"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Posgrado en Matemáticas

La bifurcación k-cero en sistemas m-parametrizados

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

M.C. Martín Aarón Carrillo Carranza

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México, Marzo del 2019

SINODALES

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Daniel Olmos Liceaga
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dedicatoria

...

Agradecimientos

Índice general

Introducción VII

1. Planteamiento del problema 1

2. Dinámica sobre la variedad central 7

3. Forma normal 13

3.1. Términos cuadráticos 14

3.2. Coeficientes de la forma normal 20

4. Deformación versal 25

5. Equivalencia Topológica 31

5.1. Direcciones de desdoblamiento 38

6. Aplicación 43

6.1. El sistema de Rössler 43

7. Conclusiones 51

A. Bifurcación Takens-Bogdanov 53

A. Código 59

Introducción

La teoría de sistemas dinámicos ha tenido un desarrollo importante durante los últimos años, pues estos pueden implemetarse para modelar diferentes fenómenos en la naturaleza que impliquen cambios. La teoría ha crecido, a su vez, siempre vinculada con otras disciplinas en un continuo intercambio de problemas, técnicas y aplicaciones, por lo cual tienen una vasta aplicación en áreas como ingeniería, economía, biología, física, etc. Los sistemas dinámicos pueden clasificarse en linales o no linales. Los sistemas lineales son sencillos de analizar y trabajar, ya que la solución del sistema sujetos a condiciones complejas puede estudiarse simplificando el problema a condicines más sencillas. Existen técnicas ampliamente utilizadas para analizar este tipo de sistemas como lo son la transformada de Laplace, el principio de superposición, la transformada de Fourier, etc. Por lo anterior, es usual encontrar soluciones analítuicas exactas de sistemas lineales. Aunque también es muy común recurrir a los métodos geométricos para visualizar la evolución del sistema en el tiempo.

Si el sistema es no lineal, su análisis es mucho más complejo, esto se debe a la no linealidad del sistema y son de interés en física y matemáticas debido a que la mayoría de los problemas físicos son implícitamente no lineales en su naturaleza. En los últimos cuarenta años hubo un creciente interés en el estudio de este tipo de sistemas, el desarrollo de herramientas computacionales para estudiar estos sistemas, y la aplicación de estas herramientas a un número importante de problemas. En la mayoria de las ocaciones no se podrá encontrar soluciones análiticas exactas a los problemas no lineales, por lo tanto, la representación de la dinámica del sistema se auxilia mucho en técnicas geométricas de visualización y análisis. Aunque los sistemas no lineales son complejos de analizar, hay resultados que garantizan que los sistemas dinámicos no lineales se comportan localmente como lineales. De lo anterior se sigue que, en general, el análisis de el comportamiento de las soluciones de sistemas no lineales puede ser dividido en de dos categorias, análsis local y anális global.

Los sistemas no lineales, que usualmente dependen de varios parámetros, suelen cambiar radicalmente su estrucutura cualitativa al varias dichos parámetros, apareciendo o desapareciendo, por ejemplo, puntos de equilibrio o ciclos límites, cuando esto sucede se dice que ha ocurrido una bifurcación. La teoría de bifurcación forma parte de la teoría general de sistemas dinámicos y es una teoría que sirve como herramienta para el análisis de sistemas no linales. Se origina junto con la moderna teoría cualitativa a finales del siglo XIX cuando Poincaré introduce las ideas topológicas y geométricas en el estudio de la dinámica. La formalización del concepto de bifurcación se produce al ponerlo en relación con el de estabilidad estructural, introducido por Andronov y Pontriaguin en 1937.

Dado que los cambios cualitativos a los que alude la teoría de bifurcaciones ocurren entorno a un punto de equilibrio, el cual puede ser hiperbólico o no hipérbolico, en este trabajo todo el análisis se desarrolla entorno a puntos de equilibrios no hiperbólicos, es decir, aquéllos para los cuales la matriz Jacobiana del sistema posee valores propios igual a cero, pues, es conocido que (ver [64], [44], [60]), por el teorema de Hartman-Grobman, los equilibrios hiperbólicos son estructuralmente estables. En este contexto, resulta fundamental el teorema de la variedad central que establece la existencia de una variedad invariante pasando por el punto de equilibrio (no hiperbólico) a la cual puede restringirse el sistema para estudiar la dinámica en un entorno del mismo.

Una forma de clasificar las bifuraciones es por su codimensión. La codimensión de una bifuración es el mínimo número de parámetros que necesita un sistema parametrizado para que ocurra una bifurcación. Las bifurcaciones de codimensión uno, relacionadas con la aparición de un valor propio cero, han sido ampliamente estudiadas y caracterizada, las cuales corresponden a tres tipos de bifurcaciónes: nodo-silla, transcrítica y horquilla. En las bifuraciones de codimensión dos, se distingue la bifurcación Takens-Bogdanov, cero-Hopf y Hopf-Hopf, también ampliamente estudiadas, mientras que las bifuraciones de codimensión mayor a dos, son bifuraciones que hasta el momento no han sido caracterizadas y por lo tanto existen pocos resultados entorno a ellas. Sin embargo, exiten algunos intentos por caracterizar algunas bifurcaciones de codimensión tres, particularmente, la bifurcación triple cero, la cual ocurre cuando la matriz Jacobiana tiene tres valores propios iguales a cero. Fue Durmortir quien dio comienzo al estudio de esta bifurcación (ver [21], [23], [24]), mostrando que la bifurcación cero-Hopf y Takens-Bogdanov se encontraban en su desdoblamiento. Un año más tarde, Freire *et al.* [19] presenta otro desdoblamiento de la bifurcación triple cero. Sin embargo, el análisis parcial que ellos presentan revelan la complejidad de los comportamientos de las soluciones que se encuentran dentro de esta bifurcación.

En este trabajo abordamos el estudio de la bifurcación k cero, la cual ocurre cuando la parte lineal del campo vectorial tiene un valor propio cero de multiplicidad k y el resto parte real diferente de cero. El caso $k = 2$ es conocido como la bifurcación Takens-Bogdanov, la cual fue estudiada, independientemente, por Takens [28] y Bognadov [58]. Partiendo de un campo vectorial n-dimensional m-parametrizado, mostramos un teorema donde se establecen las condiciones sobre el campo vectorial para asegurar la existencia una bifurcación k cero. El análisis complejo que muestran las bifuraciciones de codimensión $k \geq 3$ hace que por el momento no se tenga un diagrama de bifurcación, al menos para la bifuración triple cero, por el cual, conviene mencionar que nuestro trabajo no tiene como objetivo el análisis de bifurcación, si no más bien, establecer un resultado que caractice la ocurrencia de bifuraciones de codimensión k. Por otro lado, hacemos notar que, cuando se presente un diagrama completo para la bifurcación triple cero, el resultado que presentamos en este trabajo servirá como medio para realizar análisis de bifurcación.

Con las ideas anterior, se presenta a continuación la estructura que organiza este trabajo.

En el capítulo 1 se establece el objetivo principal de este trabajo junto con algunos conceptos útilices para llevar a cabo una simplificación significativa en el desarrollo de los capítulos posteriores. En el capítulo 2 se utiliza la teoría de la dinámica sobre la variedad central para reducir el problema de bifurcación, limítando el análisis a la dinámica sobre la variedad cen-

tral. Aunque las técnicas para determinar dicha dinámica sugieren la implementación de una serie de cambios de coordenadas, en este trabajo, utilizamos solo un cambio de coordenadas que nos llevó directamente a la dinámica sobre la variedad central.

En el capítulo 3 se calcula una forma normal y se presenta una conjetura que sugiere una estructura de una forma normal para $k \geq 2$, aunque no se demuestra formalmente el resultado si se presenta un código que se puede utilizar como medio para calcular los coeficientes de dicha forma normal. Partiendo de la forma normal, en el capítulo 4 se presenta un análisis para obtener una deformación versal para la bifurcación k cero. Dicho análisis se sigue teniendo como base la técnica utilizada en [48]. En el mismo capítulo se logran dar explícitamente las k direcciones de desdoblamiento para desdoblar la bifurcación k cero. Terminamos el capítulo 4 estableciendo el teorema principal de este trabajo.

Finalizamos este trabajo mostrando un modelo para exhibir la aplicación del teorema principal. El modelo empleado para tal objetivo es conocido como el sistema de Rössler el cual está ampliamente estudiado en la literataura (ver [4], [19], [37], [47], [51], [50]). Para este sistema se calculan las tres direcciones de desdoblamiento y se utilizan para llevar acabo un anális de bifurcación utilizando el diagrama de bifurcación para la bifurcación Takens-Bogdanov. Se presentan las superficies en el espacio de los parámetros donde el sistema de Rössler experimenta una bifuración silla-nodo y Takenes-Bogdanov. Además se logra caracterizar dos puntos en el espacio de los parámetros donde el sistema experimenta una bifurcación triple cero.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

Consideremos el campo vectorial m-parametrizado

$$\dot{x} = F(x, \mu), \tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq k \geq 2$ y $F \in \mathcal{C}^r$, $r \geq 2$.

A lo largo de este trabajo, suponemos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, tal que se verifican las siguientes hipótesis:

H1) $F(x_0, \mu_0) = 0$,

H2) $DF(x_0, \mu_0)$ es similar a $J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$,

$$\text{donde} \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{k \times k} \quad \text{y } \sigma(J_1) = \{Re(\lambda_j) \neq 0, \text{ para } j = k+1, ..., n\}.$$

A vista de la matriz J_0, en esta tesis consideramos el caso no semisimple, el cual hace referencia a la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda = 0$, es decir, supondremos que la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda = 0$ es uno. Por otro lado, llamaremos a H1) y H2) *hipótesis de no hiperbolicidad*. Para el caso $k = 2$, es conocido que las hipótesis de no hiperbolicidad proporcionan un primer escenario para la ocurrencia de la bifurcación Takens-Bogdanov (ver [12]). De forma similar, en esta tesis, dichas hipótesis nos provee un ambiente para la ocurrencia de la bifurcación k cero.

Los resultados sobre el análisis de bifurcación del campo vectorial (1.1), parten en general, de la forma canónica de Jordan de este campo vectorial (ver [44], [64]). Por tal motivo, nuestro enfoque inicial es expresar la parte lineal del campo (1.1) en su forma de Jordan. Para lograr esto recurrimos al vector propio y vectores propios generalizados asociados a la matriz $DF(x_0, \mu_0)$, los cuales se defininen a continuación.

Llamaremos a v_1 el vector propio, y $v_2, \ldots, v_k$ los vectores propios generalizados de $DF(x_0, \mu_0)$ correspondientes al valor propio $\lambda = 0$. Sea ahora $V_0 = (v_1, v_2, ..., v_k) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ la matriz que se construye con el vector propio y los generalizados. Como consecuencia de la construcción anterior, sea $P_0 \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$ la matriz que contiene los vectores propios (incluyendo generalizados) asociados a la matriz J_1.

La manera de proceder usando las matrices V_0 y P_0, es la siguiente: definimos $P = (\, V_0 \, P_0 \,) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, luego, de la teoría de formas de Jordan, existe $P^{-1} = \begin{pmatrix} W_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}$ donde $W_0 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $P_0 \in \mathbb{R}^{n-k\times n}$ y $W_0 = \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_k^T \end{pmatrix}$, tal que

$$P^{-1}DF(x_0, \mu_0)P = J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Hacemos notar que por simplicidad definimos $A = DF(x_0, \mu_0)$.

A la vista de la expresión que adopta W_0, el siguiente lema caracteriza los elementos w_i, para $i = 1, ..., k$.

Lema 1. *w_k es el vector propio izquierdo y $w_1, ..., w_{k-1}$ son los vectores propios izquierdos generalizados de A correspondiente al valor propio $\lambda = 0$, es decir,*

$$W_0 A = J_0 W_0.$$

Demostración. Es claro que

$$P^{-1}AP = J \;\Leftrightarrow\; P^{-1}A = JP^{-1} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} W_0 A \\ Q_0 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 W_0 \\ J_1 Q_0 \end{pmatrix}.$$

De aquí se deduce que

$$W_0 A = J_0 W_0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} w_1^T A \\ \vdots \\ w_{k-1}^T A \\ w_k^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2^T \\ \vdots \\ w_k^T \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto finaliza la demostración. □

A continuación se establece un resultado que tiene como base la identidad (1.2). Conviene mencionar que algunas expresiones presentadas en los capítulos posteriores son posibles gracias a la gran variedad de identidades que se desprenden de (1.2). Por otro lado, se aclara que $I_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$, de manera similar $I_{n-k} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$.

Lema 2. *Se verifican las siguientes identidades*

$$\begin{aligned} W_0AV_0 &= J_0, & \qquad W_0V_0 &= I_k, \\ W_0AP_0 &= 0, & \qquad W_0P_0 &= 0, \\ Q_0AV_0 &= 0, & y \qquad Q_0V_0 &= 0, \\ Q_0AP_0 &= J_1, & \qquad Q_0P_0 &= I_{n-k}. \end{aligned}$$

Demostración. A partir de (1.2) es inmediato que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} W_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} V_0 & P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} W_0AV_0 & W_0AP_0 \\ Q_0AV_0 & Q_0AP_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}.$$

Las otras propiedades se evidencian al considerar que $P^{-1}P = I$, pues

$$\begin{pmatrix} W_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 & P_0 \end{pmatrix} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} W_0V_0 & W_0P_0 \\ Q_0V_0 & Q_0P_0 \end{pmatrix} = I.$$

Si hacemos la descomposición adecuada para la matriz I, tenemos

$$\begin{pmatrix} W_0V_0 & W_0P_0 \\ Q_0V_0 & Q_0P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

El resultado se sigue. □

A efectos de reducir la dimensión de un problema de bifurcación, el teorema de la variedad central y la hipótesis de no hiperbolicidad implican la existencia de una variedad central k-dimensional m-parametrizada en $x = x_0$ y $\mu \approx \mu_0$. En el capítulo 2 se calcula la dinámica sobre la variedad central del sistema (1.1) truncada hasta orden dos. La justificación de dicho truncamiento se menciona con detalle posteriormente.

Aunque es conocido que la dinámica sobre la variedad central se obtiene siguiendo una serie de cambio de coordenadas, conviene mencionar que las expresiones obtenidas, podrían ser algo tediosas de manipular. En el capítulo 2 se exhiben tales expresiones, las cuales pueden reescribirse de una forma simple al considerar la siguiente definición.

Definición 1. *Consideremos* $\nu \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{n_1} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_r^T \end{pmatrix}$ *con* $q_j \in \mathbb{R}^{n_1}$ *para* $j = 1, ..., r$, *y* $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{n_1} \end{pmatrix}$ *con* $R_i \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$.

a) $\nu \bullet \mathcal{R} = \sum_{i=1}^{n_1} \nu_i R_i \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$.

b) $Q \bullet \mathcal{R} = \begin{pmatrix} q_1 \bullet \mathcal{R} \\ \vdots \\ q_r \bullet \mathcal{R} \end{pmatrix}$.

c) For $U \in \mathbb{R}^{m_1 \times k_1}$, $V \in \mathbb{R}^{m_2 \times k_2}$, $\mathcal{R}(U,V) = U^T \mathcal{R} V = \begin{pmatrix} U^T R_1 V \\ \vdots \\ U^T R_{n_1} V \end{pmatrix}$.

El resultado principal obtenido en el capítulo 2 se menciona en la siguiente proposición. Su demostración se detalla en el mismo capítulo.

Proposición. *Supongamos que el sistema (1.1) satisface las hipótesis de no-hiperbolicidad H1) y H2) en el punto de equilibrio* (x_0, μ_0)*. Entonces, la dinámica sobre la variedad central* m*-parametrizada* k*-dimensional en el punto de equilibrio, está dada por*

$$\dot{y}_1 = J_0 y_1 + N_0 \beta + \beta^T \mathcal{R}_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1^T \mathcal{R}_1 y_1 + \cdots , \tag{1.3}$$

donde $y_1 = W_0(x - x_0)$, $\beta = \mu - \mu_0$, *y*

$$\begin{aligned} N_0 &= W_0 F_\mu(x_0, \mu_0), \\ \mathcal{R}_0 &= \Big(W_0 \bullet \Big(F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - \big(P_0 J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) \big)^T D^2 F(x_0, \mu_0) \Big) \Big) V_0, \\ \mathcal{R}_1 &= \big(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0) \big) (V_0, V_0). \end{aligned} \tag{1.4}$$

El objetivo principal que nos hemos marcado en esta tesis es encontrar condiciones suficientes sobre el campo vectorial F, tal que la dinámica sobre la variedad central (1.3) es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{k-1} &= z_k, \\ \dot{z}_k &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_k z_k + g_2(z), \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde $g_2(z) = a_{11} z_1^2 + \cdots$, es un polinomio homogéneo cuadrático, con $a_{11} \neq 0$.

La estructura para $g_2(z)$ se determina en el capítulo 3. La demostración de la deformación versal (1.5) se detalla en el capítulo 4, y tiene como base las ideas presentadas en [49] and [48].

Observación 1. *Es importante mencionar que, para la bifurcación Takens-Bogdanov* ($k = 2$)*, bajo una condición genérica, la dinámica sobre la variedad central está determinada por el sistema (1.3) truncado hasta orden dos, esto es, el sistema (1.3) y su truncamiento hasta orden*

dos son topológicamente equivalentes. Por lo tanto, en [12] los autores prueban la equivalencia entre (1.3) y (1.5) para $k = 2$. Sin embargo, para $k \geq 3$, aún no se ha demostrado que la dinámica sobre la variedad central esté determinada por su truncamiento hasta orden dos. En este trabajo imponemos la condición H0), la cual supone que la dinámica sobre la variedad central está determinada por el truncamiento hasta orden dos. A esta condición la llameremos ***condición de determinación****.*

H0) Bajo condiciones de no degeneracidad, la dinámica sobre la variedad central (1.3) está determinada por

$$\dot{y}_1 = J_0 y_1 + N_0 \beta + \beta^T \mathcal{R}_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1^T \mathcal{R}_1 y_1,$$

donde N_0, $\mathcal{R}_0$ y $\mathcal{R}_1$ son definidos en (1.5).

Observación 2. *Para $k = 2$, la condición genérica es:*

$$\left(w_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)\right)(v_1, v_1) \neq 0.$$

En el siguiente teorema establecemos las condiciones sobre el campo F para lograr el objetivo principal de esta tesis. Dicho resultado se demuestra en los capítulo posteriores.

Hacemos notar que la hipótesis H0) no es una condición impuesta para el campo F, por tal motivo no se considera en el siguiente resultado.

Teorema. ***(El teorema de la bifurcación k-cero)***
Consideremos el campo vectorial

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq k$ y $F \in \mathcal{C}^r$, $r \geq 2$. Supongamos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, tal que

H1) $F(x_0, \mu_0) = 0$,

H2) $DF(x_0, \mu_0)$ *es similar a* $J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$, *(no hiperbolicidad)*

H3) $\left(w_k \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)\right)(v_1, v_1) \neq 0$, *(no degeneracidad)*

H4) Existe una matriz de rango máximo $D_0 = \begin{pmatrix} d_1^T \\ \vdots \\ d_k^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times m}$, *donde* $\varepsilon = D_0(\mu - \mu_0)$.

(transversalidad)

Entonces, la dinámica sobre la variedad central (1.3) en (x_0, μ_0) es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal (1.5).

Aunque quedó establecido el objetivo de esta tesis y con ello el resultado principal, conviene mencionar algunos detalles que nos encaminarán a establecer una relación entre los parámetros del sistema (1.1) y el sistema (1.5).

El estudio de la equivalencia topológica nos lleva a la obtención de los vectores $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Tales vectores serán llamados *vectores de desdoblamiento* de la bifurcación k cero, los cuales supondremos que son linealmente independientes. La indepencia lineal se sigue de la condición de *tranversalidad*, establecida en el Teorema 1. Los vectores de desdoblamiento son esenciales porque desdoblarán la bifurcación k cero, es decir, nos permitirán establecer una relación entre los parámetros del sistema (1.1) y los parámetros del sistema (1.5).

La relación entre los parámetros ε y μ se lleva acabo mediante la transformación considerada en la siguiente observación.

Observación 3. *La transformación $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, dada por las direcciones de desdoblamiento*

$$T(\mu) = D_0(\mu - \mu_0), \tag{1.6}$$

nos da una aproximación del diagrama de bifurcación en el espacio original de parámetros.

Por ejemplo, para la bifurcación Takens-Bogdanov ($k = 2$), la deformación versal está dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z_2 + a z_1^2 + b z_1 z_2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Para este caso, la transformación $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$, está definida por

$$T(\mu) = \begin{pmatrix} d_1^T(\mu - \mu_0) \\ d_2^T(\mu - \mu_0) \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

De modo que las ecuaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2^2 + \cdots &= 0, \text{ y } \varepsilon_2 \geq 0, \\ \varepsilon_1 + \frac{49}{25}\varepsilon_2^2 + \cdots &= 0, \text{ y } \varepsilon_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

representan curvas de bifurcación silla-nodo, Hopf y homoclínica respectivamente para la deformación versal (1.7), con $a = b = 1$ (ver [44]). Entonces, de la transformación (1.8), $\varepsilon_1 = d_1^T(\mu - \mu_0)$ y $\varepsilon_2 = d_2^T(\mu - \mu_0)$, las ecuaciones

$$\begin{aligned} d_1^T(\mu - \mu_0) &= 0, \\ d_1^T(\mu - \mu_0) + (\mu - \mu_0)^T d_2 d_2^T(\mu - \mu_0) + \cdots &= 0, \text{ and } d_2^T(\mu - \mu_0) \geq 0, \\ d_1^T(\mu - \mu_0) + \frac{49}{25}(\mu - \mu_0)^T d_2 d_2^T(\mu - \mu_0) + \cdots &= 0, \text{ and } d_2^T(\mu - \mu_0) \geq 0, \end{aligned}$$

representan hipersuperficies de bifurcación silla-nodo, Hopf y homoclínica, respectivamente, en el espacio de parámetros original del sistema (1.1).

Capítulo 2

Dinámica sobre la variedad central

Encontrar condiciones generales sobre un campo F, tal que, exista una equivalencia topólogica entre su variedad central y una deformación dada, como lo establece el objetivo principal de esta tesis, nos conduce al estudio de un problema de bifurcación. Es conocido que, en general, el estudio de algunos problemas de bifurcación de campos vectoriales, es un problema complicado. Sin embargo, un primer intento para entender este tipo de problema, consiste en simplificar el problema tanto como sea posible sin que el comportamiento dinámico del campo vectorial cambie.

En la literatura existen técnicas para lograr tal simplificación, la primera de ellas es la teoría de la variedad central y la segunda es la teoría de formas normales. Esta segunda técnica se analiza con más detalle en el capítulo 3.

En este capítulo se aprovecha la primera técnica de simplificación, la teoría de la variedad central, y se toma como inicio para simplificar el campo vactorial. Esta teoría nos provee una medio para reducir la dimensión del espacio de los estados proyectando la dinámica sobre una variedad llamada variedad central, la cual se corresponde con los valores propios con parte real nula, además, es conocido (ver [11]) que es suficiente restringir el analisis de bifurcación al flujo de la variedad central.

Consideremos el campo vectorial m-parametrizado

$$\dot{x} = F(x, \mu), \tag{2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq k$ y $F \in \mathcal{C}^r$, $r \geq 2$.

Es conocido que existen cambios de coordenadas y parámetros para expresar (2.1) en su forma de Jordan, de ese modo, utilizando la teoría de la variedad central es posible determinar la dinámica sobre dicha variedad. Aunque en la literatura el método usual para determinar la dinámica sobre la variedad central consiste en utilizar varios cambios de coordenadas, vale la pena mencionar que en esta tesis se utilizan las propiedades exhibidas en el lema 2 para determinar de una manera sencilla la dinámica mediante un cambio de coordenadas.

Proposición. *Supongamos que el sistema (2.1) satisface las hipótesis de no hiperbolicidad H1) y H2) en el punto de equilibrio (x_0, μ_0). Entonces, la dinámica sobre la variedad central m-parametrizada k-dimensional en el punto de equilibrio, está dada por*

$$\dot{y}_1 = J_0 y_1 + N_0 \beta + \beta^T \mathcal{R}_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1^T \mathcal{R}_1 y_1 + \cdots, \tag{2.2}$$

donde $y_1 = W_0(x - x_0)$, $\beta = \mu - \mu_0$, *y*

$$\begin{aligned} N_0 &= W_0 F_\mu(x_0, \mu_0), \\ \mathcal{R}_0 &= \Big(W_0 \bullet \Big(F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - \big(P_0 J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0)\big)^T D^2 F(x_0, \mu_0)\Big)\Big) V_0, \\ \mathcal{R}_1 &= \big(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)\big)(V_0, V_0). \end{aligned}$$

Demostración. Para expresar el campo vectorial (2.1) en su forma de Jordan, recurrimos a la serie de Taylor del campo al rededor del punto no hiperbólico (x_0, μ_0). De esta forma

$$\begin{aligned} F(x, \mu) =& DF(x_0, \mu_0)(x - x_0) + F_\mu(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0) \\ &+ F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0, x - x_0) + \frac{1}{2} D^2 F(x_0, \mu_0)(x - x_0, x - x_0) + \cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

El cambio de coordenadas utilizado para determinar de manera directa, la dinámica sobre la variedad central, viene dado por

$$\begin{aligned} x =& H(y) = x_0 + V_0 y_1 - K\beta + P_0 y_2, \\ \mu =& \mu_0 + \beta, \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde

$$K = P_0 J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0), \tag{2.5}$$

con P_0 y Q_0 definidas en el capítulo 1.

Derivando (2.4) obtenemos

$$\dot{x} = V_0 \dot{y}_1 + P_0 \dot{y}_2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} W_0 \dot{x} =& \; W_0 V_0 \dot{y}_1 + W_0 P_0 \dot{y}_2, \\ Q_0 \dot{x} =& \; Q_0 V_0 \dot{y}_1 + Q_0 P_0 \dot{y}_2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Del lema 2, $W_0 P_0 = Q_0 V_0 = 0$ y $W_0 V_0 = Q_0 P_0 = I$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= W_0 \dot{x}|_{H(y)}, \\ \dot{y}_2 &= Q_0 \dot{x}|_{H(y)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para determinar $\dot{x}|_{H(y)}$ se sustituye (2.4) en (2.3). Es decir

$$\begin{aligned}
\dot{x}|_{H(y)} &= A\left(V_0y_1 - K\beta + P_0y_2\right) + F_\mu(x_0,\mu_0)\beta \\
&\quad +\beta^T F_{\mu x}(x_0,\mu_0)\left(V_0y_1 - K\beta + P_0y_2\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(V_0y_1 - K\beta + P_0y_2\right)^T D^2F(x_0,\mu_0)\left(V_0y_1 - K\beta + P_0y_2\right) + \cdots, \\
&= AV_0y_1 + \left(F_\mu(x_0,\mu_0) - AK\right)\beta + AP_0y_2 \\
&\quad +\beta^T\left(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - K^TD^2F(x_0,\mu_0)\right)V_0y_1 \\
&\quad +\beta^T\left(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - K^TD^2F(x_0,\mu_0)\right)P_0y_2 + \frac{1}{2}D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1) \\
&\quad +D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,P_0y_2) + \frac{1}{2}D^2F(x_0,\mu_0)(P_0y_2,P_0y_2) + \cdots.
\end{aligned}$$

Distribuyendo correctamente las expresiones y utilizando adecuadamente las identidades del lema 2, se resumen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
W_0\dot{x}|_{H(y)} =& J_0y_1 + W_0F_\mu(x_0,\mu_0)\beta + W_0\left(\beta^T\left(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - K^TD^2F(x_0,\mu_0)\right)V_0y_1\right) \\
&+ W_0\left(\beta^T\left(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - K^TD^2F(x_0,\mu_0)\right)P_0y_2\right) \\
&+ W_0\left(\frac{1}{2}D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1)\right) \\
&+ W_0\left(D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,P_0y_2)\right) \\
&+ W_0\left(\frac{1}{2}D^2F(x_0,\mu_0)(P_0y_2,P_0y_2)\right) + \cdots,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

De manera similar, las propiedades del lema 2 muestran que

$$\begin{aligned}
Q_0\dot{x}|_{H(y)} =& J_1y_2 + Q_0\left(F_\mu(x_0,\mu_0) - AK\right)\beta + Q_0\left(\beta^T\left(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - K^TD^2F(x_0,\mu_0)\right)V_0y_1\right), \\
&+ Q_0\left(\beta^T\left(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - K^TD^2F(x_0,\mu_0)\right)P_0y_2\right), \\
&+ Q_0\left(\frac{1}{2}D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1)\right) + Q_0\left(D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,P_0y_2)\right), \\
&+ Q_0\left(\frac{1}{2}D^2F(x_0,\mu_0)(P_0y_2,P_0y_2)\right) + \cdots.
\end{aligned}$$

Resumiendo la expresión anterior, se tiene que

$$Q_0\dot{x}|_{H(y)} = \quad J_1y_2 + Q_0\left(F_\mu(x_0,\mu_0) - AK\right)\beta + \mathcal{O}(|\beta,y_1,y_2|^2).$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
Q_0\left(F_\mu(x_0,\mu_0) - AK\right) &= Q_0\left(F_\mu(x_0,\mu_0) - A\left(P_0J_1^{-1}Q_0F_\mu(x_0,\mu_0)\right)\right), \\
&= Q_0F_\mu(x_0,\mu_0) - Q_0AP_0J_1^{-1}Q_0F_\mu(x_0,\mu_0), \\
&= Q_0F_\mu(x_0,\mu_0) - J_1J_1^{-1}Q_0F_\mu(x_0,\mu_0), \\
&= Q_0F_\mu(x_0,\mu_0) - Q_0F_\mu(x_0,\mu_0) = 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$Q_0\dot{x}|_{H(y)} = \quad J_1 y_2 + \mathcal{O}(|\beta, y_1, y_2|^2).$$

Con el objetivo de simplificar las expresiones dadas en (2.8) utilizamos la definición 1, pues esta contribuye a reescribir de una forma compacta tales expresiones. Por la estrucura de W_0, se sigue que

$$\begin{aligned} W_0\left[D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1)\right] &= \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_k^T \end{pmatrix} D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1) \\ &= \begin{pmatrix} w_1^T\left(D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1)\right) \\ \vdots \\ w_k^T\left(D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1)\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ahora, considerando que $w_i^T = (\, w_{i1} \cdots w_{in}\,)$ para $i = 1, 2, ..., k$, se tiene la siguiente reestructuración

$$\begin{aligned} w_i^T\left[D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1)\right] &= (\, w_{i1} \cdots w_{in}\,) \begin{pmatrix} y_1^TV_0^TD^2F_1(x_0,\mu_0)V_0y_1 \\ \vdots \\ y_1^TV_0^TD^2F_n(x_0,\mu_0)V_0y_1 \end{pmatrix}, \\ &= \Sigma_{j=1}^n w_{ij}\left(y_1^TV_0^TD^2F_j(x_0,\mu_0)V_0y_1\right), \\ &= y_1^TV_0^T\left(\Sigma_{j=1}^n w_{ij}D^2F_j(x_0,\mu_0)\right)V_0y_1, \\ &= y_1^TV_0^T\left(\left(w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)\right)V_0y_1, \\ &= y_1^T\left(\left(w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)(V_0,V_0)\right)y_1. \end{aligned}$$

Lo anterior permite expresar (2.9) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} W_0\left[D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1)\right] &= \begin{pmatrix} y_1^T\left(\left(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)(V_0,V_0)\right)y_1 \\ \vdots \\ y_1^T\left(\left(w_k \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)(V_0,V_0)\right)y_1 \end{pmatrix}, \\ &= y_1^T\left(\left(W_0 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)(V_0,V_0)\right)y_1. \end{aligned}$$

De manera similar, se obtiene la equivalencia de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} W_0\left(D^2F(x_0,\mu_0)(P_0y_2,P_0y_2)\right) &= y_2^T\left[\left(W_0 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)(P_0,P_0)\right]y_2, \\ W_0\left(D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,P_0y_2)\right) &= y_1^T\left[\left(W_0 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)(V_0,P_0)\right]y_2, \\ W_0\left(\beta^T\left(F_{\mu x}(x_0,\mu_0)\right)P_0y_2\right) &= \beta^T\left[W_0 \bullet \left(F_{\mu x}(x_0,\mu_0)\right)P_0\right]y_2. \end{aligned}$$

Es evidente entonces que (2.7) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= J_0y_1 + N_0\beta + \beta^T\mathcal{R}_0y_1 + \beta^T\mathcal{S}_0y_2 + \frac{1}{2}y_1^T\mathcal{R}_1y_1 + y_1^T\mathcal{R}_2y_2 + \frac{1}{2}y_2^T\mathcal{R}_3y_2 + \cdots, \\ \dot{y}_2 &= J_1y_2 + \mathcal{O}(|\beta, y_1, y_2|^2), \end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
N_0 &= W_0 F_\mu(x_0,\mu_0),\\
\mathcal{R}_0 &= \Big(W_0 \bullet \Big(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - \big(P_0 J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0,\mu_0)\big)^T D^2F(x_0,\mu_0)\Big)\Big) V_0,\\
\mathcal{S}_0 &= \Big(W_0 \bullet \Big(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - \big(P_0 J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0,\mu_0)\big)^T D^2F(x_0,\mu_0)\Big)\Big) P_0,\\
\mathcal{R}_1 &= \big(W_0 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\big)(V_0,V_0),\\
\mathcal{R}_2 &= \big(W_0 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\big)(V_0,P_0),\\
\mathcal{R}_3 &= \big(W_0 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\big)(P_0,P_0).
\end{aligned}
$$

El siguiente paso es utilizar el Teorema de la Variedad Central, el cual nos asegura que existe una variedad central $y_2 = g(\beta, y_1) = \mathcal{O}(|\beta, y_1|^2)$.

Conviene aclarar que por la condición H0) sólo nos interesan los términos cuadráticos en la dinámica. Entonces, no es necesario calcular la variedad central $y_2 = g(\beta, y_1)$.

De este modo, la dinámica sobre la variedad central está dado por

$$
\dot{y}_1 = J_0 y_1 + N_0\beta + \beta^T \mathcal{R}_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1^T \mathcal{R}_1 y_1 + \cdots .
$$

$\square$

Capítulo 3

Forma normal

Dado el campo vectorial

$$\dot{x} = F(x, \mu). \tag{3.1}$$

Se sabe, del capítulo 2, que la dinámica sobre la variedad central del campo (3.1), truncada hasta orden dos, está dada por el campo vectorial

$$\dot{y}_1 = J_0 y_1 + N_0 \beta + \beta^T \mathcal{R}_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1^T \mathcal{R}_1 y_1. \tag{3.2}$$

Dado que la dimensión de la variedad central es k, con $k < n$, esto simplifica el problema de determinar el comportamiento cualitativo del campo vectorial (3.1) cerca del punto de equilibrio (x_0, μ_0). Sin embargo, analizar este problema podría ser una tarea difícil. Por tal motivo, para estudiar la dinámica del campo (3.2) es conveniente expresar dicha dinámica de la forma más simple.

Una herramienta utilizada en el marco de los sistemas no lineales, es la teoría de formas normales. Esta teoría nos proporciona un método para simplificar el campo (3.2). La idea principal del método consiste en definir un cambio de coordenadas en una vecindad del punto de equilibrio $(0, 0)$, tal que, la expresión analítica del campo (3.2) se tan sencilla como sea posible, en el sentido de que, mediante el cambio de coordenadas es posible eliminar los términos que no son esenciales en el comportamiento dinámico del campo. Se sabe que la estructura de la forma normal está determinada completamente por la parte lineal del campo vectorial (3.2) (ver [59]). De esta manera, se obtiene un sistema canónico que representa una clase amplia de sistemas, desechando los términos no esenciales. A la expresión simplificada bajo el cambio de coordenadas se le conoce como forma normal (ver [44] y [59]).

Existe un vasto estudio sobre formas normales, algunas referencias que siguen el desarrollo de este concepto son [44], [1], [59] y [14].

En términos generales, la forma normal de un sistema de ecuaciones diferenciales es el elemento más simple de una clase de equivalencia de sistemas diferenciales que poseen el mismo comportamiento cualitativo. Por ello, en la siguiente sección establecemos cambios de coordenadas tal que la expresión analíta de la dinámica sobre la variedad central pueda simplificarse.

3.1. Términos cuadráticos

De acuerdo a la hipótesis H0), la dinámica (3.2) está determinada por sus términos cuadráticos. Para simplificar estos términos consideremos el siguiente cambio de coordenadas

$$y_1 = h(z) = z + \frac{1}{2} z^T \mathcal{L}_2 z, \tag{3.3}$$

donde $\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} L_{21} \\ \vdots \\ L_{2k} \end{pmatrix}$, con $L_{2j} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, para $j = 1, 2, \ldots, k$.

El objetivo principal en esta sección es encontrar $\mathcal{L}_2$ tal que, el cambio de coordenadas (3.3) simplifica los términos cuadráticos en el sistema

$$\dot{y}_1 = J_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1^T \mathcal{R}_1 y_1. \tag{3.4}$$

Lema 3. *El cambio de coordenadas (3.3) transforma (3.4) en*

$$\dot{z} = J_0 z + \frac{1}{2} z^T \widetilde{\mathcal{R}}_1 z,$$

donde

$$\widetilde{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 + \overline{\mathcal{L}}_2 - 2\mathcal{L}_2 J_0, \quad y \quad \overline{\mathcal{L}}_2 = \begin{pmatrix} L_{22} \\ \vdots \\ L_{2k} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Usando la regla de la cadena, derivamos (3.3), entonces

$$\dot{y}_1 = \left(I + z^T \mathcal{L}_2\right) \dot{z} \;\Leftrightarrow\; \dot{z} = \left(I + z^T \mathcal{L}_2\right)^{-1} \dot{y}_1|_{y_1 = h(z)}.$$

Dado que el cambio de coordenadas (3.3) tiene inversa en una vecindad del origen, esto es, para $|z| \approx 0$, la matriz inversa $\left(I + z^T \mathcal{L}_2\right)^{-1}$ puede expresarse como

$$\left(I + z^T \mathcal{L}_2\right)^{-1} = I - z^T \mathcal{L}_2 + \ldots, \tag{3.5}$$

entonces el sistema $\dot{z} = \left(I + z^T \mathcal{L}_2\right)^{-1} \dot{y}_1$ puede escribirse como

$$\dot{z} = \left(I - z^T \mathcal{L}_2 + \ldots\right) \dot{y}_1|_{y_1 = h(z)}. \tag{3.6}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1|_{y_1=h(z)} &= J_0 h(z) + \frac{1}{2} h(z)^T \mathcal{R}_1 h(z), \\
&= J_0 \left(z + \frac{1}{2} z^T \mathcal{L}_2 z \right) + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{2} z^T \mathcal{L}_2 z \right)^T \mathcal{R}_1 \left(z + \frac{1}{2} z^T \mathcal{L}_2 z \right), \\
&= J_0 z + \frac{1}{2} J_0 z^T \mathcal{L}_2 z + \frac{1}{2} z^T \mathcal{R}_1 z.
\end{aligned}$$

Reescribimos la expresión $J_0 z^T \mathcal{L}_2 z$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
J_0 z^T \mathcal{L}_2 z &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^T L_{21} z \\ \vdots \\ z^T L_{2k} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^T L_{22} z \\ \vdots \\ z^T L_{2k} z \\ 0 \end{pmatrix}, \\
&= z^T \begin{pmatrix} L_{22} \\ \vdots \\ L_{2k} \\ 0 \end{pmatrix} z = z^T \overline{\mathcal{L}}_2 z.
\end{aligned}$$

Se concluye entonces que

$$\dot{y}_1|_{y_1=h(z)} = J_0 z + \frac{1}{2} z^T \left(\mathcal{R}_1 + \overline{\mathcal{L}}_2 \right) z + \cdots,$$

entonces, (3.6) se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \left(I - z^T \mathcal{L}_2 + ... \right) \dot{y}_1|_{y_1=h(z)}, \\
&= \left(I - z^T \mathcal{L}_2 + ... \right) \left(J_0 z + \frac{1}{2} z^T \left(\mathcal{R}_1 + \overline{\mathcal{L}}_2 \right) z + \cdots \right), \\
&= J_0 z + \frac{1}{2} z^T \left(\mathcal{R}_1 + \overline{\mathcal{L}}_2 - 2\mathcal{L}_2 J_0 \right) z + \cdots. \\
&= J_0 z + \frac{1}{2} z^T \widetilde{\mathcal{R}}_1 z + \cdots.
\end{aligned}$$

□

En el análisis anterior obtuvimos una serie de simplificaciones las cuales nos llevan a concluir que el término cuadrático $y_1^T \mathcal{R}_1 y_1$, bajo el cambio de coordenadas (3.3), se transforma en $z^T \left(\overline{\mathcal{L}}_2 + \mathcal{R}_1 - 2\mathcal{L}_2 J_0 \right) z$. Dado que $\mathcal{L}_2$ es desconocido, se busca $\mathcal{L}_2$ para simplificar la expresión $\overline{\mathcal{L}}_2 + \mathcal{R}_1 - 2\mathcal{L}_2 J_0$.

La simplificación del término cuadrático $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ sugiere definir la siguiente función.
Sea $G : \mathbb{R}^{k\times k} \to \mathbb{R}^{k\times k}$ dada por $G(X) = XJ_0 + J_0^T X$, para $X^T = X$. G satisface las siguientes

propiedades

$$\begin{array}{llll} P1) & G(X+Y) & = & G(X)+G(Y), \\ P2) & G^r(X) & = & (G\cdot\ldots\cdot G)(X) = \Sigma_{i=0}^{r}\begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix}\left(J_0^T\right)^i X J_0^{r-i}, \\ P3) & e_1^T G^r(X) e_1 & = & 0, \text{ para } r=1,\ldots,k, \ . \end{array} \tag{3.7}$$

donde $e_1 = (1,0,\ldots,0)^T \in \mathbb{R}^k$.

La demostración de las propiedades P1) y P3) son directas, mientras que la propiedad P2) puede probarse por inducción matemática.

La siguiente observación es útil para la demostración del siguiente lema, el cual establece la existencia de una una forma cuadrática $g_2(z)$ la cual queda determinada por el tensor $\widetilde{\mathcal{R}}_1$.

Observación 4. *Dado $J_0 \in \mathcal{R}^{k\times k}$ y $\mathcal{L}_2 \in \mathcal{R}^{k\times(k\times k)}$ se sigue que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 J_0 &= \begin{pmatrix} L_{21} \\ \vdots \\ L_{2k} \end{pmatrix} J_0 = \begin{pmatrix} L_{21}J_0 \\ \vdots \\ L_{2k}J_0 \end{pmatrix}, \\ J_0^T \mathcal{L}_2 &= J_0^T \begin{pmatrix} L_{21} \\ \vdots \\ L_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0^T L_{21} \\ \vdots \\ J_0^T L_{2k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lema 4. *Existe $\mathcal{L}_2$ tal que $\frac{1}{2}z^T\widetilde{\mathcal{R}}_1 z = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_2(z) \end{pmatrix}$, donde $g_2(z) = a_{11}z_1^2 + \cdots$, con $a_{11} = \frac{1}{2}\left(w_k \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)(v_1,v_1)$.*

Demostración. Es conocido que si M es una matriz cuadrada, entonces

$$x^T M x = \frac{1}{2}x^T(M+M^T)x. \tag{3.8}$$

Se aclara que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1^T$, similarmente $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2^T$, pues tanto $\mathcal{R}_1$ como $\mathcal{L}_2$ son tensores de matrices asociadas a una forma cuadrática. Esto permite concluir que $\overline{\mathcal{L}}_2 = \overline{\mathcal{L}}_2^T$. Sin embargo, es claro que $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ carece de esta propiedad, pues el término $\mathcal{L}_2 J_0$ no es simétrico, como lo muestra el siguiente análisis

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_2 J_0)^T &= \left(\begin{pmatrix} L_{21}J_0 \\ \vdots \\ L_{2k}J_0 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} (L_{21}J_0)^T \\ \vdots \\ (L_{2k}J_0)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0^T L_{21} \\ \vdots \\ J_0^T L_{2k} \end{pmatrix}, \\ &= J_0^T \begin{pmatrix} L_{21} \\ \vdots \\ L_{2k} \end{pmatrix} = J_0^T \mathcal{L}_2. \end{aligned}$$

Se sigue de (3.8)

$$\begin{aligned}
z^T\widetilde{\mathcal{R}}_1 z &= \frac{1}{2}z^T\left(\widetilde{\mathcal{R}}_1+\widetilde{\mathcal{R}}_1^T\right)z,\\
&= \frac{1}{2}z^T\left(\overline{\mathcal{L}}_2+\mathcal{R}_1-2\mathcal{L}_2J_0+\overline{\mathcal{L}}_2+\mathcal{R}_1-2J_0^T\mathcal{L}_2\right)z,\\
&= \frac{1}{2}z^T\left(2\overline{\mathcal{L}}_2+2\mathcal{R}_1-2\mathcal{L}_2J_0-2J_0^T\mathcal{L}_2\right)z,\\
&= z^T\left(\mathcal{R}_1+\overline{\mathcal{L}}_2-\mathcal{L}_2J_0-J_0^T\mathcal{L}_2\right)z,\\
&= z^T\overline{\mathcal{R}}_1 z,
\end{aligned}$$

Si definimos $\overline{\mathcal{R}}_1 = \begin{pmatrix}\overline{R}_{11}\\ \vdots\\ \overline{R}_{1k}\end{pmatrix}$ y $\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix}R_{11}\\ \vdots\\ R_{1k}\end{pmatrix}$, entonces, se desprenden las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{R}}_1 &= \mathcal{R}_1+\overline{\mathcal{L}}_2-\mathcal{L}_2J_0-J_0^T\mathcal{L}_2,\\
&= \begin{pmatrix}
R_{11}+L_{22}-L_{21}J_0-J_0^TL_{21}\\
R_{12}+L_{23}-L_{22}J_0-J_0^TL_{22}\\
\vdots\\
R_{1,k-1}+L_{2k}-L_{2,k-1}J_0-J_0^TL_{2,k-1}\\
R_{1k}-L_{2k}J_0-J_0^TL_{2k}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{R}_{11}\\ \overline{R}_{21}\\ \vdots\\ \overline{R}_{1k-1}\\ \overline{R}_{1k}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Claramente, es posible determinar L_{2i} para $i = 2,\ldots,k$ tal que $\overline{R}_{1j} = 0$ para $j = 1,2,\ldots,k-1$, es decir, dado que en el tensor $\mathcal{L}_2$ cada matriz L_{2i} representa una matriz de parámetros libres, se emplea esa libertad para anular los primeros $k-1$ términos del tensor $\overline{\mathcal{R}}_1$. Dicho en términos algebraicos

$$\begin{aligned}
R_{11}+L_{22}-L_{21}J_0-J_0^TL_{21} &= 0,\\
R_{12}+L_{23}-L_{22}J_0-J_0^TL_{22} &= 0,\\
&\vdots\\
R_{1,k-1}+L_{2k}-L_{2,k-1}J_0-J_0^TL_{2,k-1} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Está claro que (3.9) se tienen al considerar las siguientes elecciones para cada L_{2r} con $r = 2,\ldots,k$

$$\begin{aligned}
L_{22} &= L_{21}J_0+J_0^TL_{21}-R_{11},\\
L_{23} &= L_{22}J_0+J_0^TL_{22}-R_{12},\\
&\vdots\\
L_{2k} &= L_{2,k-1}J_0+J_0^TL_{2,k-1}-R_{1,k-1}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Estas elecciones nos lleva a simplificar el tensor $\overline{\mathcal{R}}_1$. De (3.10) se sigue que

$$\overline{\mathcal{R}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \overline{R}_{1k} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, de manera natural definimos $g_2(z) = \frac{1}{2} z^T \overline{R}_{1k} z$. Se tiene entonces la siguiente equivalencia

$$\frac{1}{2} z^T \widetilde{\mathcal{R}}_1 z = \frac{1}{2} z^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \overline{R}_{1k} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{2} z^T \overline{R}_{1k} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_2(z) \end{pmatrix}.$$

El análisis anterior demuestra la existencia de la forma cuadrática $g_2(z)$. Esto demuestra la primera parte del resultado.

A continuación se demuestra la estructura general para el coeficiente a_{11}.

Las propiedades establecidas en (3.7), que caracteriza a la función G, nos conducen a reescribir (3.10) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
L_{22} &= G(L_{21}) - R_{11}, \\
L_{23} &= G(L_{22}) - R_{12} = G^2(L_{21}) - G(R_{11}) - R_{12}, \\
&\vdots \\
L_{2k} &= G(L_{2,k-1}) - R_{1,k-1}, \\
&= G^{k-1}(L_{21}) - G^{k-2}(R_{11}) - \cdots - G(R_{1,k-2}) - R_{1,k-1}, \\
\overline{R}_{1k} &= R_{1k} - G(L_{2k}), \\
&= R_{1k} + G(R_{1,k-1}) + \cdots + G^{k-1}(R_{11}) - G^k(L_{21}).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

El análisis anterior nos aporta una estructura general de $\overline{R}_{1k}$. Aunque L_{21} es desconocida y por ello representa una matriz de parámetros libres, se observa que $g_2(z)$ está determinada por $\overline{R}_{1k}$.

Para probar la estructura de a_{11} es necesario identificar los elementos de $\mathcal{R}_1$. En consecuencia, de la Proposición 1.

$$\mathcal{R}_1 = \left(W_0 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(V_0, V_0) = \begin{pmatrix} \left(w_1 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(V_0, V_0) \\ \left(w_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(V_0, V_0). \\ \vdots \\ \left(w_k \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(V_0, V_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} \\ \vdots \\ R_{1k} \end{pmatrix}.$$

Hemos de hacer notar que $R_{1i} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ para $i = 1, 2..., k$. En particular $R_{1k} = \left(w_k \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(V_0, V_0)$. Utilizando la definición 1 es posible disponer de los elementos de R_{1k}. Dado que $V_0 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} R_{1k} &= \left(w_k \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(V_0, V_0), \\ &= \begin{pmatrix} \left(w_k \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_1, v_1) & \cdots & \left(w_k \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_1, v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(w_k \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_k, v_1) & \cdots & \left(w_k \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_k, v_k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El coeficiente a_{11} queda determinado por la matriz R_{1k}. Esto es, debido a la propiedad P3) establecida en (3.7), es sencillo verificar que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2}e_1^T\overline{R}_{1k}e_1 = \frac{1}{2}e_1^T\left(R_{1k} + G(R_{1,k-1}) + \cdots + G^{k-1}(R_{11}) - G^k(L_{21})\right)e_1, \\ &= \frac{1}{2}e_1^T R_{1k}e_1 = \frac{1}{2}\left(w_k \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_1, v_1). \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración. □

Observación 5. *Bajo las hipótesis de no hiperbolicidad, H1) y H2), el lema 4 nos proporciona un método general para simplificar los términos cuadráticos sobre la variedad central del campo vectorial (3.1).*

Con la demostración de Lema 4 se tiene que es posible determinar una forma normal para el campo vectorial dado en la proposición 1. Esto nos lleva a deducir que es posible establecer una equivalencia topológica entre los términos cuadráticos $y_1^T\mathcal{R}_1y_1$ y $z^T\widetilde{\mathcal{R}}_1z$.

El caso $k = 2$ está bien estudiado en la literatura, y es conocido que $g_2(z) = a_{11}z_1 + a_{12}z_1z_2$, además los coeficientes a_{11} y a_{12} están bien definidos. Sin embargo, en el siguiente análisis se calcula $g_2(z)$ para $k = 2$ y $k = 3$, así como sus respectivo coeficientes, utilizando el Lema 4.

En general, dado $k \geq 2$, es posible determinar una estructura única para $g_2(z)$, de este modo, tenemos una una estructura general de una forma normal. El siguiente resultado tiene como base las propiedades definidas en (3.7). Aunque su demostración está lejos del objetivo del trabajo se incluye un apéndice con el código para determinar $g_2(z)$ y sus respectivos coeficientes. Para simplificar los coeficientes a_{ij} consideremos la siguiente observación.

Observación 6. *Para $i, j, s = 1, \ldots, k$, definimos*

$$r_{ij}^s = \left(w_s \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_i, v_j).$$

A efectos de cálculos posteriores, por la observación 6 se deduce que

$$R_{1k} = \begin{pmatrix} r_{11}^k & \cdots & r_{1k}^k \\ \vdots & & \vdots \\ r_{1k}^k & \cdots & r_{kk}^k \end{pmatrix}$$

Lema 5. *Sea $k, n \in \mathbb{N}$, con $k \geq 2$, entonces*

(1) Si $k = 2n$

$$g_2(z) = \sum_{i=1}^{k} a_{1,i} z_1 z_i + \sum_{i=2}^{k} a_{2,i} z_2 z_i + \cdots + \sum_{i=n}^{k} a_{n,i} z_n z_i.$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} r_{11}^{k}, \\ a_{ii} &= \sum_{j=1}^{i-1} \binom{2i-2j-1}{i-1-j} r_{j,j}^{k-2i+2j} + \sum_{j=2}^{i} \binom{2i-j-1}{i-1} r_{1,j}^{k+1-2i+j} + \sum_{j=3}^{i} \binom{2i-j-2}{i-2} r_{2,j}^{k+2-2i+j} \\ &\quad + \cdots + \sum_{j=i}^{i} \binom{2i-j-(i-1)}{1} r_{i-1,j}^{k+(i-1)-2i+j} + \frac{1}{2} r_{ii}^{k}, \quad i = 2, ..., n. \end{aligned}$$

(2) Si $k = 2n + 1$, $g_2(z)$ queda determinada por la paridad de n.

(i) Para $n = 2m$

$$g_2(z) = \sum_{i=1}^{k} a_{1,i} z_1 z_i + \cdots + \sum_{i=n}^{k} a_{n,i} z_n z_i + \sum_{j=n+1}^{\frac{3k+1}{4}} a_{n+1,2j-n-1} z_{n+1} z_{2j-n-1}.$$

(ii) Para $n = 2m + 1$

$$g_2(z) = \sum_{i=1}^{k} a_{1i} z_1 z_i + \cdots + \sum_{i=n}^{k} a_{ni} z_n z_i + \sum_{j=n+1}^{\frac{3k-1}{4}} a_{n+1\ 2j-n-1} z_{n+1} z_{2j-n-1}.$$

Conviene mencionar que m queda determinado al fijar un valor de k.

3.2. Coeficientes de la forma normal

Está claro que, para $k \geq 2$, el Lema 4 nos proporciona una manera directa para determinar una forma normal y sus coeficientes. A continuación se calcula una forma normal para el caso $k = 2$ y $k = 3$. Hacemos notar que para $k = 2$, los coeficientes a_{11} y a_{12} están definidos en [12]. Aunque en [19] se definen los coeficientes de la forma normal para $k = 3$, el análisis se hace para el caso degenerado.

Los resultados establecidos anteriormente nos determinan los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{13} y a_{22} de la forma normal para $k = 3$.

3.2.1. Coeficientes para $k = 2$

Mediante el uso del Lema 5, para el caso $k = 2$, la estructura para $g_2(z)$ viene expresada por

$$g_2(z) = a_{11}z_1^2 + a_{12}z_1z_2.$$

Por lo cual, se deduce que la forma normal en este caso es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= a_{11}z_1^2 + a_{12}z_1z_2. \end{aligned}$$

Por otro lado, a efectos de calcular los coeficientes a_{11} y a_{12}, se sigue que $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L_{21} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}$, $R_{1i} = \begin{pmatrix} r_{11}^i & r_{12}^i \\ r_{12}^i & r_{22}^i \end{pmatrix}$ para $i = 1, 2$.

De acuerdo al Lema 4 los coeficientes de $g_2(z)$ quedan determinados por la matriz $\overline{R}_{12}$. Para $k = 2$ se tiene que

$$\overline{R}_{12} = R_{12} + G(R_{1,1}) - G^2(L_{21}).$$

Mediante la definición de la función G, definida en el lema 4, se tiene que

$$\begin{aligned} G(R_{1,1}) &= R_{1,1}J_0 + J_0^T R_{1,1} = \begin{pmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 \\ r_{11}^1 & r_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 \\ r_{12}^1 & r_{22}^1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & r_{11}^1 \\ r_{11}^1 & 2r_{12}^1 \end{pmatrix}, \\ G^2(L_{21}) &= L_{21}J_0^2 + 2J_0^T L_{21}J_0 + \left(J_0^T\right)^2 L_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2l_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, con estos cálculos obtenemos la simplificación para determinar los coeficientes. Se sigue que

$$\overline{R}_{12} = R_{12} + G(R_{1,1}) - G^2(L_{21}) = \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11}^1 + r_{12}^2 \\ r_{11}^1 + r_{12}^2 & r_{22}^2 + 2r_{12}^1 - 2l_{11} \end{pmatrix}.$$

Dado que l_{11} es un parámetro libre, es posible utilizar esta libertad del parámetro para simplificar $\overline{R}_{12}$. De este modo, si $l_{11} = r_{12}^1 + \frac{1}{2}r_{22}^2$, la matriz $\overline{R}_{12}$ queda determinada por la siguiente expresión

$$\overline{R}_{12} = \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11}^1 + r_{12}^2 \\ r_{11}^1 + r_{12}^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De lema 4, $g_2(z) = \frac{1}{2}z^T\overline{R}_{12}z$. Si $z^T = (z_1, z_2)$, entonces

$$\begin{aligned} g_2(z) &= \frac{1}{2}(z_1, z_2) \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11}^1 + r_{12}^2 \\ r_{11}^1 + r_{12}^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{2}r_{11}^2 z_1^2 + \left(r_{11}^1 + r_{12}^2\right) z_1 z_2. \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} r_{11}^2, \\ a_{12} &= r_{11}^1 + r_{12}^2. \end{aligned}$$

3.2.2. Coeficientes para $k = 3$

Pasamos, por último, a determinar la forma normal para el caso $k = 3$. De acuerdo al lema 5, la estructura para $g_2(z)$ está definida por

$$g_2(z) = a_{11} z_1^2 + a_{12} z_1 z_2 + a_{13} z_1 z_3 + a_{22} z_2^2.$$

En consecuencia, la forma normal está representada por el campo vectorial

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= a_{11} z_1^2 + a_{12} z_1 z_2 + a_{13} z_1 z_3 + a_{22} z_2^2. \end{aligned}$$

De manera similar, se determinan los coeficientes. En este caso, se tiene que

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_{21} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} \text{ y } R_{1i} = \begin{pmatrix} r_{11}^i & r_{12}^i & r_{13}^i \\ r_{12}^i & r_{22}^i & r_{23}^i \\ r_{13}^i & r_{23}^i & r_{33}^i \end{pmatrix},$$

para $i = 1, 2, 3$.

De forma equivalente, los coeficientes para la forma normal en este caso, quedan determinado por la matriz

$$\overline{R}_{12} = R_{13} + G\left(R_{12}\right) + G^2\left(R_{11}\right) - G^3\left(L_{21}\right).$$

Un poco de álgebra muestra que, por definición de G

$$\begin{aligned} G\left(R_{12}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & r_{11}^2 & r_{12}^2 \\ r_{11}^2 & 2r_{12}^2 & r_{13}^2 + r_{22}^2 \\ r_{12}^2 & r_{13}^2 + r_{22}^2 & 2r_{23}^2 \end{pmatrix}, \\ G^2\left(R_{11}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{11}^1 \\ 0 & 2r_{11}^1 & 3r_{12}^1 \\ r_{11}^1 & 3r_{12}^1 & 2r_{13}^1 + 2r_{22}^1 \end{pmatrix}, \\ G^3\left(L_{21}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3l_{11} \\ 0 & 3l_{11} & 3l_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se deduce entonces de inmediato que, de (3.11)

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{12} &= R_{13} + G\left(R_{12}\right) + G^2\left(R_{11}\right) - G^3\left(L_{21}\right), \\
&= \begin{pmatrix} r_{11}^3 & r_{12}^3 + r_{11}^2 & r_{13}^3 + r_{12}^2 + r_{11}^1 \\ r_{12}^3 + r_{11}^2 & r_{22}^3 + 2r_{12}^2 + 2r_{11}^1 & r_{23}^3 + r_{13}^2 + r_{22}^2 + 3r_{12}^1 - 3l_{11} \\ r_{13}^3 + r_{12}^2 + r_{11}^1 & r_{23}^3 + r_{13}^2 + r_{22}^2 + 3r_{12}^1 - 3l_{11} & r_{33}^3 + 2r_{23}^2 + 2r_{13}^1 + 2r_{22}^1 - 6l_{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De la matriz anterior, notamos que los parámetros l_{11} y l_{12} son libres. Si tomamos la siguiente definición

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \frac{1}{3}\left(r_{23}^3 + r_{13}^2 + r_{22}^2 + 3r_{12}^1\right), \\
l_{12} &= \frac{1}{6}\left(r_{33}^3 + 2r_{23}^2 + 2r_{13}^1 + 2r_{22}^1\right).
\end{aligned}$$

Se tiene la siguiente simplificación

$$\overline{R}_{12} = \begin{pmatrix} r_{11}^3 & r_{12}^3 + r_{11}^2 & r_{13}^3 + r_{12}^2 + r_{11}^1 \\ r_{12}^3 + r_{11}^2 & r_{22}^3 + 2r_{12}^2 + 2r_{11}^1 & 0 \\ r_{13}^3 + r_{12}^2 + r_{11}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $z^T = (z_1, z_2, z_3)$, del Lema 4 se sigue

$$\begin{aligned}
g_2(z) &= \frac{1}{2} z^T \overline{R}_{13} z = \frac{1}{2} z^T \begin{pmatrix} r_{11}^3 & r_{12}^3 + r_{11}^2 & r_{13}^3 + r_{12}^2 + r_{11}^1 \\ r_{12}^3 + r_{11}^2 & r_{22}^3 + 2r_{12}^2 + 2r_{11}^1 & 0 \\ r_{13}^3 + r_{12}^2 + r_{11}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix} z, \\
&= a_1 z_1^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_1 z_3 + a_4 z_2^2,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} r_{11}^3, \\
a_2 &= r_{11}^2 + r_{12}^3, \\
a_3 &= r_{11}^1 + r_{12}^2 + r_{13}^3, \\
a_4 &= \frac{1}{2}\left(2r_{11}^1 + 2r_{12}^2 + r_{22}^3\right).
\end{aligned}$$

El análisis que se empleó para determinar la forma normal en el

Capítulo 4

Deformación versal

En este capítulo seguimos el método ultilizado en [49] para determinar el desdoblamiento clásico de una singularidad. En el capítulo anterior, se utilizó la teoría de formas normales para determinar la forma normal más simple para un sistema general. En el estudio de dinámica es común utilizar una perturbación del sistema, a esta perturbación se le conococe como *deformación*. Tal perturbación depende de una serie de parámetros los cuales, mediante un cambio de coordenadas es posible minimizar. Al sistema simplificado se le conoce como *deformación versal*. La técnica empleada en [citar Murdok] parte del hecho de tener el sistema en su forma normal simple.

Consideremos un sistema en su forma normal truncado hasta orden 2

$$\dot{x} = J_0 x + F_2(x), \tag{4.1}$$

donde $F_2(x) = \frac{1}{2} x \mathcal{R}_1 x$ son términos cuadráticos y J_0 es la matriz definida en el capítulo 1.

Consideremos una perturbación arbitraria definida de la siguiente manera

$$\varepsilon\,(p + Qx)$$

donde $p \in \mathbb{R}^k$, $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $Q_i^T = (q_{i1},\ \cdots,\ q_{ik})$ y $\varepsilon \approx 0$. Entonces, el sistema

$$\dot{x} = J_0 x + F_2(x) + \varepsilon\,(p + Qx)\,, \tag{4.2}$$

es llamado *sistema deformado*, el cual representa un sistema parametrizado con k^2+k parámetros. El objetivo en este capítulo será reducir el número de parámetros de tal forma que podamos estudiar el comportamiento de las soluciones del sistema deformado. Al sistema con la mínima cantidad de parámetros será llamado *deformación versal* del sistema.

Observación 7. *Para probar el siguiente lema usaremos las siguientes operaciones elementales. Si* $B = \begin{pmatrix} B^1 & B^2 & \cdots & B^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ *está particionado en* k *columnas, entonces*

$$BJ_0 = \begin{pmatrix} B^1 & B^2 & \cdots & B^k \end{pmatrix} J_0 = \begin{pmatrix} 0 & B^1 & B^2 & \cdots & B^{k-1} \end{pmatrix}$$

Lema 6. *Sea*

$$\dot{x} = J_0 x + F_2(x) + \varepsilon\,(p + Qx) \tag{4.3}$$

una deformación del sistema (4.1) con $p \in \mathbb{R}^k$, $Q \in \mathbb{R}^{k\times k}$ *y* $\varepsilon \approx 0$. *Entonces, si* $a_1 \neq 0$, *existe un cambio de coordenadas*

$$x = h(y) = y + \varepsilon\,(q + Ly)\,, \tag{4.4}$$

con $q \in \mathbb{R}^k$ *y* $L \in \mathbb{R}^{k\times k}$, *tal que una deformación versal de (4.3) es*

$$\dot{y} = J_0 y + F_2(y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_k \end{pmatrix} y$$

Demostración. A efectos de encontrar la deformación versal, de (4.4) se sigue que

$$\dot{x} = (I + \varepsilon L)\,\dot{y},$$

equivalentemente, obtenemos un nuevo sistema con la misma forma

$$\dot{y} = (I + \varepsilon L)^{-1}\,\dot{x}. \tag{4.5}$$

Considerando que, para $|\varepsilon| \approx 0$ se tiene

$$(I + \varepsilon L)^{-1} = I - \varepsilon L + \mathcal{O}\left(|\varepsilon|^2\right), \tag{4.6}$$

donde $\mathcal{O}\left(|\varepsilon|^2\right)$ denota términos de orden mayor o igual a 2. En el sentido de que es prosible reescribir el sistema (4.3) bajo el cambio de coordenadas (4.4), se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x}|_{h(y)} &= J_0 h(y) + F_2\left(h(y)\right) + \varepsilon\left[p + Qh(y)\right], \\ \dot{x} &= J_0\left[y + \varepsilon\,(q + Ly)\right] + F_2\left(y + \varepsilon\,(q + Ly)\right) + \varepsilon\left[p + Q\left(y + \varepsilon\,(q + Ly)\right)\right]. \end{aligned}$$

El análisis posterior exige expresar el campo vectorial $F_2(x)$ en serie de Taylor alrededor de y. Partiendo de ese punto utilizamos (4.4) para determinar la serie de Taylor de $F_2\left(y + \varepsilon\,(q + Ly)\right)$ alrededor de y. Se sigue que

$$F_2\left(y + \varepsilon\,(q + Ly)\right) = F_2\left(y\right) + DF_2\left(y\right)\left[\varepsilon\,(q + Ly)\right] + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

Siguiendo la idea, el análisis anterior no lleva a reescribir el sistema $\dot{x}$. A vista de la expresión que adopta $F_2\left(y + \varepsilon\,(q + Ly)\right)$, se sigue

$$\begin{aligned} \dot{x}|_{h(y)} &= J_0\left[y + \varepsilon\,(q + Ly)\right] + F_2\left(y + \varepsilon\,(q + Ly)\right) + \varepsilon\left[p + Q\left(y + \varepsilon\,(q + Ly)\right)\right], \\ &= J_0\left[y + \varepsilon\,(q + Ly)\right] + F_2\left(y\right) + DF_2\left(y\right)\left[\varepsilon\,(q + Ly)\right] \\ &\quad + \varepsilon\left[p + Q\left(y + \varepsilon\,(q + Ly)\right)\right] + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), \\ &= J_0 y + F_2(y) + \varepsilon\left[p + J_0 q + Qy + J_0 Ly + DF_2(y)q\right] + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), \end{aligned}$$

En lo que respecta al término $DF_2(y)$, es claro que $DF_2(y) = y^T\mathcal{R}_1$. De este modo, tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= J_0y + F_2(y) + \varepsilon\left[p + J_0q + Qy + J_0Ly + y^T\mathcal{R}_1q\right] + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right),\\ &= J_0y + F_2(y) + \varepsilon\left[p + J_0q + \left(Q + J_0L + q^T\mathcal{R}_1\right)y\right] + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right).\end{aligned}$$

Debido a la estructura que presenta el sistema, es natural considerar la siguiente asignación:

$$\begin{aligned}\widehat{p} &= p + J_0q,\\ \widehat{Q} &= Q + J_0L + q^T\mathcal{R}_1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{x} = J_0y + F_2(y) + \varepsilon\left[\widehat{p} + \widehat{Q}y\right] + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right). \tag{4.7}$$

Por otro lado, sustituyendo (4.7) y (4.6) en (4.5), se tiene la siguiente estructura

$$\dot{y} = J_0y + F_2(y) + \varepsilon\left[\widehat{p} + \widetilde{Q}y\right], \tag{4.8}$$

con $\widetilde{Q} = Q + J_0L + q^T\mathcal{R}_1 - LJ_0$.

Para la simplificación de (4.8) basta con definir L y q, los cuales, mediante una simple elección determinan una estructura simple para $\widehat{p}$ y $\widehat{Q}$.

Dado que $p, q \in \mathbb{R}^k$, sea $p = (p_1, \cdots, p_k)^T$ y $q = (q_1, \cdots, q_k)^T$, entonces

$$\widehat{p} = p + J_0q = (p_1 + q_2,\ p_2 + q_3,\ \ \cdots,\ p_{k-1} + q_k,\ p_k)^T.$$

Si bien, p es un vector dado y q un vector de parámetros libres, es natural considerar la elección $q_i = -p_{i-1}$ para $i = 2, ..., k$, esto implica que $\widehat{p} = (0, \cdots, 0, p_k)$. Consecuentemente, se sigue que $\varepsilon\widehat{p} = (0, \cdots, 0, \varepsilon p_k)$. Por lo que respecta al parámetro libre p_k, definimos

$$\varepsilon_1 = \varepsilon p_k.$$

Un análisis similar se sigue para simplificar $\widetilde{Q}$. Definimos a continuación $L = \begin{pmatrix} L_1^T \\ \vdots \\ L_k^T \end{pmatrix}$.

Basta obervar que

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_1 \\ \widetilde{Q}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{Q}_{k-1} \\ \widetilde{Q}_k \end{pmatrix} = Q + J_0L + q^T\mathcal{R}_1 - LJ_0 = \begin{pmatrix} Q_1^T + L_2^T - L_1^TJ_0 \\ Q_2^T + L_3^T - L_2^TJ_0 \\ \vdots \\ Q_{k-1}^T + L_k^T - L_{k-1}^TJ_0 \\ Q_k^T - L_k^TJ_0 + q^T\mathcal{R}_{1k} \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

donde $\widetilde{Q}_i \in \mathbb{R}^k$.

Dado que L representa una matriz de parámetros libres, es posible usar la estructura de (4.9) para anular cada $\widetilde{Q}_i$ para $i = 1, ..., k-1$.

A continuación consideramos el análisis para determinar L_2 y L_3 que simplifican $\widetilde{Q}_1$ y $\widetilde{Q}_2$, respectivamente, lo cual no lleva a determinar L_i^T que simplifica $\widetilde{Q}_{i-1}$ para $i = 2, ..., k$. Tenemos así

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_1^T = 0 \;\Leftrightarrow\; L_2^T &= L_1^T J_0 - Q_1^T, \\ \widetilde{Q}_2^T = 0 \;\Leftrightarrow\; L_3^T &= L_1^T J_0^2 - \left(Q_1^T J_0 + Q_2^T\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

(4.10) nos detalla una forma de simplificación, utilizando esta idea, se sigue un anásis minucioso en (4.9) para obtener una forma general para L_i^T. En definitiva, se deduce que

$$L_i^T = L_1^T J_0^{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j^T J_0^{i-(j+1)}, \quad i = 2, ..., k. \tag{4.11}$$

De esta forma, (4.11) representa una elección de parámetros para conseguir que $\widetilde{Q}_j^T = 0$ para $j = 1, ..., k-1$. Por lo tanto, se deduce que una forma simplificada para $\widetilde{Q}$ es $\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \widetilde{Q}_k^T \end{pmatrix}$.

Ahora, dado que $\widetilde{Q}_k$ representa un vector con k parámetros, sea $\widetilde{Q}_k = \begin{pmatrix} q_{k1} & q_{k2} & \dots & q_{kk} \end{pmatrix}$. Del mismo modo $L_k^T = \begin{pmatrix} l_{k,1} & l_{k,2} & \dots & l_{k,k} \end{pmatrix}$. Haciendo un análisis es posible reescribir el vector $\widetilde{Q}_k$ con $k-1$ parámetros. De la observación 7 se sigue que

$$L_k^T J_0 = \begin{pmatrix} 0 & l_{k,1} & \dots & l_{k,k-1} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{Q}_k^T = Q_k^T - L_k^T J_0 + q^T R_k = \left(2a_1 q_1 + q_{k1} + \textstyle\sum_{i=2}^k a_i q_i \quad \widetilde{q}_{k2} \quad \dots \quad \widetilde{q}_{kk}\right).$$

Si $a_1 \neq 0$, es posible definir q_1, en consecuencia

$$q_1 = \frac{1}{2a_1}\left(\sum_{i=2}^k a_i p_{i-1} - q_{k1}\right).$$

Esto nos lleva a tener $\widetilde{Q}_k = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}_{k2} & \dots & \widetilde{q}_{kk} \end{pmatrix}$. De este modo, la matriz $\widetilde{Q}$ queda definida como

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \widetilde{q}_{k2} & \cdots & \widetilde{q}_{kk} \end{pmatrix},$$

como, q_{ij} son parámetros libre, definimos

$$\varepsilon_i \;=\; \varepsilon \widetilde{q}_{ki}, \qquad i = 2, ..., k,$$

y el resultado se sigue □

El resultado de este lema implica que una deformación versal para el sistema (4.3) tiene la estructura

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2, \\
&\vdots \\
\dot{z}_{k-1} &= z_k, \\
\dot{z}_k &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_k z_k + g_2(z),
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Equivalencia Topológica

Consideremos el campo vectorial

$$\dot{x} = F(x, \mu), \tag{5.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq k$ y $F \in \mathcal{C}^r$, $r \geq 2$. Suponemos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, tal que se satisfacen las hipótesis de no hiperbolicidad H1) y H2). Entonces, el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + V_0 y_1 - K\beta + P_0 y_2, \\ \mu &= \mu_0 + \beta, \end{aligned}$$

nos permite determinar la dinámica sobre la variedad central del sistema (5.1)

$$\dot{y}_1 = J_0 y_1 + N_0 \beta + \beta^T \mathcal{R}_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1^T \mathcal{R}_1 y_1 + \cdots, \tag{5.2}$$

donde

$$\begin{aligned} N_0 &= W_0 F_\mu(x_0, \mu_0), \\ \mathcal{R}_0 &= \Big(W_0 \bullet \Big(F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - \big(P_0 J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) \big)^T D^2 F(x_0, \mu_0) \Big) \Big) V_0, \\ \mathcal{R}_1 &= \big(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0) \big) (V_0, V_0). \end{aligned}$$

Por otro lado, consideremos un campo vectorial $\dot{y}_1 = J_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1 \mathcal{R}_1 y_1 + \cdots$, en el capítulo 3 se demostró que este campo puede reducirse a la forma normal, truncada hasta orden dos, $\dot{z} = J_0 z + \frac{1}{2} z \widetilde{\mathcal{R}}_1 z + \cdots$, mediante un cambio de variable próximo a la identidad de la forma $y_1 = z + \frac{1}{2} z^T \mathcal{L}_2 z$

En el capítulo 4, se demostró que una deformación versal para la forma normal, truncada hasta orden dos $\dot{y}_1 = J_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1 \widetilde{\mathcal{R}}_1 y_1$, tiene la estructura

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{k-1} &= z_k, \\ \dot{z}_k &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_k z_k + g_2(z), \end{aligned} \tag{5.3}$$

Observación 8. *El campo vectorial (5.3) puede reescribirse de la forma*

$$\dot{z} = J_0 z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_k z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_2(z) \end{pmatrix}.$$

El objetivo principal en este capítulo es encontrar bajo qué condiciones, los campos (5.2) y (5.3) son localmente topológicamente equivalentes.

El análisis inicia considerando el siguiente cambio de coordenadas:

$$y_1 = g(z) = z + L_0\beta + \beta^T \mathcal{L}_1 z + \frac{1}{2} z^T \mathcal{L}_2 z, \tag{5.4}$$

donde $L_0 = \begin{pmatrix} L_{01}^T \\ \vdots \\ L_{0k}^T \end{pmatrix}$, $\mathcal{L}_i = \begin{pmatrix} L_{i1} \\ \vdots \\ L_{ik} \end{pmatrix}$, para $i = 1, 2$, con $L_0 \in \mathbb{R}^{k\times m}$, $L_{1j} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ y $L_{2j} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, for $j = 1, 2, \ldots, k$.

Lema 7. *El cambio de coordenadas (5.4) transforma (5.2) en*

$$\dot{z} = J_0 z + \widetilde{N}_0\beta + \beta^T \widetilde{\mathcal{R}}_0 z + \frac{1}{2} z^T \widetilde{\mathcal{R}}_1 z + \cdots,$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_0 &= J_0 L_0 + N_0, \\ \widetilde{\mathcal{R}}_0 &= \mathcal{R}_0 + \overline{\mathcal{L}}_1 + L^T \mathcal{R}_1 - \mathcal{L}_1 J_0 - (J_0 L_0 + N_0)^T \mathcal{L}_2, \\ \widetilde{\mathcal{R}}_1 &= \mathcal{R}_1 + \overline{\mathcal{L}}_2 - 2\mathcal{L}_2 J_0, \end{aligned}$$

y $\overline{\mathcal{L}}_i = \begin{pmatrix} L_{i2} \\ \vdots \\ L_{ik} \\ 0 \end{pmatrix}$, *para* $i = 1, 2$.

Demostración. Se sigue del cambio de coordenadas (5.4) que

$$\dot{y}_1 = \left(I + \beta^T \mathcal{L}_1 + z^T \mathcal{L}_2\right) \dot{z} \;\Leftrightarrow\; \dot{z} = \left(I + \beta^T \mathcal{L}_1 + z^T \mathcal{L}_2\right)^{-1} \dot{y}_1|_{y_1 = g(z)}.$$

Para $|z| \approx 0$, se sigue que $\left(I + \beta^T \mathcal{L}_1 + z^T \mathcal{L}_2\right)^{-1} = I - \beta^T \mathcal{L}_1 - z^T \mathcal{L}_2 + \cdots$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1|_{y_1=g(z)} &= J_0 g(z) + N_0\beta + \beta^T \mathcal{R}_0 g(z) + \frac{1}{2} g(z)^T \mathcal{R}_1 g(z) + \cdots \\ &= J_0 z + (J_0 L_0 + N_0)\beta + \beta^T \left(\mathcal{R}_0 + \overline{\mathcal{L}}_1 + L_0^T \mathcal{R}_1\right) z + \frac{1}{2} z^T \left(\mathcal{R}_1 + \overline{\mathcal{L}}_2\right) z + \cdots, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \left(I+\beta^T\mathcal{L}_1+z^T\mathcal{L}_2\right)^{-1}\dot{y}_1|_{y_1=g(z)},\\
&= J_0z+\left(J_0L_0+N_0\right)\beta+\beta^T\left(\mathcal{R}_0+\overline{\mathcal{L}_0}_1+L^T\mathcal{R}_1-\mathcal{L}_1J_0-\left(J_0L_0+N_0\right)^T\mathcal{L}_2\right)z\\
&\quad+\frac{1}{2}z^T\left(\mathcal{R}_1+\overline{\mathcal{L}}_2-2\mathcal{L}_2J_0\right)z+\cdots.
\end{aligned}$$

□

Para demostrar que los campos (5.2) y (5.3) son localmente topológicamente equivalentes, buscamos condiciones sobre el campo F que garanticen la existencia $L_0,\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$ tal que

$$\widetilde{N}_0\beta=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \varepsilon_1\end{pmatrix},\quad \beta^T\widetilde{\mathcal{R}}_0z=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \varepsilon_2z_2+\cdots+\varepsilon_kz_k\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad \frac{1}{2}z^T\widetilde{\mathcal{R}}_1z=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ g_2(z)\end{pmatrix}.$$

Observación 9. *La existencia de $\mathcal{L}_2$, tal que $\frac{1}{2}z^T\widetilde{\mathcal{R}}_1z=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ g_2(z)\end{pmatrix}$ se demuestró en el capítulo 3.*

Existe L_0 tal que $\widetilde{N}_0=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ d_1^T\end{pmatrix}$, donde $d_1=F_\mu^T(x_0,\mu_0)w_k$.

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}
J_0L_0+N_0 &= \begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_{01}^T\\ \vdots\\ L_{0k}^T\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1^TF_\mu(x_0,\mu_0)\\ \vdots\\ w_k^TF_\mu(x_0,\mu_0)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}L_{02}^T+w_1^TF_\mu(x_0,\mu_0)\\ \vdots\\ L_{0k}^T+w_{k-1}^TF_\mu(x_0,\mu_0)\\ w_k^TF_\mu(x_0,\mu_0)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Si definimos

$$L_{0j}=-F_\mu^T(x_0,\mu_0)w_{j-1},\quad\text{para}\quad j=2,\ldots,k. \tag{5.5}$$

entonces $\widetilde{N}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_k^T F_\mu(x_0, \mu_0) \end{pmatrix}$.

El resultado se sigue. □

Observación 10. *Obsérvese que, por el momento, L_{01} está aún sin determinar.*

Si $\varepsilon_1 = d_1^T \beta$, entonces $\widetilde{N}_0 \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$.

La demostración de lema 5 nos lleva a definir la primera dirección de desdoblamiento $d_1 = F_\mu^T(x_0, \mu_0) w_k$. El resto de las direcciones emergen de la demosotración del siguiente lema.

Lema 8. *Si $a_{11} \neq 0$, entonces existe L_{01} y $\mathcal{L}_1$ tal que $\widetilde{\mathcal{R}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \widetilde{R}_{0k} \end{pmatrix}$, donde $\widetilde{R}_{0k} = (\,0\ d_2\ \cdots d_k)_{m\times k}$.*

Demostración. Obsérvese que, de lema 7

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{R}}_0 &= \begin{pmatrix} \widetilde{R}_{01} \\ \widetilde{R}_{02} \\ \vdots \\ \widetilde{R}_{0k-1} \\ \widetilde{R}_{0k} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_0 + \overline{\mathcal{L}}_1 + L_0^T \mathcal{R}_1 - \mathcal{L}_1 J_0 - \widetilde{N}_0^T \mathcal{L}_2, \\
&= \begin{pmatrix} R_{01} + L_{12} + L_0^T R_{11} - L_{11} J_0 - \widetilde{N}_0^T L_{21} \\ R_{02} + L_{13} + L_0^T R_{12} - L_{12} J_0 - \widetilde{N}_0^T L_{22} \\ \vdots \\ R_{0,k-1} + L_{1k} + L_0^T R_{1,k-1} - L_{1,k-1} J_0 - \widetilde{N}_0^T L_{2,k-1} \\ R_{0k} + L_0^T R_{1k} - L_{1k} J_0 - \widetilde{N}_0^T L_{2k} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

a partir de esta descomposición es sencillo verificar que si definimos

$$\begin{aligned}
L_{12} &= L_{11}J_0 - \left(R_{01} + L_0^T R_{11}\right) + \widetilde{N}_0^T L_{21}, \\
L_{13} &= L_{12}J_0 - \left(R_{02} + L_0^T R_{12}\right) + \widetilde{N}_0^T L_{22}, \\
&= L_{11}J_0^2 - \left(R_{01} + L_0^T R_{11}\right) J_0 - \left(R_{02} + L^T R_{12}\right) + \widetilde{N}_0^T \left(L_{21}J_0 + L_{22}\right), \\
&\vdots \\
L_{1k} &= L_{11}J_0^{k-1} - \left(R_{01} + L_0^T R_{11}\right) J_0^{k-2} - \cdots - \left(R_{0,k-1} + L_0^T R_{1,k-1}\right) + \\
&\quad \widetilde{N}_0^T \left(L_{21}J_0^{k-2} + \cdots + L_{2,k-1}\right),
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_{01} &= 0, \\
\widetilde{R}_{02} &= 0, \\
&\vdots \\
\widetilde{R}_{0k-1} &= 0, \\
\widetilde{R}_{0k} &= R_{0k} + L_0^T R_{1k} - L_{1k}J_0 - \widetilde{N}_0^T L_{2k}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo L_{1k} en $\widetilde{R}_{0k}$, entonces se tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_{0k} &= R_{0k} + L_0^T R_{1k} - L_{1k}J_0 - \widetilde{N}_0^T L_{2k}, \\
&= R_{0k} + L_0^T R_{1k} + \left(R_{0,k-1} + L_0^T R_{1,k-1}\right) J_0 + \cdots + \left(R_{01} + L_0^T R_{11}\right) J_0^{k-1}, \\
&\quad -\widetilde{N}_0^T \left(L_{21}J_0^{k-1} + \cdots + L_{2,k-1}J_0 + L_{2k}\right), \\
&= \left(R_{0k} + R_{0,k-1}J_0 + \cdots + R_{01}J_0^{k-1}\right) + L_0^T \left(R_{1k} + R_{1,k-1}J_0 + \cdots + R_{11}J_0^{k-1}\right), \\
&\quad -\widetilde{N}_0^T \left(L_{21}J_0^{k-1} + \cdots + L_{2,k-1}J_0 + L_{2k}\right), \\
&= M_0 + L_0^T M_1 - \widetilde{N}_0^T M_2,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
M_0 &= R_{0k} + R_{0,k-1}J_0 + \cdots + R_{01}J_0^{k-1}, \\
M_1 &= R_{1k} + R_{1,k-1}J_0 + \cdots + R_{11}J_0^{k-1}, \\
M_2 &= L_{21}J_0^{k-1} + \cdots + L_{2,k-1}J_0 + L_{2k}.
\end{aligned}$$

Utilizando la observación 7 es posible escribir $\widetilde{R}_{0k}$ en términos de sus columnas. Luego, dado que $\widetilde{R}_{0k}$ depende de $\mathcal{R}_0$ y $\mathcal{R}_1$, se sigue que

$$\mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} R_{01} \\ \vdots \\ R_{0k} \end{pmatrix} = \left(W_0 \bullet \left(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - \left(P_0 J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0,\mu_0)\right)^T D^2 F(x_0,\mu_0)\right)\right) V_0.$$

La definición de V_0 y W_0^T junto con la operación $\bullet$ nos lleva a decucir que

$$\begin{aligned} R_{0s} &= \Big(w_s \bullet \Big(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - \big(P_0 J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0,\mu_0)\big)^T D^2F(x_0,\mu_0)\Big)\Big) V_0 \\ &= \Big(R_{0s}^1 \; R_{0s}^2 \; \cdots \; R_{0s}^k \Big), \quad \text{para} \quad s = 1,\ldots,k, \end{aligned}$$

con

$$R_{0s}^j = \Big(w_s \bullet \Big(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - \big(P_0 J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0,\mu_0)\big)^T D^2F(x_0,\mu_0)\Big)\Big) v_j,$$

para $j = 1,\ldots,k$.

De forma similar

$$\mathcal{R}_1 = \big(W_0 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\big)\,(V_0,V_0) = \begin{pmatrix} R_{11} \\ \vdots \\ R_{1k} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} R_{1s} &= \big(w_s \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\big)\,(V_0,V_0) = \big(V_0^T\,\big(w_s \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\big)\big)\,V_0 \\ &= \Big(R_{1s}^1 \; R_{1s}^2 \; \cdots \; R_{1s}^k \Big), \quad \text{para} \quad s = 1,\ldots,k, \end{aligned}$$

con

$$R_{1s}^j = \big(V_0^T\,\big(w_s \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\big)\big)\,v_j, \quad \text{para} \quad j = 1,\ldots,k$$

Por otro lado, la descomposición en columnas de M_0 y M_1 está dado por:

$$\begin{aligned} M_0 &= \Big(R_{0k}^1 \;\; \Sigma_{j=1}^2 R_{0,k-j+1}^{3-j} \;\; \Sigma_{j=1}^3 R_{0,k-j+1}^{4-j} \;\; \cdots \;\; \Sigma_{j=1}^k R_{0,k-j+1}^{k-j+1} \Big), \\ &= \Big((M_0)^1 \; (M_0)^2 \; (M_0)^3 \; \cdots \; (M_0)^k \Big), \\ M_1 &= \Big(R_{1k}^1 \;\; \Sigma_{j=1}^2 R_{1,k-j+1}^{3-j} \;\; \Sigma_{j=1}^3 R_{1,k-j+1}^{4-j} \;\; \cdots \;\; \Sigma_{j=1}^k R_{1,k-j+1}^{k-j+1} \Big), \\ &= \Big((M_1)^1 \; (M_1)^2 \; (M_1)^3 \; \cdots \; (M_1)^k \Big). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dado que L_{21} representa una matriz de parámeros libres, entonces M_2 también representa una matriz con las mismas características.

Definiendo $M_2 = \begin{pmatrix} M_{01}^T \\ \vdots \\ M_{0k}^T \end{pmatrix}$, donde $M_{0k}^T = \begin{pmatrix} \gamma_{k1} \\ \vdots \\ \gamma_{kk} \end{pmatrix}$, se sigue que

$$\widetilde{N}_0^T M_2 = (\,0 \cdots 0 \; d_1\,) \begin{pmatrix} M_{01}^T \\ \vdots \\ M_{0k}^T \end{pmatrix} = d_1 M_{0k}^T = (\,\gamma_{k1} d_1 \; \gamma_{k2} d_1 \; \cdots \; \gamma_{kk} d_1\,).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_{0k} &= M_0 + L_0^T M_1 - \widetilde{N}_0^T M_2, \\
&= \Big((M_0)^1 + L_0^T (M_1)^1 - \gamma_{k1} d_1 \;\; (M_0)^2 + L_0^T (M_1)^2 - \gamma_{k2} d_1 \; \cdots \; (M_0)^k + L^T (M_1)^k - \gamma_{kk} d_1 \Big), \\
&= \Big((\widetilde{R}_{0k})^1 \;\; (\widetilde{R}_{0k})^2 \; \cdots \; (\widetilde{R}_{0k})^k \Big).
\end{aligned}$$

A la vista de la expresión que adopta el elemento $\widetilde{R}_{0k}^1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\widetilde{R}_{0k})^1 &= (M_0)^1 + L_0^T (M_1)^1 - \gamma_{k1} d_1, \\
&= R_{0k}^1 + (\, L_{01} \; \cdots \; L_{0k} \,) \begin{pmatrix} (w_k \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(v_1, v_1) \\ \vdots \\ (w_k \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(v_k, v_1) \end{pmatrix} - \gamma_{k1} d_1, \\
&= R_{0k}^1 + 2a_1 L_{01} + \Sigma_{j=2}^k (w_k \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(v_j, v_1) L_{0j} - \gamma_{k1} d_1,
\end{aligned}$$

Por el lema 5, $L_{0j} = -F_\mu^T(x_0, \mu_0) w_{j-1}$, para $j = 2, \ldots, k$. Entonces, puesto que L_{01} está sin determinar, lo definimos de la siguiente forma:

$$L_{01} = -\frac{1}{2a_1} \Big(\Sigma_{j=2}^k (w_k \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(v_j, v_1) L_{0j} + R_{0k}^1 - \gamma_{k1} d_1 \Big).$$

De este modo, tenemos

$$\begin{aligned}
(\widetilde{R}_{0k})^1 &= 0, \\
(\widetilde{R}_{0k})^2 &= (M_0)^2 + L_0^T (M_1)^2 - \gamma_{k2} d_1 = d_2, \\
&\vdots \\
(\widetilde{R}_{0k})^k &= (M_0)^k + L_0^T (M_1)^k - \gamma_{kk} d_1 = d_k.
\end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración. □

Si $\varepsilon_j = d_j^T \beta$, para $j = 2, \ldots, k$, entonces $\beta^T \widetilde{\mathcal{R}}_0 z = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_k z_k \end{pmatrix}$.

Las direcciones de desdoblamiento son vectores en $\mathbb{R}^m$ que sirven para desdoblar la bifurcación. Los resultado abordados anteriormente no conducen a definir

$$\begin{aligned}
d_1 &= F_\mu^T(x_0, \mu_0) w_k, \\
d_2 &= (M_0)^2 + L^T (M_1)^2 - \gamma_{k2} d_1, \\
&\vdots \\
d_k &= (M_0)^k + L^T (M_1)^k - \gamma_{kk} d_1.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Si definimos $D_0 = \begin{pmatrix} d_1^T \\ \vdots \\ d_k^T \end{pmatrix}$, la obervación 3 y los resultados anteriores nos conducen a establecer el resultado principal de esta tesis.

Teorema. ***(El teorema de la bifurcación k-cero)***
Consideremos el campo vectorial

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq k$ y $F \in \mathcal{C}^r$, $r \geq 2$. Supongamos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, tal que

H1) $F(x_0, \mu_0) = 0$,

H2) $DF(x_0, \mu_0)$ *es similar a* $J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$, *(no hiperbolicidad)*

H3) $\left(w_k \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_1, v_1) \neq 0$, *(no degeneracidad)*

H4) Existe una matriz de rango máximo $D_0 = \begin{pmatrix} d_1^T \\ \vdots \\ d_k^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times m}$, *donde* $\varepsilon = D_0(\mu - \mu_0)$.

(transversalidad)

Entonces, la dinámica sobre la variedad central (5.2) en (x_0, μ_0) es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal (5.3).

5.1. Direcciones de desdoblamiento

En esta sección se utilizan las ecuaciones difinidas en (5.7) para determinar las direcciones de desdoblamiento para el caso $k = 2$ y $k = 3$. En [12] se considera el caso $k = 2$, aunque se determinan las direcciones de desdoblamiento, es necesario hacer notar que la deformación versal que consideran los autores difiere un poco a la utilizada en esta tesis.

Definimos $q_j = F_\mu^T(x_0, \mu_0)w_j$, para $j = 1, 2, \ldots, k$, y

$$r_{ij}^s = \left(w_s \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_i, v_j), \quad \text{para} \quad i, j, s = 1, 2, \ldots, k.$$

Por otro lado, de (5.7)

$$\begin{aligned} d_1 &= q_k, \\ d_i &= (M_0)^i + L^T(M_1)^i - \gamma_{ki}q_k, \ \text{ for } i = 2, \ldots, k, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}(M_0)^i &= \Sigma_{j=1}^{i} R_{0,k-j+1}^{i+1-j},\\ (M_1)^i &= \Sigma_{j=1}^{i} R_{1,k-j+1}^{i+1-j},\\ L^T &= (\, L_1 \; L_2 \; \cdots \; L_k \,),\end{aligned}$$

con $L_j = -q_{j-1}$, para $j = 2, \ldots, k$.

Por otro lado, se tiene que

$$L_1 = -\frac{1}{2a_1}\left(-\Sigma_{j=2}^{k} r_{j1}^{k}\, q_{j-1} + R_{0k}^{1} - \gamma_{k1} q_k\right).$$

Además, $L_0 = L_{21} J_0^{k-1} + \cdots + L_{2,k-1} J_0 + L_{2k} = \begin{pmatrix} L_{01}^T \\ \vdots \\ L_{0k}^T \end{pmatrix}$ and $L_{0k} = \begin{pmatrix} \gamma_{k1} \\ \vdots \\ \gamma_{kk} \end{pmatrix}$.

5.1.1. Caso $k = 2$

Para calcular d_1 y d_2 primero determinamos la estructura de $g_2(z)$ aplicando el lema 5 para $k = 2$. En este caso

$$g_2(z) = \frac{1}{2} z^T \overline{R}_{12} z = a_{11} z_1^2 + a_{12} z_1 z_2$$

Ahora, para determinar los coeficientes a_{11} y a_{12} recurrimos a la ecuación (3.11). Como consecuencia de esto tenemos que

$$\overline{R}_{12} = R_{12} + G(R_{11}) - G^2(L_{21}) = R_{12} + R_{11} J_0 + J_0^T R_{11} - 2 J_0^T L_{21} J_0.$$

Para este caso $L_{21} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ y $R_{1s} = \begin{pmatrix} r_{11}^s & r_{12}^s \\ r_{12}^s & r_{22}^s \end{pmatrix}$, con $r_{ij}^s = w_s \bullet D^2F(x_0, \mu_0)(v_i, v_j)$, para $i, j, s = 1, 2$. Un cálculo sencillo muestra que

$$\overline{R}_{12} = \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11}^1 + r_{12}^2 \\ r_{11}^1 + r_{12}^2 & r_{22}^2 + 2r_{12}^1 - 2l_1 \end{pmatrix}.$$

Dado que l_1 es un parámetro libre, se define $l_1 = \frac{1}{2}(r_{22}^2 + 2r_{12}^1)$, esto no lleva a reescribir $\overline{R}_{12}$. Así

$$\overline{R}_{12} = \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11}^1 + r_{12}^2 \\ r_{11}^1 + r_{12}^2 & 0 \end{pmatrix},$$

deduciendo que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} r_{11}^2 = \frac{1}{2}\left(w_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_1, v_1), \\ a_{12} &= r_{11}^1 + r_{12}^2 = \left(w_1 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_1, v_1) + \left(w_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)\right)(v_1, v_2). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Luego, las direcciones de desdoblamiento quedan determinadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} d_1 &= q_1, \\ d_2 &= (M_0)^2 + L^T (M_1)^2 - \gamma_{22} q_1. \end{aligned}$$

La determinación de $(M_0)^2$ y $(M_1)^2$ se defien en (5.6). En este caso

$$\begin{aligned} (M_0)^2 &= R_{02}^2 + R_{01}^1, \\ (M_1)^2 &= R_{12}^2 + R_{11}^1 = \begin{pmatrix} r_{11}^1 + r_{12}^2 \\ r_{12}^1 + r_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ r_{12}^1 + r_{22}^2 \end{pmatrix}, \\ L_1 &= -\frac{1}{2a_1} \left(r_{21}^2 q_1 - \gamma_{21} q_2 + R_{02}^1 \right), \\ L_{02}^T &= \begin{pmatrix} l_1 - r_{12}^1 & 3l_2 - r_{22}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} r_{22}^2 & 3l_2 - r_{22}^1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Se conluye que

$$\begin{aligned} d_1 &= q_2, \\ d_2 &= R_{01}^1 + R_{02}^2 - \frac{a_2}{2a_1} R_{02}^1 - \left(-\frac{r_{21}^2 a_2}{2a_1} + r_{12}^1 + r_{22}^2 \right) q_1 + \left(\frac{r_{22}^2 a_2}{4a_1} + r_{22}^1 - 3l_2 \right) q_2. \end{aligned}$$

Obsérvese que el parámetro l_2 permanece libre en d_2. Podríamos utilizar esta libertad para simplificar d_2, con el objetivo de verificar que d_1 y d_2 son linealmente independientes, sin embargo dicha simplificación no es necesaria, pues no aporta información para probar dicha independencia.

5.1.2. Caso $k = 3$

De forma similar, para el caso $k = 3$ el lema 5 nos proporciona la estructura

$$g_2(z) = a_1 z_1^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_1 z_3 + a_4 z_2^2.$$

Los coeficientes de esta forma cuadrática quedan determinados por la matriz $\overline{R}_{13}$. De esta forma

$$\begin{aligned} \overline{R}_{13} &= R_{13} + G(R_{12}) + G^2(R_{11}) - G^3(L_{21}), \\ &= R_{13} + R_{12} J_0 + J_0^T R_{12} + R_{11} J_0^2 + 2 J_0^T R_{11} J_0 + (J_0^T)^2 R_{11} - 3 J_0^T L_{21} J_0^2 \\ &\quad -3 (J_0^T)^2 L_{21} J_0. \end{aligned}$$

Si $L_{21} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_2 & l_4 & l_5 \\ l_3 & l_5 & l_6 \end{pmatrix}$ y $R_{1s} = \begin{pmatrix} r_{11}^s & r_{12}^s & r_{13}^s \\ r_{12}^s & r_{22}^s & r_{23}^s \\ r_{13}^s & r_{23}^s & r_{33}^s \end{pmatrix}$.

Un análisis minucioso muestra que

$$\overline{R}_{13} = \begin{pmatrix} r_{11}^3 & r_{11}^2 + r_{12}^3 & r_{11}^1 + r_{12}^2 + r_{13}^3 \\ r_{11}^2 + r_{12}^3 & 2r_{11}^1 + 2r_{12}^2 + r_{22}^3 & 3r_{12}^1 + r_{13}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^3 - 3l_1 \\ r_{11}^1 + r_{12}^2 + r_{13}^3 & 3r_{12}^1 + r_{13}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^3 - 3l_1 & 2r_{13}^1 + 2r_{22}^1 + 2r_{23}^2 + r_{33}^3 - 6l_2 \end{pmatrix}.$$

Dado que los parámetros l_1 y l_2 permanecen libre, esto nos incita a definir lo siguiente

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{3}\left(3r_{12}^1 + r_{13}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^3\right), \\ l_2 &= \frac{1}{6}\left(2r_{13}^1 + 2r_{22}^1 + 2r_{23}^2 + r_{33}^3\right). \end{aligned}$$

De este modo

$$\overline{R}_{13} = \begin{pmatrix} r_{11}^3 & r_{11}^2 + r_{12}^3 & r_{11}^1 + r_{12}^2 + r_{13}^3 \\ r_{11}^2 + r_{12}^3 & 2r_{11}^1 + 2r_{12}^2 + r_{22}^3 & 0 \\ r_{11}^1 + r_{12}^2 + r_{13}^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se deduce rápidamente que

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}r_{11}^3, \\ a_2 &= r_{11}^2 + r_{12}^3, \\ a_3 &= r_{11}^1 + r_{12}^2 + r_{13}^3, \\ a_4 &= \frac{1}{2}\left(2r_{11}^1 + 2r_{12}^2 + r_{22}^3\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, las direcciones de desdoblamiento para este caso quedan determinadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} d_1 &= q_3, \\ d_2 &= (M_0)^2 + L^T(M_1)^2 - \gamma_{32}q_3, \\ d_3 &= (M_0)^3 + L^T(M_1)^3 - \gamma_{33}q_3, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (M_0)^2 &= R_{02}^1 + R_{03}^2, \\ (M_0)^3 &= R_{01}^1 + R_{02}^2 + R_{03}^3, \\ (M_1)^2 &= \begin{pmatrix} a_2 \\ r_{12}^2 + r_{22}^3 \end{pmatrix}, \\ (M_1)^3 &= \begin{pmatrix} a_3 \\ r_{12}^1 + r_{22}^2 + r_{23}^3 \\ r_{13}^1 + r_{23}^2 + r_{33}^3 \end{pmatrix}, \\ L_1 &= -\frac{1}{2a_1}\left(-r_{12}^3 q_1 - r_{13}^3 q_2 + R_{03}^1 - \gamma_{31}q_3\right), \\ L_{03}^T &= \left(l_1 - (r_{12}^1 + r_{13}^2) \;\; 4l_2 - (2r_{13}^1 + r_{22}^1 + r_{23}^2) \;\; 4l_3 + 3l_4 - (3r_{12}^1 + r_{33}^2)\right), \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
d_1 &= q_3, \\
d_2 &= R^1_{02} + R^2_{03} - \frac{a_2}{2a_1} R^1_{03} + \left(\frac{a_2}{2a_1} r^3_{12} - r^2_{12} - r^3_{22} \right) q_1 + \left(\frac{a_2}{2a_1} r^3_{13} - r^2_{13} - r^3_{23} \right) q_2 \\
&\quad + \left(\frac{a_2}{2a_1} \left(l_1 - (r^1_{12} + r^2_{13}) \right) - 4l_2 + 2r^1_{13} + r^1_{22} + r^2_{23} \right) q_3, \\
d_3 &= R^1_{01} + R^2_{02} + R^3_{03} - \frac{a_3}{2a_1} R^1_{03} + \left(\frac{a_3}{2a_1} r^3_{12} - r^1_{12} - r^2_{22} - r^3_{23} \right) q_1 \\
&\quad + \left(\frac{a_3}{2a_1} r^3_{13} - r^1_{13} - r^2_{23} - r^3_{33} \right) q_2 \\
&\quad + \left(\frac{a_3}{2a_1} \left(l_1 - (r^1_{12} + r^2_{13}) \right) - 4l_3 - 3l_4 + 3r^1_{12} + r^2_{33} \right) q_3.
\end{aligned}
$$

Obsérvese que los parámetros l_3 y l_4 permanecen libres, lo cual nos sugiere la simplificación de d_3. En general esta libertad en los parámetros aparece en la dirección de desdoblamiento d_k.

Capítulo 6

Aplicación

El objetivo en esta sección es mostrar la utilidad del teorema principal que se obtuvo en los capítulos anteriores. Para esto, consideramos un sistema con tres parámetros en $\mathbb{R}^3$ conocido como el sistema de Rössler. Verificando que las condiciones de nuestro teorema se cumplan para este sistema, es posible llevar acabo un análisis de bifurcación. El análisis de bifurcación que aquí presentamos tiene como motor de análisis el diagrama de bifurcación para la bifurcación Takens-Bogdanov, el cual puede consultarse con más detalles en [44]. Por otro lado, también se presenta un análisis de la bifurcación triple para el sistema comentado.

6.1. El sistema de Rössler

El sistema de Rössler también conocido como el atractor de Rössler, es un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias estudiado por Rössler [51, 50]. En el análisis siguiente probamos que este sistema tiene puntos de equilibrio que experimentan las bifurcaciones silla nodo, Takens-Bogdanov y triple cero para ciertos puntos en el espacio de los parámetros. El sistema se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + xz - cz, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son parámetros.

Si $a \neq 0$, los puntos de equilibrio del sistema (6.1) están dados por

$$x_0^{\pm} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} (a, -1, 1) . \tag{6.2}$$

Es evidente que si $c^2 - 4ab = 0$, el sistema (6.1) tiene un punto de equilibrio dado por $x_0 = \frac{c}{2a} (a, -1, 1)$. Por otro lado, el sistema no tiene puntos de equilibrio si $c^2 - 4ab < 0$. Esto nos lleva a la siguiente caracterización.

- Si $c^2 - 4ab < 0$, el sistema (6.1) no tiene puntos de equilibrio.
- Si $c^2 - 4ab = 0$, el sistema (6.1) tiene un punto de equilibrio.

- Si $c^2 - 4ab > 0$, el sistema (6.1) tiene dos puntos de equilibrio.

La caracterización anterior nos indica que puntos de equilibrio puedes aparecer o desaparecer según la región donde se tomen los valores de los parámetros. Esto es, en el espacio de los parámetros existe una zona donde se da el fenómeno de tener a no tener puntos de equilibrio. Definimos

$$\Omega = \left\{(a,b,c) \mid c^2 - 4ab = 0, \forall\ a,b,c \in \mathbb{R},\ \text{con } a \neq 0 \text{ y } ab > 0\right\}.$$

Es claro que en Ω se tiene un punto de equilibrio, también, para valores de los parámetros fuera de Ω se tienen dos puntos de equilibrio o ninguno para el sistema (6.1). Entonces, geométricamente, Ω representa una superficie de bifurcación en el espacio de los parámetros (Figura 6.1). Un análisis directo muestra que para cualquier terna de valores de parámetros, tomados en la superficie Ω, el sistema (6.1) experimenta una bifurcación silla nodo.

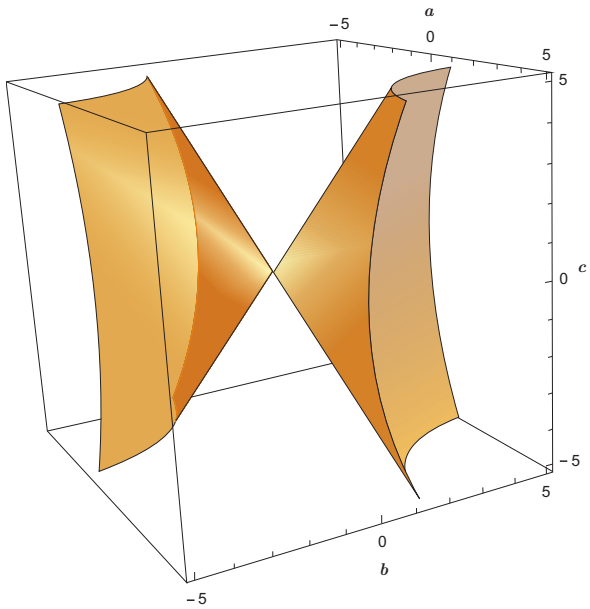


Figura 6.1: Superficie de bifurcación Ω.

Lo anterior nos indica que si $\mu = (a,b,c)^T$, y F el campo vectorial asociado a (6.1), entonces, para $\mu \in \Omega$,

$$x_0(\mu) = \frac{c}{2a}\,(a,-1,1)\,, \tag{6.3}$$

además

$$A(\mu) = DF(x_0(\mu),\mu) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c}{2a} & 0 & -\frac{c}{2} \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

El polinomio característico asociado a (6.4) está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \alpha_2(\mu)\lambda^2 + \alpha_1(\mu)\lambda, \tag{6.5}$$

con $\alpha_2(\mu) = \frac{1}{2}(2a - c)$ y $\alpha_1(\mu) = \frac{1}{2a}(2a + c - a^2c)$.

Es claro que, de (6.5), $\lambda = 0$ es un valor propio asociaso a $A(\mu)$ de multipliciadad algebraica 1 y geométrica 1. Sin embargo, existen valores para los parámetros a, b c sobre Ω, tales que, los puntos de equilibrio (6.2) experimentan una bifurcación Takens-Bogdanov (BT) o una bifurcación triple cero (TZ). A continuación presentamos un análisis de bifuración completo sobre Ω.

6.1.1. Puntos de bifurcación Takens Bogdanov

El objetivo es determinar puntos $\mu \in \Omega$ tal que el sistema (6.1) experimente una bifurcación Takens-Bogdanov en el punto de equilibrio (6.3). De (6.5), es claro que, $\lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 2 asociado a $A(\mu)$ si se satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} c^2 - 4ab &= 0, \\ 2a + c - a^2c &= 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Se sigue que si $b = \frac{a}{(a^2-1)^2}$ y $c = \frac{2a}{a^2-1}$ se tiene (6.6). Estos es, si

$$\mu = \left(a, \frac{a}{(a^2-1)^2}, \frac{2a}{a^2-1}\right)^T, \tag{6.7}$$

donde $a \neq 0$, y $a \neq \pm 1$, el punto de equilibrio $x_0(\mu) = \left(\frac{a}{a^2-1}, -\frac{1}{a^2-1}, \frac{1}{a^2-1}\right)^T$ experimenta una bifurcación Takens-Bogdanov (ver Figura 6.2). Es decir, por lo que respecta a las condiciones de no hiperbolicidad H1) y H2) del Teorema 5, los valores de los parámetros definidos en (6.7) cumplen con que

$$\sigma(A(\mu)) = \{\, \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = \frac{a(a^2-2)}{a^2-1} \,\}.$$

Ahora podemos verificar las condiciones de no degeneracidad y transversalidad. La condición de no degeneracidad está determinada por el coeficiente a_{11}. Para el sistema (6.1) se tiene que

$$a_{11} = -\frac{a^2-1}{a^2-2}.$$

Por lo tanto, si $a \neq \pm 1$ y $a \neq \pm\sqrt{2}$ se sigue que $a_{11} \neq 0$. La condición de transversalidad queda determinada por las direcciones de desdoblamiento d_1 y d_2, en este caso

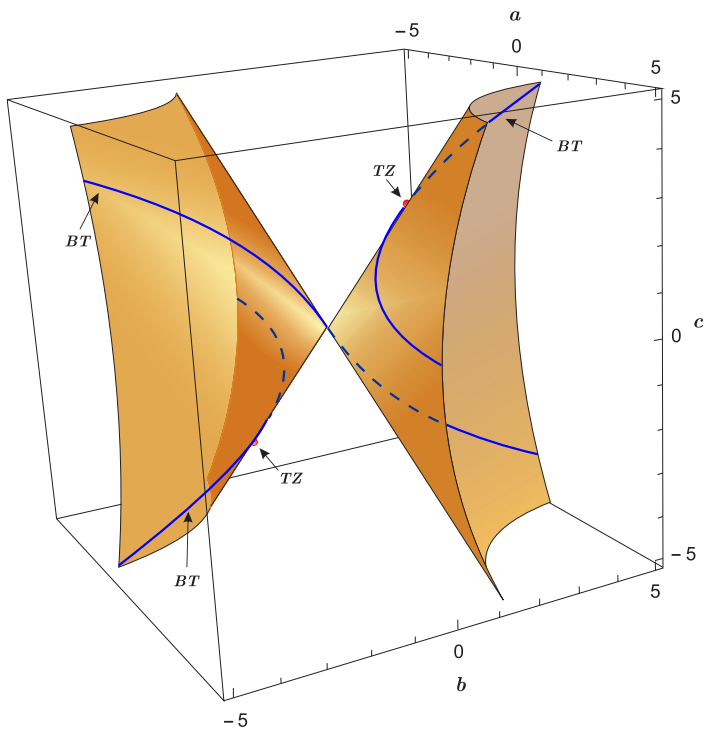


Figura 6.2: Las curvas azules sobre Ω representan puntos donde el sistema (6.1) experimenta una la bifurcación Takens-Bogdanov BT, mientras que en los puntos rojos el sistema experimenta una bifurcación triple cero TZ.

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \left(-\frac{1}{a^5-3a^3+2a}, \frac{1-a^2}{a(a^2-2)}, \frac{1}{a(a^2-2)}\right)^T, \\
d_2 &= \left(\frac{-4a^{10}+23a^8-40a^6+16a^4+11a^2-2}{2a^4(a^2-2)^4}, -\frac{(a^2-1)^3(a^4-3a^2-2)}{2a^4(a^2-2)^4},\right. \\
&\quad \left. -\frac{(a^2-1)^2(a^8-6a^6+11a^4-5a^2+2)}{2a^4(a^2-2)^4}\right)^T.
\end{aligned}
$$

Las expresiones anteriores evidencian que para $a \neq \pm 1$ y $a \neq \pm\sqrt{2}$, las condiciones H1), H2), H3) and H4) del Teorema 5 se satisfacen sobre las curvas azules en Ω. Es evidente que los puntos de bifurcación Takens-Bogdanov está dado por (6.7). A continuación y con el objetivo de presentar un análisis de dicha bifurcación en el sistema (6.1), consideramos el valor particular $a_0 = -\frac{17}{10}$, entonces, el punto de equilibrio $x_0^T = \left(-\frac{170}{189}, -\frac{100}{189}, \frac{100}{189}\right)$, con $\mu_0^T = \left(-\frac{17}{10}, -\frac{17000}{35721}, -\frac{340}{189}\right)$ experimenta una bifurcaci
on Takens-Bogdanov. Asimismo $a_{11} = -\frac{189}{89}$ y $a_{12} = \frac{35343}{79210}$.

Se sigue, de la observación 3, que las superficies de bifurcación silla nodo ($\mathcal{S}_{sn}$), Hopf

($\mathcal{S}_{Hopf}$), y homoclínica ($\mathcal{S}_{Hom}$), están dadas, respectivamente, por las ecuaciones

$$a + 3{,}5721b - 1{,}89c = 0,$$
$$328{,}3a^2 + 45{,}5b^2 + 162{,}8c^2 - 244{,}6ab + 462{,}4ac - 172{,}2bc + 1826{,}1a - 703{,}01b + 1300{,}7c + 2554{,}9 = 0,$$
$$16090{,}1a^2 + 2233{,}4b^2 + 7977{,}9c^2 - 11989{,}3ab - 8442{,}2bc + 22659{,}7ac + 89620{,}3a - 33955{,}6b + 63478{,}6c + 125$$

Ver figura 6.3.

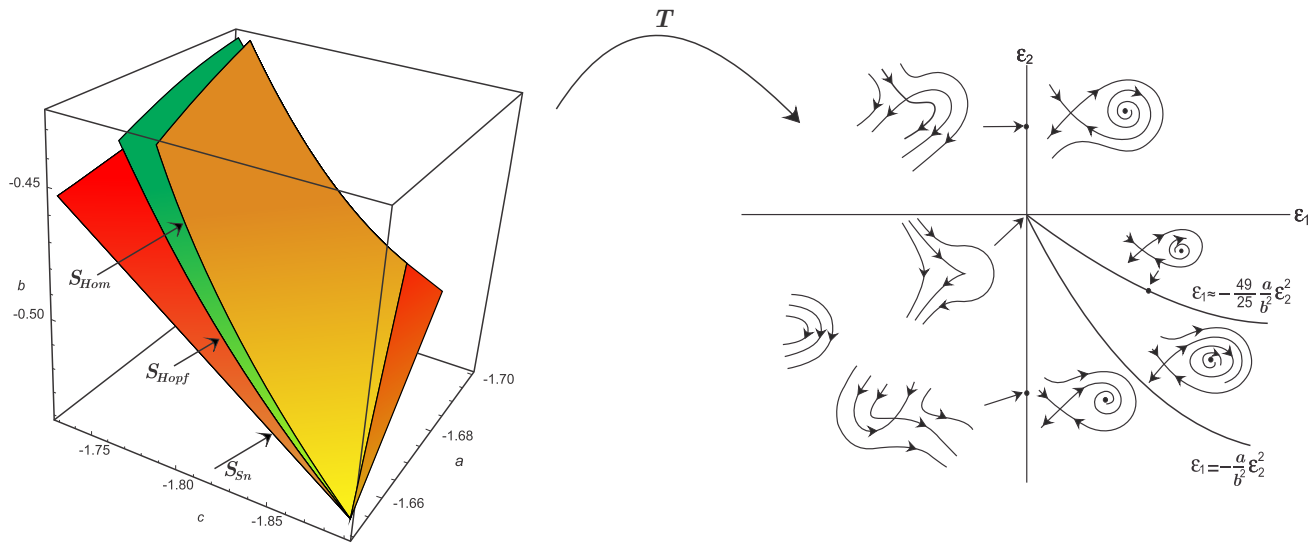


Figura 6.3: Superficies de bifurcación para el sistema (6.1) con $a = -\frac{17}{10}$.

El diagrama para la bifurcación Takens-Bogdanov queda determinado por el signo de a_{11} y a_{12}, lo cual se justifica en el Apéndice A. Para $a_0 = -\frac{17}{10}$, ver figura 6.3.

Las diferentes bifurcaciones del sistema (6.1) pueden visualizarse al variar los parámetros a, b y c. En particular, un ciclo límite estable se exhibe en la figura 6.4.

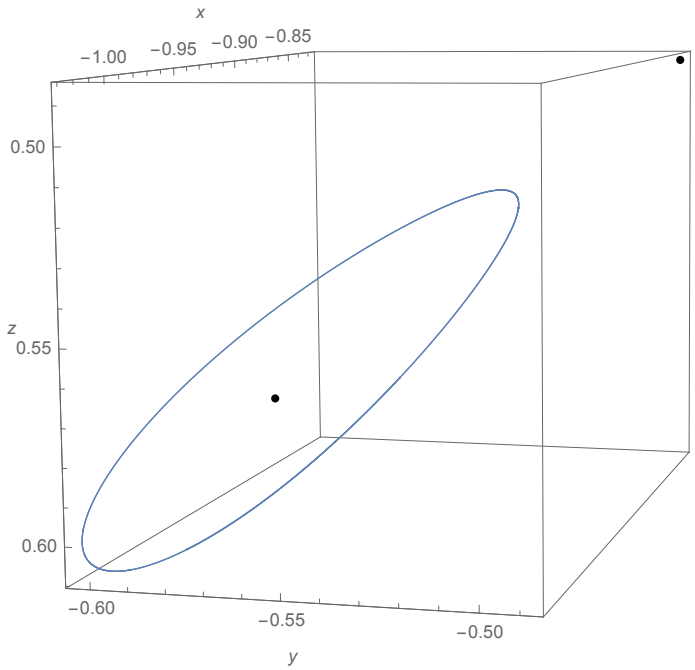


Figura 6.4: Ciclo límite estable en el sistema (6.1) para $a = -\frac{17}{10}$, $b = -\frac{17000}{35721} + \frac{3}{1000}$ y $c = -\frac{340}{189} - \frac{1}{10000}$.

6.1.2. Puntos de bifurcación triple cero

Un razonamiento análogo al anterior muestra la existencia de $\mu \in \Omega$, tal que, el punto de equilibrio definido en experimenta una bifurcación triple cero. La condición para determinar los valores de los parámetros quedan determinados por condiciones impuestas en el polinomio característico (6.5). Pues, obsérvese que $\lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad algebraica tres asociado a la matriz $A(\mu)$, si se tiene que

$$\begin{aligned} c^2 - 4ab &= 0, \\ 2a + c - a^2c &= 0, \\ 2a - c &= 0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Un breve análisis muestra que los puntos $\mu^{\pm} = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})^T$ satisfacen los ecuaciones (6.8), en consecuencia, existe únicamente dos puntos en Ω (ver Figura 6.3) tal que los puntos de equilibrio $x_0(\mu^{\pm}) = (\pm\sqrt{2}, -1, 1)^T$ satisfacen que $\sigma(A(\mu)) = \{\, \lambda_{1,2,3} = 0 \,\}$.

Por lo tanto, se sigue que, para $k = 3$ se tiene la condición de no degeneracidad, pues, para este caso $a_{11} = \pm\sqrt{2}$.

Aplicando el Lema 8, las direcciones de desdoblamiento d_1, d_2 y d_3 quedan definidas por

los vectores

$$\begin{aligned} d_1 &= (1,\ 1,\ -1)^T, \\ d_2 &= \left(\pm\frac{7\sqrt{2}}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}}{4},\ 0\right)^T, \\ d_3 &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \end{aligned}$$

las cuales son linealmente independientes, por lo cual, las hipótesis H1), H2), H3) y H4) se satisface para $(x_0(\mu^{\pm}), \mu^{\pm})$. Ver figura 6.2.

Es natural pensar que los puntos de bifurcación triple cero concurran en la curva de bifurcación Takens-Bogadanov (ver Figura 6.3), pues, es conocido que la bifurcación Takens-Bogdanov ocurre dentro en la bifurcación triple cero.

Capítulo 7

Conclusiones

Aunque las técnicas conocidas para calcular la dinámica sobre la variedad central consisten en utilizar una serie de cambios de coordenadas, en este trabajo se obtuvo dicha dinámica de manera directa al definir un solo cambio de coordenadas. Esto tuvo como consecuencia una simplificación significativa en el desarrollo del capítulo dos. Por otro lado, dado que en la literatura no se ha demostrado que la dinámica sobre la variedad central esté determinada por su truncamiento hasta orden dos, en el presente trabajo se impone la condición de determinación, la cual supone que la dinámica sobre la variedad central k-dimensional está determinada por la su truncamiento hasta orden dos. Es importante resaltar que la condición de determinación garantiza que la dinámica sobre la variedad central y su truncamiento son topológicamente equivalentes.

Si bien existen varios métodos para obtener la forma normal de un sistema dado, en el capítulo tres se logra establecer una conjetura donde se detalla una estructura general para una forma normal de una campo vectorial dado. Aunque es importante calcular los coeficientes de la forma normal, en la conjetura se logra dar la forma explícita de algunos coeficintes, el resto de los coeficientes pueden determinarse de manera directa utilizando el código mencionado en el apédice de este trabajo.

En el capítulo cinco se logró dar una demostración detallada de una deformación versal para la bifurcación k cero.

Los resultados descritos en los capítulos anteriores nos llevaron a concluir que para una familia m-parametrizada de campo vectoriales n-dimensionales, cuya linealización en un punto de equilibrio tiene un valor propio cero de multiplicidad algebraica k y geomeétrica uno, es posible determinar condiciones sobre la familia m-parametrizada de campos vectoriales, tal que la dinámica sobre la variedad central de dicha familia es localmente, topológicamente equivalente a la deformación versal establecida en el capítulo cuatro. Con esto se estableció, bajo qué condiciones una familia m-parametrizada de campos vectoriales n-dimensionales experimenta una bifurcación k-zero.

Encontramos k direcciones linealmente independientes, llamadas direcciones de desdoblamiento, las cuales nos permitieron establecer una transformación $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, que relaciona el diagrama de bifurcación del desdoblamamiento y el sistema original. Por otro lado, consideremos que una posible extensión de nuestro trabajo podría ser considerar el problema de determinar direcciones de desdoblamiento con estructuras más sencillas a las presentadas en

este trabajo.

En el capítulo seis se estudió el sistema de Rössler. Luego de un análisis detallado se verificó que existen valores en el espacio de parámetros, donde la linealización del campo vectorial, en un punto de equilibrio puede tener un valor propio cero de multiplicidad algebraica uno, dos y tres. A partir de este análisis, se determinaron las regiones en el espacio de parámetros donde el sistema de Rössler experimenta una bifurcación Takens-Bogdanov (TB). De igual forma, se caracterizarón dos puntos en dicho espacio donde se presenta una bifuración triple cero (TZ).

Finalmente, se caracterizarón las superficies en el espacio de los parámetros donde el sistema de Rössler experimenta una bifurcaión Silla-nodo, Hopf y homoclínica, utilizando el diagrama de la bifuración Takens-Bogdanov.

Concluimos el presente trabajo, mencionando el artículo y los eventos participaciones en congresos que han sido frutos de este trabajo:

- Martin A. Carrillo, Fernando Verduzco and Francisco A. Carrillo. *The k-Zero Bifurcation Theorem for m-Parameterized Systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 28, No. 8, pp. 185-100. April 2018.

- Marzo 2017-VIII Taller de Sistemas Dináamicos y Control, dentro del marco de la XXVI Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Título de la ponencia: Conexiones homoclínicas en el atractor de Rössler.

- Julio 2016-4th Colloquium on Dynamical Systems, Control and Applications (DyS-CAIV), México, DF. Poster: Unfolding directions in the k-zero bifurcation.

- Octubre 2015-XLVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Hermosillo, Sonora. Título de la ponencia: Sobre la bifurcación Takens-Bogdanov.

Apéndice A

Bifurcación Takens-Bogdanov

En esta sección se presenta un análisis de la bifurcación Takens-Bogdanov, utilizando la deformación versal

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z_2 + a z_1^2 + b z_1 z_2. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Referencias importantes en el estudio de esta bifurcación son [44], [48], [15] y [59]. En ellas, los autores presentan un análisis de bifurcación de (A.1) para valores fijos de los coeficientes a y b, presentando un diagrama de bifurcación. Sin embargo, otros diagramas se pueden obtener al variar a y b. El siguiente análisis muestra cuatro posibles diagramas de bifurcación al considerar esta variación.

Análsis de bifurcación

Para determinar los diferentes comportamientos dinámicos del sistema (A.1) primero analizamos la naturaleza de sus puntos de equilibrio.

Puntos de equilibrio

Cualquier equilibrio del sistema (A.1) se localiza sobre el eje horizontal $\varepsilon_2 = 0$, y satisface la ecuación

$$\varepsilon_1 + a z_1^2 = 0,$$

es decir, si $\overline{z} = \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{a}}$, con $\varepsilon_1 a < 0$, los puntos de equilibrio son

$$z_0^{\pm} = (\pm\overline{z}, 0)\,.$$

La matriz Jacobiana del campo vectorial evaluado en estos puntos de equilibrio esta dada por

$$DF\left(z_0^{\pm}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 2a\overline{z}, & \varepsilon_2 \pm b\overline{z} \end{pmatrix},$$

con valores propios

$$\lambda_{1,2}\left(z_0^{\pm}\right) = \frac{1}{2}\left((\varepsilon_2 \pm b\overline{z}) \pm \sqrt{(\varepsilon_2 \pm b\overline{z})^2 \pm 8a\overline{z}}\right) \tag{A.2}$$

Para $a > 0 (a < 0)$, el punto $z^+(z^-)$ es una silla para $\varepsilon_1 < 0 (\varepsilon_1 > 0)$, mientras que el punto $z^-(z^+)$ es un foco.

Caso $a > 0$

Si $a > 0$, entonces, para $\varepsilon_1 > 0$, el sistema (A.1) no tiene puntos de equilibrio. Si $\varepsilon_1 = 0$ el sistema tiene un punto de equilibrio $(0, 0)$, el cual es un punto silla-nodo para $\varepsilon_2 \neq 0$ y una cúspide para $\varepsilon_2 = 0$. Si $\varepsilon_1 < 0$, el sistema tiene dos puntos de equilibrio $z_0^{\pm}$.

Bifurcación silla-nodo

Un análisis muestra que, cuando $\varepsilon_1 = 0$, el sistema (A.1) experimenta una bifurcación silla-nodo en $(0, 0)$, es decir, la región

$$\mathcal{C}_{SN} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_1 = 0\}$$

en el plano de parámetros de bifurcación representa la región de puntos de bifurcación silla-nodo.

Bifurcación Hopf

De (A.2), se verifica que si $\varepsilon_2 = b\overline{z}$ entonces se tiene un único par de valores propios imaginarios en el punto z_0^-, dados por $\lambda_{1,2}\left(z_0^-\right) = \pm i\sqrt{2a\overline{z}}$. Por otro lado, $Re\left(\lambda_{1,2}\left(z_0^-\right)\right) = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - b\overline{z})$, y

$$d = \frac{d}{d\varepsilon_2}\left(Re\left(\lambda_{1,2}\left(z_0^-\right)\right)\right)|_{\varepsilon_2 = b\overline{z}} = \frac{1}{2},$$

donde d representa la velocidad de cruce de los valores propios a través del eje imaginario. Por lo tanto, se concluye que el sistema (A.1) experimenta una bifurcación Hopf en el punto z_0^- cuando $\varepsilon_2 = b\overline{z}$. Obsérvese que

$$\varepsilon_2 = b\overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_1 = -\frac{a}{b^2}\varepsilon_2^2,$$

entonces, en el plano de los parámetros de bifurcacián, la curva

$$\mathcal{C}_H = \left\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_1 = -\frac{a}{b^2}\varepsilon_2^2, \text{ con } \varepsilon_2 b > 0\right\}$$

representa la curva de puntos de bifurcación de Hopf.

La establidad de las órbitas periódicas quedan determinadas por el primer coeficiente de Lyapunov l (ver [44]). Para cálcular este coeficiente primero ponemos el sistema (A.1) en su forma normal, lo cual es posible mediante el cambio de coordenadas

$$\psi = P^{-1}\left(z - z_0^-\right)$$

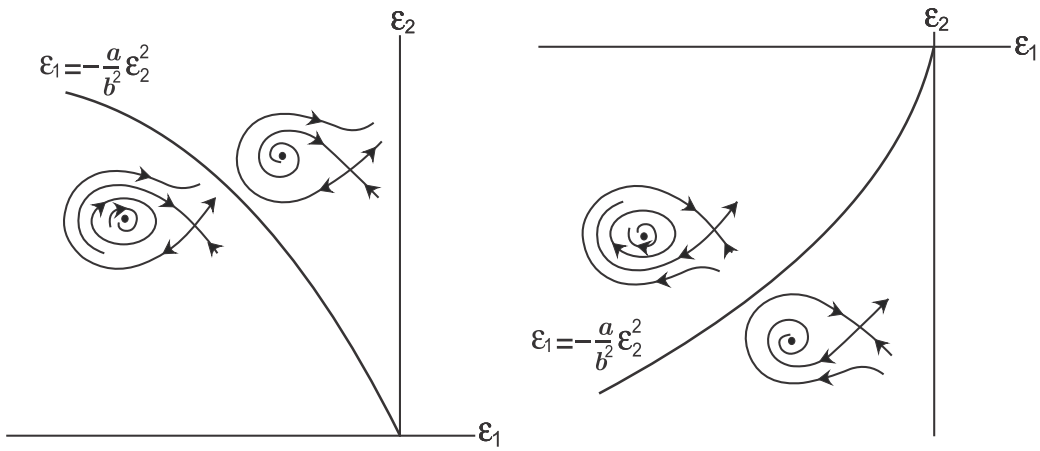
donde $P = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$, con $\omega_0 = \sqrt{2a\bar{z}}$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\omega_0\psi_2 + b\psi_1\psi_2 + \frac{a}{\omega_0}\psi_2^2, \\ \psi_2 &= \omega_0\psi_1, \end{aligned}$$

se sigue que

$$l = \frac{b}{16\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{a}}}.$$

Claramente, el signo del l queda determinado por el coeficiente b, de este modo, existen dos direcciones para la ocurrencia de la bifurcación Hopf, las cuales se muestran en la figura A.1



(a) $b > 0$ (b) $b < 0$

Figura A.1: Curvas de bifurcación Hopf para $a > 0$.

Bifurcación homoclínica

El análisis de la bifurcación homoclínica inicia con un rescalamiento en variables, parámetros y tiempo, el cual está dado por

$$z_1 = \varepsilon^2 u, \quad z_2 = \varepsilon^3 v, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon^4 a\nu_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^2 b\nu_2, \quad \varepsilon \geq 0$$

y $t = \frac{1}{\varepsilon}\tau$. Así que (A.1) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= a\left(u^2 + \nu_1\right) + \varepsilon b\left(\nu_2 v + uv\right). \end{aligned} \tag{A.3}$$

La caracteristica más importante del rescalamiento anterior es que, para $\varepsilon = 0$, el sistema no perturbado

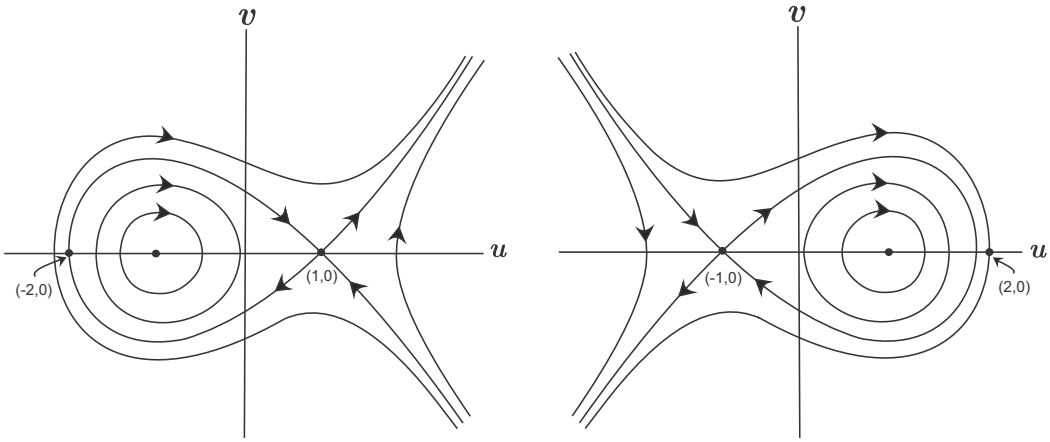
$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= a\left(u^2 + \nu_1\right), \end{aligned} \tag{A.4}$$

representa un sistema Hamiltoniano completamente integrable con función Hamiltoniana dada por

$$H(u,v) = \frac{v^2}{2} - a\left(\nu_1 u + \frac{u^3}{3}\right).$$

Para $\nu_1 < 0$, el sistema Hamiltoniano (A.4) tiene dos puntos críticos $(\pm\sqrt{-\mu_1}, 0)$. En particular, para $\nu_1 = -1$ el retrato se muestra en la figura (A.2), donde se ilustra la orientación de la órbita homoclínica. Un breve análisis muestra que dicha órbita corresponde a la curva de nivel $H(u,v) = \frac{2}{3}a$, cuya solución basada en el punto $(-2,0)$ está dada por

$$(u_0(t), v_0(t)) = \left(1 - 3\mathrm{sech}^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), 3\sqrt{2a}\mathrm{sech}^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\tanh\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right),$$



(a) $a > 0$ (b) $a < 0$

Figura A.2: Retrato fase de (A.4) para $\nu_1 = -1$..

La función de Melnikov a lo largo de la conexión homoclínica está dada por

$$\begin{aligned} M(t_0) &= b\int_{-\infty}^{\infty} v_0(t)\left[\nu_2 v_0(t) + u_0(t)v_0(t)\right]dt, \\ &= \frac{24}{35}\sqrt{2}ab\left(7\nu_2 - 5\right). \end{aligned}$$

De esto se sigue que si $\nu_2 = \frac{5}{7}$ entonces $M(t_0) = 0$, por lo cual, de la teoría de Melnikov (ver [44]) la curva de puntos de bifurcación homoclínica está dado por $\nu_2 = \frac{5}{7} + \mathcal{O}(\varepsilon)$. En cuanto al correspondiente rescalamiento, se obtiene la siguiente equivalencia

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^4 a \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^4 = -\frac{\varepsilon_1}{a}$$

y

$$\varepsilon_2 = \varepsilon^2 b \nu_2 = \varepsilon^2 b \left(\frac{5}{7} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) = \frac{5}{7} \varepsilon^2 b + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right).$$

En consecuencia, se cumple que $\varepsilon_2^2 = \frac{25}{49}\varepsilon^4 b^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^5\right) = -\frac{25}{49}\frac{b^2}{a}\varepsilon_1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^5\right)$, es decir

$$\varepsilon_1 = -\frac{49}{25}\frac{a}{b^2}\varepsilon_2^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon_2^{5/2}\right).$$

EL análisis anterior muestra que sobre la curva

$$\mathcal{C}_{Hom} = \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_1 = \frac{49}{25}\frac{a}{b^2}\varepsilon_2^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon_2^{5/2}\right), \text{ con } \varepsilon_2 b > 0 \right\}$$

el sistema (A.1) experimenta una bifurcación homoclínica.

Caso $a < 0$

Un análsis similar al caso anterior se sigue para determinar las regiones en el espacio de los parámetros donde el sistema (A.1) experimenta una bifurcación silla-nodo, Hopf y homoclínica cuando $a < 0$. Los resultados se resumen a continuación.

Una bifurcación silla-nodo se experimenta sobre la curva

$$\mathcal{C}_H = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_1 = 0\}$$

El sistema experimenta una bifurcación Hopf en el punto z^+, donde la curva de bifurcación está dada por

$$\mathcal{C}_H = \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_1 = -\frac{a}{b^2}\varepsilon_2^2, \text{ con } \varepsilon_2 b < 0 \right\}.$$

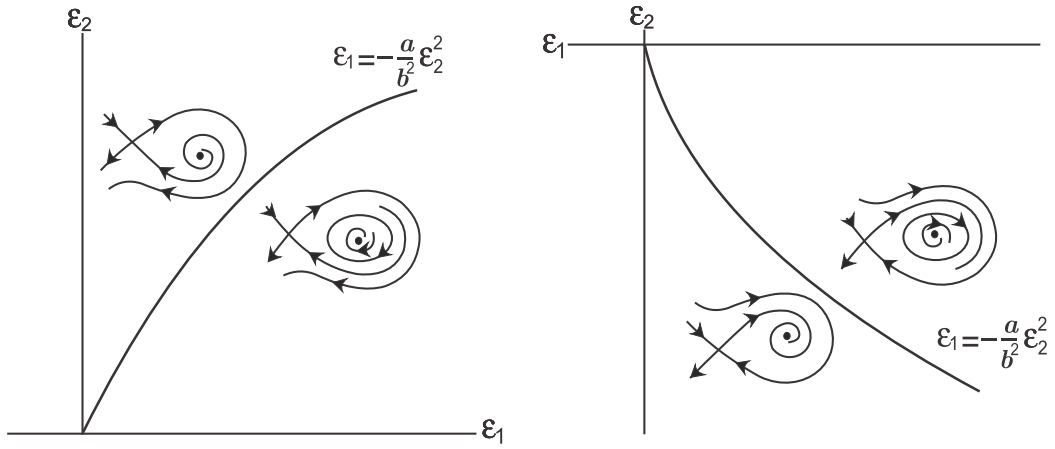
El primer coeficiente de Lyapunov está dado por $l = -\frac{b}{16\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{a}}}$. Además, las dos direcciones de la ocurrencia de esta bifurcación se muestra en la figura A.3.

Por otro lado, una bifurcación homoclínica ocurre sobre la curva

$$\mathcal{C}_{Hom} = \left\{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_1 = -\frac{49}{25}\frac{a}{b^2}\varepsilon_2^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon_2^{5/2}\right), \text{ con } \varepsilon_2 b < 0 \right\}$$

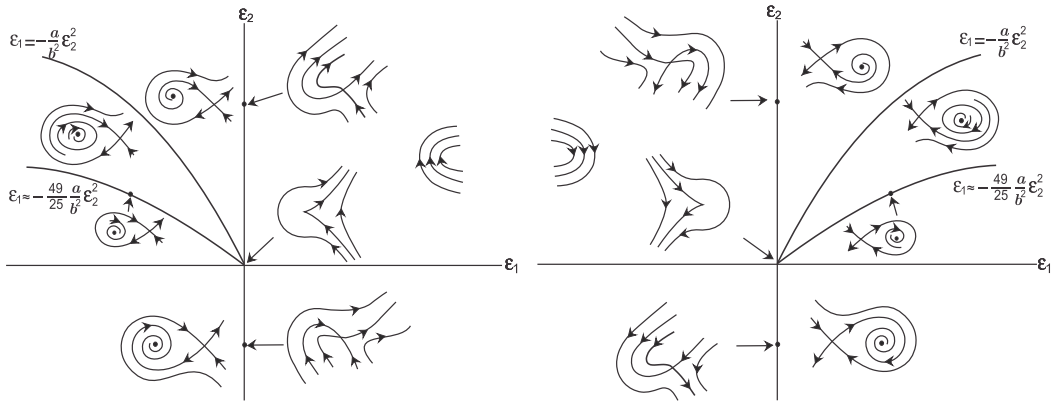
La dirección de la órbita homoclínica para esta caso se muestra en la figura A.2.

Los resultados anteriores muestran que es posible obtener cuatro diagramas de bifurcación para el sistema (A.1) al variar los coeficientes a y b, los cuales se ilustran en la figura A.4.

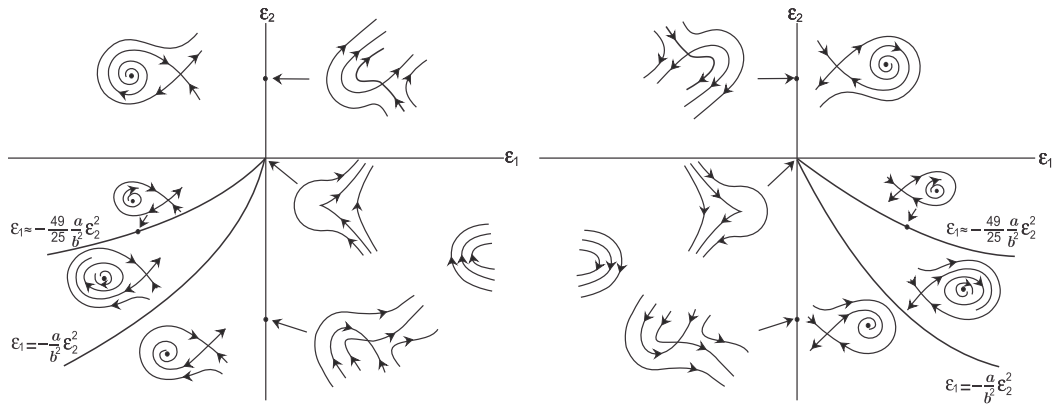


(a) $b > 0$ (b) $b < 0$

Figura A.3: Curvas de bifurcación Hopf para $a < 0$.



(a) $a > 0$ y $b > 0$ (b) $a < 0$ y $b < 0$



(c) $a > 0$ y $b < 0$ (d) $a < 0$ y $b > 0$

Figura A.4: Posibles diagramas de bifurcación.

Apéndice A

Código

En el capítulo 3 se concluye que, dado un sistema $\dot{x} = F(x, \mu)$, una forma normal para este sistema queda determinada por la matriz

$$\overline{R}_{1k} = R_{1k} + G(R_{1,k-1}) + \cdots + G^{k-1}(R_{11}) - G^k(L_{21}).$$

donde $G(X) = XJ_0 + J_0^T X$, para $X^T = X$.

A continuación se muestra el código fuente escrito en *Wolfram Mathematica 10.0.* para calcular la matriz $\overline{R}_{1k}$ de un campo vectorial dado, cuya matriz Jacobiana tiene un valor propio cero de multiplicidad k.

```
Quit
k := 4
makeSym[k, fn_] := Module[{rtmp}, rtmp = Table[fn[i, j], {i, 1, k}, {j, 1, i}];
MapThread[Join, {rtmp, Rest / Flatten[rtmp, {{2}, {1}}]}]]
R1[i_] := makeSym[k, Subscript[r^i, #2, #1] &]
J0[j_] := MatrixPower[SparseArray[{Band[{1, 1}] → 0, Band[{1, 2}] → 1}, {k, k}],
j]
J0T[j_] := MatrixPower[Transpose[SparseArray[{Band[{1, 1}] ->0, Band[{1, 2}] →
1}, {k, k}]], j]
Unprotect[MatrixPower];
MatrixPower[k_?SquareMatrixQ, 0] := IdentityMatrix[Length[k]]
Protect[MatrixPower];
L21 := makeSym[k, Subscript[l, #2, #1] &]
G[r_] := Sum[Binomial[r, i]*J0T[i].R1[k - r].J0[r - i], {i, 0, r}]
R1k := R1[k] + Sum[G[s], {s, 1, k - 1}]-Sum[Binomial[k, i]*J0T[i].L21.J0[k - i],
{i, 0, k}]
```

La función de cada comando utilizado en este código puede obtenerse en el explorador de ayuda del mismo software. Así mismo, dicho código puede implementarse para determinar la forma explícita de los parámetros libres que aparecen en la matriz $\overline{R}_{1k}$.

Bibliografía

[1] A. H. Nayfeh. *Method of normal forms.* John Wiley & Sons, New York, 1993.

[2] A. J. Rodríguez-Luis, E. Freire & E. Ponce. *On a codimension 3 bifurcation arising in an autonomous electronic circuit,in Bifurcation and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications (Würzburg, 1990)*, International Series on Numerical Mathematics, Vol. 97 (Birkhäuser, Basel), pp. 301306, 1991.

[3] A. Algaba, E. Freire, E. Gamero, A.J. Rodríguez-Luis. An exact homoclinic orbit and its connection with the Rössler system, *Physics Letters* A 379, pp. 1114-1121, 2015.

[4] Antonio Algaba. Resonances of periodic orbits in Rössler system in presence of a triple-zero bifurcation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 17, No. 6, pp. 1997-2008, 2007.

[5] A. Algaba, M. Merino, E. Freire, E. Gamero, & A. J. Rodriguez-Luis. Some results on Chua's equation near a triple-zero linear degeneracy, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13, No. 6, pp. 583608, 2003.

[6] A. Algaba, E. Freire, E. Gamero Computing simplest normal forms for the TakensBogdanov singularity, Qual. Th. Dyn. Syst. 3, pp. 377435, 2002.

[7] A. Algaba, E. Freire, &E. Gamero, Hypernormal form for the Hopf-zero bifurcation, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 8, pp. 18571887, 1998.

[8] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Springer, Berlin, 1983.

[9] D. K. Arrowsmith, and C. M. Place, *An Introduction to Dynamical Systems.* Cambridge University Press, Cambridge. 1990.

[10] D. K. Arrowsmith, & C. M Place, Bifurcations at a cusp singularity with applications, *Acta Applicandae Mathematicae* 2, pp. 101138, 1984.

[11] A. Vanderbauwhede. *Center manifold, normal forms and elementary bifurcations*, Dynamics Reported **2**, pp. 1-34, 1984.

[12] F. A, Carrillo, F. Verduzco, & J. Delgado. "Analysis of the Takens-Bogdanov bifurcation on m-parameterized vectors fields," *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **4**, pp. 995-1005, 2010.

[13] F. A. Carrillo & F. Verduzco, F. Control of the planar TakensBogdanov bifurcation with applications, *Acta Appl. Math.* 105, pp. 199225, 2009.

[14] C. Shui-Nee, C. Li, W. Duo. *Normal forms and bifurcation of planar vector fields.*, Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 1994.

[15] D. Lou, X. Wang, D. Zhu and M. Han. *Bifurcation Theory and Methods of Dynamical Systems.* Advanced Series in Dynamical Systems. World Scientific Publishing, 1997.

[16] Chow, S. N. & Hale, J. K. *Methods of Bifurcation Theory.* SpringerVerlag, NY, 1982.

[17] D.K. Arrowsmith, and C.M. Place. Bifurcations at a Cusp Singularity with Applications. *Acta Applicandae Mathematicae* 2, pp. 101-138, 1984.

[18] Elphick, C., Tirapegui, E., Brachet, M. E., Coullet, P. & Iooss, G. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields, *Physica* **D**29, pp. 95127, 1987.

[19] Freire, E., Gamero, E., Rodríguez-Luis, A. J. & Algaba, A. "A note on the triple zero linear degeneracy: Normal forms, dynamical and bifurcation behaviour of an unfolding," *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12**, pp. 2799-2820, 2002.

[20] F. Dumortier, P. Fiddelaers, C. Li. Generic unfolding of the nilpotent saddle of codimension four. Global analysis of Dynamical Systems. Institate of Physics. Bristol. pp. 131166, 2001.

[21] F. Dumortier, S. Ibáñes, H. Kokubu. New aspects in the unfolding of the nilpotent singularity of codimension three. *Dynamical Systems 16* , pp. 6395, 2001.

[22] Freddy Dumortier., Chris Herssens and Lawrence Perko. Local Bifurcations and a Survey of Bounded Quadratic Systems. *Journal of Differential Equations* 165, pp. 430-467. 2000.

[23] F. Dumortier & S. Ibáñez. Singularities of vector fields on $\mathbb{R}^3$, *Nonlinearity* 11, pp. 10371047. 1998.

[24] F. Dumortier & S. Ibáñez, Nilpotent singularities in generic 4-parameter families of 3-dimensional vector fields, *J. Diff. Eqs.*127, pp. 590647. 1996.

[25] F. Dumortier. Techniques in the theory of local bifurcations: blow-up, normal forms, nilpotent bifurcations, singular perturbations. In: Schlomiuk, D. (ed.) Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields (NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences 408, pp. 1973. Kluwer, Dordrecht, 1993.

[26] F. Dumortier. Local study of planar vector fields: Singularities and their unfolding. *Structures in Dynamics, Studies in Math. Physics 2,* 7, pp. 161-242. 1991.

[27] F. Dumortier, R Roussarie, and J. Sotomayor. Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.,* 7, pp. 375-413, 1987.

[28] F. Takens. Forced oscillations and bifurcations. *Applications of Global Analysis I.* Comm. Math. Inst. Rijksuniversitat Utrecht, **3**, pp. 1-59, 1974.

[29] F. Takens. Singularities of vector fields. Publ. Math. IHES 43. pp. 47100, 1974.

[30] F. Takens. Normal forms for certain singularities of vector fields. Ann. Inst. H. Fourier. Tomo 23. pp. 163195, 1973.

[31] F. Takens. Unfoldings of certain singularities of vector fields : Generalized Hopf. *J. Differential Equations.* 43. pp. 476493, 1973.

[32] F. Verduzco y I. Segundo. Orbitas homoclínicas en la bifurcación Takens-Bogdanov. Congreso Nacional de Control Automático. Octubre 2006

[33] F. Verduzco. Control of oscillations from the k-zero bifurcation. Chaos, Solitons and Fractals. 2006.

[34] J. Carr.*Applications of Center Manifold Theory.* Springer-Verlag. New York. 1981.

[35] J.E. Marsden, M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and Its Applications. SpringerVerlag.* New York. 1976.

[36] J.D. Meiss. *Differential Dynamical Systems.* Mathematical Modeling and Computation, SIAM. 2007.

[37] G. Tigan, J. Llibre, L. Ciurdariu. Degenerate FoldHopf Bifurcations in a Rössler-Type System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 27, No. 5, 1750068, 2017.

[38] G. Chen, D. Wang & X. Wang. Unique normal forms for nilpotent planar vector fields, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 12, pp. 21592174, 2002.

[39] E. Gamero, E. Freire, A. J. Rodríguez-Luis, E. Ponce, & A. Algaba, Hypernormal form for triple-zero degeneracy, *Bull. Belgian Math. Soc.* 6, pp. 357368, 1999.

[40] E. Gamero, A. J. Rodr$\acute{?}$guez-Luis, A. Algaba, & E. Freire, Formas normales simplificadas para equilibrios no hiperbólicos en $\mathbb{R}^3$, in Actas Electrónicas del XIV C.E.D.Y.A. / IV Congreso de Matemática Aplicada (Vic, Barcelona), eds. Simó, C. et al., Communication 42, 14 pp. http://wwwma1.upc.es/cedya/comu.html. 1995.

[41] E. Gamero, E. Freire, & E. Ponce On the normal forms for planar systems with nilpotent linear part, *Int. Series Numer. Math.* 97, pp. 123127, 1991.

[42] E. Strózyna & H. Zoladek.Orbital formal normal forms for general BogdanovTakens singularity, J. Diff. Eqs. 193, pp. 239259, 2003.

[43] E. Strózyna, The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity. The case of generalized saddle-node, Bull. Sci. Math. 126, pp. 555579, 2002.

[44] J. Guckenheimer, P.J. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Springer, Berlin, 1983.

[45] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Texts in Applied Mathematics, vol. 7. Springer, Second Edition, 1996.

[46] L. P. Shilnikov , A. L. Shilnikov, D. V. Turaev & L. Chua. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II (World Scientific,Singapore), 2001.

[47] J. Llibre, Periodic orbits in the zeroHopf bifurcation of the Rössler system, *Roman. Astron. J.* **24**, pp. 4960, 2014.

[48] J. Murdock, *Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems*, (Springer), 2002.

[49] J. Murdock,"Asymptotic Unfoldings of Dynamical Systems by Normalizing beyond the Normal Form," *Journal of Differential Equations* **143**, pp. 151-190, 1998.

[50] O.E. Rö. An Equation for Hyperchaos. *Phys. Lett.* 71A: pp. 155157, 1979.

[51] O.E. Rö. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett.* 57A: pp. 397-398, 1976.

[52] P. Yu. A simple and efficient method for computing center manifold and normal forms associated with semi-simple cases. Special Issue of Dynamics of Continuos. Discrete and Impulsive Systems for DCDIS'01. 2002.

[53] P. Yu. A method for computing center manifold and normal forms. EQUADIFF 99. No. 2, pp. 832-837. 2000.

[54] P. Yu. Computation of normal forms via a perturbation technique. J. Sound Vib., No. 211, pp. 19-38. 1998.

[55] Q. Bi, P. Yu. Symbolic software development for computing the normal forms of double Hopf bifurcation. *J. Math & Computer Modelling*, No. 29, pp 49-70, 1999.

[56] R. I. Bogdanov. Versal deformations of a singularity of a vector field on the plane. *Selecta Math. Sovietica.* **1**, 389-421, 1976.

[57] R. I. Bogdanov. Bifurcation of the limit cycle of a family of plane vector fields. *Selecta Math. Sovietica.* **1**, pp. 373-387, 1976.

[58] R. I. Bogdanov, Versal deformations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues, *Funct. Anal. Appl.* 9, pp. 144145, 1975.

[59] S. Wiggins. *Introduction to Applied Dynamical Systems and Chaos.* Springer, NY, 1990.

[60] S. Wiggins. *Global bifurcations and chaos (analytical methods).* NY.Springer-Verlag, New York. 1988.

[61] S. Ushiki. Normal forms for singularities of vector fields, Japan J. Appl. Math. 1, pp. 137, 1984.

[62] V.I. Arnold. Lectures on bifurcation in versal families. Russ. Math. Surv., No. 27, pp. 54-123, 1972.

[63] L. Xia and Z. Tonghua. BogdanovTakens and Triple Zero Bifurcations of Coupled van der Pol-Duffing Oscillators with Multiple Delays. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 27, No. 9, pp. 1750133, 2017.

[64] Y.A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 112. Springer. Second Edition, 2000.