"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Programa de Posgrado en Matemáticas

Equilibrios de Nash para juegos estocásticos no-cooperativos con criterio de pago descontado

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Alejandra Fonseca Morales

Director de Tesis:
Dr. Fernando Luque Vásquez

Hermosillo, Sonora.   23 de Febrero de 2012

SINODALES

Dr. Onésimo Hernández Lerma
CINVESTAV, México, DF.

Dr. Fernando Luque Vásquez
UNISON, Hermosillo, Sonora, México.

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa
UNISON, Hermosillo, Sonora, México.

Dr. Oscar Vega Amaya
UNISON, Hermosillo, Sonora, México.

UNIVERSIDAD DE SONORA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

"El Saber de Mis Hijos
Hará Mi Grandeza"

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, siendo las 17:00 horas del día 23 de febrero de 2012, se reunieron en el Auditorio del Deparatamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, los integrantes del jurado:

DR. ONÉSIMO HERNÁNDEZ LERMA
DR. OSCAR VEGA AMAYA
DR. FERNANDO LUQUE VÁSQUEZ
DR. JESÚS ADOLFO MINJÁREZ SOSA

bajo la presidencia del primero y fungiendo como secretario el último, para realizar el examen de grado del programa de Maestro en Ciencias (Matemáticas), a:

ALEJANDRA FONSECA MORALES

quien de acuerdo a la opción de examen de grado presentó un trabajo de investigación titulado

Equilibrios de Nash para juegos estocásticos no cooperativos con criterio de pago descontado

El jurado, después de debatir entre sí reservada y libremente, emitió el siguiente dictamen:

APROBADA POR UNANIMIDAD

y para constancia se levantó la presente acta.

ALEJANDRA FONSECA MORALES
205202618

EL SABER DE M
HARÁ MI G

Acta: 19
Foja: 19
Libro: 1

DR. ONÉSIMO HERNÁNDEZ LERMA
Presidente

Adolfo Minjarez

DR. JESÚS ADOLFO MINJÁREZ SOSA
Secretario

DR. OSCAR VEGA AMAYA
Sinodal

DR. FERNANDO LUQUE VÁSQUEZ
Sinodal

DR. FERNANDO VERDUZCO GONZÁLEZ, Coordinador del Programa de Maestro en Ciencias (Matemáticas) de la Universidad de Sonora, hace constar que las firmas que anteceden corresponden al jurado que intervino en el examen de grado.

Hermosillo, Sonora, a 23 de febrero de 2012

DR. FERNANDO VERDUZCO GONZÁLEZ
Coordinador de programa

DIVISIÓN DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES
COORDINACIÓN
POSGRADO EN MATEMÁTICAS

Nº 3948

Agradecimientos

A el profesor Dr. Fernando Luque V.

Índice general

Índice general **2**

1. Juegos estáticos y juegos estocásticos **7**

1.1. Juegos estáticos no-cooperativos 7

1.2. Juegos estocásticos no-cooperativos 15

2. Juegos estocásticos con espacios de estados numerable **19**

2.1. Condiciones del juego 19

2.2. Estructura del espacio de las multi-estrategias estacionarias 21

2.3. Continuidad de la función de pago descontado 23

2.4. Existencia del equilibrio de Nash 27

2.5. Ejemplo de un juego estocástico con espacio de estados numerable 29

3. Juegos estocásticos ARAT **31**

3.1. Condiciones del juego 32

3.2. Estructura del espacio de las estrategias estacionarias 33

3.3. Problemas de control de Markov asociados 36

3.4. Resultados preliminares 38

3.5. Existencia del equilibrio de Nash 44

3.6. Ejemplo de un juego estocástico ARAT 46

4. Apéndice **51**

Bibliografía **58**

Introducción

En 1950 John F. Nash introduce el concepto de equilibrio para juegos estáticos no-cooperativos en su trabajo de tesis *Equilibrium points in N-Person Games* en el que demuestra que cualquier juego estático con número finito de acciones o estrategias puras tiene al menos un equilibrio en el conjunto de estrategias aleatorizadas. Un año mas tarde, L. Glicksberg presenta en [10] una aplicación de su famoso teorema de punto fijo y demuestra la existencia de equilibrios de Nash en el conjunto de estrategias aleatorizadas para juegos estáticos cuyos conjuntos de estrategias puras son espacios métricos compactos.

No tardó mucho tiempo en surgir la teoría de juegos estocásticos no-cooperativos y la extensión del concepto de equilibrio para este tipo de juegos. Para juegos con espacio de estados no numerable, no ha sido sencillo establecer condiciones suficientes para la existencia de equilibrios, aún se sigue trabajando en la busqueda de condiciones más generales que aseguren la existencia de equilibrios de Nash para estos juegos.

En [7] se demuestra la existencia de equilibrios de Nash para modelos de juegos donde el espacio de estados es numerable, los espacios de acciones admisibles son métricos, separables y compactos y la función ganancia de cada jugador es acotada. En [20] se demuestra la existencia de tales equilibrios para modelos de juegos con estructura ARAT (de las siglas en inglés, *additive reward and additive transition*), donde el espacio de estados es de Borel, los espacios de acciones admisibles son métricos, separables y compactos y las funciones ganancia son funciones acotadas. En estos artículos el criterio que se estudia es el criterio de pago descontado. En el presente trabajo se consideran modelos de juegos con criterio de pago descontado donde la estructura topológica para los espacios de estados y los espacios de acciones es la misma que la presentada en [7] y en [20]. La diferencia principal entre los artículos mencionados y esta tesis es que en los modelos que se consideran aquí, las funciones de pago de cada jugador no necesariamente son acotadas.

El camino que se sigue para demostrar la existencia de equilibrios de Nash es el que se ha establecido a través de los trabajos previos, es decir, probar la existencia de un punto fijo de una correspondencia definida adecuadamente en el conjunto de las multi-estrategias estacionarias.

El contenido de este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se introduce el concepto de juego estático, se hace una descripción del trabajo de Nash para juegos finitos y se presenta un resultado establecido por L. Glicksberg en [10]. Posteriormente, se presentan conceptos básicos de juegos estocásticos no-cooperativos, el criterio de pago descontado y el concepto de equilibrio de Nash para juegos estocásticos.

En el Capítulo 2 se proporcionan condiciones suficientes para la existencia de equilibrios de Nash para juegos estocásticos no-cooperativos con espacio de estados numerable. En particular, se supone que los espacios de acciones admisibles son espacios métricos separables y compactos, y las funciones de pago para cada jugador no necesariamente son acotadas. Además, se presenta un ejemplo de un juego estocástico con espacio de estados numerable que satisface las condiciones para la existencia de un equilibrio de Nash.

Finalmente, en el Capítulo 3 se proporcionan condiciones suficientes para la existencia de equilibrios para dos clases de juegos estocásticos ARAT. En la primera, el espacio de estados es un espacio de Borel, los conjuntos de acciones son espacios métricos compactos, los conjuntos de acciones admisibles son constantes para cada estado y las funciones de pago no necesariamente son acotadas. En la segunda clase de juegos, el espacio de estados es un espacio de Borel compacto, los conjuntos de acciones son espacios métricos compactos, los conjuntos de acciones admisibles son cerrados y pueden variar de acuerdo al estado en el que se encuentre el juego y las funciones ganancia no necesariamente son acotadas. Al final del capítulo se presenta un ejemplo de juego estocástico ARAT que satisface las condiciones para la existencia de un equilibrio de Nash.

Notación

$\mathcal{B}(X)$	σ–álgebra de Borel en X.
$\mathbb{P}(X)$	Medidas de probabilidad en X.
$\mathbb{P}(X\vert Y)$	Kernels estocásticos definidos en $\mathcal{B}(X)\times Y$.
$\mathbb{F}$	Selectores medibles de una multifunción.
Φ_i	Estrategias estacionarias del jugador i.
Φ	Multi-estrategias estacionarias.
$\mathbb{M}(X)$	Funciones medibles en X.
$\mathbb{M}_b(X)$	Funciones medibles y acotadas en X.
$C(X)$	Funciones continuas en X.
$C_b(X)$	Funciones continuas y acotadas en X.
$L_1(X,\mu) = L_1(\mu)$	Funciones integrables en X con respecto a la medida μ.

Capítulo 1

Juegos estáticos y juegos estocásticos

La teoría de juegos estudia modelos matemáticos de situaciones de cooperación o de conflicto en el que participan dos o más entidades (personas, empresas, países, etc.) las cuales eligen acciones o toman decisiones que producen alguna "ganancia" a cada uno de los participantes. En este contexto, la palabra "juego" se refiere a la situación de conflicto (económico, social, natural, etc.) y a los participantes se les llama jugadores.

Este trabajo está orientado a los modelos no-cooperativos, es decir, modelos para los cuales los jugadores actúan independientemente y cada uno desea alcanzar su propio objetivo. Dicho objetivo consiste en maximizar sus ganancias tomando decisiones de acuerdo a determinadas reglas llamadas estrategias.

En la teoría de juegos la ganancia que recibe cada jugador depende tanto de las decisiones que toman los otros jugadores como de la propia, en consecuencia un jugador no necesariamente puede alcanzar su ganancia máxima posible. Por tal motivo, se introduce el concepto de equilibrio de Nash, el cual se interpreta como una situación en la que para ninguno de los jugadores es favorable cambiar de estrategia ya que cualquier cambio implica una disminución en sus ganancias.

1.1. Juegos estáticos no-cooperativos

Un juego estático no-cooperativo de N jugadores es un sistema

$$\Gamma = (I, \{A_i\}_{i\in I}, \{r_i\}_{i\in I}) \tag{1.1}$$

que consiste en el conjunto de jugadores $I = \{1, ..., N\}$, el conjunto de acciones o estrategias puras A_i del jugador $i \in I$ y la función de ganancia o pago $r_i : A \to \mathbb{R}$ para el jugador i, donde

$A := A_1 \times \cdots \times A_N$. Un juego es finito, si el conjunto de acciones de cada jugador es un conjunto finito.

En un juego estático no-cooperativo cada jugador escoge una acción de su conjunto de acciones y entonces el jugador $i \in I$, recibe una ganancia $r_i(a_1, ..., a_N)$, donde $a_j \in A_j$ es la acción elegida por el jugador j.

Note que la ganancia $r_i(a_1, ..., a_N)$ puede tomar valores negativos lo cual se interpreta como una pérdida o costo para el jugador. Por lo tanto, el objetivo de cada jugador es elegir la mejor acción o estrategia pura para maximizar su ganancia. Un punto importante que el jugador debe considerar es que su ganancia depende de todas las acciones elegidas por cada uno de los jugadores, por tal motivo, se define a continuación el concepto de equilibrio el cual fue introducido por J. F. Nash en [15].

Definición 1.1.1. *Un punto* $(a_1^*, ..., a_N^*) \in A$ *es un equilibrio para el juego* Γ *si*

$$r_i(a_1^*, ..., a_N^*) = \max_{a_i \in A_i} r_i(a_1^*, ..., a_i, ..., a_N^*) \quad \forall i \in I.$$

Nótese que si $(a_1^*, ..., a_N^*)$ es un punto de equilibrio y el jugador j elige la acción a_j en lugar de elegir la acción a_j^*, entonces

$$r_j(a_1^*, ..., a_N^*) \geq r_j(a_1^*, ..., a_j, ..., a_N^*).$$

Es decir, ninguno de los jugadores está motivado para cambiar su decisión en la estrategia de equilibrio ya que cualquier cambio no aumenta su ganancia.

Ejemplo 1.1.2. *Consideremos un juego de dos jugadores con* $A_1 = \{a_1, a_2\}, A_2 = \{b_1, b_2\}$ *y las correspondientes funciones de pago dadas por*

$$\begin{array}{ll} r_1(a_1, b_1) = 4 & r_1(a_1, b_2) = -1 \\ r_1(a_2, b_1) = 0 & r_1(a_2, b_2) = 1, \\ r_2(a_1, b_1) = 1 & r_2(a_1, b_2) = -1 \\ r_2(a_2, b_1) = 0 & r_2(a_2, b_2) = 4. \end{array}$$

El juego tiene los equilibrios (a_1, b_1) *y* (a_2, b_2) *en* $A_1 \times A_2$.

Ejemplo 1.1.3. *Para el juego de dos jugadores con* $A_1 = \{a_1, a_2\}, A_2 = \{b_1, b_2\}$ *y funciones de pago*

$$\begin{array}{ll} r_1(a_1, b_1) = 3 & r_1(a_1, b_2) = 1 \\ r_1(a_2, b_1) = 4 & r_1(a_2, b_2) = 0, \\ r_2(a_1, b_1) = 5 & r_2(a_1, b_2) = 0 \\ r_2(a_2, b_1) = 0 & r_2(a_2, b_2) = 5, \end{array}$$

el juego no tiene equilibrios en $A_1 \times A_2$.

El Ejemplo 1.1.3 muestra que en un juego no siempre existen equilibrios en el conjunto de las estrategias puras. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, sí existen equilibrios en el conjunto de las estrategias aleatorizadas o estrategias mixtas. Esta clase de estrategias se define a continuación.

Una *estrategia aleatorizada* para el jugador i es una medida de probabilidad en el conjunto de acciones A_i. Denotaremos por $\mathbb{P}(A_i)$ al conjunto de todas las estrategias aleatorizadas para el jugador i y a cada elemento en $\mathbb{P}(A) := \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_N)$ lo llamaremos *multi-estrategia* para los N jugadores. Cuando los jugadores usan una multi-estrategia $\mu = (\mu_1, ..., \mu_N) \in \mathbb{P}(A)$ la elección del jugador i puede interpretarse como el resultado de una variable aleatoria con distribución de probabilidad μ_i.

Para cada $\phi_i \in \mathbb{P}(A_i)$ y $\mu = (\mu_1, ..., \mu_N) \in \mathbb{P}(A)$ denótese

$$(\mu^{-i}, \phi_i) := (\mu_1, ..., \mu_{i-1}, \phi_i, \mu_{i+1}, ..., \mu_N).$$

Además, se denotará por

$$\bar{r}_i(\mu) \quad := \quad \int_{A_N} \cdots \int_{A_1} r_i(a_1, ..., a_N)\mu_1(da_1)\cdots\mu_N(da_N) \;\; \mu \in \mathbb{P}(A) \tag{1.2}$$

a la ganancia esperada del jugador $i \in I$ cuando los jugadores usan la multi-estrategia $\mu \in \mathbb{P}(A)$.

Para el caso particular donde $\mu = (\mu_1, ..., \delta_i, ..., \mu_N)$ con δ_i la medida de Dirac concentrada en el punto a_i, es decir,

$$\delta_i(\tilde{a}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{a} = a_i \\ 0 & \text{si } \tilde{a} \neq a_i \end{cases}$$

denotaremos por $\bar{r}_i(\mu^{-i}, a_i)$ a la función $\bar{r}_i(\mu^{-i}, \delta_i)$.

Definición 1.1.4. *(a) Diremos que $\phi_i \in \mathbb{P}(A_i)$ es una respuesta óptima del jugador $i \in I$ para la multi-estrategia μ si*

$$\bar{r}_i(\mu^{-i}, \phi_i) \quad = \quad \max_{\tau_i \in \mathbb{P}(A_i)} \bar{r}_i(\mu^{-i}, \tau_i). \tag{1.3}$$

(b) Una multi-estrategia $\mu \in \mathbb{P}(A)$ es un equilibrio de Nash para el juego Γ si

$$\bar{r}_i(\mu) \quad = \quad \max_{\phi_i \in \mathbb{P}(A_i)} \bar{r}_i(\mu^{-i}, \phi_i) \;\; \forall i \in I.$$

Denotaremos por $\bar{R}_i(\mu)$ al conjunto de todas las respuestas óptimas del jugador i para μ.

Es importante señalar que, en general el máximo en (1.3) no se alcanza y en consecuencia el equilibrio de Nash no siempre existe. Por lo tanto, para garantizar la existencia de equilibrios es necesario imponer condiciones para el conjunto A_i y las funciones de pago r_i $(i \in I)$.

1.1.1. Juegos no-cooperativos finitos

Considérese Γ como en (1.1) un juego estático finito , es decir, para cada $j \in I$,

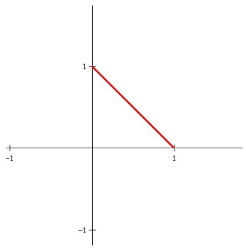
$$n_j \quad := \quad \#|A_j| < \infty.$$

Observemos que si $\mu = (\mu_1, ..., \mu_N) \in \mathbb{P}(A)$ entonces para cada $j \in I$ y cada $a_l \in A_j$, el número $\mu_j(a_l)$ es un número real no negativo menor igual que uno que representa la probabilidad de que el jugador j elija la acción a_l y tal que para cada $j \in I$,

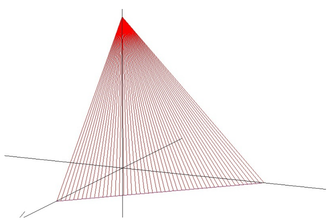
$$\sum_{l=1}^{n_j} \mu_j(a_l) = 1. \tag{1.4}$$

El espacio $\mathbb{P}(A_i)$ tiene una interpretación geométrica que varía de acuerdo al número de elementos (acciones) que tiene el conjunto A_i:

a) Cuando el conjunto de acciones es $A_i = \{a_1, a_2\}$, el conjunto $\mathbb{P}(A_i)$ puede identificarse con el subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $\{(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$



b) Cuando el conjunto de acciones es $A_i = \{a_1, a_2, a_3\}$, el conjunto $\mathbb{P}(A_i)$ puede identificarse con el subconjunto de $\mathbb{R}^3$, $\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$



En general, si $A_i = \{a_1, ..., a_{n_i}\}$, entonces el conjunto $\mathbb{P}(A_i)$ puede identificarse con $\left\{(\lambda_1, ..., \lambda_{n_i}) : \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{n_i}$ (simplejo de dimensión $n_i - 1$) y el espacio $\mathbb{P}(A)$ puede identificarse con un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ donde $m = \sum_{i=1}^{N} n_i$. Para lo que sigue, dotaremos al conjunto $\mathbb{P}(A)$ con la métrica de $\mathbb{R}^m$.

Nótese que para una multi-estrategia $\mu = (\mu_1, ..., \mu_N)$, la función $\bar{r}_i$ definida en (1.2) está dada por

$$\begin{aligned} \bar{r}_i(\mu) &= \sum_{l_N=1}^{n_N} \cdots \sum_{l_1=1}^{n_1} r_i(a_{l_1}, ..., a_{l_N})\mu_1(a_{l_1}) \cdots \mu_N(a_{l_N}) \\ &= \sum_{a \in A} \prod_{j \in I} r_i(a)\mu_j(a_{l_j}). \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{r}_i(\mu^{-i}, \phi_i) &= \sum_{a \in A} [\prod_{j \in I \setminus \{i\}} r_i(a)\mu_j(a_{l_j})]\phi_i(a_{l_i}), \\ \bar{r}_i(\mu^{-i}, a_i) &= \sum_{a_j \in A_j, j \neq i} [\prod_{j \in I \setminus \{i\}} r_i(a)\mu_j(a_{l_j})]. \end{aligned}$$

1.1.2. Equilibrios de Nash para juegos no-cooperativos finitos

En esta sección se demostrará que si Γ es un juego no-cooperativo finito de N jugadores entonces existe al menos una multi-estrategia en $\mathbb{P}(A)$ que es un equilibrio de Nash para el juego Γ.

Observación 1.1.5. *En general, la estructura del espacio $\mathbb{P}(A)$ es muy importante para la existencia de equilibrios. En particular cuando los conjuntos de acciones son finitos tenemos las siguientes propiedades:*

1) Para cada $\beta \in [0,1]$ y $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{P}(A)$ se tiene que

$$\beta\mu_1 + (1-\beta)\mu_2 \in \mathbb{P}(A),$$

es decir, $\mathbb{P}(A)$ es un conjunto convexo.

2) El conjunto $\mathbb{P}(A)$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^m$ puesto que para cada $\mu = (\mu_1, ..., \mu_N) \in \mathbb{P}(A)$,

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i(a_{l_i}) \leq \sum_{i=1}^{N} 1 = N \qquad \forall (a_{l_1}, ..., a_{l_N}) \in A.$$

3) El espacio $\mathbb{P}(A)$ es cerrado y en consecuencia compacto.

4) La función $\bar{r}_i(\cdot)$ es continua en $\mathbb{P}(A)$.

El siguiente teorema, sin duda alguna, marcó la historia de la teoría de juegos no-cooperativos. La demostración original de John F. Nash se publicó en [15] y la demostración que se presenta a continuación se tomó de [21].

Teorema 1.1.6. *Si Γ es un juego no-cooperativo finito de N jugadores entonces existe un equilibrio de Nash en $\mathbb{P}(A)$.*

Demostración. Sea $\Psi : \mathbb{P}(A) \twoheadrightarrow \mathbb{P}(A)$ la multifunción definida por

$$\Psi(\mu) := \prod_{i=1}^{N} \bar{R}_i(\mu).$$

Por la Observación 1.1.5, 3) y 4), el conjunto $\mathbb{P}(A_i)$ es compacto y $\bar{r}_i(\mu^{-i}, \cdot)$ es continua en $\mathbb{P}(A_i)$. En consecuencia, se tiene que $\bar{R}_i(\mu)$ es un conjunto no vacío. Por lo tanto,

$$\Psi(\mu) \neq \varnothing \quad \forall \mu \in \mathbb{P}(A).$$

Ahora se probará que $\Psi(\mu)$ es convexo. Sean $\phi_1, \phi_2 \in \bar{R}_i(\mu)$ y $\beta \in [0,1]$ y observe que

$$\begin{aligned} \bar{r}_i(\mu^{-i}, \beta\phi_1 + (1-\beta)\phi_2) &= \beta\bar{r}_i(\mu^{-i}, \phi_1) + (1-\beta)\bar{r}_i(\mu^{-i}, \phi_2) \\ &= \beta \max_{\tau_i \in \mathbb{P}(A_i)} \bar{r}_i(\mu^{-i}, \tau_i) + (1-\beta) \max_{\tau_i \in \mathbb{P}(A_i)} \bar{r}_i(\mu^{-i}, \tau_i) \\ &= \max_{\tau_i \in \mathbb{P}(A_i)} \bar{r}_i(\mu^{-i}, \tau_i); \end{aligned}$$

por lo tanto, $\beta\phi_1 + (1-\beta)\phi_2 \in \bar{R}_i(\mu)$.

Se demostrará ahora que la multifunción Ψ es semicontinua superiormente. Sean $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a μ en $\mathbb{P}(A)$ y $\phi_n \in \Psi(\mu_n)$ una sucesión convergente a ϕ. Para probar la semicontinuidad superior de Ψ demostraremos que $\phi \in \Psi(\mu)$.

Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}, i \in I$ y para cada $\tau_i \in \mathbb{P}(A_i)$,

$$\bar{r}_i((\mu_n)^{-i}, \phi_n^i) \geq \bar{r}_i((\mu_n)^{-i}, \tau_i).$$

Por la continuidad de $\bar{r}_i$ sobre $\mathbb{P}(A)$, tenemos que

$$\bar{r}_i(\mu^{-i}, \phi^i) \geq \bar{r}_i(\mu^{-i}, \tau_i) \quad \forall \tau_i \in \mathbb{P}(A_i);$$

entonces, $\phi^i \in \bar{R}_i(\mu)$ para cada $i \in I$; por lo tanto, $\phi \in \Psi(\mu)$. Entonces, la multifunción $\Psi(\cdot)$ satisface las condiciones del teorema de punto fijo de Kakutani (Teorema 4.0.1) y por lo tanto, existe una multi-estrategia $\mu \in \mathbb{P}(A)$ tal que $\mu \in \Psi(\mu)$, es decir,

$$\bar{r}_i(\mu) = \max_{\tau_i \in \mathbb{P}(A_i)} \bar{r}_i(\mu^{-i}, \tau_i) \quad \forall i \in I;$$

equivalentemente, la multi-estrategia μ es un equilibrio de Nash para el juego Γ. ■

J. Nash generalizó el concepto de equilibrio estudiado ampliamente por John Von Neumann y Oskar Morgenstern en su libro *Theory of Games and Economic Behavior*. En un juego finito de suma cero de dos jugadores $G = \{A_1, A_2, r\}$ tenemos que

$$r(a) = r_1(a) = -r_2(a). \tag{1.5}$$

Para un juego de suma cero, si $(\mu_1^*, \mu_2^*) \in \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$ es un equilibrio de Nash, entonces

$$\begin{aligned} r(\mu_1^*, \mu_2^*) &\geq r(\mu_1, \mu_2^*) \quad \forall \mu_1 \in \mathbb{P}(A_1), \\ r(\mu_1^*, \mu_2^*) &\leq r(\mu_1^*, \mu_2) \quad \forall \mu_2 \in \mathbb{P}(A_2), \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\max_{\mu_1 \in \mathbb{P}(A_1)} r(\mu_1, \mu_2^*) \leq r(\mu_1^*, \mu_2^*) \leq \min_{\mu_2 \in \mathbb{P}(A_2)} r(\mu_1^*, \mu_2),$$

$$\min_{\mu_2 \in \mathbb{P}(A_2)} \max_{\mu_1 \in \mathbb{P}(A_1)} r(\mu_1, \mu_2) \leq r(\mu_1^*, \mu_2^*) \leq \max_{\mu_1 \in \mathbb{P}(A_1)} \min_{\mu_2 \in \mathbb{P}(A_2)} r(\mu_1, \mu_2).$$

Por otro lado se tiene que

$$\max_{\mu_1 \in \mathbb{P}(A_1)} \min_{\mu_2 \in \mathbb{P}(A_2)} r(\mu_1, \mu_2) \leq \min_{\mu_2 \in \mathbb{P}(A_2)} \max_{\mu_1 \in \mathbb{P}(A_1)} r(\mu_1, \mu_2),$$

lo cual, combinando con las desigualdades anteriores; (μ_1^*, μ_2^*) es un equilibrio de Nash si, y sólo si

$$\begin{aligned} r(\mu_1^*, \mu_2^*) &= \min_{\mu_2 \in \mathbb{P}(A_2)} \max_{\mu_1 \in \mathbb{P}(A_1)} r(\mu_1, \mu_2) \\ &= \max_{\mu_1 \in \mathbb{P}(A_1)} \min_{\mu_2 \in \mathbb{P}(A_2)} r(\mu_1, \mu_2). \end{aligned}$$

1.1.3. Juegos no-cooperativos con espacio de acciones compactos

En 1951 L. Glicksberg en [10] extiende el resultado de existencia de equilibrios de Nash para juegos estáticos no-cooperativos de N jugadores no necesariamente finitos. Él consideró un juego donde el espacio de las estrategias puras de cada jugador es un espacio métrico compacto y la función de ganancia r_i es una función continua en A. Este resultado es presentado como una aplicación del teorema de punto fijo (ver Teorema 4.0.2).

En este caso, el espacio $\mathbb{P}(A_i)$ es un subconjunto compacto y convexo del espacio $\mathcal{M}(A_i)$ formado por las medidas con signo finitas en A_i cuando se considera la topología débil.

En la Proposición 4.0.6 se prueba que $\mathcal{M}(A_i)$ es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo. Además, la convergencia en $\mathbb{P}(A_i)$ queda completamente caracterizada con la Proposición 7.21 en [4] p. 128, esto es, $\mu_n \to \mu$ en $\mathbb{P}(A_i)$ si, y sólo si,

$$\int_{A_i} f d\mu_n \to \int_{A_i} f d\mu \quad \forall f \in C(A_i).$$

La continuidad de la función ganancia r_i en A implica la continuidad de la función $\bar{r}_i$ en $\mathbb{P}(A)$. Esto es, si $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a μ, entonces la convergencia débil implica que

$$\begin{array}{rcl} \bar{r}_i(\mu_n) & = & \int_{A_N} \cdots \int_{A_1} r_i(a_1, ..., a_N)\mu_n^1(da_1)\cdots\mu_n^N(da_N) \\ \downarrow & & \\ \bar{r}_i(\mu) & = & \int_{A_N} \cdots \int_{A_1} r_i(a_1, ..., a_N)\mu^1(da_1)\cdots\mu^N(da_N). \end{array}$$

Teorema 1.1.7. *Sea Γ un juego estático de N jugadores. Si para cada $i \in I$ el conjunto de las estrategias puras A_i es un espacio métrico compacto y la función ganancia r_i es continua en A, entonces el juego tiene un equilibrio de Nash en el conjunto de las multi-estrategias aleatorizadas.*

Demostración. Se define la multifunción $\Psi : \mathbb{P}(A) \twoheadrightarrow \mathbb{P}(A)$ por

$$\Psi(\mu) \quad := \quad \prod_{i=1}^{N} \bar{R}_i(\mu),$$

donde

$$\bar{R}_i(\mu) \quad := \quad \left\{ \phi \in \mathbb{P}(A_i) : \bar{r}_i(\mu^{-i}, \phi) = \max_{\tau \in \mathbb{P}(A_i)} \bar{r}_i(\mu^{-i}, \tau) \right\} \quad i \in I.$$

La continuidad de la función $\bar{r}_i$ en el conjunto compacto $\mathbb{P}(A_i)$ asegura que el conjunto $\Psi(\mu)$ es no vacío. La linealidad de la función $\bar{r}_i$ implica que el conjunto $\Psi(\mu)$ es convexo.

Sea $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a μ en $\mathbb{P}(A)$ y $\phi_n \in \Psi(\mu_n)$ tal que la sucesión $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto ϕ. Puesto que la función $\bar{r}_i$ es continua y como $\phi_n \in \Psi(\mu_n)$, para cada $\tau \in \mathbb{P}(A_i)$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \bar{r}_i((\mu_n)^{-i}, \phi_n^i) & \geq & \bar{r}_i((\mu_n)^{-i}, \tau) \\ & \downarrow & \\ \bar{r}_i(\mu^{-i}, \phi^i) & \geq & \bar{r}_1(\mu^{-i}, \tau). \end{array}$$

Esto implica que $\phi^i \in \bar{R}_i(\mu)$ para todo $i \in I$, es decir, $\phi \in \Psi(\mu)$. Por lo tanto Ψ es semicontinua superiormente.

Finalmente, por el teorema de punto fijo de Glicksberg (ver Teorema 4.0.2), se sigue que existe un punto fijo μ de la multifunción Ψ, es decir, se satisface que

$$\bar{r}_i(\mu) \quad = \quad \max_{\tau \in \mathbb{P}(A_i)} \bar{r}_i(\mu^{-i}, \tau) \quad \forall i \in I.$$

Por lo tanto, μ es un equilibrio de Nash en $\mathbb{P}(A)$ para el juego Γ. ■

1.2. Juegos estocásticos no-cooperativos

En esta sección se definen los conceptos de juego estocástico, el criterio de pago descontado y el concepto de equilibrio de Nash para esta clase de juegos. En los capítulos 2 y 3 se establecen condiciones para la existencia de equilibrios.

Definición 1.2.1. *Un modelo de juego estocástico no-cooperativo de N jugadores, es un sistema de la forma:*

$$G := \{X, (A_i, \{A_i(x) : x \in X\}, r_i)_{i=1,\ldots,N}, Q\}$$

que consiste en:

(a) El conjunto X llamado, el espacio de estados.

(b) El conjunto $A_i, i \in I := \{1, ..., N\}$ es el espacio de acciones para el jugador i.

(c) El conjunto $A_i(x) \subset A_i$ $(i \in I)$ es el conjunto de acciones admisibles para el jugador i cuando el sistema está en el estado x. Definamos la multifunción de X en $A := A_1 \times \cdots \times A_N$ por

$$A(x) := \prod_{i=1}^{N} A_i(x),$$

y denótese su gráfica por,

$$\mathbb{K} \quad := \quad \{(x, a) : x \in X, a \in A(x)\}.$$

(d) La función $r_i : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ es la función de pago o ganancia del jugador i.

(e) La ley de transición Q es un kernel estocástico en $\mathbb{P}(X|\mathbb{K})$.

Un modelo de juego estocástico representa un sistema que evoluciona en el tiempo de la siguiente manera:

1.- En el tiempo $t = 0$ el sistema se encuentra en un estado inicial x_0.

2.- Cada jugador escoge independientemente una acción de su conjunto de acciones admisibles determinando así, $a = (a_1, ..., a_N) \in A(x_0)$.

3.- El jugador i recibe un pago $r_i(x, a)$.

4.- En $t = 1$, el sistema pasa a un nuevo estado x_1, de acuerdo a la ley de transición $Q(\cdot/x_0, a)$ y el proceso se repite indefinidamente.

Para cada $t = 0, 1, 2, ...$, se define el conjunto de las $t-$historias como $\mathbb{H}_t = \mathbb{K}^t \times X$ y $\mathbb{H}_0 = X$. Obsérvese que un elemento de $\mathbb{H}_t$ es de la forma

$$h_t = (x_0, a_0, ..., x_{t-1}, a_{t-1}, x_t).$$

Una *política o estrategia* para el jugador i es una sucesión $\pi_i = \{\pi_t^i\}$ de kernels estocásticos $\pi_t^i \in \mathbb{P}(A_i|\mathbb{H}_t)$ tal que

$$\pi_t^i(A_i(x)/h_t) = 1 \quad \forall h_t \in \mathbb{H}_t.$$

Se denota por Π_i al conjunto de todas las políticas para el jugador i y a cada elemento $\pi = (\pi_1, ..., \pi_N)$ en $\Pi := \Pi_1 \times \cdots \times \Pi_N$ se le llama una *multi-estrategia* para los N jugadores. Denotaremos por $\mathbb{P}(A_i|X)$ a la familia de kernels estocásticos que satisfacen la condición $\varphi_i(A_i(x)|x) = 1$ para todo $x \in X$.

Definición 1.2.2. *Una estrategia $\pi_i = \{\pi_t^i\} \in \Pi_i$ es estacionaria si existe $\phi_i \in \mathbb{P}(A_i|X)$ tal que*

$$\pi_t^i(B/h_t) = \phi_i(B/x_t) \;\; \forall h_t \in \mathbb{H}_t, \;\; B \in \mathcal{B}(A_i), \;\; t \geq 0.$$

Sea Φ_i el conjunto de todas las estrategias estacionarias del jugador i e identifíquese la estrategia $\{\phi, \phi, ...\}$ con ϕ y $\Phi := \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_N$ el conjunto de las *multi-estrategias estacionarias*.

Para cada $\pi \in \Pi$ y para cada $\gamma \in \Pi_i$, se usará la siguiente notación

$$(\pi^{-i}, \gamma_i) := (\pi_1, ..., \pi_{i-1}, \gamma_i, \pi_{i+1}, ..., \pi_N).$$

1.2.1. Criterio de pago descontado

Sea $((X \times A)^\infty, \sum)$ el espacio medible donde $\sum$ es la $\sigma-$álgebra producto de $(X \times A)^\infty$ y ν una medida de probabilidad en X. Entonces por el Teorema de Ionescu-Tulcea [ver Ash (1972, p. 109), Bertsekas and Shereve (1978, pp. 140-141)], para cada multi-estrategia $\pi \in \Pi$ existe una medida de probabilidad P_ν^π y un proceso estocástico $\{(x_t, a_t) : t = 0, 1, 2, ...\}$ en

$((X \times A)^\infty, \sum)$, donde x_t representa el estado y a_t representa el vector de acciones en el tiempo t tal que

$$\begin{aligned} P_\nu^\pi(x_0 \in B) &= \nu(B), \\ P_\nu^\pi(a_t \in C/h_t) &= \pi_t(C/h_t), \\ P_\nu^\pi(x_{t+1} \in B/h_t, a_t) &= Q(B/x_t, a_t). \end{aligned}$$

para todo $B \in \mathcal{B}(X), C \in \mathcal{B}(A), h_t \in \mathbb{H}_t$ y $t \geq 0$. En el caso particular donde ν es la medida de Dirac concentrada en un estado $x \in X$, la medida de probabilidad P_ν^π la denotaremos por P_x^π y el operador esperanza con respecto a P_x^π lo denotaremos por E_x^π.

Ahora se puede establecer claramente el objetivo del juego estocástico. La ganancia se acumula durante la evolución del juego considerando el criterio de ganancia total descontada definido de la siguiente manera.

Definición 1.2.3. *Para cada $i = 1, ..., N, x \in X$ y cada multi-estrategia $\pi \in \Pi$, definimos la ganancia total esperada α-descontada para el jugador i por*

$$V_i(x, \pi) := E_x^\pi \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t r_i(x_t, a_t)$$

donde $\alpha \in (0,1)$ se conoce como factor de descuento.

Como en el caso de juegos estáticos, en un juego estocástico la ganancia de cada jugador depende de las estrategias que elijan todos los jugadores lo que hace necesario introducir nuevamente un concepto de equilibrio.

Definición 1.2.4. *(a) Una estrategia $\pi_i^* \in \Pi_i$ es una respuesta óptima del jugador i para la multi-estrategia $\pi \in \Pi$ si*

$$V_i(x, (\pi^{-i}, \pi_i^*)) = \max_{\tau \in \Pi_i} V_i(x, (\pi^{-i}, \tau)) \qquad \forall x \in X.$$

(b) Una multi-estrategia $\pi^* = (\pi_1^*, ..., \pi_N^*) \in \Pi$ es un equilibrio de Nash para el juego si para cada $i = 1, 2, ..., N$, la estrategia π_i^* es una respuesta óptima del jugador i para π^*, es decir,

$$V_i(x, \pi^*) = \max_{\tau \in \Pi_i} V_i(x, ((\pi^*)^{-i}, \tau)) \qquad \forall x \in X, \ \ i = 1, ..., N.$$

Uno de los principales conceptos que se utilizan en este trabajo, además de los mencionados anteriormente, es el concepto de función W−acotada.

Definición 1.2.5. *Sean X un espacio métrico y $W : X \to [1, \infty)$ una función medible. Para cada función $g \in \mathbb{M}(X)$ definimos la W-norma por*

$$\|g\|_W = \sup_{x \in X} \frac{|g(x)|}{W(x)}.$$

Si $\|g\|_W < \infty$ diremos que g es W-*acotada*. Denótese por $\mathbb{B}_W(X)$ al conjunto de todas las funciones W−acotadas y note que es un espacio de Banach con la W−norma. Además, es claro que $\mathbb{B}(X) \subset \mathbb{B}_W(X)$.

Capítulo 2

Juegos estocásticos con espacios de estados numerable

El estudio de juegos estocásticos no-cooperativos se inició con los trabajos de Rogers (1969) en [22] y Sobel (1971) en [24], en los cuales se demostró la existencia de equilibrios de Nash para juegos estocásticos no-cooperativos en los que el espacio de estados X y los conjuntos de acciones A_i son finitos. En 1973, T. Parthasarathy en [19] extiende los resultados de existencia de equilibrios de Nash para juegos estocásticos no-cooperativos con espacio de estados numerable y conjuntos de acciones finitos. En 1976 A. Federgruen en [7], extiende el resultado de Parthasarathy en [19] para espacio de estados numerable y espacios de acciones admisibles métricos, separables y compactos.

En los artículos mencionados anteriormente las funciones de pago son funciones acotadas en X. En este capítulo se extiende el trabajo de A. Federgruen en [7], considerando la misma estructura topológica para los espacios de acciones admisibles y el conjunto de estados, pero con la nueva condición de que la función de pago no necesariamente es acotada. En [3] se estudian juegos estocásticos con espacio de estados numerable y función de pago no acotada bajo condiciones en la ley de transición distintas a las consideradas en este trabajo.

2.1. Condiciones del juego

Considérese el modelo de un juego estocástico no-cooperativo de N-jugadores como en la Definición 1.2.1,

$$G \ := \ \{X, (A_i, \{A_i(x) : x \in X\}, r_i)_{i=1,\ldots,N}, Q\} \tag{2.1}$$

donde el espacio de estados X es numerable y para cada $i \in I$ el conjunto de acciones A_i es un espacio métrico separable.

Hipótesis 2.1.1. *Existe una función $W : X \to [1, \infty)$ que satisface:*

(a) Para cada $x \in X, i \in I$,

$$\max_{a \in A(x)} |r_i(x,a)| \quad \leq \quad KW(x) \tag{2.2}$$

donde K es una constante positiva, es decir, la función

$$x \quad \mapsto \quad \max_{a \in A(x)} |r_i(x,a)|$$

es W-acotada.

(b) Existe $\beta \in [1, \frac{1}{\alpha})$ tal que para cada $x \in X$ y cada $a \in A(x)$,

$$\sum_{y \in X} W(y)Q(y/x,a) \quad \leq \quad \beta W(x).$$

Hipótesis 2.1.2. *Para cada $i \in I$ y $x \in X$,*

(a) El conjunto de acciones admisibles $A_i(x)$ es compacto.

(b) La función $r_i(x,\cdot)$ es continua en $A(x)$.

(c) La función

$$a \quad \mapsto \quad \sum_{y \in X} W(y)Q(y/x,a)$$

es continua en $A(x)$, donde W es la función en la Hipótesis 2.1.1.

(d) La función

$$a \quad \mapsto \quad \sum_{y \in X} u(y)Q(y/x,a)$$

es continua en $A(x)$ para toda función $u \in \mathbb{M}_b(X)$.

Teorema 2.1.3. *Bajo las Hipóstesis 2.1.1 y 2.1.2, el juego estocástico no-cooperativo G en (2.1), tiene un equilibrio de Nash en el conjunto de las estrategias estacionarias Φ.*

Como veremos en la sección 2.1.3, demostrar la existencia de un equilibrio de Nash para el juego estocástico G, es equivalente a demostrar la existencia de un punto fijo de una multifunción definida adecuadamente en el espacio de las multi-estrategias estacionarias. En la demostración se utilizará el teorema de punto fijo de Glicksberg, por lo tanto, en las siguientes secciones se introducen algunos conceptos y resultados necesarios para la demostración del Teorema 2.1.3. Para el resto del capítulo supóngase que se satisfacen las Hipótesis 2.1.1 y 2.1.2.

2.2. Estructura del espacio de las multi-estrategias estacionarias

En este capítulo, para un espacio métrico Y se considera el espacio de medidas de probabilidad $\mathbb{P}(Y)$ con la topología débil. Recordemos que una sucesión (μ_n) converge a μ en $\mathbb{P}(Y)$ si, y sólo si,

$$\int_Y f(y)\mu_n(dy) \to \int_Y f(y)\mu(dy) \quad \forall f \in C_b(Y).$$

A continuación se demuestra que el espacio $\Phi = \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_2$ de las multi-estrategias estacionarias es un subespacio metrizable compacto y convexo de un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo. Para demostrar tal afirmación, obsérvese primero que para cada $i \in I$,

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \{\phi_i \in \mathbb{P}(A_i/X) : \phi_i(\cdot/x) \in \mathbb{P}(A_i(x))\} \\ &= \prod_{x \in X} \mathbb{P}(A_i(x)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

(ver Definición 1.2.2). En la demostración de que Φ es metrizable, se utiliza el hecho que X es numerable y la representación (2.3). Además, como una consecuencia del teorema de Tychonoff y de la convexidad del conjunto $\mathbb{P}(A_i(x))$, se demuestra también que el espacio Φ es compacto y convexo.

Para cada $x \in X$ y cada $i \in I$, se denota por $\mathcal{M}(A_i(x))$ el conjunto de medidas con signo finitas definidas en $\mathcal{B}(A_i(x))$. Además, para cada $x \in X$, se usará la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A(x)) &:= \prod_{i=1}^{N} \mathcal{M}(A_i(x)), \\ \mathbb{P}(A(x)) &:= \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_i(x)). \end{aligned}$$

Obsérvese que para cada $x \in X, \mathbb{P}(A_i(x)) \subset \mathcal{M}(A_i(x))$.

Proposición 2.2.1. *(a) Para cada $x \in X$ y cada $i \in I, \mathbb{P}(A_i(x))$ y Φ_i son espacios metrizables separables y compactos.*

(b) El espacio de las multi-estrategias estacionarias Φ y $\mathbb{P}(A(x))$ son espacios metrizables separables y compactos.

Demostración. (a) La parte del enunciado correspondiente a $\mathbb{P}(A_i(x))$ se sigue directamente de la Proposición 7.20 y la Proposición 7.22 en [4] p. 127 y p. 130 respectivamente.

Por otra parte, de (2.3) tenemos que

$$\Phi_i = \prod_{x \in X} \mathbb{P}(A_i(x)).$$

Entonces:

(1) De la Proposición 4.0.5 tenemos que Φ_i es un espacio metrizable. Es importante señalar que si el conjunto de estados no es numerable entonces Φ_i no puede ser metrizable.

(2) Por la Proposición 7.4 en [4] p. 108, el espacio Φ_i es separable.

(3) Por el Teorema de Tychonoff, el espacio Φ_i es compacto.

(b) Usando argumentos similares a los utilizados en (1), (2) y (3) de (a) obtenemos que Φ y $\mathbb{P}(A(x))$ son espacios metrizables separables y compactos. ■

De la Proposición 4.0.7 y la Proposición 2.2.1 (b), se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2.2. *El espacio Φ de las multi-estrategias estacionarias es un espacio metrizable separable y compacto contenido en el espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo*

$$\prod_{i=1}^{N} \prod_{x \in X} \mathcal{M}(A_i(x)).$$

Proposición 2.2.3. *Una sucesión $\{\phi_n = (\phi_n^1, ..., \phi_n^N)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\phi = (\phi^1, ..., \phi^N)$ en Φ si, y sólo si, para cada $x \in X$ y para cada $F \in C(A(x))$,*

$$\int_{A(x)} F(a)\phi_n(da/x) \quad \to \quad \int_{A(x)} F(a)\phi(da/x). \tag{2.4}$$

Demostración. Sea $\{\phi_n = (\phi_n^1, ..., \phi_n^N)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $\phi = (\phi^1, ..., \phi^N)$ en Φ. Por (2.3), la convergencia en Φ es equivalente a que para cada $i \in I$ y cada $x \in X$,

$$\phi_n^i(\cdot/x) \to \phi^i(\cdot/x) \;\; en \;\; \mathbb{P}(A_i(x)), \tag{2.5}$$

esto es, para cada $f \in C(A_i(x))$,

$$\int_{A_i(x)} f(a_i)\phi_n^i(da_i/x) \quad \to \quad \int_{A_i(x)} f(a_i)\phi^i(da_i/x).$$

Además, la convergencia (2.5) es equivalente a que para cada $x \in X$,

$$\begin{array}{ccc} \phi_n(\cdot/x) & = & (\phi_n^1(\cdot/x), ..., \phi_n^N(\cdot/x)) \\ & & \downarrow \\ \phi(\cdot/x) & = & (\phi^1(\cdot/x), ..., \phi^N(\cdot/x)) \end{array} \tag{2.6}$$

en $\mathbb{P}(A(x))$ con la topología producto. Finalmente, por el Teorema 3.2 p. 21 en [5] la convergencia (2.6) es la convergencia débil en $\mathbb{P}(A(x))$, es decir, para cada $x \in X$ y para cada $F \in C(A(x))$,

$$\int_{A(x)} F(a)\phi_n(da/x) \quad \to \quad \int_{A(x)} F(a)\phi(da/x).$$

■

2.3. Continuidad de la función de pago descontado

Los resultados que se presentan a continuación, se usarán para demostrar la continuidad de la función de pago descontado $V_i(x,\cdot)$ en el espacio Φ (Lema 2.3.7). Esta propiedad es necesaria para demostrar la semicontinuidad superior de la multifunción que satisface las condiciones del teorema de punto fijo de Glicksberg.

Para $\mu = (\mu_1, ..., \mu_N) \in \mathbb{P}(A(x))$ se usará la siguiente notación,

$$\begin{aligned}\bar{r}_i(x,\mu) &:= \int_{A(x)} r_i(x,a)\mu(da)\\ &= \int_{A_1(x)} \cdots \int_{A_N(x)} r_i(x,a^1,...,a^N)\mu_N(da^N)\cdots\mu_1(da^1),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{Q}(y/x,\mu) &:= \int_{A(x)} Q(y/x,a)\mu(da)\\ &= \int_{A_1(x)} \cdots \int_{A_N(x)} Q(y/x,a^1,...,a^N)\mu_N(da^N)\cdots\mu_1(da^1).\end{aligned}$$

(La segunda igualdad se sigue del Teorema de Fubini.)

Definición 2.3.1. *Para cada $k \in \mathbb{N}, \phi \in \Phi$ definimos la probabilidad de transición del estado x al estado y en k pasos por*

$$\begin{aligned}\bar{Q}^k(y/x,\phi) &:= \sum_{z\in X} \bar{Q}(z/x,\phi)\bar{Q}^{k-1}(y/z,\phi)\\ &= \sum_{z\in X} \bar{Q}^{k-1}(z/x,\phi)\bar{Q}(y/z,\phi).\end{aligned}$$

Observación 2.3.2. *Sea $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a ϕ en Φ.*

(a) Por la Hipótesis 2.1.2 (b) y la Proposición 2.2.3,

$$\bar{r}_i(y,\phi_n) \quad \to \quad \bar{r}_i(y,\phi),$$

y en consecuencia la función $\bar{r}_i(y,\cdot)$ es continua en Φ.

(b) Por la Hipótesis 2.1.2(d), para cada $x, y \in X$ la función $Q(y/x,\cdot)$ es continua en $A(x)$ y por la Proposición 2.2.3

$$\bar{Q}(y/x,\phi_n) \rightarrow \bar{Q}(y/x,\phi),$$

es decir, la función $\bar{Q}(y/x,\cdot)$ es continua en Φ.

Proposición 2.3.3. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x, y \in X$ la función $\bar{Q}^k(y/x,\cdot)$ es continua en Φ.*

Demostración. Sea $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a ϕ en Φ. Por la Observación 2.3.2

$$\bar{Q}(y/x,\phi_n) \rightarrow \bar{Q}(y/x,\phi).$$

Supongamos que para cada $m \in \{1,2,...,,k-1\}$ la función $\bar{Q}^m$ es continua en Φ, entonces,

$$\begin{aligned} \bar{Q}(z/x,\phi_n) &\rightarrow \bar{Q}(z/x,\phi), \\ \bar{Q}^{k-1}(y/z,\phi_n) &\rightarrow \bar{Q}^{k-1}(y/z,\phi). \end{aligned}$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x, z \in X$,

$$\bar{Q}(z/x,\phi_n) \leq 1,$$

entonces por la Proposición 4.0.3 se sigue que

$$\begin{aligned} \bar{Q}^k(y/x,\phi_n) &= \sum_{z\in X} \bar{Q}(z/x,\phi_n)\bar{Q}^{k-1}(y/z,\phi_n) \\ &\downarrow \\ \bar{Q}^k(y/x,\phi) &= \sum_{z\in X} \bar{Q}(z/x,\phi)\bar{Q}^{k-1}(y/z,\phi). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{Q}^k(y/x,\cdot)$ es continua en Φ para cada $k \in \mathbb{N}$. ∎

Proposición 2.3.4. *Si $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a ϕ en Φ, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{y\in X} W(y)\bar{Q}^k(y/x,\phi_n) \rightarrow \sum_{y\in X} W(y)\bar{Q}^k(y/x,\phi). \tag{2.7}$$

Demostración. Sea $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a $\phi \in \Phi$. Primero nótese que por la Hipótesis 2.1.2(c), la función

$$\sum_{y\in X} W(y)Q(y/x,\cdot)$$

es continua en $A(x)$. Entonces por la Proposición 2.2.3 tenemos que

$$\sum_{y\in X} W(y)\bar{Q}(y/x,\phi_n) \quad \to \quad \sum_{y\in X} W(y)\bar{Q}(y/x,\phi).$$

Supongamos que (2.7) es válido para cada $m \in \{1,2,...,k-1\}$. De la Hipótesis 2.1.1 (b), se obtiene que

$$\sum_{y\in X} W(y)\bar{Q}(y/z,\phi_n) \leq \beta W(z) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, z \in X.$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.3.3 y la Proposición 4.0.3 se sigue que

$$\begin{array}{c} \sum_{z\in X}\sum_{y\in X} W(y) \quad \bar{Q}(y/z,\phi_n)\bar{Q}^{k-1}(z/x,\phi_n) \\ \downarrow \\ \sum_{z\in X}\sum_{y\in X} W(y) \quad \bar{Q}(y/z,\phi)\bar{Q}^{k-1}(z/x,\phi). \end{array} \tag{2.8}$$

Puesto que para cada $\varphi \in \Phi$,

$$\begin{aligned} \sum_{y\in X} W(y)\bar{Q}^k(y/x,\varphi) &= \sum_{y\in X} W(y) \sum_{z\in X} \bar{Q}^{k-1}(z/x,\varphi)\bar{Q}(y/z,\varphi) \\ &= \sum_{z\in X} [\sum_{y\in X} W(y)\bar{Q}(y/z,\varphi)]\bar{Q}^{k-1}(z/x,\varphi). \end{aligned}$$

De (2.8) se sigue (2.7). ■

Lema 2.3.5. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a $\phi \in \Phi$ tenemos que*

$$\sum_{y\in X} \bar{r}_i(y,\phi_n)\bar{Q}^k(y/x,\phi_n) \quad \to \quad \sum_{y\in X} \bar{r}_i(y,\phi)\bar{Q}^k(y/x,\phi).$$

Demostración. Por la Hipótesis 2.1.1(b), tenemos que para cada $y \in X$,

$$\bar{r}_i(y,\phi_n) \quad \leq \quad KW(y) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, por la Observación 2.3.2, la Proposición 2.3.4 y la Proposición 4.0.3 se sigue que

$$\sum_{y\in X} \bar{r}_i(y,\phi_n)\bar{Q}^k(y/x,\phi_n) \quad \to \quad \sum_{y\in X} \bar{r}_i(y,\phi)\bar{Q}^k(y/x,\phi).$$

■

Lema 2.3.6. *La función $V_i(x,\cdot)$ es continua en Φ.*

Demostración. Sea $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a $\phi \in \Phi$. El objetivo es demostrar que para cada $i \in I$ y $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} V_i(x,\phi_n) = V_i(x,\phi). \tag{2.9}$$

Para cada $\varphi \in \Phi$ y $k = 1, 2, ...$ definimos la función $H_{\varphi}^k(x) : X \to \mathbb{R}$ por

$$H_{\varphi}^k(x) := \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n \sum_{y\in X} \bar{r}_i(y,\varphi)\bar{Q}^n(y/x,\varphi). \tag{2.10}$$

Por el Lema 2.3.5 tenemos que

$$H_{\phi_n}^k(x) \to H_{\phi}^k(x).$$

Además, por el Lema 4.0.9, para cada $\varphi \in \Phi$ se tiene que

$$\begin{aligned} V_i(x,\varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (\sum_{y\in X} \bar{r}_i(y,\varphi)\bar{Q}^j(y/x,\varphi) \\ &= H_{\varphi}^k(x) + \alpha^k \sum_{y\in X} \bar{Q}^k(y/x,\varphi)V_i(y,\varphi). \end{aligned}$$

Por otra parte, para cada $x \in X$ y cada $\varphi \in \Phi$,

$$\begin{aligned} |V_i(x,\varphi)| &\leq \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t E_x^{\varphi} |r_i(x_t,a_t)| \\ &\leq \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha\beta)^t KW(x) \\ &= K\frac{W(x)}{1-\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para $x \in X$ fijo y $\epsilon > 0$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha^k \leq \frac{\epsilon(1-\alpha\beta)}{4KW(x)}$$

y sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|H_{\phi_n}^k(x) - H_{\phi}^k(x)\right| < \epsilon/2 \qquad \forall n \geq N_0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |V_i(x,\phi_n) - V_i(x,\phi)| &\leq \left|H_{\phi_n}^k(x) - H_{\phi}^k(x)\right| \\ &+ \alpha^k \sum_{y\in X} \bar{Q}^k(y/x,\phi_n) \left|V_i(y,\phi_n) - V_i(y,\phi)\right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \alpha^k \frac{2KW(x)}{1-\alpha\beta} \leq \epsilon \quad \forall n \geq N_0. \end{aligned}$$

Puesto que ϵ es arbitrario, se sigue (2.9). ■

Lema 2.3.7. *Para cada $x \in X$, la función*

$$\phi \mapsto \alpha \sum_{y \in X} V_i(y,\phi)\bar{Q}(y/x,\phi).$$

es continua en Φ.

Demostración. Sea (ϕ_n) una sucesión que converge a ϕ en Φ. Por la Proposición 2.3.3, para cada $x, y \in X$, se tiene que $\bar{Q}(y/x,\phi_n)$ converge $\bar{Q}(y/x,\phi)$ y por (2.11),

$$|V_i(x,\phi)| \quad \le \quad K\frac{W(x)}{(1-\alpha\beta)}.$$

Entonces por el Lema 2.3.6, para cada $x \in X$,

$$V_i(x,\phi_n) \to V_i(x,\phi),$$

por lo tanto, de la Proposición 4.0.3 se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{y \in X} V_i(y,\phi_n)\bar{Q}(y/x,\phi_n) \quad = \quad \sum_{y \in X} V_i(y,\phi)\bar{Q}(y/x,\phi).$$

■

2.4. Existencia del equilibrio de Nash

Para cada $i \in I, x \in X$ y $\phi \in \Phi$ definimos,

$$V_i^*(x,\phi) \quad := \quad \max_{\tau \in \Pi_i} V_i(x,(\phi^{-i},\tau)).$$

Por el Teorema 8.3.6(a), en [12] p. 47, y el Teorema 4.0.22 la función $V_i^*(x,\phi)$ es la única solución en $\mathbb{B}_W(X)$ de la ecuación de optimalidad

$$V_i^*(x,\phi) = \quad \max\nolimits_{\mu \in \mathbb{P}(A_i(x))} \quad [\bar{r}_i(x,(\phi^{-i},\mu)) + \alpha \sum_{y \in X} V_i^*(y,\phi)\bar{Q}(y/x,(\phi^{-i},\mu))].$$

Por la Proposición D.5 p.182 en [11] se sigue que existe una estrategia $\eta_i \in \Phi_i$ tal que para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} &\max_{\mu \in \mathbb{P}(A_i(x))} [\bar{r}_i(x,(\phi^{-i},\mu)) + \alpha \sum_{y \in X} V_i^*(y,\phi)\bar{Q}(y/x,(\phi^{-i},\mu))] \\ = \quad &\bar{r}_i(x,(\phi^{-i},\eta_i)) + \alpha \sum_{y \in X} V_i^*(y,\phi)\bar{Q}(y/x,(\phi^{-i},\eta_i)). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Definimos para cada $i \in \{1, ...N\}$ y $\phi \in \Phi$ el conjunto

$$R_i(\phi) \quad := \quad \{\eta_i \in \Phi_i : \eta_i \ \ satisface \ \ (2{,}12)\}.$$

Sea $\Psi : \Phi \to 2^{\Phi}$ la multifunción dada por

$$\Psi(\phi) \quad := \quad \prod_{i=1}^{N} R_i(\phi).$$

Lema 2.4.1. *La multifunción Ψ es semicontinua superiormente y para cada $\phi \in \Psi$ el conjunto $\Psi(\phi)$ es convexo.*

Demostración. La convexidad del conjunto $\Psi(\phi)$ se sigue de la linealidad de las funciones $\bar{r}^i(x, \cdot)$ y $\bar{Q}(y/x, \cdot)$ en $\mathbb{P}(A(x))$. Puesto que Φ es un espacio metrizable, la semicontininuidad superior de Ψ se demostrará utilizando la caracterización por sucesiones. Sean $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Phi$ con $\eta_n \in \Psi(\phi_n)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta.$$

El objetivo es demostrar que $\eta \in \Psi(\phi)$. Por (2.12) tenemos que para $i \in \{1, ..., N\}$ y cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} & \max_{\mu \in \mathbb{P}(A_i(x))} [\bar{r}^i(x, (\phi_n^{-i}, \mu)) + \alpha \sum_{y\in X} V_i^*(y, \phi_n) \bar{Q}(y/x, (\phi_n^{-i}, \mu))] \\ = \quad & \bar{r}^i(x, (\phi_n^{-i}, \eta_n^i) + \alpha \sum_{y\in X} V_i^*(y, \phi_n) \bar{Q}(y/x, (\phi_n^{-i}, \eta_n^i). \end{aligned}$$

Haciendo $n \to \infty$ obtenemos que para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} & \max_{\mu \in \mathbb{P}(A_i(x))} [\bar{r}^i(x, (\phi^{-i}, \mu)) + \alpha \sum_{y\in X} V_i^*(y, \phi) \bar{Q}(y/x, (\phi^{-i}, \mu))] \\ = \quad & \bar{r}_i(x, (\phi^{-i}, \eta^i) + \alpha \sum_{y\in X} V_i^*(y, \phi) \bar{Q}(y/x, (\phi^{-i}, \eta^i). \end{aligned}$$

Lo cual implica que η^i satisface (2.12) para todo i y todo $x \in X$, por lo tanto, $\eta \in \Psi(\phi)$. ■

Demostración del Teorema 2.1.3. Por el Lema 2.4.1, la Proposición 2.2.2 y el Teorema 4.0.2, existe $\phi \in \Phi$ tal que $\phi \in \Psi(\phi)$, es decir, para cada $i \in I, x \in X$,

$$\begin{aligned} & \max_{\mu \in \mathbb{P}(A_i(x))} [\bar{r}_i(x, (\phi^{-i}, \mu)) + \alpha \sum_{y\in X} V_i(y, \phi) \bar{Q}(y/x, (\phi^{-i}, \mu))] \\ = \quad & \bar{r}_i(x, \phi) + \alpha \sum_{y\in X} V_i(y, \phi) \bar{Q}(y/x, \phi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\phi = (\phi^1, ..., \phi^N)$ es una multi-estrategia estacionaria que satisface la ecuación de optimalidad

$$V_i(x, \phi) = \max_{\mu \in \mathbb{P}(A_i(x))} [\bar{r}_i(x, (\phi^{-i}, \mu)) + \alpha \sum_{y \in X} V_i(y, \phi) \bar{Q}(y/x, (\phi^{-i}, \mu))].$$

Por el Teorema 8.3.6(c) en [12] p. 47, ϕ_i es una respuesta óptima para ϕ, es decir, ϕ es un equilibrio de Nash para el juego estocástico G.

2.5. Ejemplo de un juego estocástico con espacio de estados numerable

Consideremos el modelo de juego estocástico de dos jugadores

$$G := (X = \{0, 1, 2, ...\}, A_1 = A_2 = A_1(x) = A_2(x) = [0, 1], x \in X, Q, r_i)$$

donde, para cada $(a, b) \in A_1 \times A_2$:

$$Q(x/0, a, b) = \begin{cases} 1 - a & \text{si } x = 0 \\ a & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y para $j \neq 0$

$$Q(x/j, a, b) = \begin{cases} a(1 - b) & \text{si } x = j + 1 \\ b(1 - a) & \text{si } x = j - 1 \\ ab + (1 - a)(1 - b) & \text{si } x = j \end{cases}$$

Este modelo se puede interpretar como un proceso de nacimiento y muerte en una población, donde a representa la probabilidad de nacimiento y b la probabilidad de muerte.

Sean α un factor de descuento y β en $[1, \frac{1}{\alpha})$. Definimos la función $W(x) := \beta^x, x \in X$. Consideremos, además, $r_i : X \times A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ una función continua en $A_1 \times A_2$ $(x \in X)$ y tal que

$$\max_{(a,b) \in A_1 \times A_2} |r_i(x, a, b)| < KW(x),$$

con K una constante positiva. Demostraremos que para cada $x \in X$ y cada $(a, b) \in A_1 \times A_2$, se satisface que

$$\sum_{y \in X} W(y) Q(y/x, a, b) \leq \beta W(x) \quad x \in X.$$

Primero nótese que

$$\sum_{x=0}^{\infty} W(x)Q(x/0,a,b) = W(0)(1-a) + W(1)a = (1-a) + \beta a \leq \beta W(0)$$

y para $j \neq 0$, usando que $ab + (1-a)(1-b) = 1 - a(1-b) - b(1-a)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty} W(x)Q(x/j,a,b) &= W(j+1)a(1-b) + W(j-1)b(1-a) + W(j)[1-a(1-b)-b(1-a)] \\
&= \beta^{j+1}[a(1-b)(\beta-1) + b(1-a)(\beta^{-1}-1) + 1] \\
&\leq \beta W(j).
\end{aligned}$$

Obsérvese además que si $u \in \mathbb{M}_b(X)$ entonces la función

$$\sum_{x=0}^{\infty} u(x)Q(x/j,a,b) = \begin{cases} u(0)(1-a) + u(1)a & \text{si } j = 0 \\ \\ u(j+1)a(1-b) + u(j-1)b(1-a) & \\ +u(j)[1-a(1-b)-b(1-a)] & \text{si } j \neq 0 \end{cases}$$

es continua en $A(j) = A_1(j) \times A_2(j)$. Entonces el modelo de juego estocástico G satisface las hipótesis 2.1.1 y 2.1.2, por lo tanto, por el Teorema 2.1.3 existe un equilibrio en el espacio de las multi-estrategias estacionarias.

Capítulo 3

Juegos estocásticos ARAT

Un juego estocástico ARAT (additive reward and additive transition) de dos jugadores, es un juego estocástico donde la función de pago o ganancia r_i y la ley de transición Q tienen estructura aditiva, es decir, existen funciones $m_i : X \times A \to \mathbb{R}$ y $l_i : X \times B \to \mathbb{R}(i = 1, 2)$ tales que

$$r_i(x, a, b) \quad = \quad m_i(x, a) + l_i(x, b) \quad i = 1, 2,$$

y $Q_1 \in \mathbb{P}(X|X \times A)$ y $Q_2 \in \mathbb{P}(X|X \times B)$ kernels estocásticos tales que

$$Q(\cdot/x, a, b) \quad = \quad Q_1(\cdot/x, a) + Q_2(\cdot/x, b).$$

Los juegos estocásticos ARAT fueron estudiados por primera vez en 1976 por C.J. Himmelberg et al. en [13] donde se consideró un juego estocástico ARAT de dos jugadores con espacio estados $[0, 1]$, los conjuntos de acciones finitos y la función ganancia r_i continua y acotada. Para dicho juego estocástico, se demostró la existencia de un μ−equilibrio. Para una distribución de probabilidad μ en X, la multi-estrategia estacionaria (ϕ_1^*, ϕ_2^*) es un μ−equilibrio si,

$$\begin{aligned} \mu\{x \in X : V_1(x, \phi_1^*, \phi_2^*) \quad &\geq \quad V_1(x, \phi_1, \phi_2^*) \quad \forall \phi_1 \in \Phi_1, \\ V_2(x, \phi_1^*, \phi_2^*) \quad &\geq \quad V_2(x, \phi_1^*, \phi_2) \quad \forall \phi_2 \in \Phi_2\} = 1. \end{aligned}$$

Posteriormente, T. Parthasarathy en [20], mejoró el resultado en [13] demostrando que la existencia de un μ-equilibrio implica la existencia de un equilibrio de Nash para un juego estocástico ARAT, donde el espacio de estados X es un espacio de Borel, los conjuntos de acciones A y B son finitos y la función ganancia r_i $(i = 1, 2)$ es continua y acotada. También se han estudiado esta clase de juegos en [9], [17] y en [18].

En este capítulo se presenta una clase de juegos estocásticos ARAT con condiciones más generales que en [17] y [20] ya que las funciones de pago no necesariamente son acotadas.

3.1. Condiciones del juego

Considérese el juego estocástico ARAT de dos jugadores

$$G \;:=\; (X, A, B, \{A(x) : x \in X\}, \{B(x) : x \in X\}, Q, r_1, r_2) \tag{3.1}$$

que satisface alguna de las siguientes condiciones.

Condición 1(C1). El espacio de estados X es un espacio de Borel y los conjuntos de acciones A y B son espacios métricos compactos. Además, $A = A(x)$ y $B = B(x)$, para todo $x \in X$.

Condición 2(C2). El espacio de estados X es un espacio de Borel compacto, los conjuntos de acciones admisibles $A(x)$ y $B(x)$ son conjuntos cerrados y los conjuntos de acciones A y B son espacios métricos separables y compactos.

Supóngase a $\mathbb{K}$ como un subconjunto de Borel en $X \times A \times B$. Sea μ una medida de probabilidad sin átomos en X tal que Q es absolutamente continua con respecto a μ. Se denota por $z : \mathbb{K} \times X \to \mathbb{R}$ a la función de densidad de Q con respecto a μ.

Hipótesis 3.1.1. *Existe una función $W : X \to [1, \infty)$ μ-integrable tal que para cada $x \in X$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) Si $a_n \to a$ en $A(x)$ y $b_n \to b$ en $B(x)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |z(x, a_n, b_n, y) - z(x, a, b, y)| W(y)\mu(dy) \;=\; 0. \tag{3.2}$$

(b) Para una constante positiva K,

$$\max_{(a,b)\in A(x)\times B(x)} |r_i(x, a, b)| \le KW(x) \;\; (i = 1, 2). \tag{3.3}$$

(c) Existe $\beta \in [1, \frac{1}{\alpha})$ tal que

$$\int_X W(y)Q(dy/x, a, b) \;\le\; \beta W(x) \;\;\; \forall (a, b) \in A(x) \times B(x). \tag{3.4}$$

Hipótesis 3.1.2. *(a) Para cada $(a, b) \in A(x) \times B(x)$ la función $r_i(\cdot, a, b)(i = 1, 2)$ es medible en X y para cada $x \in X$ la función $r_i(x, \cdot, \cdot)(i = 1, 2)$ es continua en $A(x) \times B(x)$.*

(b) Para cada $C \in \mathcal{B}(X)$ y $x \in X$, las funciones $Q_1(C/x, \cdot)$ y $Q_2(C/x, \cdot)$ son continuas en $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente.

Teorema 3.1.3. *Si el juego ARAT G satisface (C1) o (C2) y las Hipótesis 3.1.1 y 3.1.2, entonces existe un equilibrio de Nash para G en el conjunto de las multi-estrategias estacionarias Φ.*

En las siguientes secciones se introducen algunos conceptos y resultados para demostrar (por medio del teorema de punto fijo de Glicksberg) la existencia de un μ–equilibrio, el cual a su vez se utilizará para la demostración del Teorema 3.1.3. Supóngase entonces que las Hipótesis 3.1.1 y 3.1.2 se satisfacen.

3.2. Estructura del espacio de las estrategias estacionarias

En el capítulo 2, vimos que la numerabilidad del espacio de estados nos permitió demostrar que el espacio de las multi-estrategias estacionarias Φ es metrizable. Sin embargo, cuando el espacio de estados es un espacio de Borel (el cual, no necesariamente es numerable), tal demostración deja de ser válida. La buena noticia es que a continuación se presenta una alternativa para solucionar este inconveniente.

Proposición 3.2.1. *Bajo la condición (C1), el espacio de las multi-estrategias estacionarias Φ es un espacio topológico metrizable y compacto.*

Demostración. Definamos $\mathcal{B}_1$ como el espacio de todas las funciones $h : X \times A \to \mathbb{R}$ tal que para cada $a \in A, h(\cdot, a)$ es una función medible en X y para cada $x \in X$ $h(x, \cdot)$ es continua en A y

$$\max_{a\in A} |h(x,a)| \in \mathbb{L}_1(\mu).$$

Por el Teorema I.5.17 en [26], $\mathcal{B}_1$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|h\| \quad := \quad \int_X \max_{a\in A} |h(x,a)|\, \mu(dx).$$

Cada $\phi \in \Phi_1$ define una funcional lineal acotada sobre $\mathcal{B}_1$ dada por

$$\begin{aligned} \Lambda_\phi(h) \quad &:= \quad \int_X \int_A h(x,a)\phi(da/x)\mu(dx) \\ &:= \quad \int_X h(x,\phi)\mu(dx), \quad h \in \mathcal{B}_1. \end{aligned}$$

Observe que ϕ_1, ϕ_2 definen la misma funcional si y sólo si, $\phi_1(\cdot/x) = \phi_2(\cdot/x)$ para μ–casi todo punto $x \in X$. Si este es el caso, identifíquese a las estrategias ϕ_1, ϕ_2.

Ahora observe que la inmersión canónica $\phi \to \Lambda_\phi$ permite considerar a Φ_1 como un subespacio del espacio topológico $(\mathcal{B}_1^*, \omega_1^*)$, donde $\mathcal{B}_1^*$ es la familia de las funcionales lineales acotadas definidas sobre $\mathcal{B}_1$ y ω_1^* es la topología débil estrella. Se tiene entonces que $\phi_n \xrightarrow{\omega_1^*} \phi$ en Φ_1 si, y sólo si,

$$\Lambda_{\phi_n}(h) \longrightarrow \Lambda_\phi(h) \quad \forall h \in \mathcal{B}_1.$$

Análogamente, se define $\mathcal{B}_2$ para el espacio Φ_2 y consideraremos a (Φ_2, ω_2^*) como un subconjunto del espacio topológico $(\mathcal{B}_2^*, \omega_2^*)$, donde ω_2^* es la topología débil estrella en $\mathcal{B}_2^*$.

Demostraremos ahora que el espacio topológico (Φ_1, ω_1^*) es metrizable y compacto.

En la Sección 5.1 en [1], se muestra que si X es un espacio de Borel, entonces existe una biyección que es una isometría entre los espacios $L_1(X, \mu, C(A)) := \mathcal{B}_1$ y $L_1([0,1], \lambda, C(A))$ (el espacio de las funciones definidas como en $\mathcal{B}_1$, considerando $[0,1]$ en lugar de X y la medida de Lebesgue λ en lugar de μ). Además, por el Teorema I.5.18 en [26] el espacio $L_1([0,1], \lambda, C(A))$ es separable, lo cual implica que el espacio $\mathcal{B}_1$ también lo es. Se denota por $B_1^*(0) := \{\Lambda \in \mathcal{B}_1^* : \|\Lambda\| \le 1\}$, donde

$$\|\Lambda\| \quad := \quad \sup_{\|h\| \neq 0} \frac{|\Lambda(h)|}{\|h\|} = \sup_{\|h\| \le 1} |\Lambda(h)|$$

es la norma en $\mathcal{B}_1^*$. Por el Lema 1.4.1 en [1] p. 16 y por la separabilidad del espacio $\mathcal{B}_1$, la bola cerrada $B_1^*(0)$ es compacta y metrizable con la topología débil estrella en $\mathcal{B}_1^*$.

Por otra parte, para cada $\phi \in \Phi_1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\Lambda_\phi(h)\right| &= \left| \int_X \int_A h(x,a) \phi(da/x) \mu(dx) \right| \\ &\le \int_X \int_A |h(x,a)| \, \phi(da/x) \mu(dx) \\ &\le \int_X \max_{a \in A} |h(x,a)| \, \mu(dx), \end{aligned}$$

lo cual implica que $\Lambda_\phi \in B_1^*(0)$, es decir, $\phi \in B_1^*(0)$.

Por lo anterior, para demostrar que Φ_1 es compacto es suficiente demostrar que el espacio es cerrado. Para probar esto último, sean ϕ un punto de acumulación de Φ_1 y (ϕ_n) una sucesión convergente a ϕ y considérese un subconjunto denso numerable $D := \{c_1, c_2, ...\}$ en el espacio $C^+(A)$ formado por las funciones continuas no negativas definidas en A.

Obsérvese que para cada $E \in \mathcal{B}(X)$ y $c_i \in D$, la función

$$(x,a) \mapsto 1_E(x) c_i(a)$$

pertenece a $\mathcal{B}_1$. Como $\phi_n, \phi \in B_1^*(0)$ y por el Lema 4.3 p. 633 en [25] se tiene que

$$0 \le \lim_{n \to \infty} \int_X 1_E(x) c_i(\phi_n) \mu(dx) \quad = \quad \int_X 1_E(x) c_i(\phi) \mu(dx),$$

lo cual implica que

$$0 \le c_i(\phi) := \int_A c_i(a) \phi(da/x) \;\; \mu - c.d. \tag{3.5}$$

Sea T_i el subconjunto de X donde se satisface (3.5). Ahora, para una función $c \in C^+(A)$, sea (c_i) una sucesión en el conjunto denso D que converge uniformemente a c. Entonces para cada $x \in T := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} T_i$ se cumple que

$$0 \leq \int_A c(a)\phi(da/x).$$

Por 1.5.5 en [26] se sigue que $\phi(\cdot/x)$ es una medida positiva μ-c.d. Sea $c(\cdot)$ la función constante igual a 1. Como $\phi_n \in \Phi_1$, entonces $c(\phi_n) \equiv 1$ y por lo tanto,

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \int_X 1_E(x)c(\phi_n)\mu(dx) \quad = \quad \int_X 1_E(x)\phi(A/x)\mu(dx);$$

en consecuencia,

$$\int_E [\phi(A/x) - 1]\mu(dx) \quad = \quad 0 \;\; \forall E \in \mathcal{B}(X),$$

de donde se sigue que $\phi(A/x) = 1$ μ–c.d., es decir, $\phi \in \Phi_1$ (Φ_1 es cerrado) y por lo tanto, Φ es un espacio compacto.

Análogamente, se tiene que el espacio topológico (Φ_2, ω_2^*) es compacto y metrizable.

Finalmente, por el Teorema de Tychonoff y por la Proposición 4.0.5, el conjunto de las multi-estrategias estacionarias Φ es un espacio topológico compacto y metrizable. ■

Proposición 3.2.2. *Bajo la condición (C2), el espacio de las multi-estrategias estacionarias Φ es un espacio topológico metrizable y compacto.*

Demostración. Por el Teorema 4.0.13 se sigue directamente que el espacio de las multi-estrategias Φ_i $(i = 1, 2)$ es metrizable y compacto con la topología débil estrella. Por el Teorema de Tychonoff y por la Proposición 4.0.5, el conjunto de las multi-estrategias estacionarias Φ es un espacio metrizable y compacto. En este caso la definición de los espacios $\mathcal{B}_i^*(i = 1, 2)$ es la misma que la considerada en la Proposición 3.2.1. ■

El espacio $\mathcal{B}_i^*(i = 1, 2)$, definido en las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.2, es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo. La demostración de esta afirmación es similar a la que se presenta en la Proposición 4.0.6 ya que la topología esta generada por una familia de seminormas que cumplen con las hipótesis de la Proposición 5.16 y del Teorema 5.14 en [8].

De las proposiciones 3.2.1 y 3.2.2 se sigue que si en un modelo de juego estocástico ARAT se satisface (C1) o (C2), el espacio de las multi-estrategias estacionarias Φ es metrizable y compacto con la topología débil estrella. Así pues, en los siguientes resultados no es necesario hacer referencia al caso que se está trabajando ya que la notación que se emplea se adapta claramente a ambos casos.

3.3. Problemas de control de Markov asociados

A continuación, se presentan algunos resultados que permiten definir de manera clara y precisa la multifunción que se utilizará para encontrar el μ-equilibrio y en consecuencia el equilibrio de Nash para G.

Observación 3.3.1. *(a) Por la Hipótesis 3.1.1(a), las funciones*

$$\int_X W(y)Q(dy/x,\cdot,b) \qquad y \qquad \int_X W(y)Q(dy/x,a,\cdot),$$

son continuas en $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente.

(b) Por la Hipótesis 3.1.2(b), Q es fuertemente continua (Ver Proposición 4.0.12).

Lema 3.3.2. *Para cada $x \in X, \pi_1 \in \Pi_1$ y $\pi_2 \in \Pi_2$,*

$$|V_i(x,\pi_1,\pi_2)| \;\leq\; W(x)\frac{2K}{1-\alpha\beta}.$$

Demostración. Obsérvese que por (3.4) para cada $t = 0,1,2,...$

$$\begin{aligned} E_x^{\pi_1,\pi_2}(W(x_t)) &= E_x^{\pi_1,\pi_2}(E_x^{\pi_1,\pi_2}(W(x_t))/h_{t-1},a_{t-1},b_{t-1}) \\ &\leq \beta E_x^{\pi_1,\pi_2}(W(x_{t-1})) \\ \leq .... &\leq \beta^t W(x), \end{aligned}$$

y por (3.3)

$$|r_i(x_t,a_t,b_t)| \leq 2KW(x_t).$$

Luego, para cada $t = 0,1,2,...,$

$$E_x^{\pi_1,\pi_2}|r_i(x_t,a_t,b_t)| \;\leq\; 2KE_x^{\pi_1,\pi_2}(W(x_t)) \leq 2K\beta^t W(x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |V_i(x,\pi_1,\pi_2)| &\leq \sum_{t=1}^{\infty}\alpha^t E_x^{\pi_1,\pi_2}|r_i(x_t,a_t,b_t)| \\ &\leq 2KW(x)\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t\alpha^t = \frac{2KW(x)}{1-\alpha\beta} \qquad i = 1,2. \end{aligned}$$

■

Proposición 3.3.3. *Sea $\phi_2 \in \Phi_2$ una estrategia estacionaria fija para el jugador 2. Entonces* *(a) Existe $f_1 \in \mathbb{F}_1$ que es una respuesta óptima del jugador 1 para ϕ_2.*

(b) La función $V^1_{\phi_2}(\cdot)$ es la única solución en $\mathbb{B}_W(X)$ que satisface la ecuación de optimalidad

$$V^1_{\phi_2}(x) \quad = \quad \max_{\lambda \in \mathbb{P}(A(x))} [\bar{r}_1(x,\lambda,\phi_2) + \alpha \int_X V^1_{\phi_2}(y)\bar{Q}(dy/x,\lambda,\phi_2)].$$

(c) ϕ_1^* es una respuesta óptima del jugador 1 para ϕ_2 si, y sólo si,

$$V^1_{\phi_2}(x) \quad = \quad \bar{r}_1(x,\phi_1^*,\phi_2) + \alpha \int_X V^1_{\phi_2}(y)Q(dy/x,\phi_1^*,\phi_2).$$

Demostración. (a) Por la Proposición 4.0.10 se sigue que la función

$$u(x,a) := \bar{r}_1(x,a,\phi_2) + \alpha \int_X V^1_{\phi_2}(y)Q(dy/x,a,\phi_2).$$

es continua en $A(x)$, por lo tanto, por el Lema 4.0.8 existe $f_1 \in \mathbb{F}_1$ tal que para cada $x \in X$,

$$u^*(x) \quad := \quad \max_{a \in A(x)} u(x,a) = u(x,f_1(x)),$$

además, por el Teorema 8.3.6 en [12] p. 47, f_1 es una política óptima y además

$$V^1_{\phi_2}(x) \quad = \quad u(x,f_1(x)) = u^*(x) \quad \forall x \in X.$$

Para la prueba de (b) y (c), nótese que por Remark 8.3.10 p.54 en [12], tenemos que para cada $\phi_1^* \in \Phi_1$, la función $V^1_{\phi_2}(\cdot,\phi_1^*)$ es la única solución en $\mathbb{B}_W(X)$ de la ecuación:

$$u(x) = \bar{r}_1(x,\phi_1^*,\phi_2) + \alpha \int_X u(y)\bar{Q}(dy/x,\phi_1^*,\phi_2) \quad \forall x \in X.$$

■

Un resultado similar se sigue fijando $\phi_1 \in \Phi_1$, en lugar de ϕ_2. Además, la prueba anterior también justifica que para cada $\phi_2 \in \Phi_2$,

$$V^1_{\phi_2}(x) = \sup_{\phi_1 \in \Phi_1} V^1_{\phi_2}(x,\phi_1) = \sup_{\pi_1 \in \Pi_1} V^1_{\phi_2}(x,\pi_1).$$

Problema de control de Markov. Si fijamos $\phi_2 \in \Phi_2$ una estrategia estacionaria para el jugador 2, entonces podemos considerar a (3.1) como el siguiente Modelo de Control de Markov

$$(X, A, Q_{\phi_2}, r^1_{\phi_2}),$$

en donde

$$\begin{aligned} r^1_{\phi_2}(x,a) &:= \bar{r}_1(x,a,\phi_2), \\ Q_{\phi_2}(\cdot/x,a) &:= \bar{Q}(\cdot/x,a,\phi_2), \\ V^1_{\phi_2}(x,\pi_1) &:= V_1(x,\pi_1,\phi_2), \\ V^1_{\phi_2}(x) &:= \sup_{\pi_1\in\Pi_1} V^1_{\phi_2}(x,\pi_1). \end{aligned}$$

Entonces por la Proposición 3.3.3(a) existe un selector medible $f\in\mathbb{F}$ tal que

$$V^1_{\phi_2}(x) = V_1(x,f,\phi_2)$$

y por el Lema 3.3.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \|V^1_{\phi_2}\|_W &= \sup_{x\in X}\frac{|V_1(x,f,\phi_2)|}{W(x)} && (3.6) \\ &\le \frac{2K}{1-\alpha\beta}, && (3.7) \end{aligned}$$

es decir, $V^1_{\phi_2}(\cdot)$ es un elemento de $\mathbb{B}_W(X)$. Similarmente, si fijamos $\phi_1\in\Phi_1$, una política estacionaria para el jugador 1, entonces podemos considerar a (3.1) como el Problema de Control de Markov $(X,B,Q_{\phi_1},r^2_{\phi_1})$ con su respectivo índice de funcionamiento $V^2_{\phi_1}(x,\pi_2)$.

Definimos para cada $i=1,2$ y para cada $(\phi_1,\phi_2)\in\Phi$ el operador en $\mathbb{B}_W(X)$ por

$$T^i_{\phi_1,\phi_2}u(x) := \bar{r}_i(x,\phi_1,\phi_2)+\alpha\int_X u(y)\bar{Q}(dy/x,\phi_1,\phi_2),$$

y la multifunción $\Psi:\Phi_1\times\Phi_2 \twoheadrightarrow 2^{\Phi_1\times\Phi_2}$ por

$$\begin{aligned} \Psi(\phi_1,\phi_2) := \{(\phi_1^*,\phi_2^*):\ V^1_{\phi_2}(x) &= T^1_{\phi_1^*,\phi_2}V^1_{\phi_2}(x) \quad \mu-c.d. \quad y \\ V^2_{\phi_1}(x) &= T^2_{\phi_1,\phi_2^*}V^2_{\phi_1}(x) \quad \mu-c.d.\}. \end{aligned}$$

3.4. Resultados preliminares

Como el espacio $\Phi_1\times\Phi_2$ es un espacio metrizable, la semicontinuidad superior de Ψ es equivalente a demostrar que si (ϕ^1_n,ϕ^2_n) es una sucesión convergente a $(\phi^1,\phi^2)\in\Phi$ y si

$$(\hat{\phi}^1_n,\hat{\phi}^2_n) \in \Psi(\phi^1_n,\phi^2_n)$$

es una sucesión convergente a $(\hat{\phi}^1, \hat{\phi}^2) \in \Phi$, entonces

$$(\hat{\phi}^1, \hat{\phi}^2) \in \Psi(\phi^1, \phi^2).$$

Por lo tanto, se probará que se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$V^1_{\phi^2}(x) = T_{\hat{\phi}^1, \phi^2} V^1_{\phi^2}(x) \quad \mu - c.d., \tag{3.8}$$

$$V^2_{\phi^1}(x) = T_{\phi^1, \hat{\phi}^2} V^2_{\phi^1}(x) \quad \mu - c.d. \tag{3.9}$$

Para la demostración de (3.8), denótese por

$$u_n(x) := V^1_{\phi^2_n}(x) \quad x \in X, n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Lema 3.4.1. *Para la sucesión $(u_n)_{n=1}^\infty$ definida en (3.10) existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ y una función $u_0 \in \mathbb{B}_W(X)$ tal que para cada $D \in \mathcal{B}(X)$,*

$$\int_X 1_D(x) u_{n_k}(x) \mu(dx) \;\; \to \;\; \int_X 1_D(x) u_0(x) \mu(dx). \tag{3.11}$$

Demostración. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\hat{u}_n(\cdot) := \frac{u_n(\cdot)}{W(\cdot)},$$

obsérvese que por (3.6),

$$|\hat{u}_n(\cdot)| \le \frac{2K}{1 - \alpha\beta} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

es decir, $\hat{u}_n \in L_\infty(X, \mu) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

Por el Teorema de representación de Riesz, cada función g en

$$\mathcal{U} := \left\{ g \in \mathbb{M}(X) : |g(\cdot)| \le \frac{2K}{1 - \alpha\beta} \quad \mu - c.d. \right\} \subset L_\infty(\mu),$$

se identifica con la funcional lineal $\Gamma_g \in L_1^*(X, \mu)$ definida por

$$\Gamma_g(h) := \int_X h(x) g(x) \mu(dx),$$

que pertenece a la bola cerrada

$$B_{\frac{2K}{1-\alpha\beta}}(0) = \left\{ \Gamma \in L_1^*(\mu) : \|\Gamma\| \le \frac{2K}{1 - \alpha\beta} \right\}.$$

Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_{\hat{u}_n} \in B_{\frac{2K}{1-\alpha\beta}}(0).$$

Por el Lema 1.4.1 en [1] p.16 y por la separabilidad del espacio $L_1(\mu)$, la bola cerrada $B_{\frac{2K}{1-\alpha\beta}}(0)$ es compacta y métrizable con la topología débil estrella en $L_1^*(\mu)$; en consecuencia, existe una subsucesión $(\Gamma_{\hat{u}_{n_k}})$ de $(\Gamma_{\hat{u}_n})$ convergente a $\Gamma_{\hat{u}_0}$ con $\hat{u}_0 \in \mathcal{U}$, entonces

$$\int_X h(x)\hat{u}_{n_k}(x)\mu(dx) \quad \to \quad \int_X h(x)\hat{u}_0(x)\mu(dx) \quad \forall h \in L_1(\mu).$$

Finalmente, por la definición de $\hat{u}_n$ y como para cada $D \in \mathcal{B}(X)$ la función $1_D(\cdot)W(\cdot) \in L_1(\mu)$ se sigue que

$$\int_X 1_D(x)u_{n_k}(x)\mu(dx) \quad \to \quad \int_X 1_D(x)u_0(x)\mu(dx),$$

donde $u_0(x) := W(x)\hat{u}_0(x) \in \mathbb{B}_W(X)$. ■

Obsérvese que, sin pérdida de generalidad, podemos remplazar (3.11) por

$$\int_X 1_D(x)u_n(x)\mu(dy) \quad \to \quad \int_X 1_D(x)u_0(x)\mu(dy) \quad \forall D \in \mathcal{B}(X).$$

Lema 3.4.2. *Sean $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida en (3.10) y u_0 la función en el Lema 3.4.1. Entonces para cada $x \in X$,*

$$f_n(x) := \max_{a \in A(x), b \in B(x)} \left| \int_X [u_n(y) - u_0(y)]Q(dy/x,a,b) \right| \to 0. \tag{3.13}$$

Demostración. Primero nótese que la función $f_n (n = 1, 2, ...)$ en (3.13) está bien definida ya que la función $\int_X [u_n(y) - u_0(y)]Q(dy/x,\cdot,\cdot)$ es continua en el compacto $A(x) \times B(x)$ (ver Proposición 4.0.10).

Sea $x \in X$ un punto arbitrario y sea (a_n, b_n) en $A(x) \times B(x)$ tal que el máximo en la definición de $f_n(x)$ se alcanza en (a_n, b_n). Entonces, por la compacidad de $A(x) \times B(x)$, existe una subsucesión (a_{n_k}, b_{n_k}) y (a_0, b_0) en $A(x) \times B(x)$ tal que $a_{n_k} \to a_0 \in A(x)$ y $b_{n_k} \to b_0 \in B(x)$. Consideremos, sin pérdida de generalidad, (a_n, b_n) en lugar de (a_{n_k}, b_{n_k}) y sean

$$\begin{aligned} h_n(x) &:= \left| \int_X u_n(y)Q(dy/x,a_n,b_n) - \int_X u_n(y)Q(dy/x,a_0,b_0) \right|, \\ g_n(x) &:= \left| \int_X u_n(y)Q(dy/x,a_0,b_0) - \int_X u_0(y)Q(dy/x,a_0,b_0) \right|, \\ k_n(x) &:= \left| \int_X u_0(y)Q(dy/x,a_0,b_0) - \int_X u_0(y)Q(dy/x,a_n,b_n) \right|. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \left| \int_X [u_n(y) - u_0(y)] Q(dy/x, a_n, b_n) \right| \\ &\leq h_n(x) + g_n(x) + k_n(x). \end{aligned}$$

Se demostrará que cada una da las sucesiones $(h_n(x)), (g_n(x))$ y $(k_n(x))$ convergen a cero cuando $n \to \infty$.

Por (3.2) y (3.12) se sigue que

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \left| \int_X [\hat{u}_n(y) W(y) z(x, a_n, b_n, y) \mu(dy) - \int_X [\hat{u}_n(y) W(y) z(x, a_0, b_0, y) \mu(dy) \right| \\ &\leq \frac{2K}{1 - \alpha\beta} \int_X |z(x, a_n, b_n, y) - z(x, a_0, b_0, y)| W(y) \mu(dy) \to 0. \end{aligned}$$

Como $W(\cdot) z(x, a, b, \cdot) \in \mathbb{L}_1(\mu)$ y por (3.4),

$$\int_X W(y) z(x, a, b, y) \mu(dy) = \int_X W(y) Q(dy/x, a, b) \leq \beta W(x),$$

de la convergencia débil estrella de $(\hat{u}_n)$ a $\hat{u}_0$ se sigue que

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \left| \int_X [\hat{u}_n(y) - \hat{u}_0(y)] W(y) Q(dy/x, a_0, b_0) \right| \\ &= \left| \int_X [\hat{u}_n(y) - \hat{u}_0(y)] W(y) z(x, a, b, y) \mu(dy) \right| \to 0. \end{aligned}$$

Finalmente, con argumentos similares a los anteriores se demuestra que la sucesión $(k_n(x))$ converge a cero. Se concluye entonces que para cada $x \in X$, la sucesión $(f_n(x))$ converge a cero. ■

Lema 3.4.3. *Para cada función $u \in \mathbb{B}_W(X)$ y para cada conjunto $D \in \mathcal{B}(X)$ se tiene que*

$$\begin{aligned} &\int_X 1_D(x) \int_X u(y) \quad \bar{Q}(dy/x, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2) \mu(dx) \\ &\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ &\int_X 1_D(x) \int_X u(y) \quad \bar{Q}(dy/x, \hat{\phi}^1, \phi^2) \mu(dx). \end{aligned}$$

Demostración. Se denota por

$$h_1(x, a) := \int_X u(y) Q_1(dy/x, a) \quad y \quad h_2(x, b) := \int_X u(y) Q_2(dy/x, b).$$

Nótese que la función h_1 es medible en $X \times A$ y continua en $A(x)$ para cada $x \in X$ y cada $a \in A(x)$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_X u(y) Q_1(dy/x,a) \right| &\leq \int_X |u(y)|\, Q_1(dy/x,a) \\
&\leq \|u\|_W \int_X W(y) Q_1(dy/x,a) \\
&= \|u\|_W \int_X W(y) Q(dy/x,a,b) \\
&\leq \|u\|_W \, \beta W(x).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\max_{a \in A(x)} \left| \int_X u(y) Q_1(dy/x,a) \right| \leq \|u\|_W \, \beta W(x),$$

por lo tanto, como $W(\cdot) \in \mathbb{L}_1(\mu)$ y $\|u\|_W < \infty$ tenemos que $h_1 \in \mathcal{B}_1$ y

$$\max_{a \in A(x)} \left| \int_X u(y) Q_1(dy/x,a) \right| \in \mathbb{B}_W(X).$$

Análogamente, obtenemos que $h_2 \in \mathcal{B}_2$ y

$$\max_{b \in B(x)} \left| \int_X u(y) Q_2(dy/x,b) \right| \in \mathbb{B}_W(X).$$

Por lo tanto, usando el Lema 4.0.11, se concluye la demostración. ■

Lema 3.4.4. *Para la sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ definida en (3.10) y la función u_0 definida en Lema 3.4.1, se tiene que para $D \in \mathcal{B}(X)$,*

$$\begin{aligned}
\int_X 1_D(x) \int_X \quad u_n(y) \quad & \bar{Q}(dy/x, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2)\mu(dx) \\
\downarrow \quad & \\
\int_X 1_D(x) \int_X \quad u_0(y) \quad & \bar{Q}(dy/x, \hat{\phi}^1, \phi^2)\mu(dx).
\end{aligned}$$

Demostración. Sea $D \in \mathcal{B}(X)$ fijo. Definimos para cada $u \in \mathbb{B}_W(X), \hat{\phi} \in \Phi_1$ y $\phi \in \Phi_2$,

$$g(u, \hat{\phi}, \phi) := \int_X 1_D(x) \int_X u(y) \bar{Q}(dy/x, \hat{\phi}, \phi)\mu(dx).$$

Como

$$\begin{aligned}
\left| g(u_n, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2) - g(u_0, \hat{\phi}^1, \phi^2) \right| &\leq \left| g(u_n, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2) - g(u_0, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2) \right| \\
&+ \left| g(u_0, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2) - g(u_0, \hat{\phi}^1, \phi^2) \right|,
\end{aligned}$$

basta demostrar que cada uno de los sumandos converge a cero. Para probar dicha afirmación, obsérvese que por el Lema 3.4.2 la sucesión

$$f_n(x) = \max_{a\in A(x), b\in B(x)} \left| \int_X [u_n - u_0] Q(dy/x, a, b) \right| \to 0.$$

Además, como $u_n - u_0 \in \mathbb{B}_W(X)$ existe $M > 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq MW(x) \quad \forall x \in X,$$

entonces por el Teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$\int_X f_n(x)\mu(dx) \to 0.$$

Por lo tanto,

$$\left|g(u_n, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2) - g(u_0, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2)\right| \leq \int_X f_n(x)\mu(dx) \to 0.$$

La convergencia a cero de $\left|g(u_0, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2) - g(u_0, \hat{\phi}^1, \phi^2)\right|$ se sigue del Lema 3.4.3. ■

Proposición 3.4.5. *La función u_0 en Lema 3.4.1 satisface que*

$$u_0(x) = T^1_{\hat{\phi}^1, \phi^2} u_0(x) \quad \mu - c.d. \tag{3.14}$$

y

$$u_0(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{P}(A(x))} T^1_{\lambda, \phi^2} u_0(x) \;\; \mu - c.d. \tag{3.15}$$

Demostración. Por la Proposición 3.3.3(c) y por (3.10), para la estrategia $\hat{\phi}_n^1$ y para cada $n = 1, 2, ...$ tenemos que

$$\begin{aligned} u_n(x) &= V^1_{\phi_n^2}(x) \\ &= \bar{r}_1(x, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2) + \alpha \int_X V^1_{\phi_n^2}(y) \bar{Q}(dy/x, \hat{\phi}_n^1, \phi_n^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por Lema 4.0.11, Lema 3.4.1 y Lema 3.4.3 se sigue que

$$\int_X 1_D(x) u_0(x)\mu(dx) = \int_X 1_D(x) T^1_{\hat{\phi}^1, \phi^2} u_0(x)\mu(dx) \quad \forall D \in \mathcal{B}(X).$$

Esto implica que

$$u_0(x) = T^1_{\hat{\phi}^1, \phi^2} u_0(x) \quad \mu - c.d.$$

es decir,

$$u_0(x) \leq \max_{\lambda \in \mathbb{P}(A(x))} [\bar{r}_1(x,\lambda,\phi^2) + \alpha \int_X u_0(y)\bar{Q}(dy/x,\lambda,\phi^2)] \ \ \mu - c.d.$$

Por otra parte, por la Proposición 3.3.3(b) tenemos que

$$V^1_{\phi^2_n}(x) \geq \bar{r}_1(x,a,\phi^2_n) + \alpha \int_X V^1_{\phi^2_n}(y)\bar{Q}(dy/x,a,\phi^2_n) \quad \forall a \in A(x),$$

aplicando límite y tomando máximo en $\mathbb{P}(A(x))$ tenemos que

$$u_0(x) \geq \max_{\lambda \in \mathbb{P}(A(x))} [\bar{r}_1(x,\lambda,\phi^2) + \alpha \int_X u_0(y)\bar{Q}(dy/x,\lambda,\phi^2)] \ \mu - c.d.$$

Por lo tanto,

$$u_0(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{P}(A(x))} [\bar{r}_1(x,\lambda,\phi^2) + \alpha \int_X u_0(y)\bar{Q}(dy/x,\lambda,\phi^2)] \ \ \mu - c.d.$$

■

Observación 3.4.6. *Procediendo similarmente, se demuestra la existencia de una función* $v_0 \in \mathbb{B}_W(X)$ *tal que*

$$v_0(x) = T^2_{\hat{\phi}^1,\phi^2} v_0(x) \quad \mu - c.d. \tag{3.16}$$

y

$$v_0(x) = \max_{\gamma \in \mathbb{P}(B(x))} T^2_{\hat{\phi}^1,\gamma} v_0(x) \quad \mu - c.d. \tag{3.17}$$

3.5. Existencia del equilibrio de Nash

Demostración del Teorema 3.1.3. La multifunción Ψ es semicontinua superiormente en $\Phi^1 \times \Phi^2$, lo cual se sigue directamente de la Proposición 3.4.5 y la Observación 3.4.6. Entonces por el Teorema de Glicksberg, existe un punto fijo $(\phi^*_1,\phi^*_2) \in \Phi_1 \times \Phi_2$ de ψ, esto es,

$$V^1_{\phi^*_2}(x) = T^1_{\phi^*_1,\phi^*_2} V^1_{\phi^*_2}(x) \quad \mu - c.d. \quad y \quad V^2_{\phi^*_1}(x) = T^2_{\phi^*_1,\phi^*_2} V^2_{\phi^*_1}(x) \quad \mu - c.d. \tag{3.18}$$

Sea D_1 el conjunto donde (3.18) se satisface, y $f_1 \in \mathbb{F}_1, f_2 \in \mathbb{F}_2$ tales que para cada $x \in X$ se cumple que

$$\begin{aligned} & \max_{a \in A(x)} [\bar{r}_1(x,a,\phi^*_2) + \alpha \int_X V^1_{\phi^*_2}(y)\bar{Q}(dy/x,a,\phi^*_2)] \\ = \ & \bar{r}_1(x,f_1(x),\phi^*_2) + \alpha \int_X V^1_{\phi^*_2}(y)Q(dy/x,f_1(x),\phi^*_2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\max_{b \in B(x)} [\bar{r}_2(x, \phi_1^*, b) + \alpha \int_X V^2_{\phi_1^*}(y) Q(dy/x, \phi_1^*, b)] \\ = \; & \bar{r}_2(x, \phi_1^*, f_2(x)) + \alpha \int_X V^2_{\phi_1^*}(y) \bar{Q}(dy/x, \phi_1^*, f_2(x)). \end{aligned}$$

Definimos

$$\hat{\phi}_1(\cdot/x) := \begin{cases} \phi_1^*(\cdot/x) & \text{si } x \in D_1 \\ f_1(x) & \text{si } x \in D_1^c, \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_2(\cdot/x) := \begin{cases} \phi_2^*(\cdot/x) & \text{si } x \in D_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in D_1^c, \end{cases}$$

$$V_0^*(x) := \begin{cases} V^1_{\phi_2^*}(x) & \text{si } x \in D_1 \\ \bar{r}_1(x, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) + & \\ \alpha \int_X V^1_{\phi_2^*}(y) \bar{Q}(dy/x, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) & \text{si } x \in D_1^c \end{cases}$$

y

$$U_0^*(x) := \begin{cases} V^2_{\phi_1^*}(x) & \text{si } x \in D_1 \\ \bar{r}_2(x, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) + & \\ \alpha \int_X V^2_{\phi_1^*}(y) \bar{Q}(dy/x, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) & \text{si } x \in D_1^c. \end{cases}$$

Combinando lo anterior se tiene que para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} V_0^*(x) &= \max_{\lambda \in \mathbb{P}(A(x))} [\bar{r}_1(x, \lambda, \hat{\phi}_2) + \alpha \int_X V_0^*(y) Q(dy/x, \lambda, \hat{\phi}_2)] \\ &= \bar{r}_1(x, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) + \alpha \int_X V_0^*(y) Q(dy/x, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U_0^*(x) &= \max_{\gamma \in \mathbb{P}(B(x))} [\bar{r}_2(x, \hat{\phi}_1, \gamma) + \alpha \int_X U_0^*(y) \bar{Q}(dy/x, \hat{\phi}_1, \gamma)] \\ &= \bar{r}_2(x, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) + \alpha \int_X U_0^*(y) \bar{Q}(dy/x, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} V_0^*(x) &= V^1_{\hat{\phi}_2}(x) = V_1(x, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \;\; \forall x \in X, \\ U_0^*(x) &= U^2_{\hat{\phi}_1}(x) = V_2(x, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \;\; \forall x \in X, \end{aligned}$$

por lo tanto, el par $(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \in \Phi^1 \times \Phi^2$ es un equilibrio de Nash para G, el juego estocástico ARAT.

3.6. Ejemplo de un juego estocástico ARAT

Sean $X = \mathbb{R}$, A y B subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ y sean $f_1 : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$ y $f_2 : \mathbb{R} \times B \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que para cada $x \in X$

$$|f_1(x,a)|^2 \leq \epsilon + x^2 \quad \forall a \in A$$
$$|f_2(x,b)|^2 \leq \epsilon + x^2 \quad \forall b \in B.$$

Sean $\sigma > 0$ y $\gamma \in (0,1)$ fijos. Definimos el kernel estocástico $Q \in \mathbb{P}(X|\mathbb{K})$ por

$$Q((-\infty, y]/x, a, b) \quad = \quad \gamma\nu_1(y/x, a) + (1-\gamma)\nu_2(y/x, b)$$

donde $\nu_1(\cdot/x, a)$ $[\nu_2(\cdot/x, b)]$ es la función de distribución normal $N(f_1(x,a), \sigma^2)$ $[N(f_2(x,b), \sigma^2)]$. Denotemos $Q_1(\cdot/x, a) := \gamma\nu_1(\cdot/x, a)$ y $Q_2(\cdot/x, b) := (1-\gamma)\nu_2(\cdot/x, b)$.

Sean $r_1, r_2 : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ finciones definidas por

$$r_i(x, a, b) = \theta_i x^2 + \delta_{i1} a^2 + \delta_{i2} b^2$$

con $\theta_i, \delta_{ij} (i, j = 1, 2)$ constantes en $\mathbb{R}$.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad y $\{W_t^1\}$ y $\{W_t^2\}$ son sucesiones de variables aleatorias i.i.d. con distribución común $N(0, \sigma^2)$, entonces la dinámica del juego está representada por el proceso $\{x_t\}$ definido por $x_0 = 0$ y

$$x_{t+1} = [f_1(x_t, a_t) + W_t^1]1_{\Omega_1} + [f_2(x_t, b_t) + W_t^2]1_{\Omega_2}$$

con $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ tal que $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, $P(\Omega_1) = \gamma$ y $P(\Omega_2) = 1-\gamma$.

Consideremos el juego estocástico de dos jugadores

$$G := (\mathbb{R}, A, B, Q, r_1, r_2)$$

y un factor de descuento, $\alpha < 1/[1 + \sigma^2 + \epsilon]$. Es claro que se satisface la condición (C1) ya que $\mathbb{R}$ es un espacio de Borel y A, B son métricos compactos. Demostraremos que el juego G satisface las Hipótesis 3.1.1 y 3.1.2. Sea μ la medida de probabilidad en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definida por

$$\mu(B) \quad := \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_B e^{\frac{-\omega^2}{2\sigma^2}} d\omega,$$

entonces μ es una medida sin átomos y Q es absolutamente continua con respecto a μ; sea $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ con $\mu(B) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} Q_1(B/x,a) &= \int_B \frac{\gamma}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\omega - f_1(x,a))^2}{2\sigma^2}} d\omega \\ &= \int_B \gamma e^{\frac{2\omega f_1(x,a) - f_1(x,a)^2}{2\sigma^2}} \mu(d\omega) = 0. \end{aligned}$$

Análogamente $Q_2 << \mu$, por lo tanto, $Q << \mu$. Además, para cada $C \in \mathcal{B}(X)$, las funciones $Q_1(C/x,\cdot)$ y $Q_2(C/x,\cdot)$ son continuas en $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente.

La función de densidad $z : \mathbb{K} \times X \to \mathbb{R}$ de Q con respecto a μ está definida por

$$z(x,a,b,y) = \gamma e^{\frac{2yf_1(x,a) - f_1(x,a)^2}{2\sigma^2}} + (1+\gamma) e^{\frac{2yf_2(x,b) - f_2(x,b)^2}{2\sigma^2}}.$$

Denotemos por

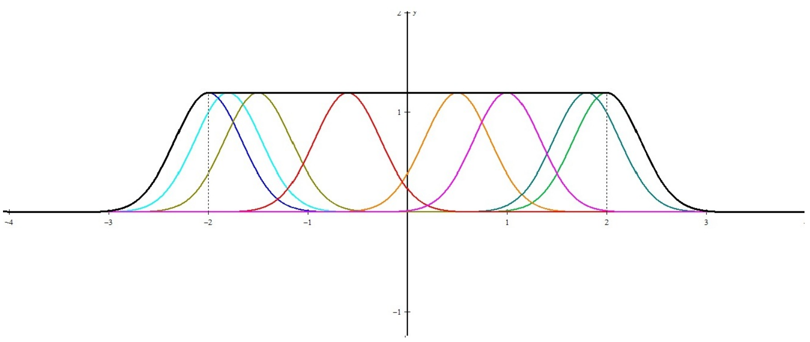
$$\begin{aligned} z_1(x,a,y) &= \gamma e^{\frac{2yf_1(x,a) - f_1(x,a)^2}{2\sigma^2}}, \\ z_2(x,b,y) &= (1-\gamma) e^{\frac{2yf_2(x,b) - f_2(x,b)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Definimos $W : X \to [1,\infty)$ por $W(x) := x^2 + 1$. Entonces W es integrable con respecto a μ. Además, como $exp(-(\omega - f_1(x,\cdot))^2/2\sigma^2)$ es continua en A, la sucesión $exp(-(\omega - f_1(x,a_n))^2/2\sigma^2)$ converge a $exp(-(\omega - f_1(x,a))^2/2\sigma^2)$ cuando $a_n \to a$. Asimismo, para cada $\omega \in \mathbb{R}$ y para cada $x \in X$ la función

$$g(\omega) := \begin{cases} e^{\frac{-(\omega + x^2 + \epsilon))^2}{2\sigma^2}} & \text{si } |\omega| \geq x^2 + \epsilon \\ 1/\sqrt{2\pi}\sigma & \text{si } |\omega| < x^2 + \epsilon \end{cases}$$

satisface que

$$\left| e^{\frac{-(\omega - f_1(x,a_n))^2}{2\sigma^2}} \right| \leq g(\omega) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Esto implica

$$\left| e^{\frac{-(\omega - f_1(x,a_n))^2}{2\sigma^2}} - e^{\frac{-(\omega - f_1(x,a))^2}{2\sigma^2}} \right| \leq 2g(\omega).$$

Por el teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{\frac{-(\omega - f_1(x,a_n))^2}{2\sigma^2}} - e^{\frac{-(\omega - f_1(x,a))^2}{2\sigma^2}} \right| W(\omega) d\omega \to 0.$$

Análogamente,

$$\frac{1-\gamma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{\frac{-(\omega - f_2(x,b_n))^2}{2\sigma^2}} - e^{\frac{-(\omega - f_2(x,b))^2}{2\sigma^2}} \right| W(\omega) d\omega \to 0.$$

Por lo tanto, se tiene que para cada $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |z(x, a_n, b_n, y) - z(x, a, b, y)| W(y) \mu(dy) = 0,$$

cuando $a_n \to a$ en $A(x)$ y $b_n \to b$ en $B(x)$.

Claramente podemos encontrar K tal que $r_i(x, a, b) \leq KW(x) \forall (x, a, b) \in \mathbb{R} \times A \times B$ $(i = 1, 2)$ así cada función ganancia $r_i \in \mathbb{B}_W(X)$.

Si $\beta := 1 + \sigma^2 + \epsilon$, entonces $1 \leq \beta < \frac{1}{\alpha}$ y además

$$\int_{\mathbb{R}} W(y) Q(dy/x, a, b) \leq \beta W(x) \quad \forall (x, a, b) \in \mathbb{K}. \tag{3.19}$$

Para demostrar (3.19) nótese que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} W(\omega) Q_1(d\omega/x, a) &= \int_{\mathbb{R}} [\omega^2 + 1] \frac{\gamma}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\omega - f_1(x,a))^2}{2\sigma^2}} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \frac{\gamma}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\omega - f_1(x,a))^2}{2\sigma^2}} d\omega + \gamma \\
&\leq \gamma[1 + \sigma^2 + \epsilon + x^2] \leq \gamma\beta[x^2 + 1].
\end{aligned}$$

Análogamente se demuestra que $\int_{\mathbb{R}} W(y) Q_1(dy/x, a) \leq (1 - \gamma)\beta[x^2 + 1]$. Por lo tanto, por el Teorema 3.1.3 el juego estocástico G tiene un equilibrio de Nash en el conjunto de las multi-estrategias estacionarias.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudiaron los trabajos pioneros de la teoría de juegos no-cooperativos de J.F. Nash y L. Glicksberg, en los que se demostró la existencia de equilibrios para juegos estáticos donde los espacios de acciones son finitos o compactos, respectivamente. Se estudiaron también los juegos estocásticos no-cooperativos y la extensión del concepto de equilibrio de Nash para este tipo de juegos. Nuestra principal aportación fué establecer algunos resultados sobre la existencia de equilibrios de Nash para juegos estocásticos no-cooperativos con funciones de pago no necesariamente acotadas y con criterio de pago descontado. Se estudió el caso de espacio de estados numerable y el caso de espacio de estados de Borel con estructura ARAT.

El teorema de punto fijo de Glicksberg es un resultado que ha sido crucial en el desarrollo de las demostraciones sobre la existencia de equilibrios de Nash en el conjunto de la multi-estrategias estacionarias Φ. Para la existencia de un equilibrio es necesario demostrar que el espacio de las multi-estrategias estacionarias es un subconjunto compacto y convexo de un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo. También es necesario demostrar la semicontinuidad superior de una multifunción Ψ definida del espacio Φ en sí mismo. Nótese que el teorema de punto fijo no tiene como hipótesis que el espacio de las multi-estrategias estacionarias sea un espacio metrizable, sin embargo, esta condición facilita la demostración de algunos resultados como la semicontinuidad superior de las multifunciones y la compacidad de Φ. En las demostraciones se utilizaron resultados que son caracterizaciones por medio de sucesiones para la semicontinuidad superior y la compacidad en espacio métricos. Si el espacio Φ no es metrizable se tiene que demostrar la compacidad y la semicontinuidad superior utilizando las definiciones para espacios topológicos en general, lo cual puede ser muy complicado.

Para los juegos estocásticos con espacios de estados numerable presentados en el capítulo 2, demostrar que el espacio de las multi-estrategias estacionarias es un espacio metrizable fue posible gracias a que el producto numerable de una familia de espacios metrizables es metrizable. En el caso de una familia no numerable de espacios metrizables, el espacio producto no es metrizable.

En los juegos estocásticos ARAT, demostrar que el espacio de las multi-estrategias estacionarias es un espacio metrizable y compacto no fue sencillo ya que esta propiedad depende fuertemente de la estructura del espacio de estados y de los conjuntos de acciones admisibles, por lo que fué necesario clasificar condiciones en dos clases de juegos $(C1)$ y $(C2)$. La separabilidad del espacio $\mathcal{B}_1$ es determinante para que la bola cerrada $\mathcal{B}_1^*(0) \subset \mathcal{B}_1^*$ en el dual de $\mathcal{B}_1$ sea compacta y metrizable, lo cual es necesario ya que Φ puede identificarse como un subconjunto de $\mathcal{B}_1^*(0)$. Así, solo fue necesario demostrar que el espacio Φ es cerrado y esto para las dos clases de juegos que clasificamos. Por la estructura del espacio $\mathcal{B}_1$, el punto fijo de la multifunción Ψ es sólo un $\mu-$equilibrio, pero gracias a la teoría de selectores, el equilibrio de Nash se completa para todo el juego.

Claramente aún queda mucho trabajo por recorrer para asegurar la existencia de equilibrios de Nash en la teoría de juegos estocásticos no-cooperativos. Suerte.. :D

Capítulo 4

Apéndice

Teorema 4.0.1. *(Teorema de Kakutani) Sea U un subconjunto compacto y convexo de R^m. Sea $\Psi : U \twoheadrightarrow U$ una multifunción semicontinua superiormente tal que para cada $\nu \in U$ el conjunto $\Psi(\nu)$ es no vacío y convexo. Entonces Ψ tiene un punto fijo, es decir, exite un punto $\mu \in U$ tal que $\mu \in \Psi(\mu)$.*

Demostración. Klein y Thompson [14], p.102. ∎

Teorema 4.0.2. *(Teorema de Glicksberg) Sea U un conjunto compacto y convexo contenido en un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo. Si $\Psi : U \twoheadrightarrow U$ es una multifunción semicontinua superiormente, entonces existe un punto fijo para Ψ, esto es, existe $\mu \in U$ tal que $\mu \in \Psi(\mu)$.*

Demostración. Glicksberg en [10] ∎

Proposición 4.0.3. *Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible y $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de medidas en X que converge para cada conjunto $D \in \mathcal{B}(X)$ a una medida μ. Sean $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de funciones medibles, las cuales convergen puntualmente a f y g respectivamente. Si $|f_n| \leq g_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\mu_n(dx) = \int_X g(x)\mu(dx) < \infty,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu_n(dx) = \int_X f(x)\mu(dx) < \infty.$$

Demostración. Proposición 18 en [23], p. 232. ∎

Proposición 4.0.4. *Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios vectoriales topológicos localmente convexos. El producto cartesiano $X = \prod_{j\in J} X_j$ es también un espacio vectorial topológico localmente convexo.*

Demostración. Es facil probar que el producto cartesiano X es un espacio vectorial topológico; la base para la topología producto definida en X, con elementos básicos convexos está dada por:

$$\mathcal{F} \;=\; \left\{\hat{X} \in X : \hat{X} = U_{\alpha_1} \times \cdots \times U_{\alpha_n} \times \prod \{X_j : j \in J - \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}\}, U_{\alpha_r} \in \mathcal{F}_j\right\}.$$

donde $\mathcal{F}_j$ es la base de la topología de básicos convexos en $X_j, j \in J$. ∎

Proposición 4.0.5. *Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios métricos. El producto cartesiano de esta familia es metrizable si, y sólo si, J es un conjunto numerable.*

Demostración. Corolario 7.3 y 7.1 en [6], p. 189. ∎

Proposición 4.0.6. *Para cada $x \in X$ y cada $i \in I$, el espacio $\mathcal{M}(A_i(x))$ es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo.*

Demostración. Sea $f \in C(A_i(x))$. Para cada $\mu \in \mathcal{M}(A_i(x))$ definamos la semi-norma

$$P_f(\mu) := \left|\int_{A_i(x)} f(a)\mu(da)\right|,$$

y para $\epsilon > 0$

$$U_{\mu,f,\epsilon} \;:=\; \left\{\nu \in \mathcal{M}(A_i(x)) : P_f(\nu - \mu) < \epsilon\right\}.$$

Denotemos por τ a la topología generada por los conjuntos $U_{\mu,f,\epsilon}$. Por el Teorema 5.14 en [8] p. 166, el espacio $(\mathcal{M}(A_i(x)), \tau)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo. Además, si $\mu \neq 0$ entonces existe $E \in \mathcal{B}(A_i(x))$ tal que $\mu(E) \neq 0$ y para

$$f(a) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \in E \\ 0 & \text{si } a \in E^c \end{cases}$$

se sigue que

$$P_f(\mu) = \left|\int_{A_i(x)} f(a)\mu(da)\right| = \mu(E) \neq 0,$$

así, por la Proposición 5.16 en [8] p. 167, el espacio $(\mathcal{M}(A_i(x)), \tau)$ es Hausdorff. ∎

Proposición 4.0.7. *Sea X un conjunto adbitrario. El producto cartesiano*

$$\prod_{i=1}^{N} \prod_{x\in X} \mathcal{M}(A_i(x))$$

es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo.

Demostración. Por la Proposición 4.0.6, Proposición 4.0.4 y la Proposición 4.10 en [8] p. 120, el producto cartesiano

$$\prod_{x\in X} \mathcal{M}(A_i(x))$$

es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo. Con los mismos argumentos se tiene que

$$\prod_{i=1}^{N}\prod_{x\in X} \mathcal{M}(A_i(x))$$

es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo ■

Lema 4.0.8. *Sea $u : X \times A \to \mathbb{R}$, con $u(\cdot, a)$ una función medible en X y $u(x,\cdot)$ una función continua en $A(x)$ un conjunto compacto.*

(a) Existe $f \in \mathbb{F}_1$ tal que para cada $x \in X$,

$$u^*(x) \quad := \quad \max_{a\in A(x)} u(x,a) = u(x, f(x)),$$

y u^* es una función medible.

(b) Para $u(x,\lambda) := \int_A u(x,a)\lambda(da)$,

$$u^*(x) \quad = \quad \max_{\lambda\in\mathbb{P}(A(x))} u(x,\lambda) \ \ \forall x \in X.$$

Demostración. (a) La existencia del maximizador y la medibilidad de la función u^* se sigue del Lema 8.3.8(a) en [12] p. 50.

(b) Obsérvese que para cada $a \in A(x)$ y para cada $x \in X$,

$$u^*(x) = \max_{a\in A(x)} u(x,\delta_a) \quad \le \quad \max_{\lambda\in\mathbb{P}(A(x))} u(x,\lambda) \quad \forall x \in X,$$

donde δ_a es la medida de Dirac concentrada en a. Para la otra desigualdad, sea $\lambda \in \mathbb{P}(A(x))$, entonces

$$u(x,\lambda) = \int_{A(x)} u(x,a)\lambda(da) \quad \le \quad u^*(x),$$

y por lo tanto,

$$\max_{\lambda\in\mathbb{P}(A(x))} u(x,\lambda) \quad \le \quad u^*(x) \quad \forall x \in X.$$

■

Lema 4.0.9. *Para cada $\phi \in \Phi$ y $k = 1, 2, ...$ y $H^k_\phi(\cdot)$ definida en (2.10) tenemos que*

$$V_i(x,\phi) \quad = \quad H^k_\phi(x) + \alpha^k \sum_{y \in X} V_i(y,\phi)\bar{Q}^k(y/x,\phi(\cdot/x))$$

Demostración. Téngase en cuenta que

a) Por definición para $n \geq 1$,

$$\bar{Q}^n(y/x_0,\phi(\cdot/x_0)) \quad = \quad \sum_{x_1 \in X} \bar{Q}^{n-1}(y/x_1,\phi(\cdot/x_1))\bar{Q}(x_1/x_0,\phi(\cdot/x_0)).$$

b) Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$H^k_\phi(x_n) = \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n H^1_\phi(x_n)\bar{Q}^n(x_n/x_0,\phi(\cdot/x_0)).$$

Entonces por a),

$$\begin{aligned} V_i(x_0,\phi) &= \sum_{y \in X} \bar{r}_i(y,\phi(\cdot/y)) \\ &+ \sum_{x_1 \in X} \alpha^1 [\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{y \in X} \bar{r}_i(y,\phi(\cdot/y))\bar{Q}^n(y/x_1,\phi(\cdot/x_1))]\bar{Q}(x_1/x_0,\phi(\cdot/x_0)) \\ &= H^1_\phi(x_0) + \sum_{x_1 \in X} \alpha^1 V_i(x_1,\phi)\bar{Q}(x_1/x_0,\phi(\cdot/x_0)). \end{aligned}$$

Si iteramos k veces la función $V_i(\cdot,\phi)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} V_i(x_0,\phi) &= \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n H^1_\phi(x_n)\bar{Q}^n(x_n/x_0,\phi(\cdot/x_0)) \\ &+ \sum_{x_k \in X} \alpha^k V_i(x_k,\phi)\bar{Q}^k(x_k/x_0,\phi(\cdot/x_0)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por b), obtenemos

$$V_i(x,\phi) \quad = \quad H^k_\phi(x) + \alpha^k \sum_{y \in X} V_i(y,\phi)\bar{Q}^k(y/x,\phi(\cdot/x)).$$

■

Proposición 4.0.10. *Bajo las Hipótesis 3.1.1 y 3.1.2, para cada $u \in \mathbb{B}_W(X)$ la función*

$$(a,b) \mapsto \int_X u(y)Q(dy/x,a,b)$$

es continua en $A(x) \times B(x)$.

Demostración. Primero nótese que si $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{M}_b(X)$ es una sucesión de funciones semicontinuas inferiormente que converge crecientemente a una función $f \in \mathbb{M}_b(X)$, entonces el conjunto $\{x \in X : f_n(x) > \alpha\}$ es abierto y por lo tanto, la unión de ellos también lo és;

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \quad = \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > \alpha\}$$

en consecuencia, f es semicontinua inferiormente. Similarmente, se prueba que si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones semicontinuas superiormente que converge decrecientemente a una función f, entonces f es semicontinua superiormente.

Para cada $v \in \mathbb{B}_W(X)$ tenemos la siguiente desigualdad

$$|v(x)| \leq \|v\|_W W(x) \tag{4.1}$$

Por (4.1) tenemos que

$$v^*(x) := v(x) + \|v\|_W W(x) \geq 0.$$

Consideremos $(v_n^*) \subset \mathbb{M}_b(X)$ una sucesión que converge crecientemente a v^*. Por el Teorema de la convergencia monotona tenemos que

$$\int_X v_n^*(y) Q(dy/x,a,b) \uparrow \int_X v^*(y) Q(dy/x,a,b),$$

y por la Hipótesis 2.1.2 (d) obtenemos que la función $(a,b) \mapsto \int_X v^*(y) Q(dy/x,a,b)$ es semicontinua inferiormente en $A(x) \times B(x)$. Además, por la Hipótesis 2.1.2 (c) la función

$$(a,b) \mapsto \int_X W(y) Q(dy/x,a,b)$$

es continua en $A(x) \times B(x)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} (a,b) \mapsto \int_X v(y) Q(dy/x,a,b) \quad &= \quad \int_X v^*(y) Q(dy/x,a,b) \\ &- \quad \|v\|_W \int_X W(y) Q(dy/x,a,b) \end{aligned}$$

es semicontinua inferiormente en $A(x) \times B(x)$. Análogamente, por (4.1) tenemos que

$$v^{**}(x) := -v(x) + \|v\|_W W(x) \geq 0,$$

consideramos ahora $(v_n^{**}) \downarrow v^{**}$ en $\mathbb{M}_b(X)$. Por el Teorema de la convergencia monotona tenemos que

$$\int_X v_n^{**}(y) Q(dy/x,a,b) \downarrow \int_X v^{**}(y) Q(dy/x,a,b),$$

y por la Hipótesis 2.1.2 (c) y (d) la función $(a,b) \mapsto \int_X v(y)Q(dy/x,a,b)$ es semicontinua superiormente en $A(x) \times B(x)$. ■

Lema 4.0.11. *Sea (ϕ_n^1, ϕ_n^2) convergente a (ϕ^1, ϕ^2) en $\Phi_1 \times \Phi_2 \subset \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ ($\mathcal{B}_i(i = 1,2)$ como en las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.2) y sea $h : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$h(x,a,b) \quad = \quad h_1(x,a) + h_2(x,b) \quad \forall (x,a,b) \in \mathbb{K},$$

con $h_1 \in \mathcal{B}_1$ y $h_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que

$$\max_{a \in A(x)} h_1(x,a) \quad y \quad \max_{b \in B(x)} h_2(x,b)$$

pertenece a $\mathbb{B}_W(X)$. Entonces para cada $D \in \mathcal{B}(X)$.

$$\int_X 1_D(x) h(x, \phi_n^1, \phi_n^2)\mu(dx) \to \int_X 1_D(x) h(x, \phi^1, \phi^2)\mu(dx)$$

Demostración. Sean $f \in \mathbb{L}_1(\mu)$ y $D \in \mathcal{B}(X)$ arbitrarios. Como $f(x)h_1(x,\cdot)/W(x)$ es continua en $A(x)$ y $h_1 \in \mathbb{B}_W(X)$, existe M tal que $|h_1(x,a)| \leq MW(x)$ y por lo tanto,

$$\int_X \max_{a \in A(x)} 1_D(x) \left| f(x) \frac{h_1(x,a)}{W(x)} \right| \mu(dx) \quad \leq \quad \int_X M f(x)\mu(dx) < \infty,$$

entonces

$$1_D(x) f(\cdot) \frac{h_1(\cdot,\cdot)}{W(\cdot)} \quad \in \quad \mathcal{B}_1,$$

con un argumento similar se prueba que $1_D(x)f(\cdot)h_2(\cdot,\cdot)/W(\cdot) \in \mathcal{B}_2$. Por la convergencia de (ϕ_n^1, ϕ_n^2) a (ϕ^1, ϕ^2) se tiene que

$$\begin{array}{c} \displaystyle\int_X 1_D(x) \quad f(x) \quad \frac{h_1(x, \phi_n^1(x))}{W(x)} \mu(dx) \\ \downarrow \\ \displaystyle\int_X 1_D(x) \quad f(x) \quad \frac{h_1(x, \phi^1(x))}{W(x)} \mu(dx), \end{array}$$

y

$$\begin{array}{c} \displaystyle\int_X 1_D(x) \quad f(x) \quad \frac{h_2(x, \phi_n^2(x))}{W(x)} \mu(dx) \\ \downarrow \\ \displaystyle\int_X 1_D(x) \quad f(x) \quad \frac{h_2(x, \phi^2(x))}{W(x)} \mu(dx). \end{array}$$

por lo tanto, obtenemos que

$$\begin{array}{c} \int_X 1_D(x) \quad f(x) \quad \dfrac{h(x,\phi_n^1(x),\phi_n^2(x))}{W(x)}\mu(dx) \\ \downarrow \\ \int_X 1_D(x) \quad f(x) \quad \dfrac{h(x,\phi^1(x),\phi^2(x))}{W(x)}\mu(dx) \end{array}$$

■

Proposición 4.0.12. *Sea (X,Σ) un espacio medible. Si para cada $E \in \Sigma$ la ley de transición $Q(E/x,\cdot,\cdot)$ es continua en $A(x) \times B(x)$, entonces Q es fuertemente continua.*

Demostración. Para cada $f \in \mathbb{M}_b(X)$, existe $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples que convergen uniformemente a f, además, si M es una cota para f, entonces $|u_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$h_n(a,b) \quad := \quad \int_X u_n(y)Q(dy/x,a,b).$$

Por hipótesis, $h_n(\cdot)$ es continua en $A(x)$ y por el Teorema de la convergencia acotada

$$h_n(a,b) = \int_X u_n(y)Q(dy/x,a,b) \quad \to \quad h(a,b) := \int_X f(y)Q(dy/x,a,b).$$

Además, esta convergencia es uniforme, pues para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|h_n(a,b) - h(a,b)| \quad \leq \quad \int_X |u_n(y) - f(y)|\, Q(dy/x,a,b) < \epsilon.$$

Finalmente, como h_n es continua en $A(x) \times B(x)$, la función límite h es continua en $A(x) \times B(x)$. ■

Teorema 4.0.13. *Sean X y A espacios métricos compactos, φ una multifunción de X al conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ y μ una medida de probabilidad sin átomos. Si φ es μ–medible y*

$$\Gamma \quad := \quad \left\{\sigma \in \mathcal{B}_1^* | \sigma(\overline{\varphi(x)}/x) = 1 \quad \mu - c.d\right\},$$

$\mathcal{B}_1^*$ como en la demostración de la Proposición 3.2.1. Entonces Γ es metrizable, convexo y compacto.

Demostración. La demostración en Teorema IV.3.11 en [26]. ■

Bibliografía

[1] F. Albiac y N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*. Springer, (2006).

[2] C. D. Aliprantis y K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis*. Springer-Berlag, Berlin, (2006).

[3] E. Altman, A. Hordijk y F. M. Spieksma, *Contraction conditions for average and α-discont optimality in countable state Markov games with unbounded rewards*. Math. Oper. Res., 22 (1997), 588-618.

[4] D. P. Bertsekas y S. E. Shreve, *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*. Academic Press, New York, (1978).

[5] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York.

[6] J. Dugundji, *Topology*. Allin and Bacon, Inc. Boston, (1966).

[7] A. Federgruen, *On n-person stochastic game with denumerabe state space*. Adv. Appl. Prob., 10 (1978), 452-471.

[8] G. B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, 2nd edn. New York, (1999).

[9] M. K. Ghosh and A. Bagchi, *Stochastic games with average payoff criterion*. Appl. math. Optim., 38 (1998), 283-301.

[10] L. Glicksberg, *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points*. Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1951), 170-174.

[11] O. Hernández-Lerma y J. B. Lasserre, *Discrete Time Markov Control Processes*. Springer-Verlag. New York, (1996).

[12] O. Hernández-Lerma y J. B. Lasserre, *Further Topics on Discrete Time Markov Control Processes*. Springer-Verlag. New York, (1999).

[13] C. J. Himmelberg, T. Parthasarathy, T. E. S. Raghavan y F. S. Van Vleck, *Existence of p-equilibrium and optimal stationary strategies in stochastic games*. Proc. Amer. Math. Soc., 60 (1976), 245-251.

[14] E. Klein y A. C. Thompson, *Theory of Correspondences.* Wiley. New York, (1984).

[15] J. F. Nash, *Non-cooperative games.* Ann. of Math., 54 (1951), 286-295.

[16] A. S. Nowak, *Existence of equilibrium stationary strategies in discounted noncooperative stochastic games with uncountable state space.* J. Optim. Theory Appl., 45 (1985), 591-602.

[17] A. S. Nowak, *Nonrandomized strategy equilibria in noncooperative stochastic games with additive transition and reward structure.* J. Optim. Theory Appl., 52 (1987), 429-441.

[18] A. S. Nowak, *On a new class of nonzero-sum discounted stochastic games having stationary Nash equilibrium points.* J. Game Theory, 32 (2003), 121-132.

[19] T. Parthasarathy, *Discounted, positive and noncooperative stochastic games.* Internat. J. Game Theory, 2 (1973), 25-37.

[20] T. Parthasarathy, *Existence of equilibrium stationary strategies in discounted stochastic games.* Shankya: The Indian Journal of Statistics Series A., 44 (1982) 114-127.

[21] L. A. Petrosjan, *Game Theory.* World Scientific, Singapore, (1996).

[22] P. D. Rogers, *Nonzero-sum stochastic games.* University of California, Berkeley, PhD Thesis, (1969).

[23] H. L. Royden, *Real Analysis.* Macmillan, New York, (1988).

[24] M. J. Sobel, *Noncooperative stochastic games.* Ann. Math. Statist., 42 (1971), 1930-1935.

[25] J. Warga, *Functions of relaxed controls.* SIAM J. Control, 5, 4, (1967), 268-641.

[26] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Funtional Equations.* Academic Press, New York, (1972).