"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Posgrado en Matemáticas

Familias especiales de funciones analíticas: comportamiento y multiplicadores

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestra en Ciencias

(Matemáticas)

Presenta:

Alejandra Morales Orduño

Directora de tesis:

Dra. Martha D. Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, Agosto 16, 2019

SINODALES

Dra. Martha D. Guzmán Partida

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Fernando Luque Vásquez

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Rubén A. Martínez Avendaño

ITAM, Ciudad de México, México

Dr. J. Adolfo Minjárez Sosa

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

A mi familia.

"Se recordará a Arquímedes aún cuando Esquilo haya sido olvidado, pues los lenguajes perecen mientras las ideas matemáticas no mueren nunca."

-G. H. Hardy

Agradecimientos

Agradezco principalmente a Dios por permitirme llegar hasta aquí. Gracias a mi gran familia por apoyarme en todo momento. A mi padre Antonio Abad Morales Ibarra por motivarme a seguir mis sueños; a mi madre Eva Luz Orduño Carrazco por su amor incondicional; y a mis hermanas Miriam y Karolina, por estar siempre a mi lado. Asímismo doy gracias a mi abuelo, primos y tíos por su inmensa bondad y apoyo.

Quiero agradecer enormemente a mi directora de tesis Dra. Martha D. Guzmán Partida por ser una gran guía para mí desde licenciatura y ahora en maestría. Gracias por su paciencia, sus consejos, por haberme dedicado su tiempo, y sobretodo gracias por creer en mí.

A mis sinodales, Dr. Fernando Luque, Dr. Rubén Martínez y Dr. Adolfo Minjárez, por tomarse el tiempo de revisar esta tesis y hacerme los comentarios y correcciones necesarias para mejorarla.

Me gustaría agradecer a todos los profesores que fueron parte de mi formación académica a lo largo de mi vida, en especial a la Dra. Carolina Espinoza Villalva por motivarme a incursionar en esta área tan bonita de las matemáticas.

Agradezco a todas las personas que me han apoyado a lo largo de este camino siendo confidentes, compañeros, familia. Principalmente a mis amigos: Alex, Ivonne, J. Sáenz, Ricky, J. René, Dulce, Ying, Aarón, Dani, Alberto, Ángel y Rogelio. En particular, Jorge, Katya, Eddel y Jesús, les agradezco enormemente su amistad y apoyo incondicional; Jorge, muchas gracias por ser mi confidente, y por seguirlo siendo a pesar de los rumbos distintos que tomen nuestras vidas; Katya, te agradezco todas las tardes de comida, plática y estudio a tu lado, desde hace más de 5 años; Eddel, gracias por ser esa gran persona que eres, y hacerme reír aunque me estreses al mismo tiempo; y Jesús, gracias por estar en las buenas y en las malas, y por aguantarme tanto: eres bien chilo.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca de manutención a lo largo de estos dos años.

Contenido

Introducción

Al estudiar análisis funcional, nos damos cuenta que uno de los temas más importantes en esta área es el estudio de los espacios de Banach, tales como el espacio de sucesiones ℓ^p, cuyo descubrimiento se le atribuye a F. Riesz [17] en la primera mitad del siglo XX. Particularmente sabemos que el espacio ℓ^2 cumple con propiedades que no se tienen en general para ℓ^p con $p \neq 2$, tales como la existencia de un producto interior que lo convierte en espacio de Hilbert.

Justo en esta área de las matemáticas existe un problema que sigue parcialmente sin resolver, el conocido *problema del subespacio invariante*, el cual cuestiona si todo operador acotado en un espacio de Banach complejo envía subespacios cerrados no triviales en sí mismos. Este problema en espacios de Banach fue resuelto por Per Enflo en 1975, construyendo un operador que no poseía subespacios invariantes. Sin embargo, el problema permanece abierto en el caso de espacios de Hilbert. Uno de los primeros operadores en ℓ^2 en tener caracterizados sus subespacios invariantes fue el operador de desplazamiento a la derecha S. Esto fue posible mediante el Teorema de Beurling 1.3.7, interpretando a ℓ^2 como espacio funcional de Hilbert H^2 (1.2.3), el llamado espacio de Hardy.

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar algunos de los resultados mas destacables en el espacio ℓ^p_A de funciones analíticas (en el disco unitario) cuyos coeficientes de Taylor pertenecen al espacio de sucesiones ℓ^p. Especialmente trabajamos con las propiedades que cumplen sus multiplicadores, así como la utilidad que tiene la noción de ortogonalidad de Birkhoff-James en estos espacios, como herramienta para la estimación de ceros de funciones analíticas, tomando como referencia el trabajo de Cheng et al. [5].

Para el desarrollo de este estudio, haremos uso de las herramientas que nos brindan la teoría de Análisis Complejo, Teoría de la Medida y por supuesto, Análisis Funcional. Esta tesis se presenta en cinco capítulos estructurados de la manera que sigue:

En el Capítulo 1 podemos encontrar una compilación de teoremas, proposiciones y lemas, que pertenecen a la teoría clásica de espacios de Hardy. Dicha teoría tiene sus orígenes en descubrimientos realizados en el siglo XX por matemáticos como G. H. Hardy, J. E. Littlewood, I. I. Privalov, F. y M. Riesz, V. Smirnov y G. Szego. Fueron seleccionados aquellos resultados que nos serán de ayuda al momento de estudiar los espacios ℓ^p_A, tales como caracterizaciones de H^p y la clase $\mathcal{N}$ Nevanlinna, algunos teoremas importantes de factorización, y el famoso Teorema de Hausdorff-Young.

En el segundo Capítulo presentamos algunos ejemplos de espacios funcionales de Hilbert, incluyendo el espacio de Hardy H^2. Definimos qué es un núcleo reproductor y calculamos para cada espacio su núcleo reproductor, así como la fórmula reproductora que éste genera.

En el Capítulo 3 abordamos los espacios ℓ^p_A estudiando algunas de sus propiedades básicas. Con ayuda del Teorema de Hausdorff-Young, encontramos la relación que existe entre estos espacios y los espacios de Hardy cuando $1 \leq p \leq 2$, lo cual nos permite analizar también el comportamiento frontera de las funciones en ℓ^p_A en el mismo caso. Además, notamos lo complicado que se vuelve dicho comportamiento si $p > 2$.

A lo largo del Capítulo 4 estudiamos a detalle los multiplicadores de ℓ^p_A. Cabe destacar que el caso $p = 2$ por tratarse del espacio de Hardy H^2, es sencillo de analizar, pues los multiplicadores resultan ser las funciones analíticas acotadas en el disco unitario, es decir H^∞. Así, al examinar el comportamiento frontera de los multiplicadores de ℓ^2_A nos remitimos a la teoría de espacios de Hardy para entender su proceder. Si bien el caso $p \neq 2$ ha sido estudiado también, resulta un poco más complicado, y algunas preguntas permanecen abiertas, como por ejemplo, al cuestionarnos si es posible la representación de funciones en ℓ^p_A como cociente de dos multiplicadores, el problema sigue parcialmente sin solución.

Finalmente, en el Capítulo 5 presentamos el concepto de ortogonalidad de Birkhoff-James introducido por Birkhoff en 1935, como la primera noción de ortogonalidad en espacios normados. Estudiamos dicha idea de ortogonalidad caracaterizándola en los espacios ℓ^p y ℓ^p_A. Asímismo, aprovechamos sus propiedades al momento de estimar ceros de funciones analíticas en el disco unitario, y cotas de multiplicadores de ℓ^p_A.

Añadimos también dos Apéndices para justificar el proceder en algunas de las demostraciones presentadas, así como Bibliografía que servirá de utilidad a quien requiera ahondar un poco más en la teoría presentada.

Capítulo 1

Espacios de Hardy

Los espacios de Hardy fueron introducidos en 1923 por Frigyes Riesz, nombrándolos de este modo en honor al matemático Godfrey Harold Hardy quien trabajó con dichos espacios en 1915. La teoría de funciones analíticas en espacios de Hardy ha sido estudiada desde el siglo XX y en este capítulo presentaremos algunos de los resultados relevantes que nos serán útiles al momento de estudiar los espacios $\ell_A^p(\mathbb{D})$.

A lo largo de este capítulo, daremos una introducción a H^p, tomando como referencia los trabajos de Duren [9], García-Cuerva and Rubio de Francia [10], Garnett [11], y Hoffman [12]. Nos enfocaremos en algunos resultados que serán convenientes de estudiar para el desarrollo de los siguientes capítulos, mismos que son parte de la literatura básica al trabajar con espacios de Hardy, por lo que omitiremos algunas de las pruebas.

Un resultado de gran utilidad al momento de estudiar los espacios de Hardy, es el Teorema de Fatou, el cual se puede demostrar utilizando teoría de funciones armónicas (véase por ejemplo [10]) y que enunciaremos enseguida para futuras referencias.

Teorema 1.0.1. *(Teorema de Fatou) Sea F una función holomorfa y acotada en $\mathbb{D}$. Entonces, existe el límite no tangencial de F*

$$F(e^{it}) := \lim_{z \xrightarrow{N.T.} e^{it}} F(z)$$

para casi todo $t \in [-\pi, \pi]$.

Aquí, el límite no tangencial en el punto e^{it} significa que z debe aproximarse a e^{it} cuando z se encuentra en la región $\{re^{i\varphi} : |\varphi - t| < c(1-r)\}$ para cada $c > 0$. Para darnos una idea de esto, podemos observar la siguiente ilustración que considera un caso particular.

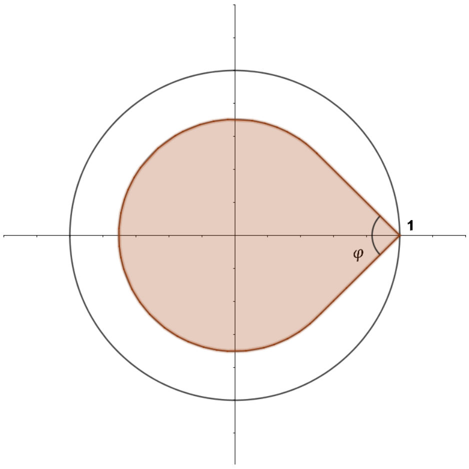

FIGURA 1.1: Caso c=1, t=0.

1.1. Introducción a H^p

Lo siguiente nos será útil para definir los espacios de Hardy.

Sea F una función holomorfa en el disco unitario $\mathbb{D}$. Para $r \in [0,1)$ consideremos las funciones

$$m_0(F,r) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{it})| dt \right\},$$
$$m_p(F,r) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt \right]^{1/p}, \ 0 < p < \infty$$
$$m_\infty(F,r) = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |F(re^{it})|,$$

donde

$$\log^+ |F(re^{it})| = \text{máx}\left\{0, \log |F(re^{it})|\right\}.$$

Entonces, para cada función $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ se puede mostrar que $m_p(F,r)$ es creciente en $r \in [0,1)$ para todo $p \in [0,\infty]$, lo cual justifica la siguiente definición.

Definición 1.1.1. *Si* $0 < p \leq \infty$ *definimos los espacios de Hardy* $H^p(\mathbb{D})$ *por*

$$H^p(\mathbb{D}) := \left\{ F \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|F\|_{H^p} = \sup_{0 \leq r < 1} m_p(F, r) < \infty \right\},$$

o equivalentemente

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ F \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|F\|_{H^p} = \lim_{r \to 1} m_p(F, r) < \infty \right\}.$$

Para $p = 0$ *definimos la clase Nevanlinna como*

$$\mathcal{N} = \left\{ F \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_{0 \leq r < 1} m_0(F, r) < \infty \right\}.$$

En adelante, denotaremos $H^p(\mathbb{D})$ como H^p para referirnos al espacio de Hardy definido sobre las funciones analíticas en el disco unitario.

Observación 1.1.2. *Si* $0 < p < q < \infty$ *entonces se tienen las siguientes contenciones:*

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p \subset \mathcal{N}.$$

En efecto, es claro que la primera contención se cumple y la segunda contención se obtiene como consecuencia de la desigualdad de Hölder. Así pues, sólo queda mostrar que $H^p \subset \mathcal{N}$.

Sea $F \in H^p$. Notemos que para cualquier $w > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \log w^p < w^p \quad &\Rightarrow \log w < \frac{1}{p} w^p \\ &\Rightarrow \log^+ w \leq \frac{1}{p} w^p. \end{aligned}$$

De este modo tenemos la siguiente desigualdad,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{it})| dt &\leq \frac{1}{2\pi p} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt \\ &\leq \frac{1}{p} m_p(F, r)^p \\ &< \infty. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^{+}|F(re^{it})|dt\right\}<\infty, \quad i.e. \quad F\in\mathcal{N}.$$

La Fórmula de Jensen es un conocido resultado en análisis complejo, que nos servirá al momento de demostrar una caracterización para las funciones en la clase Nevanlinna, por lo que la estableceremos enseguida.

Teorema 1.1.3. *(Fórmula de Jensen). Sea F una función holomorfa en el disco abierto $D(0,R)$ tal que $F(0)\neq 0$. Para $0<r<R$ sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ los ceros de F en $\overline{D(0,r)}$ enlistados tantas veces como sus multiplicidades. Entonces*

$$\log|F(0)|+\sum_{j=1}^{n}\log\frac{r}{|z_j|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|F(re^{it})|dt.$$

1.2. Caracterizaciones de H^p

En esta sección, daremos unos resultados que caracterizan a los espacios H^p. Para esto introduciremos la siguiente definición.

Definición 1.2.1. *Sean $0<r<1$, $t\in[-\pi,\pi]$. Definimos el Núcleo de Poisson en $\mathbb{D}$ como*

$$P_r(t):=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{int}.$$

Para $f\in L^p(\mathbb{T})$, con $1\leq p\leq\infty$, denotamos por $u=P(f)$ a la integral de Poisson de f, esto es,

$$u(re^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t-\theta)f(\theta)d\theta$$

donde $0\leq r<1$, $-\pi\leq t\leq\pi$.

El siguiente resultado nos será de utilidad al momento de demostrar la Proposición 1.2.5.

Teorema 1.2.2. *Sea $f\in L^p(\mathbb{T})$, $1\leq p\leq\infty$, y sea $u=P(f)$ su integral de Poisson. Entonces $u(z)$ es armónica en $\mathbb{D}$. Además, si $p<\infty$ tenemos:*

$$\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|^p dt\leq\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt$$

para cada $r < 1$. *Y si* $p = \infty$

$$|u(z)| \leq \|f\|_\infty$$

para cada $z \in \mathbb{D}$.

Proposición 1.2.3. *Sea* $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ *tal que* $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. *Entonces* $F \in H^2$ *si y solamente si* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$.

Demostración. Sea $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y sea $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ su expansión en serie de Taylor alrededor de 0.

Sean $z = re^{it}$, $0 \leq r < 1$, $t \in [-\pi, \pi]$. Los coeficientes de Fourier de la función $t \mapsto F(re^{it})$ son los números complejos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k r^k e^{ikt}) e^{-int} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-k)t} dt \right] \\ &= a_n r^n \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe a la convergencia uniforme de la serie. Como la suma $\sum_{k=1}^{n} a_k r^k e^{ikt} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_r(t) \equiv F(re^{it})$ en la norma de $L^2(\mathbb{T})$, tenemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r^k e^{ikt} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|F_r\|_{L^2(\mathbb{T})}^2.$$

Además $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal en $L^2(\mathbb{T})$ por lo que el Teorema de Pitágoras nos muestra que

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 r^{2k} = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r^k e^{ikt} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|F_r\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = m_2^2(F, r).$$

Por tanto, $m_2^2(F, r) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}$.
Tomando ahora el límite cuando $r \to 1$ obtenemos

$$\|F\|_{H^2}^2 = \lim_{r\to 1} m_2(F,r) = \lim_{r\to 1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2.$$

■

Para la demostración de la siguiente proposición, recordamos el Teorema de Riesz-Fischer para espacios de Hilbert, que enuncia lo siguiente.

Teorema 1.2.4. *Supongamos que $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo de funciones en $L^2(I)$. Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números complejos tales que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ converge. Entonces existe una función f en $L^2(I)$ tal que*

a) $\hat{f}(k) = (f,\varphi_k) = c_k$ *para cada* $k \in \mathbb{Z}$,

b) $\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$.

Proposición 1.2.5. *Sea $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Entonces $F \in H^2$ si y solamente si existe $f \in L^2(\mathbb{T})$ con coeficientes de Fourier cero para frecuencias negativas tal que $F = P(f)$.*

Demostración. Por la proposición 1.2.3 tenemos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$ converge, por lo que el Teorema de Riesz-Fischer nos asegura que existe una función $f \in L^2(\mathbb{T})$ tal que $\hat{f}(j) = a_j, \ \ \forall j \geq 0$ y $\hat{f}(j) = 0$, para $j < 0$.

Veamos pues que $F = P(f)$.

$$\begin{aligned}
P(f)(re^{it}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta) f(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik(t-\theta)}\right] f(\theta)d\theta \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(\theta)d\theta\right] e^{ikt} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikt} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) r^k e^{ikt} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(re^{it}\right)^k \\
&= F(re^{it}).
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $F = P(f)$ donde f es una función en $L^2(\mathbb{T})$ tal que $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n < 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
F(re^{it}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta)f(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik(t-\theta)}\right] f(\theta)d\theta \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ikt}\hat{f}(k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)(re^{it})^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(re^{it})^k.
\end{aligned}$$

Así, vemos que $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, y por el Teorema 1.2.2 tenemos que para toda $0 \leq r < 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^2 dt \leq \|f\|_2,$$

por lo que $F \in H^2$. ■

Este último resultado se puede extender a un caso más general cuando $1 < p \leq \infty$ (Véase [10]). Sin embargo, la demostración de este caso utiliza técnicas distintas a las que presentamos en el caso $p = 2$, debido a que L^p no es un espacio de Hilbert cuando $p \neq 2$, mientras L^2 sí lo es.

Proposición 1.2.6. *Sea $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $1 < p \leq \infty$. Entonces $F \in H^p$ si y solamente si existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ con coeficientes de Fourier cero para frecuencias negativas tal que $F = P(f)$.*

El siguiente teorema resume algunos resultados que nos serán de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.2.7. *Sea $F \in H^p$, $1 < p \leq \infty$. Entonces:*

a) Para casi todo $t \in [-\pi, \pi]$ existe

$$\lim_{z \xrightarrow{N.T.} e^{it}} F(z) = F(e^{it}).$$

Además $f(t) \equiv F(e^{it}) \in L^p(\mathbb{T})$ *y* $F = P(f)$.

b) Si $1 < p < \infty$ *entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|F(re^{it}) - F(e^{it})\right|^p dt \xrightarrow[r\to 1]{} 0.$$

c) $\|F\|_{H^p} = \|f\|_p$ *para cada* $1 < p < \infty$.

Demostración. Para la demostración de los incisos a) y b) nos remitimos al Teorema de Fatou 1.0.1 y demás teoría sobre funciones armónicas (véase [9], [10] o [11]).

Demostraremos el inciso c).
El resultado en el inciso b) nos dice que para $1 < p < \infty$ la función $F(re^{it})$ converge a $F(e^{it})$ en L^p cuando $r \to 1$, es decir,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt \xrightarrow[r\to 1]{} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{it})|^p dt,$$

lo cual implica

$$\|F\|_{H^p} = \lim_{r\to 1} m_p(F, r) = \|f\|_p.$$

■

Daremos ahora una caracterización para las funciones en la clase Nevanlinna. Para esto presentamos un conocido teorema de Fatou y Riesz [9].

Teorema 1.2.8. *Una función analítica en el disco unitario pertenece a la clase Nevanlinna* $\mathcal{N}$ *si y sólo si es el cociente de dos funciones analíticas acotadas.*

Demostración. Supongamos primero que $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tiene la forma

$$F(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

donde las funciones φ y ψ son analíticas y acotadas en el disco unitario, y $\psi \not\equiv 0$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|\varphi(z)| \leq 1$, $|\psi(z)| \leq 1$ y $\psi(0) \neq 0$, pues en caso de tener $\psi(0) = 0$, escribimos $\psi(z) = z^k\tilde{\psi}(z)$ (donde k es la multiplicidad

del cero de ψ en 0 y $\tilde{\psi}(0) \neq 0$), y aplicamos el resultado a $\tilde{\psi}(z)$.
Luego, $\log|\varphi(z)| \leq 0$ y $\log|\psi(z)| \leq 0$, por lo que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(re^{it})|dt \leq -\int_{-\pi}^{\pi} \log|\psi(re^{it})|dt.$$

Además, por la Fórmula de Jensen (1.1.3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\psi(re^{it})|dt = \log|\psi(0)| + \sum_{|z_j|<r} \log\frac{r}{|z_j|}, \tag{1.1}$$

donde z_j son los ceros de ψ.
Esto muestra que $r \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \log|\psi(re^{it})|dt$ es creciente en $0 < r < 1$, por lo que gracias a la expresión (1.1) tenemos que

$$\begin{aligned} m_0(F,r) &= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(re^{it})|dt\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\psi(re^{it})|dt\right\} \\ &\leq M, \end{aligned}$$

para algún $0 < r < 1$ suficientemente cerca de 1. Así, $F \in \mathcal{N}$.

Recíprocamente, sea $F(z) \not\equiv 0$ en la clase Nevanlinna, con un cero de multiplicidad $m \geq 0$ en $z = 0$, entonces

$$z^{-m}F(z) \underset{z\to 0}{\longrightarrow} \alpha \neq 0.$$

Sean (z_n) los otros ceros de F repetidos de acuerdo a su multiplicidad y ordenados de tal manera que $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq ... < 1$. Si $F(z) \neq 0$ en $|z| = \rho < 1$ la función

$$G(z) = \log\left\{F(z)\frac{\rho^m}{z^m}\prod_{|z_n|<\rho}\frac{\rho^2 - \overline{z_n}z}{\rho(z - z_n)}\right\}$$

es analítica en $|z| \leq \rho$, y en $|z| = \rho < 1$ tenemos que

$$\operatorname{Re} G(z) = \log\left|F(z)\frac{\rho^m}{z^m}\prod_{|z_n|<\rho}\frac{\rho^2 - \overline{z_n}z}{\rho(z - z_n)}\right|$$

$$= \log|F(z)| + \log\left|\frac{\rho^m}{z^m}\right| + \log\left|\prod_{|z_n|<\rho} \frac{|z|(\overline{z}-\overline{z_n})}{\rho(z-z_n)}\right|$$
$$= \log|F(z)|.$$

Luego, utilizando técnicas de análisis complejo (completamente análogas a las vistas en [10], Teo. 7.1, p.79) es posible probar que

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(\rho e^{it})|\frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}dt + iC,$$

donde C es una constante.

Tomando exponencial tenemos que

$$F(z) = \frac{\varphi_\rho(z)}{\psi_\rho(z)}$$

donde

$$\varphi_\rho(z) = \frac{z^m}{\rho^m}\prod_{|z_n|<\rho}\frac{\rho(z-z_n)}{\rho^2-\overline{z_n}z}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^-|F(\rho e^{it})|\frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}dt + iC\right\},$$
$$\psi_\rho(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(\rho e^{it})|\frac{\rho e^{it}+z}{\rho e^{it}-z}dt\right\}.$$

Ahora elijamos una sucesión $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow 1$ tal que $F(z) \neq 0$ en $|z| = \rho_k$. Sean

$$\phi_k(z) = \varphi_{\rho_k}(\rho_k z) \quad \text{y} \quad \Psi_k(z) = \psi_{\rho_k}(\rho_k z).$$

Entonces

$$F(\rho_k z) = \frac{\phi_k(z)}{\Psi_k(z)}$$

para $|z| < 1$. Pero las funciones ϕ_k y Ψ_k son analíticas y acotadas por 1 en el disco unitario, por lo que $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(\Psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ son familias normales y por el Teorema de Montel existe una sucesión $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\phi_{k_i}(z) \to \varphi(z) \quad \text{y} \quad \Psi_{k_i} \to \psi(z)$$

uniformemente en cada disco $|z| \leq R < 1$.

Las funciones φ y ψ son analíticas en el disco unitario y $|\varphi(z)| \leq 1$, $|\psi(z)| \leq 1$. De acuerdo a la definición de ψ_ρ, el hecho de que $\int \log^+ |F|$ está acotada, nos da una estimación para

$$|\Psi_k(0)| = |\psi_{\rho_k}(0)| \geq |e^{-L}| = \delta > 0$$

donde $L > 0$ es una constante. Así, $\psi(z) \not\equiv 0$. Luego

$$F = \frac{\varphi}{\psi}.$$

$\blacksquare$

Concluimos la sección con el siguiente teorema que resulta como corolario de lo anterior.

Teorema 1.2.9. *Para cada función $F \in \mathcal{N}$, el límite no tangencial $F(e^{it})$ existe casi en todas partes y $\log |F(e^{it})|$ es integrable a menos que $F(z) \equiv 0$.*

1.3. Teoremas de factorización

Recordemos que en análisis complejo tenemos un criterio que nos permite asegurar la convergencia uniforme de productos infinitos de la siguiente manera.

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, y $(f_j)_{j\geq 1}$ funciones analíticas en Ω. Si la serie $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |1 - f_j(z)|$ converge uniformemente en compactos de Ω, entonces el producto infinito

$$\prod_{j=1}^{\infty} f_j(z) := f(z)$$

converge uniformemente en compactos de Ω y representa una función analítica en Ω.

Haciendo uso de este criterio es posible demostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.3.1. *Sea $(z_j)_{j\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $0 < |z_j| < 1$ y $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(1 - |z_j|) < \infty$. Entonces el producto de Blaschke*

$$B(z) := z^k \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z_j - z}{1 - z\overline{z_j}} \right) \left(\frac{|z_j|}{z_j} \right)$$

donde $k \in \mathbb{N}_0$, converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. Además $B \in H^\infty$.

El producto de Blaschke cumple con algunas propiedades, por ejemplo, al estar en H^∞ el Teorema de Fatou 1.0.1 nos asegura la existencia del límite no tangencial de B para casi todo $t \in [-\pi, \pi]$.

Además, $|B(re^{it})| \leq 1$ y en casi todo punto de la frontera del disco unitario se tiene $|B(e^{it})| = 1$. Establecemos enseguida nuestro primer teorema de factorización, cuya demostración se puede encontrar en [10].

Teorema 1.3.2. *Sea $F \in \mathcal{N}$ tal que F no es idénticamente cero. Entonces $F(z) = B(z)H(z)$, donde B es el producto de Blaschke formado por los ceros de F y H es una función holomorfa sin ceros en $\mathbb{D}$. Además, $H \in \mathcal{N}$ y $\|F\|_{\mathcal{N}} = \|H\|_{\mathcal{N}}$. Si $F \in H^p$, $0 < p \leq \infty$ entonces $H \in H^p$ y $\|F\|_{H^p} = \|H\|_{H^p}$.*

Corolario 1.3.3. *Si $F \in H^p$, $0 < p < \infty$ y su función frontera $F(e^{it})$ pertenece a $L^{p'}(\mathbb{T})$, entonces $F \in H^{p'}$.*

Demostración. Si $p' \leq p$ ya acabamos pues $H^p \subset H^{p'}$. Supongamos pues que $p < p'$.

Si $p > 1$ hemos visto que $F = P(f)$ donde por hipótesis $f(t) := F(e^{it}) \in L^{p'}$, $p' > 1$ por lo que $F \in H^{p'}$.

Supongamos ahora que $0 < p \leq 1$. Por el teorema anterior podemos escribir $F(z) = B(z)H(z)$, con $H \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ sin ceros y

$$\|F\|_{H^p} = \|H\|_{H^p}.$$

Elijamos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de tal manera que $1 < np < np'$. Por las características de H es posible hallar $G \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ sin ceros tal que $H = G^n$, de donde $|H|^p = |G|^{np}$ y como $H \in H^p$ entonces $G \in H^{np}$ con

$$\|F\|_{H^p}^p = \|H\|_{H^p}^p = \|G\|_{H^{np}}^{np}.$$

Además, la función frontera $G(e^{it})$ cumple

$$|G(e^{it})|^n = |H(e^{it})| = |F(e^{it})| \in L^{p'}.$$

De este modo $G(e^{it}) \in L^{np'}$ y $np' > 1$ por lo que $G \in H^{np'}$.

Luego, $H \in H^{p'}$ pues $G^n \in H^{p'}$ y

$$|F(z)| = |B(z)||H(z)| \leq |H(z)|.$$

Por lo tanto, $F \in H^{p'}$.

∎

Recordamos ahora el Teorema de Factorización Canónica que enuncia lo siguiente.

Teorema 1.3.4. *(Factorización Canónica). Si $F \in H^p$ entonces*

$$F(z) = e^{ic}B(z)\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma(t)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|F(e^{it})|dt\right\}$$

donde $c \in \mathbb{R}$, B es como antes y σ es una medida positiva singular respecto a la medida de Lebesgue.

Este teorema nos permite factorizar cualquier función $F \in H^p$ como producto de dos funciones

$$I_F(z) = e^{ic}B(z)\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma(t)\right\}$$
$$E_F(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|F(e^{it})|dt\right\}$$

a las cuales llamaremos factores Interior y Exterior de F respectivamente.(Véase [10]).

Observación 1.3.5. *Es fácil ver que las siguientes propiedades se cumplen para toda $F \in H^p$, $0 < p \leq \infty$.*

- *Si $F \in H^p$ entonces $E_F \in H^p$.*
- $\|E_F\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$.
- $|I_F(z)| \leq 1$ $\forall z \in \mathbb{D}$ *y* $|I_F(e^{it})| = 1$ *casi en todo punto.*

Diremos pues, que $F \in H^p$ $(0 < p \leq \infty)$ es una función *interior* si $E_F \equiv 1$. Por otro lado, llamaremos a F una función *exterior* si I_F es constante.

Teorema 1.3.6. *Las funciones interiores son las funciones holomorfas y acotadas tales que $|F(e^{it})| = 1$ casi en todo punto.*

Demostración. Notemos que $E_F = 1 \Longleftrightarrow |E_F| = 1$.

La primera implicación es clara.

Recíprocamente, supongamos que $|E_F| = 1$, entonces

$$\left|\exp\left\{P\left(\log|F(e^{it})|\right)\right\}\right| = 1$$

por lo que

$$P\left(\log|F(e^{it})|\right) = 0$$

y así

$$\log|F(e^{it})| = 0 \quad c.t.p.$$

por lo tanto $E_F = 1$.

De este modo, tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} F \text{ es una función interior} &\Longleftrightarrow E_F = 1 \\ &\Longleftrightarrow |E_F| = 1 \\ &\Longleftrightarrow \left|\exp\left\{P\left(\log|F(e^{it})|\right)\right\}\right| = 1 \\ &\Longleftrightarrow P\left(\log|F(e^{it})|\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \log|F(e^{it})| = 0 \quad \text{c.t.p.} \\ &\Longleftrightarrow |F(e^{it})| = 1 \quad \text{c.t.p.} \end{aligned}$$

■

Un resultado importante en la teoría de espacios de Hardy, que involucra el concepto de función interior es el Teorema de Beurling.

En un espacio de Hilbert separable H con base $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ definimos el operador desplazamiento S en H como el operador tal que $S(e_j) = e_{j+1}$, o equivalentemente, $S\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e_{j+1}$.

Identificando H con H^2 tomando $e_j = e^{ikt}$, entonces el operador S se convierte en multiplicación por z, $S(f) = zf(z)$.

Recordemos que un subespacio cerrado M de H^2 se dice invariante bajo S si $zM \subset M$, esto es, si $zf(z) \in M$ siempre que $f \in M$.

Teorema 1.3.7. *(Beurling). Sea M un subespacio cerrado de H^2 invariante bajo S. Si $M \neq \{0\}$, entonces existe una función interior $G(z)$ tal que*

$$M = GH^2 = \{G(z)f(z) \ : \ f \in H^2\}. \tag{1.2}$$

La función interior G es única salvo constantes. Todo subespacio de la forma (1.2) es un subespacio invariante bajo S.

Demostración. Veamos primero que todo subespacio de la forma (1.2) es un subespacio invariante bajo S.

Notemos que todo subespacio de la forma (1.2) es cerrado en L^2 pues $|G| = 1$. Además, claramente tales subespacios son invariantes bajo multiplicación por z pues si $h \in M$ entonces

$$zh(z) = zG(z)f(z) = G(z)(zf(z)) \in M.$$

Ahora, para ver que es única excepto por un factor constante, supongamos que hay dos funciones interiores G_1 y G_2 tales que

$$G_1H^2 = G_2H^2,$$

entonces $G_1 = G_2h_1$ y $G_2 = G_1h_2$, donde $h_1, h_2 \in H^2$. Esto es

$$G_1 = \lambda G_2$$

donde $|\lambda| = 1$ pues

$$\left|\frac{G_1}{G_2}(e^{it})\right| = 1 \quad \text{y} \quad \left|\frac{G_2}{G_1}(e^{it})\right| = 1,$$

esto es, ambas son funciones interiores en H^∞.

Consideremos ahora $M \neq \{0\}$, un subespacio cerrado invariante. Entonces existe una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $f \in M$ con $f = a_kz^k + a_{k+1}z^{k+1} + \ldots$ donde $a_k \neq 0$. Elijamos $f \in M$ con el mínimo k como antes y escribamos $M = z^kM_1$. Entones $M_1 \subset H^2$ es también invariante y cerrado, y podemos suponer también que $M = M_1$.

Así, suponemos que existe una función $f_0 \in M$ tal que $f_0(0) \neq 0$. Sea g_0 la proyección ortogonal de $1 \in H^2$ en M. Entonces $g_0 \in M$ y $1 - g_0$ es ortogonal a M.

Consecuentemente, como $z^n g_0(z) \in M$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, tenemos

$$(e^{in\cdot} g_0, 1 - g_0) = 0$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} g_0(\theta) \left(1 - \overline{g_0(\theta)}\right) d\theta = 0.$$

Debido a que $z^n g_0(z) = 0$ en $z = 0$, para $n \geq 1$, por la Propiedad del Valor Medio tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} |g_0(\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} g_0(\theta) d\theta = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Luego, los coeficientes de Fourier de $|g_0|^2$ son cero excepto en $n = 0$ y $|g_0|^2$ es constante

$$|g_0|^2 = c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} |g_0(\theta)|^2 d\theta = \|g_0\|_2^2.$$

Si $g_0 = 0$ entonces $1 = 1 - g_0$ es ortogonal a M y todas las funciones en M se anulan en $z = 0$, contradiciendo nuestra suposición. Así, $g_0 \neq 0$ y

$$G = \frac{g_0}{\|g_0\|_2}$$

es una función interior en M.

Claramente $GH^2 \subset M$, pues M es invariante. Supongamos ahora que $h \in M$ es ortogonal a GH^2. Entonces como $g_0 = \|g_0\|_2 G \in GH^2$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h e^{in\theta} \overline{g_0(\theta)} d\theta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Pero $1 - g_0$ es ortogonal a M y $z^n h \in M$, para $n = 1, 2, \ldots$, por lo que de nuevo debido a la Propiedad del Valor Medio se tiene

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h e^{in\theta} (1 - \overline{g_0(\theta)}) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h e^{in\theta} \overline{g_0(\theta)} d\theta$$

pues $z^n h(z) = 0$ en $z = 0$.

Luego $h\overline{g_0} \in L^1$ tiene serie de Fourier cero, y así $h\overline{g_0} = 0$. Como $|g_0| > 0$, vemos que $h = 0$ y por tanto $M = GH^2$. ■

1.4. Teorema de Hausdorff-Young

El propósito de esta sección es demostrar el Teorema de Hausdorff-Young, el cual nos será de gran utilidad al momento de desarrollar la teoría en los espacios ℓ^p_A cuando $1 \leq p \leq 2$. Para ello haremos uso del conocido Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin que enuncia lo siguiente.

Teorema 1.4.1. *(De interpolación de Riesz-Thorin). Supongamos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ son espacios de medida y $p_0, p_1, p_0', p_1' \in [1, \infty]$. Para $0 < t < 1$ definamos p_t y p_t' por*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad y \quad \frac{1}{p_t'} = \frac{1-t}{p_0'} + \frac{t}{p_1'}.$$

Si T es un mapeo lineal de $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ en $L^{p_0'}(\nu) + L^{p_1'}(\nu)$ tal que

$$\|Tf\|_{p_0'} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \text{ para } f \in L^{p_0}(\mu) \quad y \quad \|Tf\|_{p_1'} \leq M_1 \|f\|_{p_1} \text{ para } f \in L^{p_1}(\mu),$$

entonces $\|Tf\|_{p_t'} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$ para $f \in L^{p_t}(\mu)$, $0 < t < 1$.

Para una demostración de este teorema nos referimos a [9]. La parte principal de la prueba consiste en mostrar que

$$\|Tf\|_{p_t'} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}, \text{ para toda } f \in \Sigma_X,$$

donde Σ_X denota el espacio de funciones simples en X que se anulan fuera de conjuntos de medida finita. Para esto se hace uso del famoso *Lema de las tres líneas*, el cual establece que dada una función continua ϕ acotada en la franja $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ y holomorfa en su interior, es posible encontrar una cota

$$|\phi(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t \text{ para } \operatorname{Re} z = t,\ 0 < t < 1,$$

siempre que $|\phi(z)| \leq M_0$ para $\operatorname{Re} z = 0$ y $|\phi(z)| \leq M_1$ para $\operatorname{Re} z = 1$.

Teorema 1.4.2. *(Hausdorff-Young). Sea $1 \leq p \leq 2$ y p' el exponente conjugado de p. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^{p'} < \infty$. Más precisamente, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \|f\|_{L^p}$.*

Demostración. El mapeo T tal que $f \mapsto \left(\hat{f}(n)\right)$ es una transformación lineal de funciones en el espacio de medida $(\mathbb{T}, dt)$ a funciones en $(\mathbb{Z}, dn)$, donde dn denota la medida de contar. Sabemos que la norma de este mapeo cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}\|Tf\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)e^{-2\pi int}|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt \\ &= \|f\|_1.\end{aligned}$$

Más aún, es bien sabido que existe una isometría de $L^2(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{Z}) = \ell^2$ dada a través de los coeficientes de Fourier.

Así, se sigue del Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin que

$$\|Tf\|_{p'} \leq \|f\|_p$$

puesto que $\|Tf\|_\infty \leq 1 \cdot \|f\|_1$ y $\|Tf\|_2 = 1 \cdot \|f\|_2$. ■

De manera completamente análoga podemos probar lo siguiente.

Teorema 1.4.3. *Sea* $1 \leq p \leq 2$ *y* p' *el exponente conjugado. Si* $(a_n) \in \ell^p$ *entonces existe una función* $f \in L^{p'}(\mathbb{T})$ *tal que* $a_n = \hat{f}(n)$. *Más aún,* $\|f\|_{L^{p'}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$.

Capítulo 2

Núcleos reproductores

En el presente capítulo nos apoyamos de la literatura sobre espacios funcionales de Hilbert estudiada por Agler and McCarthy [1] para hablar sobre núcleos reproductores.

Primeramente estimamos los núcleos en algunos casos particulares tales como el espacio de Hardy H^2 que hemos visto en el capítulo anterior, el espacio de Bergman y el espacio de Dirichlet, los cuales describimos más adelante.

Para finalizar, encontramos las fórmulas reproductoras que nos permiten representar a las funciones en términos de sus núcleos reproductores en los espacios mencionados previamente.

2.1. Espacio funcional de Hilbert

Definición 2.1.1. *Un espacio funcional de Hilbert es un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones en algún conjunto X tal que el funcional de evaluación en cada punto de X es un funcional continuo no cero en $\mathcal{H}$.*

2.1.1. Núcleos reproductores

Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio funcional de Hilbert en X. Para cada punto $z \in X$ la evaluación en z es un funcional continuo. Luego, gracias al Teorema de Representación de Riesz sabemos que existe una única función $k_z \in \mathcal{H}$ con la propiedad

$$(f, k_z) = f(z), \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

La función k_z se llama *núcleo reproductor en z*, porque reproduce el valor de una función en z, y a esta relación se le conoce como *propiedad reproductora.* Dado que k_z yace en $\mathcal{H}$, es en sí una función definida en X y por tanto para cada $w \in X$,

$$k_z(w) = (k_z, k_w).$$

Finalmente, definimos la función $K : X \times X \to \mathbb{C}$ como

$$K(w, z) := k_z(w) = (k_z, k_w)$$

y le llamamos *núcleo reproductor de $\mathcal{H}$*. Distinguiremos ahora algunas propiedades de este núcleo.

Proposición 2.1.2. *Para todo par de puntos $w, z \in X$ se cumple que $K(w, z) = \overline{K(z, w)}$.*

Demostración.

$$K(w, z) = (k_z, k_w) = \overline{\left(\overline{(k_z, k_w)}\right)} = \overline{(k_w, k_z)} = \overline{K(z, w)}.$$

■

Proposición 2.1.3. *Si $\mathcal{H}$ es un espacio de funciones analíticas, K es analítica en la primera componente y analítica conjugada en la segunda.*

Demostración. Este resultado se sigue del hecho de que ambas funciones se encuentren en $\mathcal{H}$, pues

$$K(\cdot, z) = k_z(\cdot) \in \mathcal{H},$$

por lo que K es analítica en la primera entrada. Por otro lado, la proposición anterior nos implica que

$$\overline{K(w, \cdot)} = K(\cdot, w) = k_w(\cdot) \in \mathcal{H},$$

y por tanto es analítica conjugada en la segunda entrada. ■

El siguiente resultado nos ayudará a representar de manera más explícita los núcleos de diversos espacios.

Proposición 2.1.4. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio funcional de Hilbert sobre X y sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces $K(w,z) = \sum\limits_{i\in I} \overline{e_i(z)}e_i(w)$.*

Demostración. Se sigue de la identidad de Parseval:

$$\begin{aligned}
K(w,z) &= (k_z, k_w) \\
&= \sum_{i\in I} (k_z, e_i)\overline{(k_w, e_i)} \\
&= \sum_{i\in I} \overline{(e_i, k_z)}(e_i, k_w) \\
&= \sum_{i\in I} \overline{e_i(z)}e_i(w).
\end{aligned}$$

■

2.1.2. Algunos ejemplos

Enseguida, haremos uso del resultado 2.1.4 para estimar los núcleos reproductores de algunos de los espacios funcionales de Hilbert más relevantes.

- **Espacio de Hardy H^2**

  Para encontrar una representación del núcleo reproductor de este espacio consideremos la colección $(z^n)_{n\geq 0}$, la cual es una base ortonormal de H^2. En efecto, dicha colección es ortonormal pues representando a z^n y z^m en series de potencias, tenemos

  $$z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k,n} z^k \qquad \text{y} \qquad z^m = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k,m} z^k$$

  por lo que

  $$(z^n, z^m)_{H^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k,n}\overline{\delta_{k,m}} = \delta_{n,m}.$$

  Ahora, para ver que la colección es completa, tomemos $f \in H^2$ con serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ tal que $(f, z^n) = 0$ $\forall n \geq 0$. Entonces,

  $$0 = (f, z^n) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z^k, z^n) = a_n, \ \forall n \geq 0$$

  lo que implica que $f = 0$.

Usamos así esta base y la Prop. 2.1.4 para calcular el núcleo reproductor de H^2:

$$\begin{aligned} K_{H^2}(w,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z^n} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{z}w)^n \\ &= \frac{1}{1-\overline{z}w}. \end{aligned}$$

A este núcleo se le conoce como *núcleo de Szegö.*

- **Espacio de Bergman** $L_a^2(\mathbb{D})$
  Definimos el espacio de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ de la siguiente manera

$$L_a^2(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ es analítica}, \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dz < \infty \right\}$$

donde la integral es respecto a la medida de Lebesgue bidimensional. Si η es la medida de Lebesgue en $\mathbb{D}$, es claro que $L_a^2(\mathbb{D}) \subset L^2(\eta)$, y así $L_a^2(\mathbb{D})$ hereda de manera natural el producto interno y la norma de $L^2(\eta)$:

$$(f,g)_{L_a^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} dz.$$

En este caso, la colección $\left(\sqrt{n+1} z^n\right)_{n \geq 0}$ forma una base ortonormal para $L_a^2(\mathbb{D})$.

En efecto, consideremos las funciones

$$f_n(z) = \sqrt{n+1} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{y} \quad f_m(z) = \sqrt{m+1} z^m = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

donde $a_k = \sqrt{k+1}\delta_{k,n}$ y $b_k = \sqrt{k+1}\delta_{k,m}$ para cada $k \geq 0$.

Entonces,

$$\begin{aligned} (f_n, f_m)_{L_a^2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \overline{b_j} r^j e^{-ij\theta} \right) r d\theta dr \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_k \overline{b_j} r^{k+j+1} e^{i(k-j)\theta} d\theta dr \\ &= 2 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_k \overline{b_j} r^{k+j+1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)\theta} d\theta \right] dr \\ &= 2 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_k} r^{2k+1} dr = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_k} \int_0^1 2r^{2k+1} dr \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \overline{b_k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}\delta_{k,n}\overline{\sqrt{k+1}\delta_{k,m}}}{k+1} \\
&= \delta_{n,m}.
\end{aligned}
$$

Así, la colección es ortonormal. Veamos ahora que es completa. Sea $f \in L_a^2(\mathbb{D})$ con $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, tal que $(f, \sqrt{n+1}z^n) = 0 \ \forall n \geq 0$. Entonces, para toda n se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 = (f, \sqrt{n+1}z^n) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \sqrt{n+1}z^n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k+1}} \left(\sqrt{k+1}z^k, \sqrt{n+1}z^n \right) = \frac{a_n}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}
$$

por lo que necesariamente $f = 0$.

Usando esta base para calcular el núcleo de $L_a^2(\mathbb{D})$ tenemos

$$
\begin{aligned}
K_{L_a^2}(w,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\sqrt{n+1}z^n}\sqrt{n+1}w^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\overline{z}w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)y^n
\end{aligned}
$$

donde $y = \overline{z}w \in \mathbb{D}$. Esta serie describe una función analítica, por lo que podemos integrar en su dominio de convergencia término a término, obteniendo que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y^{n+1} = \frac{y}{1-y}$ es antiderivada de $K_{L_a^2}(w,z)$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
K_{L_a^2}(w,z) &= \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{1-y} \right) = \frac{1}{(1-y)^2} \\
&= \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}.
\end{aligned}
$$

Llamamos a éste el *núcleo de Bergman.*

- **Espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$**

  Definimos el espacio de Dirichlet como el de todas las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ tales que su función derivada f' está en el espacio de Bergman, esto es,

$$
\mathcal{D} = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ es analítica}, f' \in L_a^2(\mathbb{D}) \right\}.
$$

Dotamos a dicho espacio con el producto interior $(f,g)_{\mathcal{D}} := (f,g)_{H^2} + (f',g')_{L^2_a}$ para $f,g \in \mathcal{D}$. Observemos que el segundo sumando tiene sentido pues $f',g' \in L^2_a$. Para notar que el primer sumando tiene sentido en H^2, basta hacer calculos similares a los vistos al desarrollar el producto interior en el espacio de Bergman.

Notemos que $\left(\frac{z^n}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\geq 0}$ es una base ortonormal de $\mathcal{D}$. En efecto, sean

$$f_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{y} \quad f_m(z) = \frac{z^m}{\sqrt{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

donde $a_k = \frac{\delta_{k,n}}{\sqrt{k+1}}$ y $b_k = \frac{\delta_{k,m}}{\sqrt{k+1}}$ para cada $k \geq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(f_n, f_m)_{\mathcal{D}} &= (f_n, f_m)_{H^2} + (f_n', f_m')_{L^2_a} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_k} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \overline{b_{k+1}} \\
&= a_0 \overline{b_0} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k \overline{b_k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k \overline{b_k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\delta_{k,n}}{\sqrt{k+1}} \overline{\frac{\delta_{k,m}}{\sqrt{k+1}}} \\
&= \delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto es ortonormal. Para ver que es completo consideremos $f \in \mathcal{D}$, donde $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ es tal que $\left(f, \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}\right) = 0$ para todo $n \geq 0$. Así,

$$\begin{aligned}
0 = \left(f, \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}\right) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sqrt{k+1} \left(\frac{z^k}{\sqrt{k+1}}, \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}\right) = a_n \sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, $f = 0$.

Así, al calcular el núcleo de $\mathcal{D}$ con dicha base, obtenemos

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{D}}(w,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{\sqrt{n+1}} \frac{w^n}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{z}w)^n}{n+1}. \end{aligned}$$

Expresaremos esto de otra manera, recordando que si $|y| < 1$ tenemos que

$$\log(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n$$

por lo que

$$\log(1-y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} y^n.$$

Luego

$$-\frac{1}{y}\log(1-y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}.$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$K_{\mathcal{D}}(w,z) = -\frac{1}{\overline{z}w}\log(1-\overline{z}w).$$

2.1.3. Fórmulas reproductoras

Como mencionamos al inicio de la sección, en cada espacio funcional de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre X tenemos la propiedad reproductora

$$f(z) = (f, k_z), \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

donde k_z es el núcleo reproductor en z.

Así, para los espacios que presentamos anteriormente podemos obtener las siguientes *fórmulas reproductoras* utilizando los núcleos calculados.

- **Espacio de Hardy H^2**

  Sea $f \in H^2$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) = (f, k_z)_{H^2} &= \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) \overline{k_z(re^{i\theta})} d\theta \right) \\ &= \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) \overline{K(re^{i\theta}, z)} d\theta \right) \\ &= \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) \left(\frac{1}{1 - zre^{-i\theta}} \right) d\theta \right). \end{aligned}$$

- **Espacio de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$**

  Sea $f \in L^2_a(\mathbb{D})$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) = (f, k_z)_{L^2_a} &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(w) \overline{k_z(w)} dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(w) \overline{K(w, z)} dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\frac{1}{(1 - z\overline{w})^2} \right) dw. \end{aligned}$$

- **Espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$**

  Sea $f \in \mathcal{D}$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= (f, k_z)_{\mathcal{D}} = (f, k_z)_{H^2} + (f', k_z')_{L^2_a} \\ &= \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) \overline{k_z(re^{i\theta})} d\theta \right) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f'(w) \overline{k_z'(w)} dw \\ &= \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) \overline{K(re^{i\theta}, z)} d\theta \right) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f'(w) \overline{K'(w, z)} dw \\ &= \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) \left(-\frac{1}{zre^{-i\theta}} \overline{log(1 - \overline{z}re^{i\theta})} \right) d\theta \right) \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f'(w) \left(\overline{\left(\frac{log(1 - \overline{z}w)}{\overline{z}w^2} \right)} + \frac{1}{\overline{w}(1 - z\overline{w})} \right) dw. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Espacios ℓ^p_A

En el presente capítulo estudiaremos los espacios de funciones ℓ^p_A de acuerdo con el artículo de Cheng et al. [5], examinando en la primera sección algunas propiedades básicas de estos espacios tales como su completitud.

En la segunda sección trabajamos con los funcionales de evaluación en ℓ^p_A y encontramos su relación con el núcleo reproductor del espacio, el cual tiene gran relevancia como pudimos observar en el capítulo anterior.

Para la siguiente sección nos apoyamos de la literatura de Katzneltson [14] para abordar la relación que se tiene con los espacios de Hardy estudiados en el Capítulo 1, los cuales nos serán de gran utilidad al momento de analizar el comportamiento frontera de las funciones en ℓ^p_A cuando $p \in [1, 2]$.

Asimismo, se estudiará en la última sección el comportamiento frontera para el caso en que $p \in (2, \infty)$, para el cual nos remitimos a Duren [9].

3.1. Propiedades básicas de ℓ^p_A

Para $p \in [1, \infty)$ definimos ℓ^p como el conjunto de sucesiones de números complejos

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$$

para las cuales se tiene que

$$\|\mathbf{a}\|_p := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Es fácil ver que $a \mapsto \|\mathbf{a}\|_p$ define una norma en ℓ^p que hace de ℓ^p un espacio de Banach con la métrica inducida por la norma $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_p$.

Más aún, debido a la desigualdad de Hölder, sabemos que $(\ell^p)^*$, el espacio dual de ℓ^p, es isométricamente isomorfo a $\ell^{p'}$, donde p' denota el exponente conjugado de p, esto es, p' es tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{3.1}$$

y la dualidad está dada por

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k, \quad \mathbf{a} \in \ell^p, \mathbf{b} \in \ell^{p'}. \tag{3.2}$$

En el caso en que $p = 1$, tenemos que $p' = \infty$ y el espacio dual $(\ell^1)^*$ es isométricamente isomorfo a ℓ^∞, donde la norma está dada por

$$\|\mathbf{b}\|_\infty := \sup\{|b_k|\}_{k=0}^{\infty}.$$

Para una sucesión $\mathbf{a} \in \ell^p$ denotamos por $a(z)$ a la serie de potencias cuyos coeficientes de Taylor son las componentes de $\mathbf{a}$, esto es,

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{3.3}$$

Cuando $p \in (1, \infty)$, por la desigualdad de Hölder vemos que para cualquier $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z|^k \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |z|^{kp'}\right)^{1/p'} = \|\mathbf{a}\|_p \left(\frac{1}{1 - |z|^{p'}}\right)^{1/p'}.$$

Esto implica que la serie de potencias usada para definir la función a en (3.3) determina una función analítica en $\mathbb{D}$, puesto que dicha serie converge uniformemente en compactos del disco unitario.

En efecto, sea $|z| \leq r < 1$. Como $\mathbf{a} \in \ell^p$ sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\left(\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^p\right)^{1/p} < \epsilon(1 - r^{p'})^{1/p'}.$$

Luego, tenemos que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k||z|^k \leq \left(\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^p\right)^{1/p} \frac{1}{(1 - r^{p'})^{1/p'}} < \epsilon,$$

como queríamos probar.

Estos resultados nos permiten ahora establecer la siguiente definición.

Definición 3.1.1. *Para* $p \in [1, \infty)$ *definimos el espacio de funciones analíticas con coeficientes de Taylor en* ℓ^p *de la siguiente manera*

$$\ell^p_A := \left\{ a : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \mathbf{a} \in \ell^p \right\}.$$

Dotando a cada $a \in \ell^p_A$ con la norma $\|a\|_{\ell^p_A} = \|\mathbf{a}\|_p$, notamos que ℓ^p_A constituye un espacio de Banach de funciones analíticas en $\mathbb{D}$.

Proposición 3.1.2. *Sea* $p \in [1, \infty)$. *Entonces el espacio* (ℓ^p_A, d) *es un espacio de Banach donde* d *es la métrica inducida por la norma* $\|\cdot\|_{\ell^p_A}$.

Demostración. En efecto, para ver que ℓ^p_A es completo con la métrica $d(a, b) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_p$ tomemos una sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^p_A$, donde

$$a_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k.$$

Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > N$

$$d(a_m, a_n) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}|^p\right)^{1/p} < \epsilon,$$

esto implica que la sucesión $\left(\mathbf{a}^{(n)}\right)_{n\geq 0} = \left(\left(a_k^{(n)}\right)_{k\geq 0}\right)_{n\geq 0}$ es de Cauchy en ℓ^p, y como ℓ^p es completo, existe una sucesión $\mathbf{a} \in \ell^p$ a la cual converge.

Así, definimos

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

la cual se encuentra claramente en ℓ_A^p pues $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 0}$ está en ℓ^p. Además,

$$d(a_n, a) = \|\mathbf{a}^{(n)} - \mathbf{a}\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

por lo que

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

en ℓ_A^p, y por tanto, ℓ_A^p es completo. ∎

Ahora bien, por estimaciones previas tenemos que para cada $z \in \mathbb{D}$ y $a \in \ell_A^p$ se cumple

$$|a(z)| \leq \|\mathbf{a}\|_p \left(\frac{1}{1-|z|^{p'}}\right)^{1/p'}. \tag{3.4}$$

De manera similar, cuando $p = 1$ podemos estimar

$$|a(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z|^k \leq \|\mathbf{a}\|_1.$$

Así, si una sucesión de funciones converge en la norma de ℓ_A^p entonces converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. De hecho, hemos probado que las funciones en ℓ_A^1 son acotadas.

El siguiente resultado nos será de utilidad más adelante.

Proposición 3.1.3. *Sea* $p \in [1, \infty)$*. Si* $a \in \ell_A^p$ *con* $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$*, entonces*

$$\left\| a - \sum_{k=0}^{K} a_k z^k \right\|_p \to 0$$

cuando $K \to \infty$*.*

Demostración. Como $a \in \ell_A^p$, tenemos que $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 0} \in \ell^p$, por lo que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} < \epsilon$$

para todo $n > N$.

Luego, para $\epsilon > 0$ se tiene

$$\left\| a - \sum_{k=0}^{K} a_k z^k \right\|_p = \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} a_k z^k \right\|_p = \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} < \epsilon$$

si $K \geq N$. ■

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Corolario 3.1.4. *Si* $p \in [1, \infty)$, *entonces los polinomios analíticos son densos en* ℓ_A^p.

El álgebra de Wiener ℓ_A^1 es un caso especial de los espacios ℓ_A^p. Recordemos que $\ell^1 \subset \ell^p$ para todo $p \in [1, \infty)$. Más aún, para $a \in \ell_A^1$, la serie de Taylor converge uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$.

En efecto, como $a \in \ell_A^1$, podemos escribir

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

donde $\mathbf{a} = (a_k)_{k \geq 0} \in \ell^1$.

Luego, se tiene que para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon.$$

Si $z \in \overline{\mathbb{D}}$ entonces $|z| \leq 1$, y en consecuencia

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k||z|^k \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon.$$

Así, ℓ_A^1 está contenido en $C(\overline{\mathbb{D}})$, las funciones continuas en $\overline{\mathbb{D}}$. Enfoquémonos ahora en por qué es llamada *álgebra* de Wiener.

Para dos sucesiones $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, la convolución $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ es la sucesión

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)_{n \geq 0}.$$

Multiplicando los coeficientes de la serie de Taylor, notemos que $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ corresponde vía (3.3) al producto puntual $a(z)b(z)$ de las funciones a y b dadas por

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{y} \quad b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Además podemos ver que para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell^1$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} * \mathbf{b}\|_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \\ &= \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1, \end{aligned}$$

esto es,

$$\|\mathbf{a} * \mathbf{b}\|_1 \leq \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1, \tag{3.5}$$

lo cual muestra que ℓ^1 es un álgebra de convolución (es decir, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell^1 \Rightarrow \mathbf{a} * \mathbf{b} \in \ell^1$).

Ahora, por la correspondencia entre convolución de sucesiones y multiplicación de series de potencias, vemos que ℓ_A^1 es un álgebra de funciones (es decir, $a, b \in \ell_A^1 \Rightarrow ab \in \ell_A^1$).

3.2. Funcionales de evaluación

Para cada $w \in \mathbb{D}$ definimos el funcional de evaluación

$$\Lambda_w : \ell_A^p \to \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad \Lambda_w(a) = a(w).$$

Gracias a la estimación obtenida en (3.4) tenemos que

$$|\Lambda_w(a)| \leq \|\mathbf{a}\|_p \left(\frac{1}{1 - |w|^{p'}} \right)^{1/p'}$$

de donde deducimos que Λ_w es continuo, y podemos incluso calcular su norma

$$\|\Lambda_w\| = \sup \left\{ |a(w)| : a \in \ell_A^p, \ \|a\|_{\ell_A^p} \leq 1 \right\}.$$

Proposición 3.2.1. *Sea* $p \in [1,\infty)$. *Para cada* $w \in \mathbb{D}$,

$$\|\Lambda_w\| = \left(\frac{1}{1-|w|^{p'}}\right)^{1/p'}, \quad si\ p \in (1,\infty)$$

y

$$\|\Lambda_w\| = 1, \quad si\ p = 1.$$

Demostración. De (3.4) tenemos que

$$\|\Lambda_w\| = \sup\left\{|a(w)| : a \in \ell^p_A,\ \|a\|_{\ell^p_A} \leq 1\right\} \leq \frac{1}{(1-|w|^{p'})^{1/p'}}. \tag{3.6}$$

Para $p \in (1,\infty)$ fijo, consideremos la siguiente función

$$f(z) = \frac{1}{1-|w|^{p'-2}\overline{w}z} = \sum_{n=0}^{\infty}(|w|^{p'-2}\overline{w})^n z^n$$

y observemos que

$$\begin{aligned}\Lambda_w f &= f(w) \\ &= \frac{1}{1-|w|^{p'-2}\overline{w}w} \\ &= \frac{1}{1-|w|^{p'}}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{\ell^p_A} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left||w|^{p'-2}\overline{w}\right|^{pn} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|w|^{(p'-1)pn} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|w|^{p'n} \\ &= \frac{1}{1-|w|^{p'}}.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\Lambda_w\| &\geq \frac{|\Lambda_w f|}{\|f\|_{\ell^p_A}}\\ &= \frac{\frac{1}{1-|w|^{p'}}}{\frac{1}{(1-|w|^{p'})^{1/p}}}\\ &= \frac{1}{(1-|w|^{p'})^{1/p'}},\end{aligned}$$

esto es,

$$\|\Lambda_w\| \geq \frac{1}{(1-|w|^{p'})^{1/p'}}. \tag{3.7}$$

Finalmente, comparando (3.6) y (3.7) deducimos que

$$\|\Lambda_w\| = \frac{1}{(1-|w|^{p'})^{1/p'}}. \tag{3.8}$$

En el caso en que $p = 1$, primeramente tenemos que

$$|\Lambda_w(a)| = |a(w)| \leq \|a\|_{\ell^1_A}$$

por lo que

$$\|\Lambda_w\| = \sup\left\{|a(w)| : a \in \ell^1_A,\ \|a\|_{\ell^1_A} \leq 1\right\} \leq 1.$$

Para obtener la otra desigualdad tomemos la función

$$f(z) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,0} z^n$$

para la cual $|\Lambda_w f| = |f(z)| = 1$ y $\|f\|_{\ell^1_A} = 1$. Entonces,

$$\|\Lambda_w\| \geq \frac{|\Lambda_w f|}{\|f\|_{\ell^1_A}} = 1.$$

De este modo, $\|\Lambda_w\| = 1$. ■

Por la manera en que identificamos los espacios ℓ^p_A con ℓ^p, vemos que debido a (3.2) podemos identificar el dual normado de ℓ^p_A de manera isométrica con $\ell^{p'}_A$ por medio del emparejamiento bilineal

$$(a,b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k, \quad a \in \ell_A^p, \ b \in \ell_A^{p'}.$$

Como esta serie converge absolutamente, tenemos en virtud del Teorema de Convergencia Dominada que

$$(a,b) = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k r^{2k}.$$

En efecto, para $r \in [0,1)$ consideremos las funciones $f_r, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ tales que para cada $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} f_r(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n r^{2n} \chi_{\{n\}}(k), \\ f(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \chi_{\{n\}}(k), \end{aligned}$$

donde $\chi_{\{n\}}$ denota la función característica en el conjunto $\{n\}$. Es claro que $|f_r| \leq |f|$, y para cada $k \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\lim_{r\to 1^-} f_r(k) = f(k).$$

Así, aplicando el Teorema de Convergencia Dominada, tenemos que

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k r^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$$

como queríamos probar.

Ahora, como

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\theta = \delta_{k,0}$$

podemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(re^{i\theta}) b(re^{-i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (re^{i\theta})^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n (re^{-i\theta})^n d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{-i\theta n} d\theta \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k r^{2k}.$$

De aquí que podemos escribir (a,b) como

$$(a,b) = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(re^{i\theta}) b(re^{-i\theta}) d\theta.$$

A continuación daremos otra interpretación del funcional Λ_w utilizando la noción de dualidad.

Para $w \in \mathbb{D}$ fijo, definimos la función

$$k_w(z) := \sum_{n=0}^{\infty} w^n z^n. \tag{3.9}$$

Claramente $k_w \in \ell_A^{p'}$ y para $a \in \ell_A^p$ tenemos que

$$\begin{aligned} \Lambda_w(a) &= a(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \\ &= (a, k_w). \end{aligned}$$

En otras palabras, k_w hace el papel de un núcleo reproductor, de acuerdo a lo estudiado en el capítulo anterior.

3.3. Relación con espacios de Hardy

Recordemos que para $p \in [1, \infty)$ el espacio de Hardy H^p es el espacio de funciones analíticas f en el disco unitario $\mathbb{D}$ para las cuales se tiene que

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

Además, cuando $p = \infty$, H^∞ denota el espacio de funciones analíticas acotadas en $\mathbb{D}$. Como vimos antes, existe un resultado sobre H^p (Teorema 1.2.7) que nos asegura la existencia de los límites radiales

$$f(e^{i\theta}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$$

para casi todo $\theta \in [-\pi, \pi]$, así como la pertenencia de la función frontera a $L^p(\mathbb{T}, d\theta)$, donde $\|f\|_{H^p} = \|f(e^{i\theta})\|_{L^p}$. De hecho, el Teorema de Fatou 1.0.1 nos da la existencia de los límites no tangenciales para casi todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Cabe destacar que existen funciones analíticas en el disco unitario, para las cuales se tiene que los límites radiales no existen en ningún punto de su frontera (Véase [3]):

Ejemplo 3.3.1. *La función* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ *es analítica en* $\mathbb{D}$*, pero no tiene límites radiales en ningún punto de su frontera.*

En el caso $p = 2$, el espacio H^2 puede describirse también como el espacio de funciones analíticas en $\mathbb{D}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

para las cuales se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

Por medio de la identidad de Parseval que nos dice que en un espacio de Hilbert separable se tiene

$$\|g\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

donde c_n son los coeficientes de Fourier de g, vemos que

$$\|f\|_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$$

y en consecuencia, tenemos que $\ell_A^2 = H^2$ con normas iguales, por lo que ℓ_A^2 es un espacio de Hilbert.

Como consecuencia del Teorema de Hausdorff-Young 1.4.2 visto en el Capítulo 1, podemos probar lo siguiente.

Teorema 3.3.2. *Sea* $p \in [1,2]$. *Si* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p$, *entonces* $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^{p'}$ *y* $\|(a_n)_{n\geq 0}\|_{p'} \leq \|f\|_{H^p}$. *Inversamente, si* $(a_n)_{n\geq 0}$ *es cualquier sucesión en* ℓ^p, *entonces* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^{p'}$ *y* $\|f\|_{H^{p'}} \leq \|(a_n)_{n\geq 0}\|_p$.

Demostración. La primera afirmación se sigue fácilmente del Teorema 1.4.2. En efecto, si $f \in H^p$, entonces el límite radial $f(e^{i\theta})$ está en L^p y $(a_n)_{n\geq 0}$ es su sucesión de coeficientes de Fourier, por lo que $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^{p'}$ y

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \|f\|_{H^p}.$$

Por otro lado, si $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$, entonces $f \in H^2$ y los elementos a_n son los coeficientes de Fourier de $f(e^{i\theta})$, así por el Teorema 1.4.3 se tiene que $f(e^{i\theta}) \in L^{p'}$, lo que implica $f \in H^{p'}$ y

$$\|f\|_{H^{p'}} \leq \|(a_n)_{n\geq 0}\|_p,$$

como consecuencia del Corolario 1.3.3. ∎

De este modo, las desigualdades de Hausdorff-Young que acabamos de probar, nos muestran que para $p \in [1,2]$, se tiene que $H^p \subset \ell^{p'}_A$ con

$$\|a\|_{\ell^{p'}_A} = \|\mathbf{a}\|_{p'} \leq \|a\|_{H^p}, \quad a \in H^p.$$

Por otro lado, cuando $p \in [1,2]$ también tenemos que $\ell^p_A \subset H^{p'}$ pues

$$\|a\|_{H^{p'}} \leq \|\mathbf{a}\|_p = \|a\|_{\ell^p_A}, \quad a \in \ell^p_A.$$

Así, podemos decir que si $a \in \ell^p_A$ para $p \in [1,2]$, entonces la función a tiene límites radiales casi en todas partes, a diferencia del caso en que $p \in (2,\infty)$, como veremos más adelante.

3.4. Valores frontera

Continuando con la discusión anterior, veremos que el comportamiento frontera para funciones en ℓ_A^p cuando $p > 2$, es más complicado que para el caso $p \in [1, 2]$, como podremos notar con ayuda del siguiente Teorema de Littlewood.

Proposición 3.4.1. *Supongamos que* $\{a_n\}$ *es una sucesión de números complejos tal que* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$ *y* $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$. *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n a_n z^n$ *donde* $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$. *Entonces hay elecciones de signos* ϵ_n *tales que la función* f *correspondiente carece de límites radiales casi en todo punto en* $\mathbb{T}$.

Demostración. Considerando las funciones $g_n(z) = a_n z^n$ en el Teorema A.0.4, para $|z| \leq \rho < 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \limsup |a_n z^n|^{1/n} &= \limsup |a_n|^{1/n} |z| \\ &\leq \limsup |a_n|^{1/n} \rho \\ &< 1 \end{aligned}$$

por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty.$$

Además

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \xrightarrow[r\to 1]{} \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$$

de donde podemos concluir como antes que para casi toda elección de signos $\{\epsilon_n\}$, la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n a_n z^n$ carece de límites radiales casi en todo punto. ■

Denotamos como antes a la clase Nevanlinna por $\mathcal{N}$. El Teorema 1.2.9 de Riesz y Fatou nos dice que toda función en la clase Nevanlinna tiene límite radial casi en todas partes. Este resultado nos será útil para el siguiente corolario.

Corolario 3.4.2. *Para cada* $p \in (2, \infty)$, *el espacio* ℓ_A^p *no está contenido en* $\mathcal{N}$.

Demostración. Es suficiente elegir cualquier sucesión (a_n) en ℓ^p para la cual $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$.

Por ejemplo, consideremos la sucesión (a_n) tal que

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{2}{p+2}}} \qquad n \geq 1$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{p+2}}} = \infty$$

puesto que $0 < \frac{4}{p+2} < 1$.

Así, por la Proposición 3.4.1 existen elecciones de signos ϵ_n tales que la correspondiente función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n a_n z^n$ carece de límites radiales casi en todo punto de $\mathbb{T}$. Es claro que esta función pertenece a ℓ_A^p puesto que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\epsilon_n a_n|^p = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty,$$

sin embargo, no pertenece a la clase Nevanlinna. ■

Capítulo 4

Multiplicadores de ℓ^p_A

A lo largo de este capítulo estudiaremos los multiplicadores del espacio ℓ^p_A y algunas de sus propiedades más destacables, tomando referencias de los trabajos de Duren [9] y Cheng et al. [5], [7]. Notamos que el caso $p = 2$ es sencillo de estudiar pues estamos trabajando con el espacio de Hardy H^2, cuyos multiplicadores resultan ser las funciones en H^∞. Sin embargo observamos lo difícil que puede ser examinar los multiplicadores en los casos en que $p \neq 2$.

En la primera sección del capítulo hablamos de los operadores de desplazamiento a la derecha, como lo vimos en el Capítulo 1, y de desplazamiento a la izquierda, el cual actúa como adjunto del primero. Además presentamos el operador cociente de diferencias, del cual requeriremos en el Capítulo 5.

La segunda sección introduce los multiplicadores de ℓ^p_A y los describe en los casos $p = 1, 2$, además de estudiar algunas de sus propiedades cuando $p \in (1, \infty)$, y la relación que guardan con los multiplicadores de Fourier.

En la siguiente sección nos preguntamos si es posible representar a las funciones en ℓ^p_A como cociente de dos multiplicadores, dejando la pregunta abierta para el caso $p \in (1, 2)$ y respondiendo para $p \in (2, \infty)$, así como $p = 1, 2$.

Para las siguientes tres secciones estudiamos algunos multiplicadores que poseen características especiales como la isometría, suavidad (en el sentido de analiticidad), y aquellos pertenecientes a ℓ^1_A.

Finalmente, introducimos los multiplicadores de Hadamard y damos una caracterización para dichos operadores.

4.1. Operadores en ℓ^p_A

Definimos el operador de desplazamiento a la derecha $S : \ell^p \to \ell^p$ como $S\mathbf{a} = (0, a_0, a_1, ...)$ y observamos que S es claramente una isometría en ℓ^p.

Denotamos por $[\mathbf{a}]$ al subespacio invariante bajo S generado por el elemento $\mathbf{a} \in \ell^p$, esto es

$$[\mathbf{a}] := \bigvee\{\mathbf{a}, S\mathbf{a}, S^2\mathbf{a}, ...\}$$

donde $\bigvee$ denota la cerradura del espacio lineal generado por el conjunto en ℓ^p. Decimos que un vector es cíclico si $[\mathbf{a}] = \ell^p$.

Además, definimos también el operador de desplazamiento a la izquierda $S^* : \ell^{p'} \to \ell^{p'}$ como $S^*\mathbf{a} = (a_1, a_2, ...)$ y vemos claramente que S^* es una contracción en $\ell^{p'}$.

Para $\mathbf{a} \in \ell^p$ y $\mathbf{b} \in \ell^{p'}$ tenemos que

$$(S\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{k+1} = (\mathbf{a}, S^*\mathbf{b})$$

por lo que podemos decir que S^* actúa como el operador adjunto de S.

Volviendo ahora al espacio ℓ^p_A, podemos ver al operador de desplazamiento S como el operador

$$a(z) \mapsto za(z)$$

de multiplicación por la variable independiente z en el espacio de funciones ℓ^p_A puesto que

$$\begin{aligned} S\left(a(z)\right) &= S\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (re^{it})^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{k+1} e^{it(k+1)} \\ &= za(z). \end{aligned}$$

Así, podemos observar que para $a \in \ell^p_A$, el subespacio $[a]$ resulta ser la cerradura en ℓ^p_A del conjuntos de todos los Pa, donde P es un polinomio analítico, esto pues $[a] := \bigvee\{a, Sa, S^2a, ...\} = \bigvee\{a, za, z^2a, ...\}$.

Denotaremos por S tanto al operador de desplazamiento en ℓ^p como al de multiplicación por z en ℓ^p_A. Aplicamos una convención similar para S^*. Por ejemplo, al considerar la definición en (3.9), esto es, $k_w(z) := \sum_{n=0}^{\infty} w^n z^n$, vemos que $S^* k_w = w k_w$.

En ocasiones resulta complicado describir a los espacios S-invariantes de ℓ^p_A, pero en el caso en que $p = 2$ sabemos que $\ell^2_A = H^2$, y gracias al Teorema de Beurling 1.3.7 tenemos que los subespacios invariantes (no triviales) $M \subset \ell^2_A = H^2$ están dados por $M = GH^2 = G\ell^2_A$, donde G es una función interior.

Definimos ahora el operador cociente de diferencias Q_w para $w \in \mathbb{D}$, en el conjunto de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ de la siguiente manera

$$(Q_w f)(z) := \frac{f(z) - f(w)}{z - w}.$$

Proposición 4.1.1. *Sea $p \in (1, \infty)$ y $w \in \mathbb{D}$. Entonces $f \in \ell^p_A$ implica $Q_w f \in \ell^p_A$. Más aún, Q_w es un operador acotado en ℓ^p_A.*

Demostración. Sea $f \in \ell^p_A$ tal que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Si $w = 0$ entonces

$$\begin{aligned} Q_0 f(z) &= \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - a_0}{z} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Así,

$$\|Q_0 f\|_{\ell^p_A} \leq \|f\|_{\ell^p_A},$$

por lo que $Q_0 f \in \ell^p_A$.

Consideremos ahora el caso en que $w \neq 0$. Para éste utilizaremos la identidad

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n+1} w^n \right) z^k.$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{f(z)-f(w)}{z-w} &= \frac{1}{z-w}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z^k-w^k)\right] \\
&= \frac{1}{z-w}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-w)(z^{k-1}+z^{k-2}w+...+zw^{k-2}+w^{k-1})\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z^{k-1}+z^{k-2}w+...+zw^{k-2}+w^{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(z^{k}+z^{k-1}w+...+zw^{k-1}+w^{k}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_{k+1}w^n z^{k-n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n+1}w^n\right) z^k,
\end{aligned}
$$

donde la última expresión se obtiene al reordenar de manera conveniente los términos de las series, lo cual podemos hacer gracias a la convergencia absoluta.
Así, tenemos que cuando $p=1$

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right\|_{\ell^1_A} &= \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n+1}w^n\right)_{k\geq 0}\right\|_1 \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{k+n+1}||w|^n \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\sum_{n=0}^{\infty}|w|^n \\
&\leq \frac{\|f\|_{\ell^1_A}}{1-|w|},
\end{aligned}
$$

mientras para $p=\infty$

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right\|_{\ell^\infty_A} &= \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n+1}w^n\right)_{k\geq 0}\right\|_\infty \\
&= \sup_{k\geq 0}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n+1}w^n\right| \\
&\leq \sup_{k\geq 0}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{k+n+1}||w|^n \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{1-|w|}.
\end{aligned}
$$

Finalmente por el Teorema de Riesz-Thorin 1.4.1, tenemos que para cualquier $p \in (1, \infty)$ el operador Q_w es acotado en ℓ^p_A, más específicamente

$$\|Q_w f\|_{\ell^p_A} \leq \frac{1}{1-|w|}\|f\|_{\ell^p_A}$$

concluyendo así nuestra demostración. ∎

Particularmente, notemos que la expresión en (4.1) nos muestra que Q_0 es el operador de desplazamiento a la izquierda.

De esta manera, podemos decir que siempre es posible dividir por un cero de a y permanecer en ℓ^p_A. Por otro lado, existen espacios de Banach de funciones analíticas contenidos en la clase Nevanlinna (por ejemplo las clases H^p) en los cuales es posible dividir por cualquier factor interior y permanecer en el espacio. Más aún, si G es interior (véase Capítulo 1) entonces

$$Gf \in H^p \Rightarrow f \in H^p.$$

Como vimos antes, ℓ^p_A está contenido en $H^{p'}$ para $p \in (1,2)$, sin embargo la propiedad análoga para ℓ^p_A no siempre se cumple, como veremos en la siguiente sección.

4.2. Multiplicadores

Definiremos ahora lo que es un *multiplicador* de ℓ^p_A, así como algunas de sus propiedades de mayor interés para nosotros.

Definición 4.2.1. *Sea φ una función analítica en $\mathbb{D}$. Decimos que φ es un multiplicador de ℓ^p_A si se cumple que*

$$f \in \ell^p_A \Rightarrow \varphi f \in \ell^p_A,$$

y denotamos por $\mathcal{M}_p$ al conjunto de multiplicadores de ℓ^p_A.

Nótese que la función $f \equiv 1$ está en ℓ^p_A, por lo que $\mathcal{M}_p \subset \ell^p_A$. Para la demostración del siguiente resultado haremos uso de una de las formulaciones del bien conocido *Teorema de la Gráfica Cerrada* que enuncia lo siguiente.

Teorema 4.2.2. *Sean X y Y espacios de Banach, y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es un operador lineal acotado si y sólo si siempre que una sucesión*

$(x_n)_{n\geq 0} \subset X$ converja a $0 \in X$ y la sucesión $(T(x_n))_{n\geq 0} \subset Y$ converja a $y \in Y$ se tiene que $y = 0$.

Proposición 4.2.3. *Sea $\varphi \in \mathcal{M}_p$. Entonces el operador $M_\varphi : \ell^p_A \to \ell^p_A$ tal que $M_\varphi f = \varphi f$ es un operador continuo.*

Demostración. Sean $(f_n)_{n\geq 0} \subset \ell^p_A$, y $g \in \ell^p_A$ funciones tales que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{y} \qquad \varphi f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g.$$

Veremos que $g = 0$, y consecuentemente el Teorema de la Gráfica Cerrada nos dará la continuidad del operador M_φ.

Identificaremos a las funciones en ℓ^p_A con sus isomorfos en ℓ^p de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_n &\longleftrightarrow \mathbf{a}^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k\geq 0}, \\ \varphi &\longleftrightarrow \mathbf{b} = (b_k)_{k\geq 0}, \\ \varphi f_n &\longleftrightarrow \mathbf{c}^{(n)} = (c_k^{(n)})_{k\geq 0}, \\ g &\longleftrightarrow \mathbf{d} = (d_k)_{k\geq 0}. \end{aligned}$$

Así, tenemos las siguientes implicaciones

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad &\Rightarrow \mathbf{a}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ &\Rightarrow a_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ para todo } k \geq 0. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \varphi f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g \quad &\Rightarrow \mathbf{c}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{d} \\ &\Rightarrow c_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} d_k \text{ para todo } k \geq 0. \end{aligned}$$

De este modo, como

$$c_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j}^{(n)}$$

y

$$\sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ para todo } k \geq 0,$$

tenemos que $d_k = 0$ para todo $k \geq 0$, esto es, $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ y en consecuencia $g = 0$, como queríamos probar. ■

Definamos ahora la norma del multiplicador φ como sigue

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}_p} := \sup\{\|\varphi f\|_{\ell^p_A} : f \in \ell^p_A, \|f\|_{\ell^p_A} \leq 1\}.$$

En otras palabras, la norma del multiplicador φ coincide con la norma del operador M_φ en ℓ^p_A.

Proposición 4.2.4. *Sea $p \in (1, \infty)$. Si $\varphi \in \mathcal{M}_p$, entonces φ es una función acotada y* $\sup\{|\varphi(z)| : z \in \mathbb{D}\} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p}$.

Demostración. Como $\varphi \in \mathcal{M}_p$, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ la función φ^n también está en $\mathcal{M}_p$. Así, para cada $z \in \mathbb{D}$, podemos usar (3.6) para ver que se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} |\varphi(z)|^n &= |\Lambda_z \varphi^n| \\ &\leq \frac{\|\varphi^n\|_{\ell^p_A}}{(1-|z|^{p'})^{1/p'}} \\ &= \frac{\|M^n_\varphi(\mathbf{1})\|_{\ell^p_A}}{(1-|z|^{p'})^{1/p'}} \\ &\leq \frac{\|\varphi\|^n_{\mathcal{M}_p}}{(1-|z|^{p'})^{1/p'}}. \end{aligned}$$

Tomando raíz n-ésima y haciendo $n \to \infty$ se tiene la desigualdad deseada. ■

Gracias a este último resultado, podemos ver que para cada $p \in (1, \infty)$ se tiene la contención $\mathcal{M}_p \subset H^\infty \cap \ell^p_A$.

Cuando $p = 1$ la desigualdad en (3.5) nos asegura que ℓ^1_A coincide con el álgebra de multiplicadores en ℓ^1_A.

En efecto, si $\varphi, f \in \ell^1_A$ tienen isomorfos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell^1$ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}\|\varphi f\|_{\ell^1_A} &= \|\mathbf{a} * \mathbf{b}\|_1 \\ &\leq \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1 \\ &= \|\varphi\|_{\ell^1_A} \|f\|_{\ell^1_A} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

por lo tanto, φ es un multiplicador de ℓ^1_A, de modo que $\mathcal{M}_1 = \ell^1_A$.

Cuando $p = 2$, usamos el hecho de que ℓ^2_A es el espacio de Hardy H^2 para mostrar que $H^\infty \subset \mathcal{M}_2$. En efecto, tomemos $\varphi \in H^\infty$ entonces para $f \in \ell^2_A = H^2_A$ tenemos

$$\begin{aligned}\|\varphi f\|_{\ell^2_A} &= \|\varphi f\|_{H^2} \\ &= \sup_{0\leq r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi f(re^{it})|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \sup_{0\leq r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{it})|^2 |f(re^{it})|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \|\varphi\|_{H^\infty} \|f\|_{H^2}\end{aligned}$$

de donde concluimos que $\mathcal{M}_2 = H^\infty$.

Aunque no se discutirá aquí, existen resultados (véase [5]) que nos permiten mostrar que para $p \neq 1, 2$ se tiene que $\mathcal{M}_p \subsetneq \ell^p_A \cap H^\infty$.

4.2.1. $\mathcal{M}_p$ como conmutador

Es claro que $\varphi(z) = z$ es un multiplicador de ℓ^p_A. De hecho, podemos ver que $M_z = S$, el cual es un operador isométrico, como vimos al inicio del capítulo. Más aún, podemos observar que para todo $\varphi \in \mathcal{M}_p$ se tiene que $M_\varphi S = S M_\varphi$.

Denotamos por $\mathcal{B}(\ell^p_A)$ al conjunto de operadores acotados en ℓ^p_A y definimos el conmutador de S por

$$\{S\}' := \{A \in \mathcal{B}(\ell^p_A) \ : \ AS = SA\}.$$

Entonces, por lo señalado anteriormente, tenemos que $\mathcal{M}_p \subset \{S\}'$. De hecho, podemos decir más.

Proposición 4.2.5. *Para* $p \in [1, \infty)$ *tenemos que* $\{S\}' = \mathcal{M}_p$.

Demostración. Ya vimos que se cumple que $\mathcal{M}_p \subset \{S\}'$. Veamos que se cumple la otra contención.

Supongamos que $A \in \{S\}'$. Para cualquier polinomio analítico P tenemos que

$$A(P(S\mathbf{1})) = P(S)A(\mathbf{1}),$$

lo cual denotaremos por

$$A(P) = PA(\mathbf{1}). \tag{4.2}$$

Esto debido a que

$$\begin{aligned} A(P(S\mathbf{1})) &= A(P(z)) \\ &= P(A(z)), \end{aligned}$$

y por otro lado, debido a la linealidad de A

$$\begin{aligned} P(S)(A(\mathbf{1})) &= P(S(A(\mathbf{1}))) \\ &= P(zA(\mathbf{1})) \\ &= P(A(z)). \end{aligned}$$

Por la densidad de los polinomios en ℓ^p_A (Corolario 3.1.4), tenemos que dado $f \in \ell^p_A$ es posible encontrar una sucesión de polinomios $(P_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f,$$

en la norma de ℓ^p_A. Como las evaluaciones puntuales en $\mathbb{D}$ son continuas en la norma de ℓ^p_A, tal como se demostró en la Proposición 3.2.1, tenemos que

$$P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$$

puntualmente en $\mathbb{D}$.

Luego, como

$$AP_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Af$$

tanto en norma como puntualmente en $\mathbb{D}$, pues A es un operador continuo, se sigue que $Af = A(\mathbf{1})f$, debido a (4.2). Así, $\varphi = A(\mathbf{1}) \in \mathcal{M}_p$ y $A = M_\varphi$. ∎

Ahora daremos una caracterización para $\mathcal{M}_p$ utilizando teoría de operadores. Para esto definimos la matriz infinita (Toeplitz) A asociada a una sucesión de números complejos $(a_n)_{n\geq 0}$ de la siguiente manera

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Proposición 4.2.6. *Supongamos que* $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *es una función analítica en* $\mathbb{D}$. *Entonces* $\varphi \in \mathcal{M}_p$ *si y sólo si la matriz infinita* A *de* (4.3) *define un operador acotado en* ℓ^p. *En este caso* $\|\varphi\|_{\mathcal{M}_p} = \|A\|_{\ell^p \to \ell^p}$.

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \ell^p_A$ con $\mathbf{b} = (b_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$, entonces

$$(\varphi f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Luego $\varphi \in \mathcal{M}_p$ si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right|^p < \infty$.

Por otro lado, si $\mathbf{c} = (c_n)_{n\geq 0}$ vemos que $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ están relacionados mediante la identidad de matrices

$$A\mathbf{b} = \mathbf{c}. \tag{4.4}$$

Así, la función φ es un multiplicador para el espacio ℓ^p_A si y sólo si se tiene la condición

$$\mathbf{b} \in \ell^p \Longleftrightarrow A\mathbf{b} \in \ell^p.$$

Por el Teorema de la Gráfica Cerrada, esto último es equivalente a que $A \in \mathcal{B}(\ell^p)$.

Ahora, para la igualdad de normas, notemos que por (4.4), tenemos que

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{\mathcal{M}_p} &= \sup\{\|\varphi f\|_{\ell^p_A} \ : \ f \in \ell^p_A, \|f\|_{\ell^p_A} \leq 1\} \\ &= \sup\{\|A\mathbf{b}\|_p \ : \ \|\mathbf{b}\|_p \leq 1\} \\ &= \|A\|_{\ell^p \to \ell^p}.\end{aligned}$$

■

Recordemos ahora la relación bilineal que dimos en (3.2)

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \text{ para } \mathbf{a} \in \ell^p \text{ y } \mathbf{b} \in \ell^{p'}.$$

La Proposición 4.2.6 implica la siguiente desigualdad que nos será muy útil más adelante

$$|(A\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p} \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_{p'}, \text{ para } \mathbf{x} \in \ell^p, \mathbf{y} \in \ell^{p'}. \tag{4.5}$$

Proposición 4.2.7. *Para $p \in (1, \infty)$ tenemos $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_{p'}$ con la misma norma de multiplicadores.*

Demostración. Extendamos las definiciones de ℓ^p, S y S^* de $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{Z}$ como sigue

$$\ell^p(\mathbb{Z}) := \left\{ \mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \ : \ \|\mathbf{b}\|_p^p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^p < \infty \right\},$$

$$S : \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z}) \ \text{ tal que } \ S(b_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (b_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}},$$

$$S^* : \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z}) \ \text{ tal que } \ S^*(b_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (b_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Para $p \in (1, \infty)$ consideramos la proyección $P : \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{N}_0)$ definida por

$$P(b_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0},$$

la cual es continua, y de hecho, contractiva.

Si $\varphi \in \mathcal{M}_p$ con

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

y $A : \ell^p(\mathbb{N}_0) \to \ell^p(\mathbb{N}_0)$ es el operador matricial formado de la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$, arreglada como en (4.3), entonces extendemos la definición de dicho operador matricial de $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ a $\ell^p(\mathbb{Z})$ identificando la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ con $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donde $a_n = 0$ para $n < 0$.

Entonces podemos usar el hecho de que los operadores S y S^* son isométricos en $\ell^p(\mathbb{Z})$ y mostrar que para $N \in \mathbb{N}_0$ el operador $(S^*)^N APS^N$, es uniformemente acotado.

En efecto, si $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ entonces

$$\begin{aligned} \|(S^*)^N APS^N(b_n)\| &\leq \|(S^*)^N\|_{\ell^p\to\ell^p}\|A\|_{\ell^p\to\ell^p}\|P\|_{\ell^p\to\ell^p}\|S^N\|_{\ell^p\to\ell^p}\|(b_n)\|_p \\ &= \|(b_n)\|_p\|\varphi\|_{\mathcal{M}_p} \\ &< M_b, \end{aligned}$$

donde M_b es una cota dependiente de la sucesión $\mathbf{b} = (b_n)$. Esto es, el operador es puntualmente acotado, por lo que el Teorema de Banach-Steinhaus nos da el acotamiento uniforme.

Ahora, aplicando el operador $(S^*)^N APS^N$ a la sucesión $(b_n) \in \ell^p(\mathbb{Z})$ tenemos que

$$\begin{aligned} (S^*)^N APS^N(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} &= (S^*)^N AP(b_{n-N})_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= (S^*)^N A(b_{n-N})_{n\in\mathbb{N}_0} \\ &= (S^*)^N \left(\sum_{k=0}^{n-N} a_{n-N-k}b_k\right)_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-N} a_{n-k}b_k\right)_{n\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} (S^*)^N APS^N(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k}b_k\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Llamaremos L a este operador y notamos que de nuevo por Banach-Steinhaus L es continuo. Podemos interpretar esto como que L es la multiplicación por φ haciendo la siguiente identificación

$$\varphi f \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k}b_k.$$

Recordando el emparejamiento dual $(\mathbf{c},\mathbf{d}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k d_k$ para $\mathbf{c} \in \ell^p$, $\mathbf{d} \in \ell^{p'}$ podemos ver que el operador adjunto L^* de L es

$$L^*(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{a}_{n-k} b_k\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

donde $(\tilde{a}_n) = (\dots, a_3, a_2, a_1, a_0, 0, 0, \dots)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(L\mathbf{c},\mathbf{d}) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j a_{k-j}\right) d_k \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k a_{k-j}\right) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k \tilde{a}_{j-k}\right) \\
&= (\mathbf{c}, L^*\mathbf{d}).
\end{aligned}$$

Nuevamente, podemos pensar en L^* como la multiplicación por $\varphi(e^{-it})$ de la siguiente manera

$$\varphi(e^{-it})f \quad \longleftrightarrow \quad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{a}_{n-k} b_k\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Restringiendo L^* a $\ell^{p'}(-\mathbb{N}_0)$ vemos que φ es un multiplicador en $\ell^{p'}_A$. Así, hemos probado que $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_{p'}$.

Podemos utilizar el mismo argumento de manera simétrica para p y p', concluyendo así que $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_{p'}$. Además, esta demostración muestra también que $\|M_\varphi\|_{\ell^p_A\to\ell^p_A} = \|M_\varphi\|_{\ell^{p'}_A\to\ell^{p'}_A}$. ■

Corolario 4.2.8. *Si* $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{M}_p$, *entonces*

i) $\varphi \in \ell^p_A \cap \ell^{p'}_A$.

ii) $\max\{\|\varphi\|_p, \|\varphi\|_{p'}\} \le \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p}$.

iii) $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| \le \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p}(n+1)^{1/p'}$.

Demostración. El primer inciso se sigue directamente de la Proposición 4.2.7.

Para el segundo inciso, notemos que

$$\|\varphi\|_p = \|\varphi\cdot\mathbf{1}\|_p = \|M_\varphi(\mathbf{1})\|_p \le \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p}\|\mathbf{1}\|_p = \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p},$$

luego, como $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_{p'}$ por la Proposición 4.2.7 tenemos que

$$\max\{\|\varphi\|_p, \|\varphi\|_{p'}\} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p}.$$

Finalmente, para el último inciso consideremos las sucesiones

$$\mathbf{x} = (1, 0, 0, \dots), \qquad \mathbf{y} = (\zeta_0, \dots, \zeta_n, 0, 0, \dots),$$

donde $\zeta_j = e^{-i \arg a_j}$. Entonces, usando que $a_j = |a_j| e^{i \arg a_j}$ para cada j, y la desigualdad (4.5) tenemos que

$$\begin{aligned} |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| &= |\zeta_0 a_0 + \zeta_1 a_1 + \cdots + \zeta_n a_n| \\ &= |(A\mathbf{x}, \mathbf{y})| \\ &\leq \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p} \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_{p'} \\ &= \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p} (n+1)^{1/p'}, \end{aligned}$$

como queríamos probar. ■

4.2.2. Relación con multiplicadores de Fourier

Denotamos por $\hat{f}$ a los coeficientes de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$, esto es

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Definición 4.2.9. *Para $p \in [1, 2]$, definimos el espacio de funciones en $L^2(\mathbb{T})$ con coeficientes de Fourier en $\ell^p(\mathbb{Z})$ como*

$$A_p(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) \ : \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^p < \infty \right\}.$$

De manera similar a la definición de norma en ℓ^p_A, definimos la norma en $A_p(\mathbb{T})$ de la siguiente manera

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^p \right)^{1/p}.$$

Proposición 4.2.10. *Sea $p \in [1, 2]$. Entonces $A_p(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach con la métrica inducida por la norma en $A_p(\mathbb{T})$.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n\geq 0} \subset A_p(\mathbb{T})$ una sucesión de Cauchy. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \|f_n - f_m\|_{A_p(\mathbb{T})} \\ &= \left\| \hat{f}_n(k) - \hat{f}_m(k) \right\|_p \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

siempre que $m, n \geq N$. Esto es, la sucesión $\left((\hat{f}_n(k))_{k\in\mathbb{Z}} \right)_{n\in\mathbb{Z}}$ es de Cauchy en ℓ^p, y por ser un espacio completo, existe una sucesión $(g(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^p$ a la cual converge. Además, como $\ell^p \subset \ell^2$ para $p \in [1,2]$ tenemos que $(g(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$.

Finalmente, por la identidad de Parseval existe una función $f \in L^2(\mathbb{T})$ tal que $\hat{f}(k) = g(k)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Además

$$\|f_n - f\|_{A_p(\mathbb{T})} = \left\| \hat{f}_n - \hat{f} \right\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto, $A_p(\mathbb{T})$ es completo. ∎

Definición 4.2.11. *Sea $p \in [1,2]$. Definimos el espacio de multiplicadores para $A_p(\mathbb{T})$ como la familia de funciones $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ tales que $\varphi f \in A_p(\mathbb{T})$ siempre que $f \in A_p(\mathbb{T})$. Más específicamente,*

$$M_p(\mathbb{T}) := \{\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}) \ : \ f \in A_p(\mathbb{T}) \Rightarrow \varphi f \in A_p(\mathbb{T})\}.$$

De forma natural definimos la norma de dichos multiplicadores como

$$\|\varphi\|_{M_p(\mathbb{T})} := \sup \left\{ \|\varphi f\|_{A_p(\mathbb{T})} \ : \ \|f\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq 1 \right\}.$$

Anteriormente (Proposición 4.2.4) vimos que $\mathcal{M}_p \subset H^\infty$. Así, podemos considerar cada función $\varphi \in \mathcal{M}_p$ como una función analítica en $\mathbb{D}$ o, mediante sus valores frontera, como una función medible en $\mathbb{T}$ con coeficientes de Fourier cero para frecuencias negativas. Distinguiremos entre las dos interpretaciones denotando la segunda por φ^*.

El siguiente resultado nos será útil para la demostración de la Proposición 4.2.13.

Proposición 4.2.12. *Sea $p \in [1,2]$. Entonces, los polinomios trigonométricos son densos en $A_p(\mathbb{T})$.*

Demostración. Sea $g \in A_p(\mathbb{T})$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |\hat{g}(n)|^p < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=-\infty}^{-N_2} |\hat{g}(n)|^p < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sean $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, y $g_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{g}(n)e^{int}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|g - g_N\|^p_{A_p(\mathbb{T})} &= \sum_{n=-\infty}^{-N} |\hat{g}(n)|^p + \sum_{n=N}^{\infty} |\hat{g}(n)|^p \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

lo cual prueba nuestra afirmación. ∎

Veremos enseguida que $\mathcal{M}_p$ está contenido en $M_p(\mathbb{T})$.

Proposición 4.2.13. *Sea* $p \in [1, 2]$ *y* $\varphi \in H^\infty$. *Entonces* $\varphi \in \mathcal{M}_p$ *si y sólo si* $\varphi^* \in M_p(\mathbb{T})$. *Más aún,* $\|\varphi\|_{\mathcal{M}_p} = \|\varphi^*\|_{M_p(\mathbb{T})}$.

Demostración. Sea $\varphi^* \in M_p(\mathbb{T})$. Notemos que $\ell^p_A \subset \ell^2_A = H^2 \subset L^2(\mathbb{T})$. Así, podemos considerar a ℓ^p_A como una subclase de $A_p(\mathbb{T})$ por nuestras definiciones de ℓ^p_A y $A_p(\mathbb{T})$. En particular, para cada función $f \in \ell^p_A$ tenemos que $f^* \in A_p(\mathbb{T})$ por lo que $\varphi^* f^* \in A_p(\mathbb{T})$ y

$$\|\varphi^* f^*\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq \|\varphi^*\|_{M_p(\mathbb{T})} \|f^*\|_{A_p(\mathbb{T})}.$$

Más aún, como los coeficientes de Fourier de f^* y φ^* son cero para frecuencias negativas, también lo son los coeficientes de Fourier de $\varphi^* f^*$.

Así, si $\varphi^* f^* \in A_p(\mathbb{T})$ entonces $\varphi f \in \ell^p_A$ y podemos reescribir la desigualdad anterior como

$$\|\varphi f\|_{\ell^p_A} \leq \|\varphi^*\|_{M_p(\mathbb{T})} \|f\|_{\ell^p_A}.$$

De aquí que, $\varphi \in \mathcal{M}_p$ y

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}_p} \leq \|\varphi^*\|_{M_p(\mathbb{T})}.$$

Recíprocamente, supongamos que $\varphi \in \mathcal{M}_p$. Sea f un polinomio trigonométrico de grado N. Entonces $e^{iNt}f(t)$ es un polinomio analítico y está en ℓ^p_A puesto que

$$e^{iNt}f(t) = e^{iNt}\sum_{k=-N}^{N}\hat{f}(k)e^{ikt} = \sum_{k=0}^{2N}\hat{f}(k)e^{it(k+N)}.$$

Así, como φ es un multiplicador de ℓ^p_A, tenemos que $\varphi e^{iNt}f \in \ell^p_A$ y

$$\|\varphi e^{iNt}f\|_{\ell^p_A} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p}\|f\|_{\ell^p_A}.$$

Como el operador $f \longmapsto e^{iNt}f$ es isométrico en $A_p(\mathbb{T})$, podemos reescribir la desigualdad anterior como

$$\|\varphi^* f\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p}\|f\|_{A_p(\mathbb{T})}.$$

Como los polinomios trigonométricos son densos en $A_p(\mathbb{T})$ de acuerdo a la Proposición 4.2.12, la estimación se tiene para todo $f \in A_p(\mathbb{T})$. Así, $\varphi^* \in M_p(\mathbb{T})$ y

$$\|\varphi^*\|_{M_p(\mathbb{T})} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p}.$$

Por tanto, $\|\varphi^*\|_{M_p(\mathbb{T})} = \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p}$. ■

4.3. Cocientes de multiplicadores

Como vimos en el Capítulo 1, el teorema de F. y R. Nevanlinna nos afirma que cualquier función $f \in \mathcal{N}$ se puede escribir como el cociente de dos funciones analíticas acotadas, particularmente si $f \in H^2$ tenemos que $f = \frac{h_1}{h_2}$, donde las funciones h_1 y h_2 son como indica el teorema. En la Sección 5.2 probamos que el espacio de multiplicadores de H^2 es de hecho H^∞, así, podemos establecer un resultado equivalente para un espacio de Banach $\mathcal{X}$ de funciones analíticas y su espacio de multiplicadores $\mathcal{M}$, esto es, dada $f \in \mathcal{X}$ poder escribir $f = \frac{h_1}{h_2}$, con $h_1, h_2 \in \mathcal{M}$.

De este modo, nos preguntamos si es posible establecer dicho resultado sobre cualquier espacio de Banach de funciones analíticas. En algunos casos la respuesta es que sí, como vimos en el caso del espacio de Hardy H^2. Nuestro interés ahora se dirige a responder esta pregunta para los espacios ℓ^p_A.

Cuando $p = 2$ sabemos que la respuesta es afirmativa pues nos encontramos en el caso $\ell^2_A = H^2$. Además, el caso $p = 1$ tiene respuesta afirmativa también puesto que ℓ^1_A es en sí un álgebra y coincide con su álgebra de multiplicadores. Sin embargo, para $p \in (1, 2)$ la pregunta sigue abierta, y para $p \in (2, \infty)$ podemos mostrar que la respuesta es negativa utilizando herramientas de teoría de funciones.

Corolario 4.3.1. *Sea $p \in (2, \infty)$. Existen funciones en ℓ^p_A que no pueden ser representadas como el cociente de dos multiplicadores.*

Demostración. Por el Corolario 3.4.2 existen funciones en ℓ^p_A que no se encuentran en la clase Nevanlinna $\mathcal{N}$. Dichas funciones no pueden representarse como el cociente de dos multiplicadores puesto que $\mathcal{M}_p \subset H^\infty \cap \ell^p_A$, por lo que dicho cociente estaría en la clase Nevanlinna. ∎

4.4. Multiplicadores isométricos

Definición 4.4.1. *Decimos que $\varphi \in \mathcal{M}_p$ es un multiplicador isométrico si para cada $f \in \ell^p_A$ se cumple la condición*

$$\|\varphi f\|_{\ell^p_A} = \|f\|_{\ell^p_A}. \tag{4.6}$$

Igual que antes, un caso destacable es en el que $p = 2$, en el cual podemos caracterizar a las funciones que cumplen con la condición (4.6) de la siguiente manera.

Proposición 4.4.2. *Sea $\varphi \in \ell^2_A$. Entonces para cada $f \in \ell^2_A$ se tiene que $\|\varphi f\|_{\ell^2_A} = \|f\|_{\ell^2_A}$ si y sólo si φ es una función interior.*

Demostración. Notemos que la Proposición 4.2.4 y (4.6) nos muestran que

$$|\varphi(z)| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{M}_p} = 1.$$

Ahora, como $\ell^2_A = H^2$ podemos utilizar que para cada $g \in H^2$ se tiene la igualdad $\|g\|_{H^2} = \|g(e^{it})\|_{L^2}$, para reescribir (4.6) del modo siguiente

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2(1 - |\varphi(e^{it})|^2)dt = 0, \qquad f \in H^2$$

lo cual se cumple si y sólo si $|\varphi(e^{it})| = 1$ casi en todo punto. En otras palabras, φ es interior. ∎

Habiendo observado el caso $p = 2$, nos interesa saber qué propiedades se cumplen cuando $p \neq 2$. Observemos que

$$\|z^n f\|_{\ell^p_A} = \|f\|_{\ell^p_A}, \qquad f \in \ell^p_A,\ \forall n \geq 0. \tag{4.7}$$

En otras palabras, los monomios z^n son multiplicadores isométricos para ℓ^p_A. Nos preguntamos si existen otros.

El siguiente resultado se prueba fácilmente utilizando herramientas de cálculo y nos será útil en la demostración del Teorema 4.4.4.

Proposición 4.4.3. *Sea* $x \geq 0,\ y \geq 0$ *y* $t \geq -1$.

I) *Para* $0 < \alpha < 1$, *tenemos*

a) $(x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha$, *con igualdad si y sólo si* $x = 0$ *o* $y = 0$.

b) $(1+t)^\alpha \leq 1 + \alpha t$, *con igualdad si y sólo si* $t = 0$.

II) *Para* $1 < \alpha < \infty$, *tenemos*

a) $(x+y)^\alpha \geq x^\alpha + y^\alpha$, *con igualdad si y sólo si* $x = 0$ *o* $y = 0$.

b) $(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t$, *con igualdad si y sólo si* $t = 0$.

Teorema 4.4.4. *Si* $p \in (1,\infty)\setminus\{2\}$ *y* φ *es un multiplicador isométrico para* ℓ^p_A, *entonces* $\varphi(z) = \gamma z^n$ *para algún* $n \geq 0$ *y una constante* γ *de módulo unitario.*

Demostración. Haremos la demostración para el caso $1 < p < 2$, utilizando el primer conjunto de desigualdades de la Proposición 4.4.3. El otro caso se sigue de manera similar utilizando el segundo conjunto de desigualdades.

Sea $1 < p < 2$. Escribiremos $\varphi(z) = \gamma z^n \varphi_1(z)$, donde γ es una constante de módulo 1, n es el orden del cero de φ en el origen y $\varphi_1(0) > 0$.

Por la igualdad en (4.7) tenemos que para cada $f \in \ell^p_A$

$$\|\varphi_1 f\|_{\ell^p_A} = \|\gamma z^n \varphi_1 f\|_{\ell^p_A} = \|\varphi f\|_{\ell^p_A} = \|f\|_{\ell^p_A}.$$

Mostraremos que $\varphi_1 \equiv 1$.

Considerando la reducción anterior, supongamos que $\varphi(0) > 0$ y $\|\varphi f\|_{\ell^p_A} = \|f\|_{\ell^p_A}$ para todo $f \in \ell^p_A$. Tomemos la función $f(z) = 1 + e^{it}z = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(1)} z^k$, donde t es un parámetro libre y $\mathbf{b}^{(1)} = (1, e^{it}, 0, \dots)$, lo que nos dice que $\|f\|^p_{\ell^p_A} = 2$. Si $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, podemos escribir

$$\|\varphi f\|^p_{\ell^p_A} = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right|^p = |a_0|^p + \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n + a_{n-1} e^{it} \right|^p = |a_0|^p + \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_{n+1} + a_n e^{it} \right|^p$$

por lo que

$$|a_0|^p + \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_{n+1} + a_n e^{it} \right|^p = 2 \tag{4.8}$$

Integraremos ambos lados de (4.8) con respecto a dt. En primer lugar, debido a la periodicidad, notemos que si $a = |a|e^{it_1}$ y $b = |b|e^{it_2}$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| a + b e^{it} \right| dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| |a|e^{it_1} + |b|e^{it_2} e^{it} \right| dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| |a| + |b| e^{i(t - t_1 + t_2)} \right| dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| |a| + |b| e^{it} \right| dt. \end{aligned}$$

En segundo lugar, un cálculo elemental nos muestra que

$$\begin{aligned} \left| |a| + |b| e^{it} \right|^2 &= |a|^2 + |b|^2 + 2|ab| \cos t \\ &= \left(|a|^2 + |b|^2 \right) (1 + s \cos t) \end{aligned}$$

donde $s = \frac{2|ab|}{|a|^2 + |b|^2}$.

Notemos que $0 \leq s \leq 1$, por lo que $s \cos t \geq -1$.

En tercer lugar, debido a las primeras desigualdades en la Proposición 4.4.3 tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| |a| + |b| e^{it} \right|^p dt = \frac{(|a|^2 + |b|^2)^{p/2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + s \cos t)^{p/2} dt \tag{4.9}$$

$$\leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{ps}{2} \cos t \right) dt \tag{4.10}$$

$$= |a|^p + |b|^p \tag{4.11}$$

con igualdad si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.

Regresando a (4.8) tenemos que

$$2 \leq |a_0|^p + \sum_{n=0}^{\infty} (|a_{n+1}|^p + |a_n|^p) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p.$$

Si tomamos la función idénticamente 1 entonces $\|\varphi\|_{\ell_A^p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} = 1$.

Así, en la relación anterior se tiene la igualdad y como $a_0 \neq 0$ debe pasar que $a_1 = 0$. Repetimos el procedimiento considerando ahora la función $f(z) = 1 + e^{it} z^2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(2)} z^k$, donde $\mathbf{b^{(2)}} = (1, 0, e^{it}, 0, \dots)$, en cuyo caso tendríamos

$$2 = |a_0|^p + \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_{n+2} + a_n e^{it} \right|^p$$

y continuando del mismo modo que antes tendremos

$$2 \leq |a_0|^p + \sum_{n=0}^{\infty} (|a_{n+2}|^p + |a_n|^p) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p.$$

De nuevo, como $\|\varphi\|_{\ell_A^p} = 1$ se tiene la igualdad en la ecuación anterior, por lo que $a_2 = 0$.

Procediendo inductivamente, tenemos que $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Como $a_0 > 0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p = 1$ concluimos que $\varphi \equiv a_0 = 1$.

En el caso en que $p > 2$ utilizamos el segundo conjunto de desigualdades de la Proposición 4.4.3 en (4.9) obteniendo la desigualdad opuesta en (4.10). Finalmente, procediendo del mismo modo que en el caso $1 < p < 2$ llegamos al resultado deseado.

■

4.5. Multiplicadores suaves

Denotaremos por $Hol\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ a la familia de funciones analíticas definidas en un disco más grande que el disco unitario abierto.

Utilizaremos el Teorema de Schur para demostrar que $Hol\left(\overline{\mathbb{D}}\right) \subset \mathcal{M}_p$. Para esto, definimos la integral con kernel $K : X \times X \to \mathbb{C}$ como el operador T tal que para cada

$f \in L^p(X, d\mu)$ se tiene

$$Tf(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y).$$

Teorema 4.5.1. *Supongamos que* K *es una función medible no negativa en* $X \times X$*,* T *es la integral con kernel* K *y* $1 < p < \infty$*. Si existen constantes positivas* C_1 *y* C_2*, y una función medible positiva* h *en* X *tal que*

$$\int_X K(x, y) h(y)^{p'} d\mu(y) \leq C_1 h(x)^{p'} \quad \textit{para casi todo punto } x \in X, \ y$$

$$\int_X K(x, y) h(x)^p d\mu(x) \leq C_2 h(y)^p \quad \textit{para casi todo punto } y \in X,$$

entonces T *es un operador lineal acotado en* $L^p(X, d\mu)$ *con norma menor o igual a* $C_1^{1/p'} C_2^{1/p}$.

Demostración. Esto se sigue como consecuencia directa de la desigualdad de Hölder y el Teorema de Fubini. De hecho, si $f \in L^p(X, d\mu)$ entonces para casi todo $x \in X$

$$|Tf(x)| \leq \int_X K(x, y) h(y) h(y)^{-1} |f(y)| d\mu(y)$$

y la desigualdad de Hölder nos da

$$|Tf(x)| \leq \left[\int_X K(x, y) h(y)^{p'} d\mu(y) \right]^{1/p'} \left[\int_X K(x, y) h(y)^{-p} |f(y)|^p d\mu(y) \right]^{1/p}.$$

Por la primera desigualdad de la hipótesis tenemos que

$$|Tf(x)| \leq C_1^{1/p'} h(x) \left[\int_X K(x, y) h(y)^{-p} |f(y)|^p d\mu(y) \right]^{1/p}, \quad \text{para c.t. } x \in X$$

Aplicando ahora Fubini y la segunda desigualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_X |Tf|^p d\mu &\leq \int_X \int_X C_1^{p/p'} h(x)^p K(x, y) h(y)^{-p} |f(y)|^p d\mu(y) d\mu(x) \\
&= C_1^{p/p'} \int_X h(y)^{-p} |f(y)|^p d\mu(y) \int_X K(x, y) h(x)^p d\mu(x) \\
&\leq C_1^{p/p'} C_2 \int_X |f(y)|^p d\mu(y).
\end{aligned}$$

Así, T es un operador lineal acotado en $L^p(X, d\mu)$ y su norma es menor o igual a $C_1^{1/p'} C_2^{1/p}$. ∎

De este modo, podemos interpretar el Teorema de Schur en ℓ^p de la siguiente manera. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz infinita y sea $p \in (1, \infty)$. Supongamos que hay constantes positivas α y β y sucesiones positivas $\{p_i\}$ y $\{q_j\}$ tales que $\sum_i |a_{ij}| p_i^p \leq \alpha q_j^p$ para $j \geq 0$ y $\sum_j |a_{ij}| q_j^{p'} \leq \beta p_i^{p'}$ para $i \geq 0$. Entonces A es un operador acotado en ℓ^p. Más aún

$$\|A\|_{\ell^p \to \ell^p} \leq \alpha^{1/p} \beta^{1/p'}. \tag{4.12}$$

Para cada $f \in Hol(\overline{\mathbb{D}})$ con expansión de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, existen $R > 1$ y $c > 0$ tales que

$$|a_n| \leq \frac{c}{R^n}, \quad n \geq 0. \tag{4.13}$$

Las constantes R y c dependen de la función f pero respecto a n funcionan uniformemente.

Teorema 4.5.2. *Si $p \in (1, \infty)$, entonces $Hol(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathcal{M}_p$.*

Demostración. Por la Proposición 4.2.6, bastará demostrar que la matriz A, formada por los coeficientes de φ como en (4.3), es un operador acotado en ℓ^p.

Consideremos $p_i = q_i = t^i$ con t un parámetro positivo que determinaremos más adelante, y apliquemos a éstos el Teorema de Schur.

Fijemos primero j. Por (4.13) tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_i |a_{ij}| p_i^p &= \sum_{i=j}^{\infty} |a_{i-j}| t^{ip} \\
&\leq c \sum_{i=j}^{\infty} \frac{t^{ip}}{R^{i-j}} \\
&= c t^{jp} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{t^p}{R} \right)^i \\
&= \frac{c}{1 - \frac{t^p}{R}} q_j^p, \quad j \geq 0.
\end{aligned}$$

Similarmente, al fijar i de nuevo por (4.13)

$$\sum_j |a_{ij}| q_j^{p'} = \sum_{j=0}^{i} |a_{i-j}| t^{jp'}$$

$$\leq c\sum_{j=0}^{i}\frac{t^{jp'}}{R^{i-j}}$$
$$= ct^{ip'}\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{1}{t^{p'}R}\right)^j$$
$$= \frac{c}{1-\frac{1}{t^{p'}R}}p_i^{p'}, \quad i\geq 0.$$

Así, el Teorema de Schur nos asegura que

$$\|A\|_{\ell^p\to\ell^p}\leq\left(\frac{c}{1-\frac{t^p}{R}}\right)^{1/p}\left(\frac{c}{1-\frac{1}{t^{p'}R}}\right)^{1/p'}.$$

Observemos que las series geométricas de antes convergen siempre que $t^p < R$ y $t^{p'} > \frac{1}{R}$. De este modo el rango que podemos considerar para t es $\frac{1}{R^{1/p'}} < t < R^{1/p}$.

Así, podemos decir que

$$\|A\|_{\ell^p\to\ell^p}\leq\inf_{t\in\left(R^{-1/p'},R^{1/p}\right)}\left(\frac{c}{1-\frac{t^p}{R}}\right)^{1/p}\left(\frac{c}{1-\frac{1}{t^{p'}R}}\right)^{1/p'}. \tag{4.14}$$

Particularmente considerando el caso en que $t=1$ tenemos

$$\|A\|_{\ell^p\to\ell^p}\leq\frac{c}{\left(1-\frac{1}{R}\right)^{1/p}\left(1-\frac{1}{R}\right)^{1/p'}}=\frac{c}{1-\frac{1}{R}}. \tag{4.15}$$

■

Como vimos en la demostración, una cota para la norma de multiplicador de $\varphi\in Hol(\overline{\mathbb{D}})$ se obtiene al sustituir $t=1$ en (4.14). Enseguida veremos un resultado que nos habla sobre convergencia, utilizando la estimación en (4.15).

Corolario 4.5.3. *Sean $p\in(1,\infty)$, $\varphi\in Hol(\overline{\mathbb{D}})$ y φ_n su polinomio de Taylor de grado n. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|_{\mathcal{M}_p}=0$. Más aún, la tasa de decaimiento es exponencial.*

Demostración. Como

$$\varphi(z)-\varphi_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^k=z^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+n+1}z^k,$$

por (4.7) tenemos que

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{M}_p} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1} z^k \right\|_{\mathcal{M}_p}.$$

Así, por la Proposición 4.2.6

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{M}_p} = \|A_n\|_{\ell^p \to \ell^p},$$

donde A_n es la matriz dada por (4.3), pero ahora considerando la sucesión

$$\alpha_k = a_{k+n+1}, \quad k \geq 0.$$

Por (4.13) podemos obtener la siguiente estimación

$$\begin{aligned} |\alpha_k| &= |a_{k+n+1}| \\ &\leq \frac{c}{R^{k+n+1}} \\ &= \frac{(c/R^{n+1})}{R^k}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, por (4.15) tenemos que

$$\|A_n\|_{\ell^p \to \ell^p} \leq \frac{c/R^{n+1}}{1 - \frac{1}{R}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Por tanto,

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{M}_p} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

de manera exponencial. ■

4.6. ℓ^1_A está incluido contractivamente en $\mathcal{M}_p$

El resultado que veremos a continuación tiene como consecuencia al Teorema 4.5.2. Sin embargo, la demostración de ese teorema nos da una mejor estimación de una cota para la norma de los multiplicadores en $Hol(\overline{\mathbb{D}})$, por lo que establecimos los teoremas de manera separada.

Teorema 4.6.1. *Sea $p \in (1, \infty)$. Entonces $\ell^1_A \subset \mathcal{M}_p$ y $\|h\|_{\mathcal{M}_p} \leq \|h\|_{\ell^1_A}$ para cada $h \in \ell^1_A$.*

Demostración. Procediendo de manera similar a la demostración del Teorema 4.5.2, tenemos que gracias a la Proposición 4.2.6 es suficiente probar que la matriz de coeficientes de h dada por (4.3) es una contracción en ℓ^p.

Aplicaremos entonces la versión más sencilla del Teorema de Schur, esto es, considerando $p_i = q_i = 1$. Fijando j tenemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_{ij}| p_i^p = \sum_{i=j}^{\infty} |a_{i-j}| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \|h\|_{\ell^1_A}.$$

Ahora, fijando i se tiene que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| q_j^{p'} = \sum_{j=0}^{i} |a_{i-j}| = \sum_{k=0}^{i} |a_k| \leq \|h\|_{\ell^1_A}.$$

Así, el Teorema de Schur nos asegura que al tomar $\alpha = \beta = \|h\|_{\ell^1_A}$ se tiene

$$\|A\|_{\ell^p \to \ell^p} \leq \|h\|_{\ell^1_A}.$$

∎

Corolario 4.6.2. *Sea $p \in (1, \infty)$ y para $h \in \ell^1_A$ denotemos su polinomio de Taylor de grado n por h_n. Entonces $\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\|_{\mathcal{M}_p} = 0$.*

Demostración. Notemos que

$$h_n(z) - h(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k.$$

Luego, como $h \in \ell^1_A$ tenemos que

$$\|h_n - h\|_{\mathcal{M}_p} = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right\|_{\mathcal{M}_p} \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right\|_{\ell^1_A} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

∎

El siguiente resultado nos permitirá decir que el Teorema 4.6.1 es reversible, dando tan sólo una condición a los coeficientes de h.

Teorema 4.6.3. *Sea $p \in (1, \infty)$. Si $h \in \mathcal{M}_p$ y sus coeficientes de Taylor son todos no negativos, entonces $h \in \ell^1_A$.*

Demostración. Sea $(a_k)_{k\geq 0}$ la sucesión de coeficientes de Taylor de h. Consideremos las sucesiones

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = (b_0, b_1, \ldots, b_n, 0, 0, \ldots),$$

donde $b_i = 1$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Sustituyendo los valores de estas sucesiones en la desigualdad (4.5) obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_j \leq (n+1)\|h\|_{\mathcal{M}_p}.$$

Podemos reordenar las sumas de tal manera que obtenemos la siguiente desigualdad

$$\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k \leq \|h\|_{\mathcal{M}_p}.$$

Luego, por el Teorema de Convergencia Monótona, al hacer $n \to \infty$ tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \|h\|_{\mathcal{M}_p}.$$

■

4.7. Multiplicadores de Hadamard

Sean f y g dos funciones analíticas en el disco unitario $\mathbb{D}$ con series de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Definimos el *producto de Hadamard* de f y g como

$$(f \diamond g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

Como f y g son analíticas en $\mathbb{D}$, es fácil ver que $f \diamond g$ también lo es pues para todo $z \in \mathbb{D}$ con $0 < |z| < 1$ se tiene que

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k b_k||z|^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Esto se debe a que el radio de convergencia de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ es

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\limsup |a_n b_n|^{1/n}} \\ &\geq \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} \frac{1}{\limsup |b_n|^{1/n}} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

De hecho esto nos dice que el radio de convergencia del producto de Hadamard de dos funciones puede ser más grande que el radio de convergencia de cada una de las funciones.

Decimos pues que h es un *multiplicador de Hadamard* de ℓ^p_A si el operador

$$\mathfrak{M}_h : \ell^p_A \to \ell^p_A, \quad \mathfrak{M}_h f = h \diamond f$$

está bien definido y es continuo. Enseguida daremos una caracterización para estos multiplicadores.

Teorema 4.7.1. *Sea $p \in (1, \infty)$. Entonces el espacio de multiplicadores de Hadamard en ℓ^p_A es isométricamente isomorfo a ℓ^∞_A. Más explícitamente para cada $h \in \ell^\infty_A$, tenemos*

$$\|\mathfrak{M}_h\| = \|h\|_{\ell^\infty_A}.$$

Inversamente, si $\|\mathfrak{M}_h\| < \infty$ entonces $h \in \ell^\infty_A$.

Demostración. Supongamos primero que $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \ell^\infty_A$. Entonces, para cada $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \ell^p_A$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{M}_h f\|_{\ell^p_A} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sup_{n \geq 0} |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^p \right)^{1/p} \\ &= \|h\|_\infty \|f\|_{\ell^p_A}. \end{aligned}$$

Así, $\|\mathfrak{M}_h\| \leq \|h\|_\infty$.

Para la otra desigualdad consideremos las funciones

$$f_m(z) = z^m, \ m \geq 0,$$

entonces $\|f_m\|_{\ell_A^p} = 1$ y además

$$\|\mathfrak{M}_h f\|_{\ell_A^p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_k b_k|^p \right)^{1/p} = |a_m|.$$

De aquí que

$$\|\mathfrak{M}_h\| \geq |a_m|, \ m \geq 0,$$

lo cual implica

$$\|\mathfrak{M}_h\| \geq \|h\|_{\ell_A^\infty}.$$

Inversamente, supongamos que $\|\mathfrak{M}_h\| < \infty$. Entonces para $f \in \ell_A^p$

$$\|\mathfrak{M}_h f\|_{\ell_A^p} \leq \|\mathfrak{M}_h\| \|f\|_{\ell_A^p}.$$

Particularmente, si f_m es como antes, entonces

$$|a_m| \leq \|\mathfrak{M}_h\|, \ \forall m \geq 0,$$

y tomando supremo con respecto a m tenemos

$$\|h\|_{\ell_A^\infty} \leq \|\mathfrak{M}_h\| < \infty$$

por lo que $h \in \ell_A^\infty$, como queríamos probar, teniendo con esto también que $\mathfrak{M}_h$ es un isomorfismo entre ℓ_A^p y ℓ_A^∞. ■

Capítulo 5

Ortogonalidad

En este último capítulo nos dedicamos a estudiar un concepto de ortogonalidad que si bien es conocido, difiere del concepto usual que involucra al producto interior, y se define en un espacio lineal normado cualesquiera. Para esto nos apoyamos de la literatura de Alvarez and Guzmán-Partida [2], Cheng et al. [5], [6] y [7], James [13] y Ndoye [16].

En la primera sección caracterizamos la ortogonalidad de Birkhoff-James entre dos sucesiones en el espacio ℓ^p, y extendemos esta caracterización para funciones en ℓ^p_A.

Enseguida, utilizamos este concepto de ortogonalidad para estimar ceros de funciones que son analíticas en el disco unitario.

Finalmente, trabajamos con el concepto de multiplicador de ℓ^p_A para mejorar substancialmente una estimación realizada en el Corolario 4.2.8 del capítulo anterior.

5.1. Ortogonalidad de Birkhoff-James

Recordemos que en un espacio con producto interior $(X, \langle , \rangle)$ decimos que $x \in X$ es ortogonal a $y \in X$, lo cual denotamos por $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$.

La ortogonalidad de Birkhoff-James extiende este concepto de ortogonalidad a un espacio lineal normado más general, de la siguiente manera.

Definición 5.1.1. *Sea X un espacio lineal normado. Decimos que x es ortogonal a y en el sentido de Birkhoff-James si*

$$\|\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}\|_X \geq \|\mathbf{x}\|_X$$

para todo escalar β. Cuando esto pasa, escribimos $\mathbf{x} \perp_X \mathbf{y}$.

La razón por la que decimos que la ortogonalidad de Birkhoff-James es una extensión del concepto usual de ortogonalidad es la siguiente equivalencia.

Proposición 5.1.2. *Sea $(X, \langle , \rangle)$ un espacio con producto interior real. Entonces, dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ se tiene que*

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} \perp_X \mathbf{y}.$$

Demostración. Claramente $\mathbf{x} \perp \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{x} \perp_X \mathbf{0}$.

Supongamos pues que $\mathbf{y} \neq 0$. Si $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, entonces para $\beta \in \mathbb{R}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}\|_X^2 &= \|\mathbf{x}\|_X^2 + \langle \mathbf{x}, \beta\mathbf{y} \rangle + \langle \beta\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \|\beta\mathbf{y}\|_X^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|_X^2 + \beta^2 \|\mathbf{y}\|_X^2 \\ &\geq \|\mathbf{x}\|_X^2. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$ y escogemos

$$\beta = -\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|_X^2},$$

entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}\|_X^2 &= \|\mathbf{x}\|_X^2 - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\|\mathbf{y}\|_X^2} \\ &< \|\mathbf{x}\|_X^2 \end{aligned}$$

por lo que no se tendría que $\mathbf{x} \perp_X \mathbf{y}$. ■

Es posible demostrar que este mismo resultado se tiene en espacios con producto interior complejo (Véase [8]). En adelante denotaremos por $\perp_p$ a la ortogonalidad de Birkhoff-James en el espacio ℓ^p. El criterio que presentamos enseguida resulta importante para la relación $\perp_p$ cuando $p \in (1, \infty)$.

Teorema 5.1.3. *Sea $p \in (1, \infty)$, entonces*

$$\mathbf{a} \perp_p \mathbf{b} \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^{p-2} \overline{a_k} b_k = 0, \tag{5.1}$$

donde interpretamos como cero cualquier término en la suma anterior que sea de la forma "$|0|^{p-2}0$".

Demostración. Tenemos que $\mathbf{a} \perp_p \mathbf{b}$ si y sólo si para todo escalar λ se tiene

$$\|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}\|_p \geq \|\mathbf{a}\|_p.$$

Luego tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}\|_p^p \geq \|\mathbf{a}\|_p &\iff \sum_{k=0}^{\infty} |a_k + \lambda b_k|^p \geq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \\
&\iff \sum_{k=0}^{\infty} \left[|a_k + \lambda b_k|^p - |a_k|^p \right] \geq 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k + \lambda b_k|^p - |a_k|^p}{\lambda} \geq 0 \quad \forall \lambda > 0 \\
&\iff \lim_{\lambda \to 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k + \lambda b_k|^p - |a_k|^p}{\lambda} \geq 0.
\end{aligned}$$

Debido a la convergencia de las series $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^p$ y $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |b_k|^p$ podemos permutar lím y $\sum$. Así

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}\|_p^p \geq \|\mathbf{a}\|_p &\iff \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{|a_k + \lambda b_k|^p - |a_k|^p}{\lambda} \geq 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^{p-2} \operatorname{Re}\{\overline{a_k} b_k\} \geq 0,
\end{aligned}$$

donde la última equivalencia se puede ver considerando la derivada lateral por la derecha en el punto 0 de la función

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= |a_k + \lambda b_k|^p \\
&= \left[(a_k + \lambda b_k)(\overline{a_k} + \lambda \overline{b_k}) \right]^{p/2},
\end{aligned}$$

entonces

$$F'(\lambda^+) = \frac{p}{2} \left[(a_k + \lambda b_k)(\overline{a_k} + \lambda \overline{b_k}) \right]^{\frac{p}{2} - 1} \left[b_k(\overline{a_k} + \lambda \overline{b_k}) + \overline{b_k}(a_k + \lambda b_k) \right].$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{|a_k+\lambda b_k|^p-|a_k|^p}{\lambda} &= F'(0^+)\\ &= \frac{p}{2}\left[|a_k|^2\right]^{\frac{p}{2}-1}\left[b_k\overline{a_k}+\overline{b_k}a_k\right]\\ &= \frac{p}{2}|a_k|^{p-2}2\operatorname{Re}\{\overline{a_k}b_k\}\\ &= p|a_k|^{p-2}\operatorname{Re}\{\overline{a_k}b_k\}.\end{aligned}$$

Eligiendo $\lambda<0$ obtenemos la desigualdad opuesta, es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^{p-2}\operatorname{Re}\{\overline{a_k}b_k\}\leq 0,$$

por lo que

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^{p-2}\operatorname{Re}\{\overline{a_k}b_k\}=0.$$

Considerando ahora la sucesión con elementos $A_k=ia_k$ en lugar de la sucesión de $a_k's$, obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}|A_k|^{p-2}\operatorname{Re}\left\{\overline{A_k}b_k\right\}=0,$$

pero $\operatorname{Re}\left\{\overline{A_k}b_k\right\}=\operatorname{Re}\{-i\overline{a_k}b_k\}=\operatorname{Im}\{\overline{a_k}b_k\}$, por tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^{p-2}\operatorname{Im}\{\overline{a_k}b_k\}=0.$$

De este modo concluimos que

$$\|\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}\|_p^p\geq\|\mathbf{a}\|_p\Longleftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^{p-2}\overline{a_k}b_k=0.$$

■

Para cada número complejo $\alpha=re^{it}$ y para cualquier $s>0$ definimos

$$\alpha^{\langle s\rangle}=\left(re^{it}\right)^{\langle s\rangle}:=r^se^{-it}.$$

Probaremos ahora algunas de sus propiedades.

Proposición 5.1.4. *Para cualquier par de números complejos α, β, un exponente real $s > 0$ y un entero $n \geq 0$, tenemos:*

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta)^{\langle s\rangle} &= \alpha^{\langle s\rangle}\beta^{\langle s\rangle} \\
\left|\alpha^{\langle s\rangle}\right| &= |\alpha|^{s} \\
\alpha^{\langle s\rangle}\alpha &= |\alpha|^{s+1} \\
\left(\alpha^{\langle s\rangle}\right)^{n} &= (\alpha^{n})^{\langle s\rangle} \\
\left(\alpha^{\langle p-1\rangle}\right)^{\langle p'-1\rangle} &= \alpha
\end{aligned}
$$

donde p y p' son exponentes conjugados, y $1 < p < \infty$.

Demostración. Sean $\alpha = re^{it}$ y $\beta = r'e^{it'}$ cualesquiera números complejos. Entonces, tenemos las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta)^{\langle s\rangle} &= (rr'e^{i(t+t')})^{\langle s\rangle} \\
&= (rr')^{s}e^{-i(t+t')} \\
&= r^{s}e^{-it}r'^{s}e^{-it'} \\
&= \alpha^{\langle s\rangle}\beta^{\langle s\rangle},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha^{\langle s\rangle}\right)^{n} &= \left(r^{s}e^{-it}\right)^{n} \\
&= r^{ns}e^{-itn} \\
&= \left(r^{n}e^{itn}\right)^{\langle s\rangle} \\
&= (\alpha^{n})^{\langle s\rangle},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha^{\langle p-1\rangle}\right)^{\langle p'-1\rangle} &= \left(r^{(p-1)}e^{-it}\right)^{\langle p'-1\rangle} \\
&= r^{(p-1)(p'-1)}e^{it} \\
&= re^{it} \\
&= \alpha,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\alpha^{\langle s\rangle}\alpha &= r^s e^{-it} r e^{it}\\ &= r^{s+1}\\ &= |\alpha|^{s+1},\end{aligned}$$

esto último a su vez implica la igualdad

$$\left|\alpha^{\langle s\rangle}\right| = |\alpha|^s.$$

■

Introducimos ahora para $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 0}$ la siguiente notación

$$\mathbf{a}^{\langle p-1\rangle} := \left(a_k^{\langle p-1\rangle}\right)_{k\geq 0}.$$

Si $\mathbf{a} \in \ell^p$ es fácil ver que $\mathbf{a}^{\langle p-1\rangle} \in \ell^{p'}$ puesto que

$$|a_k^{\langle p-1\rangle}|^{p'} = |a_k|^{(p-1)p'} = |a_k|^p$$

para todo $k \geq 0$, por lo que

$$\|\mathbf{a}^{\langle p-1\rangle}\|_{p'} = \|\mathbf{a}\|_p < \infty.$$

Ahora, si $a_k = |a_k|e^{it_k}$ tenemos que

$$\begin{aligned}a_k^{\langle p-1\rangle} &= |a_k|^{(p-1)}e^{-it_k}\\ &= |a_k|^{(p-2)}|a_k|e^{-it_k}\\ &= |a_k|^{(p-2)}\overline{a_k}\end{aligned}$$

para todo $k \geq 0$. Así, la dualidad en (3.2) nos dice que

$$\left(\mathbf{b}, \mathbf{a}^{\langle p-1\rangle}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^{(p-2)}\overline{a_k}b_k.$$

donde $\mathbf{b} \in \ell^p$.

Luego, de (5.1) tenemos la equivalencia

$$\mathbf{a} \perp_p \mathbf{b} \iff \left(\mathbf{b}, \mathbf{a}^{\langle p-1\rangle}\right) = 0. \tag{5.2}$$

Debido a la isometría que existe entre los espacios ℓ^p y ℓ^p_A, podemos hablar de la ortogonalidad de Birkhoff-James indistintamente en ambos espacios. Es decir, si

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{y} \quad b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

están en ℓ^p_A, entonces

$$a \perp_p b \Longleftrightarrow \mathbf{a} \perp_p \mathbf{b}.$$

De manera similar, definimos

$$a^{\langle p-1 \rangle}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\langle p-1 \rangle} z^k.$$

Notemos que $a^{\langle p-1 \rangle} \in \ell^{p'}_A$ y así podemos reescribir (5.2) como

$$a \perp_p b \Longleftrightarrow \left(b, a^{\langle p-1 \rangle}\right) = 0.$$

5.2. Ceros de funciones analíticas

En esta sección estimaremos ceros de funciones analíticas haciendo una aplicación de algunos conceptos estudiados antes, particularmente la ortogonalidad de Birkhoff-James.

Para esto, presentamos la siguiente función que nos permitirá relacionar una condición de ortogonalidad con una función analítica.

Sean $p \in (1, \infty)$ y $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Definimos

$$B_{p,w}(z) := \frac{1 - z/w}{1 - w^{\langle p'-1 \rangle} z}.$$

Notemos que dicha función es analítica en $\mathbb{D}$ puesto que $|w^{\langle p'-1 \rangle}| = |w|^{p'-1} < 1$.

De nuevo, el caso en que $p = 2$ es destacable pues podemos observar que en dicho caso $w^{\langle 2-1 \rangle} = \overline{w}$ y así

$$B_{2,w}(z) = \frac{1}{w} \frac{w - z}{1 - \overline{w} z},$$

que es simplemente un múltiplo constante de un factor de Blaschke. Como para todo $t \in [-\pi, \pi]$ se tiene

$$
\begin{aligned}
|B_{2,w}| &= \left| \frac{1}{w} \frac{w - e^{it}}{1 - \overline{w} e^{it}} \right| \\
&= |w|^{-1} \left| -e^{it} \frac{1 - w e^{-it}}{1 - \overline{w} e^{it}} \right| \\
&= |w|^{-1},
\end{aligned}
$$

entonces podemos ver que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{B_{2,w}(e^{it})} S^k B_{2,w}(e^{it}) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |B_{2,w}(e^{it})|^2 e^{ikt} dt \\
&= \frac{1}{|w|^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

para todo $k \geq 1$.

De este modo, gracias a la equivalencia probada en la sección anterior, tenemos que $B_{2,w} \perp_2 S^k B_{2,w}$ para todo $k \geq 1$. Algo análogo sucede cuando consideramos $p \in (1, \infty)$, como veremos a continuación.

Lema 5.1. *Para cada $p \in (1, \infty)$ y $w \in \mathbb{D}$ tenemos*

a) $B_{p,w} \perp_p B_{p,w} f$ *para todo* $f \in \ell^p_A$ *con* $f(0) = 0$*,*

b) $\|B_{p,w}\|_p = \left[1 + \frac{\left(1 - |w|^{p'}\right)^{p-1}}{|w|^p} \right]^{1/p}$.

Demostración. Es fácil ver que $\perp_p$ es continua y lineal en el segundo argumento, por lo que basta probar que $B_{p,w} \perp_p S^k B_{p,w}$ para todo $k \geq 1$. Expandiendo $B_{p,w}$ como serie geométrica tenemos

$$
\begin{aligned}
B_{p,w}(z) &= \left(1 - \frac{z}{w}\right) \sum_{j=0}^{\infty} w^{\langle p'-1 \rangle j} z^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} w^{\langle p'-1 \rangle j} z^j - \frac{1}{w} \sum_{j=1}^{\infty} w^{\langle p'-1 \rangle (j-1)} z^j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (w^j)^{\langle p'-1\rangle} z^j - \frac{1}{w} \sum_{j=1}^{\infty} w^{\langle p'-1\rangle (j-1)} z^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} w^{\langle p'-1\rangle (j-1)} w^{\langle p'-1\rangle} z^j - \frac{1}{w} \sum_{j=1}^{\infty} w^{\langle p'-1\rangle (j-1)} z^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} w^{\langle p'-1\rangle (j-1)} \left(w^{\langle p'-1\rangle} - \frac{1}{w} \right) z^j,
\end{aligned}
$$

por lo que tenemos que

$$
\begin{aligned}
B_{p,w}(z) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} w^{\langle p'-1\rangle (j-1)} \left(w^{\langle p'-1\rangle} - \frac{1}{w} \right) z^j, \\
S^k B_{p,w}(z) &= z^k + \sum_{j=1}^{\infty} w^{\langle p'-1\rangle (j-1)} \left(w^{\langle p'-1\rangle} - \frac{1}{w} \right) z^{j+k},
\end{aligned}
$$

para $k \geq 1$.

Además, sabemos que

$$
B_{p,w} \perp_p S^k B_{p,w} \iff \left(S^k B_{p,w}, B_{p,w}^{\langle p-1\rangle} \right) = 0, k \geq 1,
$$

y que

$$
B_{p,w}^{\langle p-1\rangle} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[w^{\langle p'-1\rangle (j-1)} \left(w^{\langle p'-1\rangle} - \frac{1}{w} \right) \right]^{\langle p-1\rangle} z^j.
$$

Así, por definición

$$
\begin{aligned}
\alpha &:= \left(S^k B_{p,w}, B_{p,w}^{\langle p-1\rangle} \right) \\
&= \left[w^{\langle p'-1\rangle (k-1)} \left(w^{\langle p'-1\rangle} - \frac{1}{w} \right) \right]^{\langle p-1\rangle} \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[w^{\langle p'-1\rangle (j+k-1)} \left(w^{\langle p'-1\rangle} - \frac{1}{w} \right) \right]^{\langle p-1\rangle} \left[w^{\langle p'-1\rangle (j-1)} \left(w^{\langle p'-1\rangle} - \frac{1}{w} \right) \right].
\end{aligned}
$$

Luego, utilizando las propiedades en la Proposición 5.1.4 tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha &= w^{(k-1)}\left(w^{\langle p'-1\rangle}-\frac{1}{w}\right)^{\langle p-1\rangle}+\sum_{j=1}^{\infty}w^{(j+k-1)}\left(w^{\langle p'-1\rangle}-\frac{1}{w}\right)^{\langle p-1\rangle}\left[w^{\langle p'-1\rangle(j-1)}\left(w^{\langle p'-1\rangle}-\frac{1}{w}\right)\right]\\
&= w^{(k-1)}\left(w^{\langle p'-1\rangle}-\frac{1}{w}\right)^{\langle p-1\rangle}+w^{k}\left(w^{\langle p'-1\rangle}-\frac{1}{w}\right)^{\langle p-1\rangle}\sum_{j=1}^{\infty}|w|^{p'(j-1)}\\
&= w^{(k-1)}\left[1+\left(ww^{\langle p'-1\rangle}-1\right)\frac{1}{1-|w|^{p'}}\right]\\
&= w^{(k-1)}\left[1+\frac{|w|^{p'}-1}{1-|w|^{p'}}\right]\\
&= 0,
\end{aligned}$$

lo cual prueba lo establecido en el inciso a).

Probaremos ahora el segundo inciso. Observemos que

$$\begin{aligned}
\|B_{p,w}\|_p^p &= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\left|w^{\langle p'-1\rangle(j-1)}\left(w^{\langle p'-1\rangle}-\frac{1}{w}\right)\right|^p\\
&= 1+\left|w^{\langle p'-1\rangle}-\frac{1}{w}\right|^p\sum_{j=1}^{\infty}|w|^{p(p'-1)(j-1)}\\
&= 1+\frac{\left||w|^{p'}-1\right|}{|w|^p}\left(\frac{1}{1-|w|^{p'}}\right)\\
&= 1+\frac{\left(1-|w|^{p'}\right)^{(p-1)}}{|w|^p}.
\end{aligned}$$

■

Enseguida probaremos un lema que nos ayudará al momento de estimar un conjunto de cotas para los ceros de funciones analíticas.

Lema 5.2. *Supongamos que* $p\in(1,\infty)$ *y* $g\in\ell^p_A$. *Si* $a\in\mathbb{D}$, *entonces* $[g]=[(1-az)g(z)]$.

Demostración. Recordemos que

$$[g]=\bigvee\left\{z^k g\ :\ k\geq 0\right\}.$$

Expandiendo $\frac{1}{1-az}$ en su serie geométrica, tenemos

$$g(z) = (1 - az)g(z) \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k$$

donde la convergencia es en ℓ_A^p. Esto muestra que $g \in [(1-az)g(z)]$ y se sigue la afirmación. ∎

Teorema 5.2.1. *Supongamos que* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *es analítica en* $\mathbb{D}$ *y* $a_0 \neq 0$. *Si* $w \in \mathbb{D}$ *es un cero de* f, *entonces*

$$|w| \geq \left[\left|\frac{a_1}{a_0}\right| + \left|\frac{a_2}{a_0}\right| + \left|\frac{a_3}{a_0}\right| + \dots \right]^{-1},$$

$$|w| \geq \left[1 + \sup\left\{ \left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \left|\frac{a_2}{a_0}\right|, \left|\frac{a_3}{a_0}\right|, \dots \right\} \right]^{-1}$$

y

$$|w| \geq \left[1 + \left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|^p + \left|\frac{a_2}{a_0}\right|^p + \left|\frac{a_3}{a_0}\right|^p + \dots \right)^{p'/p} \right]^{-1/p'},$$

para todo $p \in (1, \infty)$.

Demostración. Fijemos $p \in (1, \infty)$ y supongamos que $f \in \ell_A^p$. De no ser así, el lado derecho de cualquiera de las desigualdades es cero y la desigualdad se cumple trivialmente.

Tomando $[f]$ y S como antes podemos notar que $S[f]$ es un subespacio cerrado de ℓ_A^p pues S es una isometría. Denotaremos a la proyección métrica de f en $S[f]$ como $\tilde{f}$, esto es el punto más cercano a f en $S[f]$, el cual existe y es único pues ℓ_A^p es uniformemente convexo (véase Apéndice B). Dicha $\tilde{f} \in \ell_A^p$ satisface

$$\text{ínf}\,\{\|f - g\|_p \ : \ g \in S[f]\} = \|f - \tilde{f}\|_p.$$

Sea

$$f_1(z) := \frac{f(z)}{1 - z/w} = -w(Q_w f)(z),$$

donde Q_w denota como antes al operador

$$(Q_w f)(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}.$$

Notemos que por hipótesis f_1 es analítica en $\mathbb{D}$ y

$$f_1(0) = f(0) = a_0.$$

Más aún, por la Proposición 4.1.1, $f \in \ell^p_A$. Si denotamos por $\mathcal{P}$ a los polinomios analíticos tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_p \geq \left\|f - \tilde{f}\right\|_p \\
&= \operatorname{ínf}\{\|f+Q\|_p \ : \ Q \in S[f]\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\|f+fQ\|_p \ : \ Q \in S\mathcal{P}\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\|f(1+Q)\|_p \ : \ Q \in S\mathcal{P}\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\|fQ\|_p \ : \ Q \in \mathcal{P}, Q(0)=1\} \\
&= \operatorname{ínf}\left\{\left\|f_1(z)\left(1-\frac{z}{w}\right)Q(z)\right\|_p \ : \ Q \in \mathcal{P}, \ Q(0)=1\right\} \\
&= \operatorname{ínf}\left\{\left\|f_1(z)B_{p,w}(z)\left(1-w^{\langle p'-1\rangle}z\right)Q(z)\right\|_p \ : \ Q \in \mathcal{P}, \ Q(0)=1\right\}
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la definición que dimos anteriormente para $B_{p,w}$. Utilizamos ahora el lema que acabamos de probar sustituyendo $a = w^{\langle p'-1\rangle}$ y $g(z) = f_1(z)B_{p,w}(z)$, con lo cual podemos continuar la estimación como sigue

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{ínf}\left\{\|f_1(z)B_{p,w}(z)Q(z)\|_p \ : \ Q \in \mathcal{P}, \ Q(0)=1\right\} \\
&\geq \operatorname{ínf}\left\{|a_0|\|B_{p,w}(z)Q(z)\|_p \ : \ Q \in \mathcal{P}, \ Q(0)=1\right\}
\end{aligned}$$

pues $\|f_1\|_p \geq |f_1(0)|$.

Finalmente, por el inciso $a)$ del Lema 5.1, para cualquier

$$Q(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_N z^N$$

tenemos que

$$B_{p,w}(z) \perp_p B_{p,w}(z)(b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_N z^N).$$

De este modo, $\|B_{p,w}Q\|_p \geq \|B_{p,w}\|$ y gracias al inciso $b)$ del mismo lema, podemos concluir la estimación de la siguiente manera

$$\geq |a_0|\|B_{p,w}\|_p$$

$$= |a_0| \left[1 + \frac{(1 - |w|^{p'})^{p-1}}{|w|^p} \right]^{1/p}.$$

De aquí se sigue que

$$\frac{(1 - |w|^{p'})^{p-1}}{|w|^p} \leq \left| \frac{a_1}{a_0} \right|^p + \left| \frac{a_2}{a_0} \right|^p + \left| \frac{a_3}{a_0} \right|^p + \dots$$

Escribiendo

$$M := \left\{ \left| \frac{a_1}{a_0} \right|^p + \left| \frac{a_2}{a_0} \right|^p + \left| \frac{a_3}{a_0} \right|^p + \dots \right\}^{1/p}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - |w|^{p'})^{p-1}}{|w|^p} &\leq M^p \\
(1 - |w|^{p'})^{p-1} &\leq |w|^p M^p \\
(1 - |w|^{p'})^{1/p'} &\leq |w| M \\
1 - |w|^{p'} &\leq |w|^{p'} M^{p'} \\
\frac{1}{(M^{p'} + 1)^{1/p'}} &\leq |w|
\end{aligned}$$

lo cual prueba la última desigualdad del teorema.

Por último, notemos que sólo hace falta tomar límite cuando $p \to 1$ y $p \to \infty$ para obtener la primera y segunda desigualdades respectivamente, pues

$$\begin{aligned}
\left[\left| \frac{a_1}{a_0} \right| + \left| \frac{a_2}{a_0} \right| + \left| \frac{a_3}{a_0} \right| + \dots \right]^{-1} &= \lim_{p \to 1} \frac{(1 - |w|^{p'})^{p-1}}{M^p} \\
&\leq \lim_{p \to 1} |w|^p \\
&= |w|
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left[1 + \sup \left\{ \left| \frac{a_1}{a_0} \right|, \left| \frac{a_2}{a_0} \right|, \left| \frac{a_3}{a_0} \right|, \dots \right\} \right]^{-1} &\leq \lim_{p \to \infty} \frac{1}{(M^{p'} + 1)^{1 - 1/p}} \\
&\leq |w|.
\end{aligned}$$

■

5.3. Estimaciones de coeficientes

En virtud del Corolario 4.2.8 visto en el capítulo anterior, sabemos que si $h \in \mathcal{M}_p$ entonces h se encuentra en ℓ^p_A y tenemos la desigualdad

$$\|h\|_p \leq \|h\|_{\mathcal{M}_p}. \tag{5.3}$$

Esta estimación puede mejorarse utilizando $h^{\langle p-1\rangle}$ como antes. Veremos esto en la siguiente proposición.

Proposición 5.3.1. *Supongamos que* $p \in (1,\infty)$ *y* $h \in \mathcal{M}_p$ *con coeficientes de Taylor* $(a_k)_{k\geq 0}$*. Entonces*

$$\begin{aligned}\|h\|_p^{p-1}\|h\|_{\mathcal{M}_p} \geq \Big[&(|a_0|^p + |a_1|^p + |a_2|^p \dots)^{p'} \\ &+ \left|a_1^{\langle p-1\rangle}a_0 + a_2^{\langle p-1\rangle}a_1 + a_3^{\langle p-1\rangle}a_2 + \dots\right|^{p'} \\ &+ \left|a_2^{\langle p-1\rangle}a_0 + a_3^{\langle p-1\rangle}a_1 + a_4^{\langle p-1\rangle}a_2 + \dots\right|^{p'} \\ &+ \left|a_3^{\langle p-1\rangle}a_0 + a_4^{\langle p-1\rangle}a_1 + a_5^{\langle p-1\rangle}a_2 + \dots\right|^{p'} \\ &+ \dots\Big]^{1/p'}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ en ℓ^p_A. Denotaremos por $\mathbf{f}$ al isomorfo de f en ℓ^p, y por $\mathbf{hf}$ a la correspondiente sucesión para el producto hf. Entonces para cualquier $\mathbf{c} \in \ell^{p'}$ el funcional lineal

$$f \mapsto (\mathbf{hf}, \mathbf{c})$$

es continuo en ℓ^p_A con norma no mayor a $\|h\|_{\mathcal{M}_p}\|c\|_{p'}$, puesto que

$$|(\mathbf{hf}, \mathbf{c})| \leq \|h\|_{\mathcal{M}_p}\|f\|_p\|c\|_{p'}.$$

En particular, podemos considerar los vectores básicos para $\ell^{p'}$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0 &:= (1{,}0, 0, 0, \dots) \\ \mathbf{e}_1 &:= (0{,}1, 0, 0, \dots) \\ \mathbf{e}_2 &:= (0{,}0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots\end{aligned}$$

de donde podemos ver que

$$\begin{aligned}(\mathbf{hf}, \mathbf{e}_k) &= \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \\ &= (\mathbf{f}, (a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0, 0, \dots)).\end{aligned}$$

Sea

$$\mathbf{u}^{(k)} := (a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0, 0, \dots).$$

Entonces, para cualquier $\mathbf{c} := (c_0, c_1, c_2, \dots) \in \ell^{p'}$ tenemos

$$(\mathbf{hf}, \mathbf{c}) = \left(\mathbf{f}, \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{u}^{(k)}\right).$$

Si interpretamos la operación

$$\mathbf{f} \mapsto \left(\mathbf{f}, \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{u}^{(k)}\right)$$

como un funcional lineal acotado en ℓ^p, el Teorema de Representación de Riesz nos dice que la sucesión

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{u}^{(k)} &= c_0 \mathbf{u}^{(0)} + c_1 \mathbf{u}^{(1)} + c_2 \mathbf{u}^{(2)} + \dots \\ &= (c_0 a_0, 0, 0 \dots) + (c_1 a_1, c_1 a_0, 0, \dots) + (c_2 a_2, c_2 a_1, c_2 a_0, 0, \dots) + \dots \\ &= (c_0 a_0 + c_1 a_1 + \dots, c_1 a_0 + c_2 a_1 + \dots, c_2 a_0 + c_3 a_1 + \dots, \dots)\end{aligned}$$

debe pertenecer a $\ell^{p'}$.

Término a término esto significa que

$$\begin{aligned}&|c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots|^{p'} \\ &+ |c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \dots|^{p'} \\ &+ |c_2 a_0 + c_3 a_1 + c_4 a_2 + \dots|^{p'} \\ &+ \dots \\ &\leq \|h\|_{\mathcal{M}_p} \|c\|_{p'}^{p'}.\end{aligned}$$

Así, basta sustituir

$$\mathbf{c} = \left(a_0^{\langle p-1\rangle}, a_1^{\langle p-1\rangle}, a_2^{\langle p-1\rangle}, \dots\right) \in \ell^{p'}$$

para obtener el resultado deseado. ■

Observación 5.3.2. *Notemos que si consideramos únicamente la primera línea de* (5.4)*, es decir,*

$$\|h\|_p^{p-1}\|h\|_{\mathcal{M}_{p'}} \geq \left(|a_0|^p + |a_1|^p + |a_2|^p + \dots\right),$$

entonces obtenemos (5.3)*, por lo que la Proposición 5.3.1 mejora en gran medida la estimación en* (5.3)*.*

Además, notemos que si h es ortogonal a $z^k h$ $\forall k > 0$ en el sentido de Birkhoff-James en ℓ^p_A, entonces todas las líneas de (5.4)*, excepto la primera, son cero. Este es el caso cuando consideramos $h = B_{p,w}$.*

Conclusiones

Hemos trabajado la teoría fundamental de análisis funcional, complejo y teoría de la medida, necesaria para el desarrollo de esta tesis, que nos ha permitido conocer de alguna manera el comportamiento de las funciones que componen el espacio ℓ^p_A, así como sus multiplicadores.

Destacamos que el caso más sencillo de estudiar es el espacio ℓ^2_A, pues gracias a la teoría clásica de espacios de Hardy, podemos concluir que $\ell^2_A = H^2$, con la misma norma, por lo que hacemos uso de la amplia gama de estudios que existen sobre dicho espacio para analizar tanto su comportamiento frontera como el de sus multiplicadores, que resultan ser H^∞, el cual conocemos bastante bien, gracias al famoso Teorema de Fatou. Además, observamos que cuando $1 \leq p < 2$, los multiplicadores tienen incluso un mejor comportamiento frontera, contrario a lo que se obtiene al estudiar el caso $p > 2$.

Resulta sorprendente descubrir que el conjunto de multiplicadores de ℓ^p_A y el de su conjugado $\ell^{p'}_A$ son el mismo, a pesar de que dichos espacios son extremadamente distintos al examinar su comportamiento frontera.

Notamos que al darle noción de ortogonalidad a los espacios ℓ^p_A, considerando específicamente la ortogonalidad de Birkhoff-James, es posible aplicar estos conocimientos para obtener estimaciones para la distribución de los ceros de funciones analíticas en el disco unitario; además, aunando a esto la teoría previamente desarrollada sobre multiplicadores, podemos obtener una mejora considerable a la estimación de la norma en ℓ^p_A de un multiplicador.

Como mencionamos en la introducción, existen aún varias preguntas que permanecen abiertas para los espacios ℓ^p_A cuando $p \neq 2$, por lo que resulta un tema interesante para seguir trabajando en el futuro.

Apéndice A

Funciones de Rademacher

Las funciones de Rademacher son aquellas $\{\varphi_n(t)\}_{n\geq 0}$ tales que

$$\varphi_n(t) := \operatorname{sgn}\{\operatorname{sen}(2^n \pi t)\}, \ 0 \leq t \leq 1.$$

Así, tenemos por ejemplo

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1, \ \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ -1, \ \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \\ 0, \ \text{si } t = 0, \frac{1}{2}, 1. \end{cases}$$

En general, podemos notar que la función $\varphi_n(t)$ se anula en múltiplos de 2^{-n} y toma los valores $1, \ -1$ fuera de dichas cantidades. Observemos por ejemplo A.1, A.2 y A.3. Llamaremos R al conjunto de racionales diádicos en $[0, 1]$, es decir, elementos de la forma $m2^{-n}$ $(m = 0, 1, \ldots, 2^n; n = 1, 2, \ldots)$.

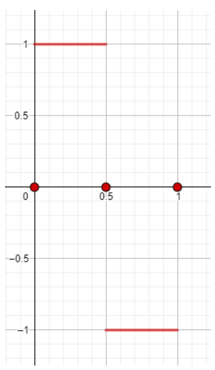

Figura A.1: n=1

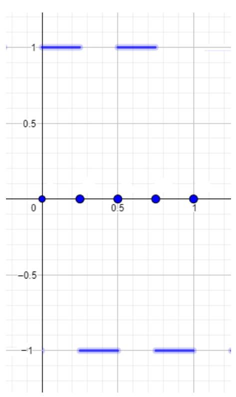

Figura A.2: n=2

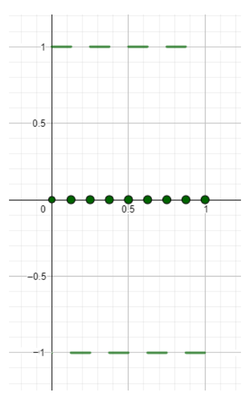

Figura A.3: n=3

Teorema A.0.1. *Sean* $a_1, a_2, \ldots$ *números complejos tales que* $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$. *Entonces la serie* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(t)$ *converge casi en todas partes.*

Demostración. Sea

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t).$$

Por el Teorema de Riesz-Fischer 1.2.4, existe una función $\phi(t)$ en L^2 tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\phi(t) - s_n(t)|^2 dt = 0.$$

En particular $\phi(t)$ es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta s_n(t)dt = \int_\alpha^\beta \phi(t)dt, \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1. \tag{A.1}$$

Para casi todo $t \in [0,1]$ la integral indefinida $\int_0^t \phi(u)du$ tiene derivada $\phi(t)$; sea $t_0 \notin R$ uno de esos puntos. Para cada entero m existe un único intervalo tal que $t_0 \in (\alpha_m, \beta_m)$, el cual es de la forma $\left(\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right)$. En dicho intervalo, la función $\varphi_k(t)$ es constante si $k \leq m$, pero toma los valores ± 1 (en igual cantidad de ocasiones) si $k > m$.

Así,

$$\int_{\alpha_m}^{\beta_m} [s_n(t) - s_m(t)]\, dt = 0, \quad \text{si } n > m.$$

En vista de (A.1) concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} [s_n(t) - s_m(t)]\, dt \\ &= \int_{\alpha_m}^{\beta_m} [\phi(t) - s_m(t)]\, dt. \end{aligned}$$

Luego, como $s_m(t)$ es constante en (α_m, β_m), tenemos que, por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue

$$s_m(t_0) = \frac{1}{\beta_m - \alpha_m} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \phi(t)dt \xrightarrow[m\to\infty]{} \phi(t_0).$$

De este modo, $(s_n(t))_{n\geq 1}$ converge casi en todas partes. ∎

Corolario A.0.2. *Si $\{\Psi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal en $L^2[a,b]$, y si $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2<\infty$, entonces para casi cualquier elección de signos $\{\epsilon_n\}$ la serie*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_j a_j \Psi_j(x)$$

converge casi en todas partes.

Demostración. Por el Teorema de Convergencia Monótona de Lebesgue, la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j\Psi_j(x)|^2$$

converge casi en todas partes.

Luego, para casi todo $x\in[a,b]$ tenemos que por el Teorema A.0.1

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j\varphi_j(t)\Psi_j(x) \tag{A.2}$$

converge para casi todo $t\in[a,b]$. Sea E el conjunto de todos los puntos (t,x) en los cuales (A.2) converge, y sea $\Gamma(t,x)$ la función característica en E.

Hemos observado que para casi todo x, $\Gamma(t,x)=1$ para casi todo t. Luego, por el Teorema de Fubini tenemos que

$$(b-a)=\int_a^b\int_0^1\Gamma(t,x)dtdx=\int_0^1\int_a^b\Gamma(t,x)dxdt.$$

Sin embargo, si el corolario fuese falso el lado derecho tendría un valor menor a $b-a$, por lo que éste debe ser verdadero. ■

Teorema A.0.3. *Si $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2=\infty$, entonces $\sum_{j=1}^{\infty}a_j\varphi_j(t)$ diverge casi en todas partes.*

Demostración. Supongamos que las sumas parciales $s_n(t)$ son acotadas en un conjunto E de medida $|E|>0$. Entonces

$$|s_n(t)-s_m(t)|\leq C,\quad 1\leq m<n,\ t\in E,$$

donde C es constante. Se sigue que

$$\begin{aligned} C^2|E| &\geq \int_E \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \varphi_k(t) \right|^2 dt \\ &= |E| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=m+1 \\ j<k}}^{n} \operatorname{Re}\{a_j \overline{a_k}\} \int_E \varphi_j(t)\varphi_k(t) dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\varphi_j(t)\varphi_k(t)$ es ortonormal en $[0,1]$. Sea $\Gamma(t)$ la función característica de E. Por la desigualdad de Bessel tenemos que

$$\sum_{\substack{j,k=m+1 \\ j<k}}^{\infty} |(\Gamma, \varphi_j\varphi_k)|^2 \leq (\Gamma, \Gamma)$$

$$\sum_{\substack{j,k=m+1 \\ j<k}}^{\infty} \left\{ \int_E \varphi_j(t)\varphi_k(t) dt \right\}^2 \leq \int_0^1 [\Gamma(t)]^2 \, dt < \infty.$$

Se sigue que para m suficientemente grande

$$\sum_{\substack{j,k=m+1 \\ j<k}}^{\infty} \left\{ \int_E \varphi_j(t)\varphi_k(t) dt \right\}^2 \leq \left[\frac{|E|}{4} \right]^2.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \left| 2 \sum_{\substack{j,k=m+1 \\ j<k}}^{\infty} \operatorname{Re}\{a_j \overline{a_k}\} \int_E \varphi_j(t)\varphi_k(t) dt \right|^2 &\leq 4 \sum_{\substack{j,k=m+1 \\ j<k}}^{\infty} |a_j|^2 |a_k|^2 \left\{ \int_E \varphi_j(t)\varphi_k(t) dt \right\}^2 \\ &\leq \frac{|E|^2}{4} \sum_{\substack{j,k=m+1 \\ j<k}}^{\infty} |a_j|^2 |a_k|^2 \\ &\leq \frac{|E|^2}{4} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|^2 \right]^2, \end{aligned}$$

donde la última expresión se debe a la desigualdad de Schwarz. Así,

$$\left| 2 \sum_{\substack{j,k=m+1 \\ j<k}}^{\infty} \operatorname{Re}\{a_j \overline{a_k}\} \int_E \varphi_j(t)\varphi_k(t) dt \right| \leq \frac{|E|}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Y por tanto

$$\frac{|E|}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k|^2 \leq C^2|E|,$$

lo cual implicaría la convergencia de la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2 < \infty.$$

■

Teorema A.0.4. *Sean $g_1(z), g_2(z), \ldots$ funciones con valores en los complejos, cada una de las cuales es continua en $|z| \leq 1$ excepto tal vez en un número finito de puntos en $|z| = 1$. Supongamos que*

a) $\sum_{j=1}^{\infty}|g_j(z)| < \infty$ *en $|z| < 1$, donde la convergencia es uniforme en cada disco $|z| \leq 1$;*

b) Para cada N, $\sum_{j=N}^{\infty}|g_j(re^{i\theta})|^2 \to \infty$ *uniformemente en θ cuando $r \to 1$.*

Entonces, para casi toda elección de signos $\{\epsilon_n\}$, la función

$$G(z) = \sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_j g_j(z)$$

no tiene límite radial casi en ninguna parte. (Esto es, los θ's para las cuales $\lim_{r\to 1} G(re^{i\theta})$ existe, constituyen un conjunto de medida cero).

Demostración. Por la hipótesis a), la función

$$F(r,\theta,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(t)g_j(re^{i\theta})$$

está bien definida para todo $r \in [0,1)$, $\theta \in [0,2\pi]$ y $t \in [0,1]$, y es continua en r y θ.

Sea

$$\mathcal{E} = \left\{(\theta,t) : \lim_{r\to 1} F(r,\theta,t) \text{ no existe}\right\}.$$

Mostraremos que para cada $\theta \in [0,2\pi]$ la "θ-sección" $\mathcal{E}_\theta = \{t : (\theta,t) \in \mathcal{E}\}$ tiene medida $|\mathcal{E}_\theta| = 1$. Se seguirá por el Teorema de Fubini, como en la prueba del Corolario A.0.2

que para casi todo $t \in [0,1]$ el conjunto $\mathcal{E}^t = \{\theta : (\theta, t) \in \mathcal{E}\}$ tiene medida 2π, como el teorema afirma.

Supongamos entonces que $|\mathcal{E}_\theta| < 1$ para algún θ fijo. Entonces el conjunto complementario $\tilde{\mathcal{E}_\theta}$ tiene medida $\alpha = |\tilde{\mathcal{E}_\theta}| = 1 - |\mathcal{E}_\theta| > 0$ y $F(r, \theta, t)$ tiene un límite radial finito para todo $t \in \tilde{\mathcal{E}_\theta}$.

Por la definición de $\tilde{\mathcal{E}_\theta}$, podemos concluir que

$$F_N(r, \theta, t) = \sum_{j=N}^{\infty} \varphi_j(t) g_j(re^{i\theta}), \quad N = 1, 2, \ldots$$

tiene límite radial para todo t en un conjunto A de medida α, obtenido de $\tilde{\mathcal{E}_\theta}$ por la eliminación de un conjunto numerable.

Ahora, para $K = 1, 2, \ldots$, sea

$$B_K = \{t \in A : |F(r, \theta, t)| \leq K \ \forall r > 1\}.$$

Entonces, $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ y $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_K = A$, así, $|B_K| \to |A| = \alpha$.

Elijamos $K = K_1$ suficientemente grande tal que $|B_{K_1}| \geq \frac{3}{4}\alpha$ y sea $A_1 = B_{K_1}$. Entonces $|F(r, \theta, t)| \leq K_1$ para todo $t \in A_1$ y $r < 1$.

Similarmente, hay un conjunto $A_2 \subset A_1$ y una constante K_2 tal que $|A_2| \geq \frac{5}{8}\alpha$ y $|F_2(r, \theta, t)| \leq K_2$ si $t \in A_2$ y $r < 1$.

Procediendo inductivamente, podemos construir una sucesión de conjuntos

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_N \supset \ldots$$

y una sucesión $\{K_N\}_{N \geq 1}$ tal que

$$|A_N| \geq \frac{\alpha}{2}(1 + 2^{-N})$$

y

$$|F_N(r, \theta, t)| \leq K_N, \ t \in A_N, \ r < 1.$$

Finalmente, sea $B = \bigcap_{N=1}^{\infty} A_N$. Entonces $|B| \geq \frac{\alpha}{2} > 0$ y

$$\int_B |F_N(r,\theta,t)|^2 dt \leq |B| K_N^2 \quad r < 1, \;\; N = 1, 2, \ldots. \tag{A.3}$$

Ahora estamos en condiciones de imitar la prueba del Teorema A.0.3. Primero fijemos N suficientemente grande tal que

$$\sum_{\substack{j,k=N+1 \\ j<k}}^{\infty} \left\{ \int_E \varphi_j(t)\varphi_k(t) dt \right\}^2 < \frac{|B|^2}{16}.$$

En vista de (A.3) y la desigualdad de Schwarz (como en A.0.3) tenemos que

$$\frac{|B|}{2} \sum_{j=N}^{\infty} |g_n(re^{i\theta})|^2 \leq |B| K_N^2 \quad \text{o} \quad \sum_{j=N}^{\infty} |g_n(re^{i\theta})|^2 \leq 2K_N^2.$$

Pero esto contradice la hipótesis b). Así, $|\mathcal{E}_\theta| = 1$ para todo θ, y la prueba está completa.

$\blacksquare$

Apéndice B

Convexidad uniforme

Sea X un espacio normado. Denotamos por S_X a la esfera unitaria en X. Definimos $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ por

$$\delta_X(\epsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_X, \|x-y\| \geq \epsilon\right\}$$

si $X \neq \{0\}$, y por

$$\delta_X(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{si } \epsilon = 0 \\ 1, & \text{si } 0 < \epsilon \leq 2 \end{cases}$$

si $X = \{0\}$. Entonces δ_X es el *módulo de convexidad* de X, y diremos que el espacio X es *uniformemente convexo* si $\delta_X(\epsilon) > 0$ siempre que $0 < \epsilon \leq 2$.

Recordamos que un espacio X es estrictamente convexo si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in S_X$ y $0 < t < 1$ se tiene que

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\| < 1.$$

Además, diremos que un conjunto A es de Chebyshev en X si para cada elemento $x \in X$ hay exactamente un elemento $y \in A$ tal que $d(x,y) = d(x,A)$.

Corolario B.0.1. *Si un espacio normado es estrictamente convexo y reflexivo, entonces cada subconjunto cerrado, convexo, no vacío, es un conjunto de Chebyshev.*

Demostración. Sea $C \neq \emptyset$ un subconjunto cerrado y convexo de un espacio normado reflexivo X, y sea $x_0 \in X$. Entonces existe una sucesión $(y_n)_{n\geq 0} \subset C$ tal que

$$\lim_{n\geq 0} \|y_n - x_0\| = d(x_0, C).$$

Como X es reflexivo, hay una subsucesión (y_{n_j}) de la sucesión acotada $(y_n)_{n\geq 0}$ tal que converge débilmente a algún y_0 (véase [4]).

Entonces, $y_0 \in C$ pues C es débilmente cerrado y y_0 es un punto de C más cercano a x_0, pues

$$d(x_0, C) \leq \|y_0 - x_0\| \leq \liminf \|y_{n_j} - x_0\| = d(x_0, C).$$

Así, hay al menos un punto de C más cercano a x_0.

Finalmente, la convexidad estricta de X implica que si $x \in X$ no hay más de un $y \in C$ tal que $d(x, y) = d(x, C)$. ■

Teorema B.0.2. *Un espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

Para la prueba de este teorema véase Carothers [4]. El siguiente lema nos será de utilidad para demostrar que L^p es uniformemente convexo, para una prueba de éste, véase Megginson [15].

Lema B.1. *Sea $p \in (1, \infty)$. Entonces existe una función $\gamma_p : (0, 2] \to (0, 1]$ tal que*

$$\left|\frac{\alpha + \beta}{2}\right|^p \leq (1 - \gamma_p(t)) \left(\frac{|\alpha|^p + |\beta|^p}{2}\right),$$

donde $0 < t \leq 2$ y $|\alpha - \beta| \geq t \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Teorema B.0.3. *Supongamos que μ es una medida positiva en una $\sigma-$álgebra Σ de subconjuntos de Ω y $p \in (1, \infty)$. Entonces $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ es uniformemente convexo.*

Demostración. Supongamos que $f_1, f_2 \in S_{L^p}$, es decir, $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$, y supongamos también que $\|f_1 - f_2\|_p \geq \epsilon > 0$.

Sea

$$A = \left\{\omega \in \Omega : |f_1(\omega) - f_2(\omega)|^p \geq \frac{\epsilon^p}{4}(|f_1(\omega)|^p + |f_2(\omega)|^p)\right\}$$

y observemos que

$$|f_1(\omega) - f_2(\omega)| \geq \frac{\epsilon}{4^{1/p}} \max\{|f_1|, |f_2|\},$$

cuando $\omega \in A$.

Sea γ_p como en el Lema B.1, se sigue que

$$\left|\frac{f_1(\omega)+f_2(\omega)}{2}\right|^p \leq (1-\gamma_p(t))\left(\frac{|f_1(\omega)|^p+|f_2(\omega)|^p}{2}\right),$$

siempre que $\omega \in A$, y

$$\left|\frac{f_1(\omega)+f_2(\omega)}{2}\right|^p \leq \frac{|f_1(\omega)|^p+|f_2(\omega)|^p}{2}$$

si $\omega \in \Omega$, por lo que

$$\begin{aligned}
1-\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|_p^p &= \int_\Omega \left(\frac{|f_1|^p+|f_2|^p}{2} - \left|\frac{f_1+f_2}{2}\right|^p\right) d\mu \\
&\geq \int_A \left(\frac{|f_1|^p+|f_2|^p}{2} - \left|\frac{f_1+f_2}{2}\right|^p\right) d\mu \\
&\geq \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{1/p}}\right)\int_A \frac{|f_1|^p+|f_2|^p}{2} d\mu.
\end{aligned}$$

Si χ_A es la función característica de A, entonces

$$\begin{aligned}
\|f_1\chi_A - f_2\chi_A\|_p^p &= \|f_1-f_2\|_p^p - \int_{\Omega\setminus A} |f_1-f_2|^p d\mu \\
&\geq \epsilon^p - \frac{\epsilon^p}{4}\int_{\Omega\setminus A} (|f_1|^p+|f_2|^p) d\mu \\
&\geq \epsilon^p - \frac{\epsilon^p}{4}(\|f_1\|_p^p+\|f_2\|_p^p) \\
&= \frac{\epsilon^p}{2}.
\end{aligned}$$

Además,

$$\|f_1\chi_A - f_2\chi_A\|_p^p \leq 2^p\left(\|f_1\chi_A\|_p^p + \|f_2\chi_A\|_p^p\right)$$

por lo que

$$\|f_1\chi_A\|_p^p + \|f_2\chi_A\|_p^p \geq \frac{\epsilon^p}{2^{p+1}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
1-\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|_p^p &\geq \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{1/p}}\right)\frac{\|f_1\chi_A\|_p^p+\|f_2\chi_A\|_p^p}{2} \\
&\geq \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{1/p}}\right)\frac{\epsilon}{2^{p+2}}
\end{aligned}$$

y así

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|_p^p \leq \left(1-\gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{1/p}}\right)\frac{\epsilon}{2^{p+2}}\right)^{1/p} < 1$$

lo que implica

$$\delta_{L^p}(\epsilon) > 0,$$

probando así la convexidad uniforme. ■

Notación

$\mathbb{D}$	Disco unitario	Pág. 3
$\mathcal{H}(\mathbb{D})$	Conjunto de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$	4
H^p	Espacios de Hardy	5
$\mathcal{N}$	Clase Nevanlinna	5
$D(x, r)$	Disco abierto centrado en x de radio r	6
$P_r(t)$	Núcleo de Poisson en $\mathbb{D}$	6
$P(f)$	Integral de Poisson de la función f	6
$L^p(\mathbb{T})$	Espacios de Lebesgue	6
$\mathbb{T}$	Frontera del disco unitario	7
$\operatorname{Re} G$	Parte real de la función G	12
$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales	12
$\mathbb{C}$	Conjunto de números complejos	13
$B(z)$	Producto de Blashke	14
p'	Exponente conjugado de p	14
$\mathcal{H}$	Espacio funcional de Hilbert	21
$K(w, z)$	Núcleo reproductor de $\mathcal{H}$	22
$\delta_{k,n}$	Sucesión con n-ésimo término 1 y 0 en otro caso	23
$L^2_a(\mathbb{D})$	Espacio de Bergman	24
$\mathcal{D}$	Espacio de Dirichlet	25
ℓ^p	Espacio de Lebesgue discreto	29
ℓ^p_A	Espacio de funciones analíticas con coeficientes de Taylor en ℓ^p	29
$\mathcal{M}_p$	Conjunto de multiplicadores de ℓ^p_A	47
$\{S\}'$	Conmutador del operador S	50
$\mathbb{Z}$	Conjunto de números enteros	53
$\hat{f}(n)$	Coeficientes de Fourier de la función f	56
$f \diamond g$	Producto de Hadamard de f y g	69
$x \perp y$	x es ortogonal a y	73
$x \perp_X y$	x es ortogonal a y en el sentido de Birkhoff-James	74
$F'(\lambda^+)$	Derivada lateral derecha de F en λ	75
$\mathcal{P}$	Conjunto de polinomios analíticos	84

Bibliografía

[1] J. Agler and J. E. McCarthy. *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, volume 44. American Mathematical Society, 2002.

[2] J. Alvarez and M. Guzmán-Partida. Ortogonalidad en espacios normados. *Laberintos e Infinitos*, (42):6–11, 2016.

[3] J. M. Ash and M. T. Karaev. On the boundary behavior of special classes of C^∞-functions and analytic functions. *Int. Math. Forum*, 7(1-4):153–166, 2012. ISSN 1312-7594.

[4] N. Carothers. *A Short Course on Banach Space Theory*. Cambridge University Press, 2004.

[5] R. Cheng, J. Mashreghi, and W. Ross. Multipliers of sequence spaces. *Concrete operators*, 4(1):76–108, 2017. doi: 10.1515/conop-2017-0007. URL `https://doi.org/10.1515/conop-2017-0007`.

[6] R. Cheng, J. Mashreghi, and W. T. Ross. Birkhoff-James orthogonality and the zeros of an analytic function. *Comput. Methods Funct. Theory*, 17(3):499–523, 2017. ISSN 1617-9447. doi: 10.1007/s40315-017-0191-5. URL `https://doi.org/10.1007/s40315-017-0191-5`.

[7] R. Cheng, J. Mashreghi, and W. Ross. Inner functions and zero sets for ℓ^p_a. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2018. doi: 10.1090/tran/7675. URL `https://doi.org/10.1090/tran/7675`.

[8] S. S. Dragomir. Orthogonality in the sense of Birkhoff-James. *Semi-Inner Products and Applications*, pages 125–130, 1991.

[9] P. L. Duren. *Theory of H^p Spaces*. Academic Press, Inc., 1970.

[10] J. García-Cuerva and J. Rubio de Francia. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*. North Holland, 1991.

[11] J. B. Garnett. *Bounded Analytic Functions*. Springer, 2007.

[12] K. Hoffman. *Banach Spaces of Analytic Functions*. Prentice-Hail, Inc., 1962.

[13] R. C. James. Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61:265–292, 1947. doi: 10.1090/S0002-9947-1947-0021241-4. URL `https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1947-0021241-4`.

[14] Y. Katzneltson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Dover Publications, Inc., 1976.

[15] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer, 1998.

[16] A. Ndoye. *Birkhoff-James Orthogonality, The Zeros of an Analytic Function and Multipliers of Sequence Spaces*. PhD thesis, 06 2017.

[17] A. Pietsch. *History of Banach Spaces and Linear Operators*. Birkhäuser Boston, 2007. ISBN 9780817645960. URL `https://books.google.com.mx/books?id=MMorKHumdZAC`.