{R}^n)$ para $\alpha < 0$. Para $n \geq 2$ y $\alpha \geq 1$, o $n = 1$ y $\alpha > 1/2$, $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ se reduce a las funciones constantes. Más aún, para $\alpha \in [0, 1)$, $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio de $BMO(\mathbb{R}^n)$.

En este trabajo, nos restringiremos al caso $\alpha \in [-n/2, n/2]$. Las razones por las cuales hemos tomado esta restricción serán claras más adelante. El primer problema que abordaremos es qué podemos decir de la función

$$F(\cdot, u)(x) = f(xA(u))$$

cuando $f \in Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ y fijamos $u \in \mathbb{R}^n$.

Antes de empezar, notemos primero que si Q es un cubo con lados paralelos a los ejes coordenados y denotamos por $\mathcal{Q}_A$ al cubo con lados paralelos a los ejes más pequeño que contiene al paralelepípedo QA, entonces

$$\ell_{\mathcal{Q}_A} \leq \|A\| \ell_Q, \tag{3.8}$$

donde $\ell_{\mathcal{Q}_A}$ y ℓ_Q denotan las longitudes de los lados de los cubos $\mathcal{Q}_A$ y Q respectivamente, y

$$\|A\| = \|A(u)\| = \text{máx}\{|A_{1,j}(u)| + \cdots + |A_{n,j}(u)| : 1 \leq j \leq n\}.$$

Lema 3.5. *Para $\alpha \in [-n/2, n/2]$, $u \in \mathbb{R}^n$ y $f \in Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$, la función*

$$F(\cdot, u)(x) = f(xA(u))$$

pertenece a $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|F(\cdot, u)\|_{Q_\alpha} \leq (\sqrt{n})^{\frac{n}{2}+\alpha} |det A^{-1}(u)| \|f\|_{Q_\alpha}. \tag{3.9}$$

Demostración. Usando (3.8) y un cambio de variables podemos obtener

$$\left(\frac{1}{|Q|^{1-2\alpha/n}}\int_Q\int_Q \frac{|f(xA(u))-f(yA(u))|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dxdy\right)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{1}{|Q|^{1-2\alpha/n}}\int_{QA(u)}\int_{QA(u)} \frac{|f(z)-f(w)|^2}{|(z-w)A^{-1}|^{n+2\alpha}}|detA^{-1}(u)|^2\,dzdw\right)^{1/2} \tag{3.10}$$

$$\leq \|A(u)\|^{\frac{n}{2}-\alpha}|detA^{-1}(u)|\left(\frac{1}{|\mathcal{Q}_{A(u)}|^{1-2\alpha/n}}\int_{QA(u)}\int_{QA(u)} \frac{|f(z)-f(w)|^2}{|(z-w)A^{-1}|^{n+2\alpha}}\,dzdw\right)^{1/2}.$$

Ahora notemos que

$$\begin{aligned} |z-w| &= \left|(((z-w)A^{-1})A)^t\right| \\ &= \left|A^t((z-w)A^{-1})^t\right| \\ &\leq \|A^t\|_{op}|(z-w)A^{-1}| \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde

$$\|A^t\|_{op} = \sup_{|x^t|=1}|A^t x^t| = \|A\|_{op}. \tag{3.12}$$

Dado que

$$\|A\|_{op} \leq \sqrt{n}\sup_{|x^t|_1=1}|Ax^t|_1 \leq \sqrt{n}\|A\|,$$

con $|(\beta_1,\ldots,\beta_n)|_1 = \sum_{j=1}^n|\beta_j|$, usando (3.11) y (3.12), podemos estimar (3.10) por

$$\|A(u)\|^{\frac{n}{2}-\alpha}|detA^{-1}(u)|(\sqrt{n}\|A(u)\|)^{\frac{n}{2}+\alpha}\|f\|_{Q_\alpha}$$

con lo cual obtenemos la desigualdad (3.9). ∎

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Supongamos que $\alpha \in [-n/2, n/2]$ y que*

$$C_{A,\Phi} = \int_{\mathbb{R}^n}|detA^{-1}(u)||\Phi(u)|\|A\|^n\,du < \infty,$$

entonces, el operador de Hausdorff $\mathcal{H}$ es acotado en el espacio $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ y su norma satisface

$$\|\mathcal{H}\|_{Q_\alpha\to Q_\alpha} \leq (\sqrt{n})^{\frac{n}{2}+\alpha}C_{A,\Phi}.$$

Demostración. Supongamos que $f \in Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ y sea Q un cubo con lados paralelos a los ejes coordenados. Usando el Lema anterior y la desigualdad de Minkowski podemos obtener la siguiente estimación

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|^{1-2\alpha/n}}\int_Q\int_Q \frac{|\mathcal{H}f(x)-\mathcal{H}f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dxdy\right)^{1/2}\\
&=\left(\frac{1}{|Q|^{1-2\alpha/n}}\int_Q\int_Q \left|\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(u)[f(xA(u))-f(yA(u))]\right|^2 \frac{dxdy}{|x-y|^{n+2\alpha}}\right)^{1/2}\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|Q|^{1-2\alpha/n}}\int_Q\int_Q \frac{|f(xA(u))-f(yA(u))|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dxdy\right)^{1/2}|\Phi(u)|du\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}|\Phi(u)|\|F(\cdot,u)\|_{Q_\alpha}du\\
&\leq (\sqrt{n})^{\frac{n}{2}+\alpha}\|f\|_{Q_\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|detA^{-1}(u)||\Phi(u)|\|A\|^n\,du\\
&=(\sqrt{n})^{\frac{n}{2}+\alpha}C_{A,\Phi}\|f\|_{Q_\alpha},
\end{aligned}
$$

con lo que se concluye la demostración. ■

Para finalizar esta sección observemos que cuando $\alpha = -n/2$, tenemos que $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)) = BMO(\mathbb{R}^n)$ y de acuerdo al resultado probado en [31], el operador de Hausdorff $\mathcal{H}$ es acotado en BMO con

$$\|\mathcal{H}\|_{BMO\to BMO} \leq C_{A,\Phi}.$$

Puesto que esta es la misma cota que obtuvimos para la norma de $\mathcal{H}$ en el Teorema 3.6, nuestro resultado incluye el caso $BMO(\mathbb{R}^n)$ considerado en [31].

Bibliografía

[1] W. Abu-Shammala y A. Torchinsky. Spaces between H^1 and L^1. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136:1743–1748, 2008.

[2] J. Alvarez, M. Guzmán-Partida, y J. Lakey. Spaces of bounded λ-central mean oscillation, Morrey spaces, and λ-central Carleson measures. *Collect. Math.*, 51(1):1–47, 2000.

[3] A. Beurling. Construction and analysis of some convolution algebras. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 14:1–32, 1964.

[4] S. Campanato. Proprietà di hölderianità de alcune classi di funzioni. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 17(3):175–188, 1963.

[5] L. Carleson. A counterexample for measures bounded for H^p for the bi-disc. *Mittag-Leffler Report*, 7, 1974.

[6] C. Carton-Lebrun y M. Fosset. Moyennes et quotients de Taylor dans BMO. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 53:85–87, 1984.

[7] D. C. Chang y C. Sadosky. Functions of bounded mean oscillation. *Taiwanese J. Math.*, 10(3):573–601, 2006.

[8] S.-Y. A. Chang y R. Fefferman. A continuous version of the duality of H^1 and BMO on the bidisk. *Ann. of Math.*, 112:179–201, 1980.

[9] S.-Y. A. Chang y R. Fefferman. Some recent developments in Fourier analysis and H^p theory on product domains. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12:1–43, 1985.

[10] Y. Chen y K. Lau. Some new classes of Hardy spaces. *J. Funct. Anal.*, 84:255–278, 1989.

[11] M. Christ y L. Grafakos. Best constants for two nonconvolution inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(6):1687–1693, 1995.

[12] R. R. Coifman, R. Rochberg, y G. Weiss. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. *Ann. Math.*, 103:611–635, 1976.

[13] M. Cotlar y C. Sadosky. Two distinguished subspaces of product BMO, and Nehari-AAK theory for Hankel operators on the torus. *Int. Eq. Op. Th.*, 26:273–304, 1996.

[14] J. Duoandikoetxea. *Fourier analysis.* American Mathematical Society, 2001.

[15] C. Espinoza-Villalva. A note on rectangular Morrey-Campanato spaces.

[16] C. Espinoza-Villalva. Central mean oscillation and rectangularly defined spaces. *Electron. J. Math. Anal. Appl.*, 5(2):116–128, 2017.

[17] C. Espinoza-Villalva y M. Guzmán-Partida. Average operators on rectangular Herz spaces. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 65:61–70, 2016.

[18] C. Espinoza-Villalva y M. Guzmán-Partida. Continuity of Hardy type operators on rectangularly defined spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 436:29–38, 2016.

[19] M. Essén, S. Janson, L. Peng, y J. Xiao. Q spaces of several real variables. *Indiana Univ. Math. J.*, 49(2):575–615, 2000.

[20] C. Fefferman y E. M. Stein. H^p spaces of several variables. *Acta Math.*, 129:137–193, 1972.

[21] H. Feichtinger. An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean n-space, Proceedings, Conference at Cortona 1984. *Sympos. Math. 29, Academic Press*, 1987.

[22] S. H. Ferguson y M. Lacey. A characterization of product BMO by commutators. *Acta Math.*, 189:143–160, 2002.

[23] S. H. Ferguson y C. Sadosky. Characterizations of bounded mean oscillation on the polydisk in terms of Hankel operators and Carleson measures. *J. Anal. Math.*, 81:239–267, 2000.

[24] Z. W. Fu, Z. G. Liu, S. Z. Lu, y H. B. Wang. Characterization for commutators of n-dimensional fractional Hardy operators. *Sci. China (Ser. A)*, 50:1418–1426, 2007.

[25] J. García-Cuerva. Hardy spaces and Beurling algebras. *J. London Math. Soc.*, 39(2):499–513, 1989.

[26] J. García-Cuerva y M. J. Herrero. A theory of Hardy spaces associated to Herz spaces. *Proc. London Math. Soc.*, 69(3):605–628, 1994.

[27] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*. North-Holland, 1985.

[28] G. Hardy, J. E. Littlewood, y G. Polya. *Inequalities*. Cambridge Univ. Press, 1999.

[29] C. Herz. Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms. *J. Appl. Math. Mech.*, 18:283–324, 1968.

[30] F. John y L. Nirenberg. On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:415–426, 1961.

[31] A.K. Lerner y E. Liflyand. Multidimensional Hausdorff operators on the real Hardy space. *J. Aust. Math. Soc.*, 83:79–86, 2007.

[32] E. Liflyand. Hausdorff operators on Hardy spaces. *Eurasian Math. J.*, 4(4):101–141, 2013.

[33] S. Lu y D. Yang. The central BMO spaces and Littlewood-Paley operators. *Approx. Theory Appl.*, 11:72–94, 1995.

[34] S. Lu y D. Yang. The local versions of $H^p(\mathbb{R}^n)$ spaces at the origin. *Studia Math.*, 116(2):103–131, 1995.

[35] C. B. Morrey. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43(1):126–166, 1938.

[36] S. Shi y S. Lu. Characterization of the central Campanato space via the commutator operator of Hardy type. *J. Math. Anal. Appl.*, 429:713–732, 2015.

[37] G. Stampacchia. $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$-spaces and interpolation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17:293–306., 1964.

[38] N. Wiener. Generalized harmonic analysis. *Acta Math.*, 55:117–258, 1930.

[39] N. Wiener. Tauberian theorems. *Ann. of Math.*, 33(2):1–100, 1932.

[40] J. Xiao. L^p and BMO bounds of weighted Hardy-Littlewood averages. *J. Math. Anal. Appl.*, 262:660–666, 2001.

[41] D. Yang y W. Yuan. A new class of function spaces connecting Triebel-Lizorkin spaces and Q spaces. *J. Funct. Anal.*, 255:2760–2809, 2008.