UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

El Teorema de Banach-Zarecki para funciones con valores en un espacio métrico

T E S I S

Que para obtener el grado académico:

Maestra en Ciencias

(Matemáticas)

Presenta:

Anel Margarita Galaviz Cuen

Directora de tesis: Dra. Martha Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México Agosto de 2016

SINODALES

Dra. Martha Guzmán Partida
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

Dr. Fernando Luque Vásquez
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

Dr. Martín G. García Alvarado
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora.

Dr. Jorge Rivera Noriega
Universidad Autónoma del Estado de Morelos,
Cuernavaca, Morelos.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por todo lo que me ha dado, gracias a Él por permitirme lograr mis metas y todo lo que me he propuesto hasta hoy, tanto en lo personal como profesional.

Le doy gracias a mi familia por estar siempre a mi lado, por su cariño y esfuerzos dedicados. Un agradecimiento especial a Francisca Cuen y Jesús Galaviz, mis padres, gracias por sus esfuerzos, por sus consejos y guiar mi camino, mis logros son de ustedes.

Gracias mi Max porque estuviste a mi lado desde el comienzo apoyándome, inclusive en los momentos y situaciones más difíciles, siempre ayudándome, eres maravilloso. Tenías razón mi amor, si lo logré.

Muchas gracias a mi directora de tesis y profesora Dra. Martha Guzmán, por sus consejos y apoyo, gracias por sus regaños (que fueron más que necesarios), por el tiempo dedicado a la preparación y revisión de este trabajo, a sus excelentes clases y sus enseñanzas, no se como pagarle, es un ejemplo a seguir para mí, la admiro y aprecio mucho.

Quiero agradecer a mis sinodales Dr. Fernando Luque, Dr. Martín Gildardo y Dr. Jorge Rivera, por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo, gracias por sus observaciones y correcciones, sin olvidar a la profesora Marysol Navarro, por sus consejos oportunos durante mis estudios de maestía, le estoy muy agradecida.

Índice general

Introducción

En 1925 Stefan Banach publicó el artículo *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie* [2] en el que introduce la función de multiplicidad de Banach o indicatriz de Banach y también demuestra que la condición necesaria y suficiente para que una función continua y de variación acotada f definida en un intervalo $[a, b]$ y de valores reales sea absolutamente continua es que todo conjunto de medida de Lebesgue cero en $[a, b]$ sea transformado en un conjunto de medida de Lebesgue cero, respondiendo así a una pregunta formulada por H. Hahn en su libro *Théorie der reellen Funktionen* (1921).

Las funciones que transforman un conjunto de medida de Lebesgue cero en $[a, b]$ en un conjunto de medida de Lebesgue cero se dice que gozan de la propiedad (N) o propiedad de Luzin, la cual fue introducida por Luzin en su notable memoria de 1915 sobre integración y series trigonométricas. De este modo, el teorema de Banach nos dice que en la clase de funciones continuas y de variación acotada, la propiedad de Luzin equivale a la continuidad absoluta. Esto es también una consecuencia del teorema de Radon-Nikodym.

El teorema de Banach también fue probado, de manera independiente, por Moisej A. Zaretsky en 1925. La traducción del texto en ruso de I.P. Natanson al idioma inglés utiliza la ortografía “Zarecki”, por lo que se le conoce como el teorema de Banach-Zarecki; dicho teorema es la fuente del estudio principal de este trabajo: una generalización del teorema para funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}$ y con valores en un espacio métrico X. Este caso general del teorema de Banach-Zarecki ha sido demostrado en [6] por J. Duda y L. Zajíček en el año 2005 y es la versión que desarrollamos al final de este trabajo.

Con la finalidad de probar el caso general del teorema de Banach-Zarecki, se presentan resultados importantes sobre las funciones de variación acotada. La tesis consta de tres capítulos, donde el primero expone resultados ampliamente conocidos sobre las funciones de variación acotada definidas en un intervalo $[a, b]$ y de valores reales, por ejemplo, que el espacio de este tipo de funciones es de Banach y el criterio de Jordan sobre convergencia de series de Fourier, finalizando con el teorema de Banach-Zarecki que se demuestra utilizando la ya mencionada función indicatriz de Banach.

La descomposición de Jordan es un resultado ampliamente conocido que caracteriza a las funciones de variación acotada definidas en un intervalo $[a, b]$ y de valores reales. Como nuestro interés radica en las funciones con valores en un espacio métrico, en el segundo capítulo se exponen algunos resultados para las funciones de variación acotada de este tipo, resultados necesarios e importantes, tales como el teorema de estructura que es una generalización de la descomposición de Jordan, con el cual establecemos un teorema de existencia de caminos geodésicos Lipschitz y mostramos un análogo para espacios métricos del famoso principio de selección de Helly.

La importancia del teorema de estructura y la función indicatriz de Banach radica en el hecho de que son herramientas esenciales para probar el caso general del teorema de Banach-Zarecki, como se puede ver en el tercer y último capítulo. Dicho capítulo inicia con un acercamiento a la medida de Hausdorff en $\mathbb{R}^n$, con la intención de presentar la medida de Hausdorff $r-$dimensional en un espacio métrico X en un contexto natural, ya que es necesaria la noción de medida en un espacio métrico al hablar de la propiedad de Luzin o propiedad (N). Finalmente probamos el caso general del teorema de Banach-Zarecki sobre la continuidad absoluta y la propiedad de Luzin.

Capítulo 1

Funciones escalares de variación acotada y el Teorema de Banach-Zarecki

Los resultados que presentamos en este capítulo son ampliamente conocidos y han sido tomados de [13], [1], [7] y [3]. Nuestro interés principal es probar una caracterización (debida a S. Banach y M. A. Zarecki) de la clase de funciones absolutamente continuas definidas en un intervalo $[a, b]$ y con valores reales. Uno de los elementos más interesantes de la prueba que presentamos es el uso de la función indicatriz de Banach.

1.1. Funciones de variación acotada

Las funciones de variación acotada fueron introducidas en 1881 por Camille Jordan, quien investigaba condiciones suficientes que permitieran expresar a una función f como su serie de Fourier. Todas las funciones que consideraremos aquí serán funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Daremos inicio recordando algunas definiciones y resultados elementales.

Definición 1.1.1. *Si* $[a, b]$ *es un intervalo compacto, un conjunto de puntos*

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

donde

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

se llama una partición de $[a,b]$*, y a veces escribiremos*

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}.$$

El intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ *se llama el* $k-$*ésimo subintervalo de* P *y su longitud es* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$*, por lo que* $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$*. La colección de todas las particiones posibles de* $[a,b]$ *se denota por* $\mathscr{P}[a,b]$*.*

Definición 1.1.2. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Si existe un número positivo* M *tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M$$

para toda partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ *de* $[a,b]$*, diremos que* f *es de variación acotada en* $[a,b]$*.*

El siguiente teorema proporciona ejemplos de funciones de variación acotada en $[a,b]$. La demostración puede encontrarse en [1], pp. $154 - 159$.

Teorema 1.1.3. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *entonces*

1. *La suma, la diferencia y el producto de funciones de variación acotada en* $[a,b]$ *es de variación acotada en* $[a,b]$*.*
2. *Si* f *es monótona en* $[a,b]$ *entonces* f *es de variación acotada en* $[a,b]$*.*
3. *Si* f *es continua en* $[a,b]$ *y si* f' *existe y está acotada en el interior, es decir,* $|f'(x)| \leq A$ *para todo* $x \in (a,b)$*, entonces* f *es de variación acotada en* $[a,b]$*.*
4. *Si* f *es de variación acotada en* $[a,b]$*, entonces* f *está acotada en* $[a,b]$*.*
5. *(Descomposición de Jordan). Una función es de variación acotada en* $[a,b]$ *si, y sólo si, es la diferencia de dos funciones crecientes.*

Enseguida definimos el concepto de variación total.

Definición 1.1.4. *Sea f una función de variación acotada en $[a,b]$ y sea V_P la suma $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ correspondiente a la partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ de $[a,b]$. El número*

$$V_f(a,b) = \sup\{V_P \mid P \in \mathscr{P}[a,b]\},$$

se llama la variación total de f en el intervalo $[a,b]$.

Si no hay peligro de confusión, escribiremos V_f en vez de $V_f(a,b)$. Claramente $V_f \geq 0$ y además $V_f(a,b) = 0$ si, y sólo si, f es constante en $[a,b]$. Además se tiene el siguiente resultado cuya prueba puede consultarse en [1] p. 157.

Teorema 1.1.5. *Sea f de variación acotada en $[a,b]$, y supongamos que $c \in (a,b)$. Entonces f es de variación acotada en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y se tiene que*

$$V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b).$$

Denotamos por $BV[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es de variación acotada en } [a,b]\}$ y para $f \in BV[a,b]$ definimos $\|f\| := |f(a)| + V_f$. Es fácil ver que $\|.\|$ es una norma. Más aún podemos probar lo siguiente:

Teorema 1.1.6. *El espacio $(BV[a,b], \|.\|)$ es de Banach.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $BV[a,b]$. Así, dado $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\| < \epsilon$, es decir

$$V_{f_n - f_m} + |f_n(a) - f_m(a)| < \epsilon \text{ para } n, m \geq N \tag{1.1}$$

Esto implica que $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto existe $f(a) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a).$$

Consideremos ahora $a < x \leq b$ y sea $P = \{a, x, b\} \in \mathscr{P}([a,b])$. De (1.1) tenemos que

$$|f_n(a) - f_m(a)| + |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)| + |(f_n - f_m)(b) - (f_n - f_m)(x)| < \epsilon.$$

Si $n, m \geq N$ entonces

$$|f_n(a) - f_m(a)| + |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)| < \epsilon$$

y así

$$|(f_n - f_m)(a)| + |(f_n - f_m(x))| - |(f_n - f_m)(a)| < \epsilon.$$

Luego

$$|(f_n - f_m)(x)| < \epsilon \text{ para todo } n, m \geq N \text{ y } x \in [a, b].$$

Así $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto existe

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Veamos que $f \in BV[a, b]$. Sea $P \in \mathscr{P}([a, b])$, digamos $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_r = b\}$ y fijemos $n \geq N$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r} |(f_n - f)(x_k) - (f_n - f)(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{r} \lim_{m\to\infty} |(f_n - f_m)(x_k) - (f_n - f_m)(x_{k-1})| \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{r} |(f_n - f_m)(x_k) - (f_n - f_m)(x_{k-1})| \\
&\leq \overline{\lim_{m\to\infty}} V_{f_n - f_m} \\
&\leq \epsilon,
\end{aligned}$$

por (1.1). Entonces $f_n - f \in BV[a, b]$ para todo $n \geq N$ y como $f_n \in BV[a, b]$ se sigue que $f \in BV[a, b]$.

Falta ver que $f_n \to f$ en $BV[a, b]$. En efecto, por (1.1)

$$\sum_{k=1}^{r} |(f_n - f_m)(x_k) - (f_n - f_m)(x_{k-1})| + |f_n(a) - f_m(a)| < \epsilon \quad \text{si } n, m \geq N.$$

Fijamos $n \geq N$ y tomamos el límite cuando $m \to \infty$ y obtenemos

$$\sum_{k=1}^{r} |(f_n - f)(x_k) - (f_n - f)(x_{k-1})| + |f_n(a) - f(a)| \leq \epsilon,$$

lo cual implica que

$$V_{f_n - f} + |f_n(a) - f(a)| \leq \epsilon \quad \text{si } n \geq N$$

por lo tanto,

$$\|f_n - f\| = V_{f_n - f} + |f_n(a) - f(a)| \leq \epsilon \quad \text{si } n \geq N.$$

■

El teorema que presentamos a continuación es un resultado clásico de la teoría de series de Fourier que muestra la importancia del concepto de variación acotada.

Recordemos que $S_N f(x)$ representa la $N-$ésima suma parcial de la serie de Fourier de f en x, esto es

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{inx},$$

donde $\widehat{f}(n)$ es el coeficiente de Fourier de f en n, esto es

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} dt.$$

Escribiremos $f(x^+)$ y $f(x^-)$ para denotar los límites por la derecha y por la izquierda de f en x, respectivamente.

Teorema 1.1.7. *(Criterio de Jordan). Si f es una función $2\pi-$periódica y de variación acotada en una vecindad del punto x, entonces*

$$\lim_{N \to \infty} S_N f(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)].$$

En particular, si f es continua en x, la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$.

Demostración. Puesto que toda función de variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes, sin pérdida de generalidad podemos suponer que f es creciente en una vecindad de x.

Recordemos que $S_N f = D_N * f$, donde D_N es el núcleo de Dirichlet, esto es

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}, \qquad t \in T$$

donde T aquí representa la frontera del disco unitario. Por consiguiente, como $D_N(t) = D_N(-t)$ tendremos

$$\begin{aligned} S_N f(x) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)dt \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x-t)+f(x+t)]D_N(t)dt. \end{aligned}$$

Tampoco hay pérdida de generalidad en suponer que $x = 0$, ya que si demostramos que para funciones g crecientes en una vecindad de 0, se tienen las siguientes igualdades

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t)D_N(t)dt = \frac{1}{2}g(0^+) \tag{1.2}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(-t)D_N(t)dt = \frac{1}{2}g(0^-) \tag{1.3}$$

tenemos con esto lo requerido para $x = 0$ y así, en el caso general podemos considerar la función $f_x(t) = f(x+t)$ la cual es creciente en una vecindad de 0, por lo que aplicando lo previamente demostrado obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)D_N(t)dt =& \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f_x(t)D_N(t)dt \\ =& \frac{1}{2}f_x(0^+) \\ =& \frac{1}{2}f(x^+) \end{aligned}$$

y

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f_x(-t)D_N(t)dt = \frac{1}{2}f_x(0^-) = \frac{1}{2}f(x^-),$$

es decir,

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)].$$

Probaremos (1.2) (la prueba de (1.3) es similar). Notemos que también podemos suponer sin pérdida de generalidad que $g(0^+) = 0$, pues si probamos (1.2) para este tipo de funciones, en el caso general para g podemos considerar la función $G(t) = g(t) - g(0^+)$ la cual es creciente en una vecindad de 0 y $G(0^+) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned}
0 = \frac{1}{2}G(0^+) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi G(t)D_N(t)dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [g(t) - g(0^+)]D_N(t)dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(t)D_N(t)dt - g(0^+)\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi D_N(t)dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(t)D_N(t)dt - \frac{g(0^+)}{2}
\end{aligned}$$

ya que $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_N(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi D_N(t)dt = 1$; así

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(t)D_N(t)dt = \frac{g(0^+)}{2}.$$

Ahora, pasemos a la prueba de (1.2) suponiendo que g es creciente en una vecindad de 0 y que $g(0^+) = 0$. Por consiguiente, dado $\epsilon > 0$ podemos elegir $\delta > 0$ tal que si $0 < t < \delta$ entonces $g(t) < \epsilon$. Así, escribamos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(t)D_N(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta g(t)D_N(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi g(t)D_N(t)dt = I_1 + I_2.$$

Ahora notemos que

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi g(t)\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi G(t)\operatorname{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$$

donde $G(t) = \frac{g(t)}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\mathcal{X}_{\{\delta<t<\pi\}}(t) \in L^1(T)$, así

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi G(t)\operatorname{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right]dt =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi G(t)\operatorname{sen}\left[(2N+1)\frac{t}{2}\right]dt \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} G(2s)\operatorname{sen}[(2N+1)s]2ds \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi F(s)\operatorname{sen}[(2N+1)s]ds
\end{aligned}$$

donde $F(s) = 2G(2s)\mathcal{X}_{\{|s|<\frac{\pi}{2}\}} \in L^1(T)$; además por el lema de Riemann-Lebesgue se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(s)\operatorname{sen}[(2N+1)s]ds = -\operatorname{Im}(\widehat{F}(2N+1)) \longrightarrow 0$$

cuando $N \to \infty$.

Para analizar la integral I_1 usaremos el segundo teorema del valor medio para integrales de Riemann[1], así podemos encontrar $0 < \nu < \delta$ tal que

$$\int_0^\delta g(t)D_N(t)dt = g(\delta^-)\int_\nu^\delta D_N(t)dt$$

ya que $g(0^+) = 0$, además

$$\begin{aligned}\left|\int_\nu^\delta D_N(t)dt\right| &= \left|\int_\nu^\delta \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}dt\right| = \left|2\int_\nu^\delta \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}dt\right| \\ &\le \left|2\int_\nu^\delta \operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t\left[\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]dt\right| + \left|2\int_\nu^\delta \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{t}dt\right| \\ &\le 2\int_\nu^\delta \left|\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right|dt + \left|2\int_\nu^\delta \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{t}dt\right| \\ &= I_{1,1} + I_{1,2}.\end{aligned}$$

La integral $I_{1,1}$ está acotada, digamos por M_1 ya que para $\nu \le t \le \delta$ se tiene que

$$\left|\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right| = \left|\frac{t-2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}{2t\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right| \le \frac{|t|+2|\operatorname{sen}\frac{t}{2}|}{2\nu\operatorname{sen}\frac{\nu}{2}} \le \frac{\delta+2}{2\nu\operatorname{sen}\frac{\nu}{2}} < \infty,$$

con respecto a $I_{1,2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}I_{1,2} = 2\left|\int_\nu^\delta \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{t}dt\right| &= 2\left|\int_{(N+\frac{1}{2})\nu}^{(N+\frac{1}{2})\delta} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt\right| \\ &\le 2\sup_{L>0}\left|\int_0^L \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt\right| = M_2 < \infty\end{aligned}$$

[1]Si ϕ es una función continua en $[a,b]$ y h es una función monótona en $[a,b]$, entonces existe c, $a < c < b$, tal que

$$\int_a^b h(x)\phi(x)dx = h(b^-)\int_c^b \phi(x)dx + h(a^+)\int_a^c \phi(x)dx.$$

ya que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, se obtiene que

$$\begin{aligned}
|I_1| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta g(t)D_N(t)dt\right| &= \frac{1}{2\pi}|g(\delta^-)|\{I_{1,1} + I_{1,2}\} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}|g(\delta^-)|\{M_1 + M_2\} \\
&= \frac{1}{2\pi}(M_1 + M_2)g(\delta^-) \\
&\leq \frac{(M_1 + M_2)}{2\pi}\epsilon
\end{aligned}$$

y así concluimos la prueba del teorema, ya que (1.2) es tan pequeña como se quiera. ■

1.2. Función indicatriz de Banach

Continuaremos nuestra exposición presentando algunos resultados de la teoría de funciones de variación acotada que nos serán de gran utilidad para probar el resultado principal de este capítulo.

Definición 1.2.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, entonces para cada partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ de $[a,b]$ denotamos por $\|P\| = \max(x_k - x_{k-1})$, y además definimos*

$$\Omega_P = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$

donde ω_k es la oscilación de la función f en en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, es decir

$$\omega_k = \sup_{t\in[x_{k-1},x_k]} f(t) - \inf_{t\in[x_{k-1},x_k]} f(t).$$

Teorema 1.2.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces se tiene que*

$$\lim_{\|P\|\to 0} V_P = V_f(a,b) \quad y \quad \lim_{\|P\|\to 0} \Omega_P = V_f(a,b).$$

Comentarios previos a la demostración.

1. En el teorema, la variación total no necesariamente es finita.

2. En el teorema es esencial la continuidad de la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Por ejemplo, sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces $V_f(-1,1) = 2$, pero, para una partición arbitraria P de $[-1,1]$, tal que $x = 0 \notin P$

$$V_P = 0 \quad \text{y} \quad \Omega_P = 1.$$

Demostración. Observemos que la suma V_P es creciente cuando se agregan puntos a la partición $P \in \mathscr{P}([a,b])$. Además, notemos que si $c \in [x_{k-1}, x_k]$ entonces

$$|f(c) - f(x_{k-1})| + |f(x_k) - f(c)| \leq 2\omega_k.$$

Tomemos cualquier número $A < V_f(a,b)$, así existe una partición $P^* \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que

$$V_{P^*} > A,$$

digamos que

$$P^* = \{a = x_0^* < x_1^* < \ldots < x_m^* = b\}.$$

Por la continuidad uniforme de la función f, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(s) - f(t)| < \frac{V_{P^*} - A}{4m}$$

si $|s - t| < \delta$. Mostraremos que $V_Q > A$ para cada $Q \in \mathscr{P}([a,b])$ siempre que $\|Q\| < \delta$. Sea P_1 cualquier partición de $[a,b]$ tal que $\|P_1\| < \delta$ y sea $P_2 = P_1 \cup P^*$. Es claro que

$$V_{P_2} \geq V_{P^*}. \tag{1.4}$$

Cada vez que se agrega un punto a la partición P_1, la suma V_{P_1} se incrementa por una cantidad menor que

$$\frac{V_{P^*} - A}{2m}$$

y como resultado

$$V_{P_2} - V_Q < \frac{V_{P^*} - A}{2}.$$

Se sigue de esta observación y de (1.4) que

$$V_Q > V_{P_2} - \frac{V_{P^*} - A}{2} \geq \frac{A + V_{P^*}}{2} > A.$$

Por lo tanto, $V_Q > A$ para cada $Q \in \mathscr{P}([a, b])$ tal que $\|Q\| < \delta$, y como también

$$V_Q \leq V_f(a, b)$$

se sigue que

$$\lim_{\|Q\| \to 0} V_Q = V_f(a, b).$$

Ahora pasaremos a la prueba para la suma Ω_P. Por un lado es claro que

$$\Omega_P \geq V_P \tag{1.5}$$

para cada partición $P \in \mathscr{P}$.

Ahora bien, si P es cualquier partición de $[a, b]$ y P^* es una nueva partición formada por los puntos de P y los puntos en los que la función f toma los valores

$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x),$$

entonces la suma V_{P^*} correspondiente a dicha partición será mayor o igual a Ω_P.

Como consecuencia se tiene que

$$\Omega_P \leq V_f(a, b). \tag{1.6}$$

De (1.5) y (1.6) tenemos que

$$\lim_{\|P\|\to 0} \Omega_P = V_f(a,b).$$

$\blacksquare$

El teorema anterior es la base de un enfoque muy interesante introducido por S. Banach para el estudio de las funciones continuas de variación acotada.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \ , \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Se define la función

$$N : [m, M] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

del modo siguiente: $N(y)$ es el número de raíces de la ecuación

$$f(x) = y.$$

Si el número de raíces es infinito, entonces

$$N(y) = +\infty.$$

La función N se llama indicatriz de Banach de f o función de multiplicidad de Banach de f.

Teorema 1.2.3. *(S. Banach) La indicatriz de Banach es (Lebesgue) medible y*

$$\int_m^M N(y)dy = V_f(a,b)$$

donde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua.

Demostración. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en 2^n subintervalos de igual longitud, digamos

$$\begin{aligned} D_1 &= \left[a, a + \tfrac{b-a}{2^n}\right] \\ D_k &= \left(a + (k-1)\tfrac{b-a}{2^n}, a + k\tfrac{b-a}{2^n}\right] \end{aligned}$$

con $k = 2, 3, \ldots, 2^n$. Sea $L_k : [m, M] \to \mathbb{R}$, para $k = 1, 2, \ldots, 2^n$, la función definida de la siguiente manera

$$L_k(y) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } x \in D_k \text{ tal que } f(x) = y \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si denotamos por

$$m_k = \inf_{x \in D_k} f(x) \ , \qquad M_k = \sup_{x \in D_k} f(x)$$

entonces $L_k(y) = 1$ para $y \in (m_k, M_k)$ y además $L_k(y) = 0$ para $y \notin [m_k, M_k]$, así la función L_k no puede tener más de dos puntos de discontinuidad y claramente es medible. Notemos además que

$$\int_m^M L_k(y)dy = M_k - m_k = \omega_k,$$

donde ω_k es la oscilación de la función f en el intervalo D_k. Finalmente, definimos la función

$$N_n(y) := L_1(y) + L_2(y) + \ldots + L_{2^n}(y),$$

que es igual al número de intervalos D_k que contienen al menos una raíz de la ecuación

$$f(x) = y.$$

Claramente la función N_n es medible. Así

$$\int_m^M N_n(y)dy = \sum_{k=1}^{2^n} \omega_k,$$

y por el teorema 1.2.2 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)dy = V_f(a,b).$$

Es fácil ver que

$$N_1(y) \leq N_2(y) \leq N_3(y) \leq \ldots$$

y por lo tanto el límite

$$N^*(y) = \lim_{n\to\infty} N_n(y)$$

existe y es una función medible. Por el teorema de la convergencia monótona se tiene que

$$\int_m^M N^*(y)dy = \lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)dy = V_f(a,b).$$

Ahora sólo falta mostrar que

$$N^*(y) = N(y).$$

Primeramente, es claro que

$$N_n(y) \leq N(y)$$

y por consiguiente

$$N^*(y) \leq N(y).$$

Ahora, sea $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \leq N(y)$ para $y \in [m, M]$, entonces podemos encontrar q raíces distintas

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_q$$

de la ecuación $f(x) = y$. Si n es suficientemente grande de modo que

$$\frac{b-a}{2^n} < \min_{0\leq k\leq q}(x_k - x_{k-1}),$$

todas las raíces x_k con $k = 1, \ldots, q$ se encontrarán en distintos intervalos D_k, así que

$$N_n(y) \geq q$$

y por lo tanto

$$N^*(y) \geq q. \tag{1.7}$$

Si $N(y) = +\infty$, podemos tomar q arbitrariamente grande, así que también $N^*(y) = +\infty$. Si $N(y)$ es finito, podemos tomar $q = N(y)$, y por (1.7) se tiene que

$$N^*(y) \geq N(y).$$

Así $N^*(y) = N(y)$. ■

Corolario 1.2.4. *Una función continua f tiene variación acotada si, y sólo si, la indicatriz de Banach es Lebesgue integrable.*

Corolario 1.2.5. *Si f es una función continua de variación acotada, entonces el conjunto de valores tomados por f una infinidad de veces tiene medida cero.*

1.3. Funciones absolutamente continuas y el teorema de Banach-Zarecki

Enseguida, examinaremos si la propiedad de medibilidad es invariante bajo funciones continuas. Para responder a esto, necesitamos introducir la siguiente definición, debida a N. Luzin.

Definición 1.3.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se dice que f posee la propiedad (N) o la propiedad de Luzin si transforma conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero, es decir, si para cada conjunto E de medida cero, $f(E)$ también es un conjunto de medida cero.*

Denotaremos por m y m^* a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$, respectivamente.

Teorema 1.3.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Una condición necesaria y suficiente para que f transforme conjuntos medibles en conjuntos medibles es que f tenga la propiedad (N).*

Demostración. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua que tiene la propiedad (N) y sea B un conjunto medible en $[a,b]$, entonces

$$B = A \cup E$$

donde A es un conjunto del tipo F_σ (es decir A es una unión numerable de cerrados) y E es un conjunto de medida cero. Por lo tanto

$$f(B) = f(A) \cup f(E)$$

y como consecuencia, el conjunto $f(B)$ es medible, por ser la unión de un conjunto F_σ y un conjunto de medida cero.

Supongamos ahora que la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ no tiene la propiedad (N). Entonces podemos encontrar un conjunto E_0 de medida cero en el intervalo $[a,b]$ tal que

$$m^*(f(E_0)) > 0.$$

Bajo estas condiciones, el conjunto $f(E_0)$ contiene un subconjunto B no medible (si $f(E_0)$ es no medible elíjase $B = f(E_0)$, si $f(E_0)$ es medible consultar [13], p. 78).

Para cada $y \in B$, elijamos un elemento $x_y \in E_0$ tal que $f(x_y) = y$. Sea

$$A = \{x_y \in E_0 \,|\, y \in B\} \subset E_0,$$

así $f(A) = B$. Es claro que A es medible, de hecho A es un subconjunto de E_0 con medida de Lebesgue cero, por lo tanto

$$f(A) = B$$

es no medible, de modo que f transforma un conjunto medible en un conjunto no medible. ■

Recordemos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada colección finita de subintervalos abiertos y disjuntos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ de $[a,b]$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

cuando

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta.$$

Podemos generalizar la definición en los siguientes términos: dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada colección a lo más numerable de subintervalos abiertos y disjuntos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ de $[a,b]$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

siempre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta.$$

Observación 1.3.3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua:

1. f es absolutamente continua en $[a,b]$ si, y sólo si, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k} \omega_k < \epsilon$$

para cada colección a lo más numerable de subintervalos abiertos y disjuntos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ de $[a,b]$ tal que

$$\sum_{k} (b_k - a_k) < \delta.$$

En efecto, si f es una función absolutamente continua se tiene que dado $\epsilon > 0$

existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

para cada colección de subintervalos abiertos y disjuntos a lo más numerable $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ de $[a, b]$ con

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta.$$

Sabemos que existen puntos α_k y β_k en $[a_k, b_k]$ tales que

$$f(\alpha_k) = m_k \quad \text{y} \quad f(\beta_k) = M_k,$$

por lo tanto

$$\sum_k |\beta_k - \alpha_k| \leq \sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

así

$$\sum_k \omega_k < \epsilon.$$

Claramente, el recíproco de la afirmación se verifica.

2. Toda función absolutamente continua en $[a, b]$ es de variación acotada.

   En efecto, sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua, así, para $\epsilon = 1$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada colección finita de subintervalos abiertos y disjuntos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ de $[a, b]$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

   se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < 1.$$

   Tomamos una partición P de $[a, b]$ con $P = \{a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_N = b\}$ tal que

$$c_k - c_{k-1} < \delta$$

   con $k = 1, 2, \ldots, N$, entonces, para cada subdivisión del segmento $[c_{k-1}, c_k]$, la suma de los incrementos absolutos de f en ese segmento es menor que 1, así se sigue que

$$V_f(c_{k-1}, c_k) \leq 1$$

y por lo tanto

$$V_f(a,b) \leq N.$$

Teorema 1.3.4. *Todas las funciones que son absolutamente continuas poseen la propiedad (N).*

Demostración. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua y sea E un subconjunto de $[a,b]$ de medida cero. Mostraremos que

$$m(f(E)) = 0.$$

Primero suponemos que a y b no se encuentran en E, es decir

$$E \subset (a,b).$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ con la propiedad de que para cualquier colección infinita de subintervalos disjuntos y abiertos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ de $[a,b]$ se verifica

$$\sum_k (M_k - m_k) < \epsilon$$

siempre que

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

donde

$$m_k = \min_{x \in [a_k, b_k]} f(x) \ , \quad M_k = \max_{x \in [a_k, b_k]} f(x).$$

Sabemos que $m(E) = 0$, entonces existe un conjunto G acotado y abierto tal que

$$E \subset G \ , \quad m(G) < \delta$$

y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $G \subset (a, b)$. Ahora, G puede expresarse como una unión a lo más numerable de subintervalos disjuntos (a_k, b_k), donde

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta.$$

Esto implica que

$$f(E) \subset f(G) = \bigcup_k f((a_k, b_k)) \subset \bigcup_k f([a_k, b_k]).$$

Por lo tanto

$$m^*(f(E)) \leq \sum_k m^*(f([a_k, b_k])).$$

Es claro que

$$f([a_k, b_k]) = [m_k, M_k]$$

y como consecuencia

$$m^*(f(E)) \leq \sum_k (M_k - m_k) < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue elegido arbitrariamente, se sigue que $m(f(E)) = 0$.

Para establecer el caso general, es suficiente notar que cuando se omiten los puntos a y b del conjunto E implica no considerar del conjunto $f(E)$ a lo sumo dos puntos, los puntos $f(a)$ y $f(b)$, lo cual no afecta a la medida del conjunto $f(E)$. ■

Como consecuencia de los dos teoremas anteriores obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.5. *Una función absolutamente continua transforma conjuntos medibles en conjunto medibles.*

Hemos probado que cada función absolutamente continua tiene variación acotada y posee la propiedad (N). Resulta que la propiedad (N) y el ser de variación acotada son propiedades que caracterizan a las funciones absolutamente continuas, como lo mostraremos a continuación.

Teorema 1.3.6. *(S.Banach y M.A. Zarecki) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua de variación acotada que posee la propiedad (N), entonces f es absolutamente continua.*

Demostración. Supongamos que f no es absolutamente continua. Entonces existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ hay una colección finita de subintervalos ajenos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ de $[a,b]$ para los cuales

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

con la propiedad adicional

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) \geq \epsilon_0.$$

Sea

$$\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i$$

cualquier serie convergente de términos positivos y para cada δ_i, sea $\{(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})\}_{k=1}^{n_i}$ la colección de subintervalos abiertos y ajenos de $[a,b]$ para los cuales

$$\sum_{k=1}^{n_i}(b_k^{(i)} - a_k^{(i)}) < \delta_i$$

y además

$$\sum_{k=1}^{n_i}(M_k^{(i)} - m_k^{(i)}) \geq \epsilon_0.$$

Sean

$$E_i = \bigcup_{k=1}^{n_i}(a_k^{(i)}, b_k^{(i)}), \qquad A = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i.$$

Es fácil ver que $m(A) = 0$; como f posee la propiedad (N) se sigue que $m(f(A)) = 0$. Ahora definamos las funciones $L_k^{(i)} : [m, M] \to \mathbb{R}$ con $k = 1, 2, \ldots, n_i$ e $i \in \mathbb{N}$ de la siguiente manera

$$L_k^{(i)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } x \in (a_k^{(i)}, b_k^{(i)}) \text{ tal que } f(x) = y \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente $L_k^{(i)}(y) = 1$ para todo $y \in (m_k^{(i)}, M_k^{(i)})$ y $L_k^{(i)}(y) = 0$ para todo $y \notin [m_k^{(i)}, M_k^{(i)}]$, por lo tanto

$$\int_m^M L_k^{(i)}(y)dy = M_k^{(i)} - m_k^{(i)}. \tag{1.8}$$

Sea $N_i(y) = \sum_{k=1}^{n_i} L_k^{(i)}(y)$, es claro que $N_i(y)$ es el número de intervalos de la forma $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$ que contienen por lo menos un punto x que satisface la ecuación $f(x) = y$. Así se tiene que

$$N_i(y) \le N(y), \tag{1.9}$$

donde $N(y)$ es la indicatriz de Banach de la función f. Además, por (1.8) se obtiene que

$$\int_m^M N_i(y)dy \ge \epsilon_0. \tag{1.10}$$

Para completar la demostración, probaremos que para casi toda $y \in [m, M]$ se tiene que

$$\lim_{i\to\infty} N_i(y) = 0. \tag{1.11}$$

Como la indicatriz de Banach $N(y)$ es integrable, se sigue de (1.9), (1.11) y el teorema de la convergencia dominada que

$$\lim_{i\to\infty} \int_m^M N_i(y)dy = 0$$

lo cual contradice la desigualdad (1.10). Sea B el conjunto de las $y \in [m, M]$ tales que

$$\lim_{i\to\infty} N_i(y) = 0$$

no se verifica, y sea C el conjunto de las $y \in [m, M]$ tales que $N(y) = \infty$. Como $N(y)$ es una función integrable entonces $m(C) = 0$, y para probar el teorema será suficiente mostrar que

$$B - C \subset f(A).$$

Sea $y_0 \in B - C$. Puesto que $N_i(y)$ toma sólo valores enteros no negativos, podemos encontrar una sucesión $\{i_r\}_{r=1}^{\infty}$ de números naturales tal que

$$N_{i_r}(y_0) \geq 1$$

con $r \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Consecuentemente para cada $r \in \mathbb{N}$ existe un punto x_{i_r} tal que

$$f(x_{i_r}) = y_0, \quad x_{i_r} \in E_{i_r}.$$

Como $N(y_0) < +\infty$, existe sólo un número finito de puntos distintos en la sucesión $\{x_{i_r}\}_{r=1}^{\infty}$. Entonces un elemento de la sucesión, digamos x_0, aparece un número infinito de veces; así el punto x_0 pertenece a una infinidad de conjuntos E_i y es claro que

$$f(x_0) = y_0.$$

De este modo obtenemos que $x_0 \in A$ y que $f(x_0) = y_0 \in f(A)$, por lo que

$$B - C \subset f(A)$$

y esto completa la demostración. ■

Como comentamos al inicio de este capítulo, la demostración anterior hace uso de la función de multiplicidad de Banach. Regularmente, los textos de Análisis Real caracterizan la continuidad absoluta de una función f en términos de la diferenciabilidad c.t.p. de f y de la integrabilidad de f'. Para revisar este último enfoque, puede consultarse [3] pp. 465 – 468.

Capítulo 2

Funciones de variación acotada con valores en un espacio métrico

En este capítulo desarrollamos algunos resultados de los artículos [4] y [5] en relación a la teoría de funciones de variación acotada definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}$ y con valores en un espacio métrico o normado X. De manera particular, probaremos un teorema de estructura que generaliza el clásico criterio de Jordan para funciones de este tipo; igualmente, estableceremos un teorema de existencia de caminos geodésicos Lipschitz y también mostraremos un análogo para espacios métricos del famoso principio de selección de Helly.

2.1. Definición y propiedades

Sean (X,d) un espacio métrico, $E \subset \mathbb{R}$ y $f : E \to X$. Cuando $X = \mathbb{R}$ y $E = [a,b]$ la teoría de funciones de variación acotada está perfectamente establecida, sin embargo, cuando X es un espacio métrico, dicha teoría es mucho menos conocida. Por este motivo, damos inicio con algunas definiciones y propiedades.

De aquí en adelante usaremos la siguiente notación: para $\varnothing \neq E \subset \mathbb{R}$ y $t \in E$ definimos $E_t^- = E \cap (-\infty, t]$ y $E_t^+ = E \cap [t, \infty)$. Además si $a, b \in E$ definimos $E_a^b = E \cap [a,b]$ con $a \leq b$. Denotamos por X^E al conjunto de todas las funciones $f : E \to X$. Si $f \in X^E$ denotamos por

$$\omega(f,E) = \sup\{d(f(t), f(s)) : \ t,s \in E\}$$

a la oscilación de f en E (o el diámetro del conjunto $f(E)$). Diremos que $P \in \mathscr{P}(E)$ si $P = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \subset E$ y $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m$. También definimos

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^{m} d(f(t_i), f(t_{i-1})),$$

y

$$V(f, E) = \sup\{V(f, P) \mid P \in \mathscr{P}(E)\}.$$

Al igual que en el capítulo anterior, el número $V(f, E) \in [0, \infty]$ se llama la variación total de f en E. Si $V(f, E) < \infty$, diremos que la función f es de variación acotada en E. El conjunto de todas las funciones de variación acotada de E en X se denota por $\mathscr{V}(E, X)$.

A continuación se presentan algunas propiedades generales de la variación.

Proposición 2.1.1. *Sea $f : E \to X$ una función arbitraria, entonces tenemos las siguientes propiedades:*

1. *Minimalidad. Si $t, s \in E$, entonces $d(f(t), f(s)) \leq \omega(f, E) \leq V(f, E)$.*

2. *Monotonía. Si $A \subset B \subset E$, entonces $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$ y $V(f, A) \leq V(f, B)$.*

3. *Aditividad. Si $t \in E$ entonces $V(f, E) = V(f, E_t^-) + V(f, E_t^+)$.*

4. *Cambio de Variable. Si $E_1 \subset \mathbb{R}$ y $\varphi : E_1 \to E$ es una función monótona, entonces $V(f, \varphi(E_1)) = V(f \circ \varphi, E_1)$.*

5. *Regularidad. $V(f, E) = \sup\{V(f, E_a^b) : a, b \in E,\ a \leq b\}$.*

6. *Propiedad del límite. Sea $s = \sup E \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y sea $i = \inf E \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, entonces*

   6.1 Si $s \notin E$, entonces $V(f, E) = \lim_{t \to s} V(f, E_t^-)$ con $t \in E$.

   6.2 Si $i \notin E$, entonces $V(f, E) = \lim_{t \to i} V(f, E_t^+)$ con $t \in E$.

7. *Semicontinuidad inferior. Si la sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^E$ *converge puntualmente a* f *cuando* $n \to \infty$ *(i.e.* $\lim_{n\to\infty} d(f_n(t), f(t)) = 0$ *para todo* $t \in E$*) entonces* $V(f, E) \leq \liminf_{n\to\infty} V(f_n, E)$.

Demostración. Las propiedades de 1 y 2 son consecuencia inmediata de la definición.

3. Sea $\mathscr{P}_t(E)$ el conjunto de particiones en $\mathscr{P}(E)$ que contienen el punto t. Cada partición $P \in \mathscr{P}_t(E)$ puede ser representada de manera única como la unión $P = P^- \cup P^+$, donde $P^- \in \mathscr{P}_t(E_t^-)$ y $P^+ \in \mathscr{P}_t(E_t^+)$, y recíprocamente. Más aún, por la propiedad 1 obtenemos que

$$V(f, P) = V(f, P^-) + V(f, P^+),$$

lo que nos da la siguiente igualdad

$$\{V(f, P) |\ P \in \mathscr{P}_t(E)\} = \{V(f, P^-) |\ P^- \in \mathscr{P}_t(E_t^-)\} + \{V(f, P^+) |\ P^+ \in \mathscr{P}_t(E_t^+)\}.$$

Así, basta tomar el supremo sobre todas las particiones en ambos lados para obtener lo requerido.

4. Suponemos sin pérdida de generalidad que φ es no decreciente. Es suficiente observar que si $P_1 = \{\tau_i\}_{i=0}^m \in \mathscr{P}(E_1)$, entonces $P := \{t_i := \varphi(\tau_i)\}_{i=0}^m \in \mathscr{P}(\varphi(E_1))$ ya que φ es monótona; además si $P = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathscr{P}(\varphi(E_1))$, donde $t_{i-1} < t_i$ para $i = 1, \ldots, m$, entonces $t_i = \varphi(\tau_i)$ para algún $\tau_i \in E_1$, por lo que usando de nuevo que φ es monótona, el conjunto $P_1 = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ define una partición para E_1 y por consiguiente

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^{m} d(f(t_i), f(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{m} d(f(\varphi(\tau_i)), f(\varphi(\tau_{i-1}))) = V(f \circ \varphi, P_1).$$

De esto se concluye la propiedad buscada.

5. Es claro por la propiedad 2 que

$$V(f,E) \geq \sup\{V(f,E_a^b) : a,b \in E,\, a \leq b\}.$$

Por otro lado, para cada $\alpha < V(f,E)$ existe una partición $P = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathscr{P}(E)$ tal que $V(f,P) \geq \alpha$, pero $P \in \mathscr{P}(E_{t_0}^{t_m})$, entonces

$$V(f,E_{t_0}^{t_m}) \geq V(f,P) \geq \alpha$$

y puesto que $\alpha < V(f,E)$ fue arbitrario, concluimos lo deseado.

6. Probaremos la propiedad 6.1 ya que 6.2 es similar. Debido a que $s \notin E$, éste es un punto límite de E. La función

$$t \mapsto V(f,E_t^-) \in [0,\infty]$$

con $t \in E$ es no decreciente por la propiedad 2, por lo tanto el límite indicado está en $[0,\infty]$ y, claramente, es a lo más $V(f,E)$. Por otra parte, para cada $\alpha < V(f,E)$ existen (por la propiedad 5) puntos $a,b \in E$, $a \leq b < s$ tal que $V(f,E_a^b) \geq \alpha$, entonces para cada $t \in E \cap [b,s) \neq \varnothing$ obtenemos que

$$V(f,E_t^-) \geq V(f,E_a^b) \geq \alpha$$

con lo cual obtenemos la igualdad en 6.1.

7. Asumimos que $\alpha < V(f,E)$. Por la definición de variación total, para $\alpha < \beta < V(f,E)$ existe una partición $P = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathscr{P}(E)$ tal que $V(f,P) \geq \beta$. Por la convergencia puntual de f_n a f existe un natural $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(t), f(t)) \leq \delta := \frac{(\beta-\alpha)}{2m} \quad \text{para todo } n \geq N_0 \text{ y } t \in P,$$

lo que muestra que para cada $n \geq N_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\beta \leq & V(f,P) = \sum_{i=1}^{m} d(f(t_i), f(t_{i-1})) \\ \leq & \sum_{i=1}^{m} d(f(t_i), f_n(t_i)) + \sum_{i=1}^{m} d(f_n(t_i), f_n(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^{m} d(f_n(t_{i-1}), f(t_{i-1})) \\ \leq & m\delta + V(f_n, E) + m\delta = V(f_n, E) + (\beta - \alpha).\end{aligned}$$

Como consecuencia, $\inf_{n \geq N_0} V(f_n, E) \geq \alpha$, y por lo tanto, $\liminf_{n\to\infty} V(f_n, E) \geq \alpha$. Haciendo $\alpha \to V(f, E)$ obtenemos lo requerido.

■

Observación 2.1.2. De la proposición anterior podemos hacer las siguientes observaciones:

a) No suponemos que $V(f, E)$ está acotado.

b) La propiedad 3 no es válida si $t \notin E$; por ejemplo sean $E = [-1, 1] \setminus \{0\}$, $X = \mathbb{R}$, $t = 0$ y $f : E \to X$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 1 & \text{si } x \in (0, 1], \end{cases}$$

entonces se tiene que $V(f, E) \neq V(f, E_t^-) + V(f, E_t^+)$, ya que $V(f, E) = 1$ y $V(f, E_t^-) = V(f, E_t^+) = 0$.

c) Si $s \in E$, entonces $V(f, E) = V(f, E_s^-)$, así que la propiedad 6.1 no es verdadera en general: consideremos $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

así se tiene que $V(f, E) \neq \lim_{t\to s} V(f, E_t^-)$ con $t \in E$, ya que $V(f, E) = 1$ y $\lim_{t\to s} V(f, E_t^-) = 0$. Un ejemplo similar puede hallarse para 6.2.

d) La propiedad 7 se cumple si la convergencia puntual de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es reemplazada por una condición más débil: $\liminf_{n\to\infty} d(f_n(t), f(t)) = 0$ para todo $t \in E$.
Sin embargo la desigualdad en la propiedad 7 no puede ser reemplazada por igualdad y el límite inferior no puede ser reemplazado por el límite cuando $n \to \infty$ incluso si la convergencia de f_n a f es uniforme. En efecto, sea $f_n(t) = \frac{\text{sen}(2\pi nt)}{n}$ con $t \in [0,1]$, claramente $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función $f \equiv 0$, pero $V(f_n, [0,1]) = 4$.

e) La propiedad 1 implica que una función de variación acotada es una función acotada en el sentido de que $f(E)$ tiene diámetro finito.

Proposición 2.1.3. *Si $f \in \mathscr{V}(E, X)$, entonces el conjunto $f(E)$ es totalmente acotado en X y es separable. Si además X es completo, entonces $f(E)$ es precompacto.*

Demostración. Primero probaremos que $f(E)$ es totalmente acotado para lo cual debemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe una colección finita de bolas con centro en algún punto de $f(E)$ de radio $\epsilon > 0$ que cubren a $f(E)$. De lo contrario, supongamos que para algún $\epsilon > 0$ no existe cubierta finita para $f(E)$. Consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset f(E)$ construida inductivamente de la siguiente manera: Si $t_0 \in E$ es fijo, tomamos $x_0 = f(t_0)$, y habiendo elegido los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in f(E)$ tomamos

$$x_n \in f(E) \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} B_\epsilon(x_j) \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $B_\epsilon(x_j) = \{y \in X : d(y, x_j) < \epsilon\}$. Sea $x_n = f(t_n)$ para algún $t_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$. Ya que $d(x_n, x_k) \geq \epsilon$ para $n \neq k$, tenemos que $t_n \neq t_k$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t_{n-1} < t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces para $P = \{t_i\}_{i=0}^{m} \in \mathscr{P}(E)$ tenemos

$$V(f, E) \geq V(f, P) = \sum_{i=1}^{m} d(f(t_i), f(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{m} d(x_i, x_{i-1}) \geq m\epsilon.$$

Puesto que $m \in \mathbb{N}$ es arbitrario, podemos inferir que $V(f, E) = \infty$, lo cual es una contradicción ya que $f \in \mathscr{V}(E, X)$. Para concluir sabemos que un conjunto totalmente acotado en un espacio métrico es separable, y precompacto si el espacio métrico es completo. ■

2.2. Un teorema de estructura

Cuando X es un espacio métrico arbitrario y $f : E \to X$ es una función de variación acotada en E, claramente resulta imposible obtener una descomposición de Jordan para f como diferencia de dos funciones crecientes, como ocurre en el caso $X = \mathbb{R}$. En vez de esto, obtenemos una descomposición alternativa para f que en la práctica resultará un criterio de gran utilidad.

Definición 2.2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y $\varnothing \neq E \subset \mathbb{R}$.*

a) Diremos que la función $f : E \to X$ es Lipschitz si existe una constante $c \geq 0$ tal que $d(f(t), f(s)) \leq c|t - s|$ para todo $s, t \in E$. Llamaremos constante de Lipschitz a la c más pequeña que satisface esta condición y la denotaremos por $Lip(f)$.

b) Diremos que la función $g : E \to X$ es natural si $V(g, E_a^b) = b - a$ para todo $a, b \in E$, $a \leq b$.

Notemos que una función natural $g : E \to X$ es Lipschitz con constante $Lip(g) \leq 1$, ya que por la propiedad 1, Proposición 2.1.1, obtenemos que

$$d(g(t), g(s)) \leq V(g, E_t^s) = s - t \quad t, s \in E \quad t \leq s.$$

c) Diremos que una función $f : [a, b] \to X$ es absolutamente continua si dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ que depende de ϵ tal que para cada colección finita $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^N$ de subintervalos abiertos y disjuntos de $[a, b]$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{N} d(f(b_n), f(a_n)) < \epsilon$$

cuando

$$\sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) \leq \delta.$$

Claramente, una función Lipschitz $f:[a,b]\to X$ es absolutamente continua (para $\epsilon>0$ basta tomar $\delta=\epsilon/Lip(f)$). Además una función absolutamente continua tiene variación acotada en $[a,b]$ (esto puede probarse de manera totalmente similar que en la Observación 1.3.3).

El resultado central de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.2.2. *Una función $f:E\to X$ tiene variación acotada si, y sólo si, existe una función acotada y no decreciente $\varphi:E\to\mathbb{R}$ y una función natural $g:\varphi(E)\to X$ tal que $f=g\circ\varphi$ en E.*

Adicionalmente, si f es Lipschitz (respectivamente, si $E=[a,b]$ y f es absolutamente continua), entonces φ es también Lipschitz (respectivamente, absolutamente continua).

La prueba de este teorema está contenida en los dos lemas siguientes. El primer lema (suficiencia) proporciona muchos ejemplos de funciones de variación acotada.

Lema 2.2.3. *Sea $\varphi:E\to\mathbb{R}$ una función, sea $g:\varphi(E)\to X$ una función Lipschitz y sea $f=g\circ\varphi$. Entonces tenemos los siguientes resultados:*

1) Si φ es acotada y monótona, entonces f tiene variación acotada en E y

$$V(f,E)\leq Lip(g)\cdot\omega(\varphi,E).$$

2) Si φ es Lipschitz, entonces f es una función Lipschitz y

$$Lip(f)\leq Lip(g)Lip(\varphi).$$

3) Si $E=[a,b]$ y φ es absolutamente continua, entonces f es absolutamente continua en $[a,b]$.

Demostración.

1) Supongamos que φ es no decreciente. Así

$$\varphi(E \cap [a,b]) = \varphi(E) \cap [\varphi(a), \varphi(b)] \quad a, b \in E \quad a \leq b, \tag{2.1}$$

y por la propiedad 4, Proposición 2.1.1, se sigue que

$$V(f, E_a^b) = V(g \circ \varphi, E_a^b) = V(g, \varphi(E_a^b)) = V(g, \varphi(E)_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}).$$

Si $P = \{t_i\}_{i=0}^m$ es una partición del conjunto descrito en (2.1) entonces

$$V(g, P) \leq Lip(g) \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) \leq Lip(g)(\varphi(b) - \varphi(a)),$$

y por lo tanto

$$V(f, E_a^b) \leq Lip(g)(\varphi(b) - \varphi(a))$$

para todo $a, b \in E$ con $a \leq b$. Por la propiedad 5, Proposición 2.1.1, y ya que φ es acotada y monótona obtenemos que

$$\begin{aligned} V(f, E) \leq & Lip(g)(\sup_{t \in E} \varphi(t) - \inf_{t \in E} \varphi(t)) \\ = & Lip(g)\omega(\varphi, E) < \infty. \end{aligned}$$

Cuando φ es una función no creciente la prueba es análoga.

2) Para $t, s \in E$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(f(t), f(s)) = & d(g(\varphi(t)), g(\varphi(s))) \\ \leq & Lip(g)|\varphi(t) - \varphi(s)| \\ \leq & Lip(g)Lip(\varphi)|t - s|. \end{aligned}$$

3) Si $a \leq a_1 < b_1 < \ldots \leq a_N < b_N \leq b$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} d(f(b_n), f(a_n)) =& \sum_{n=1}^{N} d(g(\varphi(b_n)), g(\varphi(a_n)))\\ \leq& Lip(g) \sum_{n=1}^{N} |\varphi(b_n) - \varphi(a_n)|.\end{aligned}$$

Como φ es una función absolutamente continua entonces dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{N} |\varphi(b_n) - \varphi(a_n)| < \frac{\epsilon}{Lip(g) + 1}$$

cuando $\sum_{n=1}^{N} (b_n - a_n) < \delta$, y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{N} d(f(b_n), f(a_n)) < \epsilon,$$

es decir, f es absolutamente continua.

$\blacksquare$

Observemos que si la función g en el lema anterior es natural entonces $V(f, E_a^b) = |\varphi(b) - \varphi(a)|$ para $a, b \in E$, $a \leq b$, por lo tanto $V(f, E) = \omega(\varphi, E)$. En particular, si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función acotada y monótona, tomando $X = \mathbb{R}$, $\varphi = f$ y $g(s) = s$ para $s \in f(E)$, en 1) del lema anterior obtenemos que

$$V(f, E) = \omega(f, E) < \infty.$$

Además, si $f : E \to X$ es una función Lipschitz y $E \subset \mathbb{R}$ es acotado, entonces

$$V(f, E) \leq Lip(f)(\sup E - \operatorname{ínf} E).$$

Para ver esto es suficiente tomar $\varphi(t) = t$ para $t \in E$ y $g = f$ en 1) del lema anterior. El siguiente lema (necesidad) proporciona una descomposición canónica de las funciones de variación acotada.

Lema 2.2.4. *Sea $f : E \to X$ una función de variación acotada. Entonces existe una función acotada, no decreciente y no negativa $\varphi : E \to \mathbb{R}$ y una función natural $g : E_1 = \varphi(E) \to X$ tal que*

a) $f = g \circ \varphi$ *en* E.

b) $g(E_1) = f(E)$ *en* X.

c) $V(g, E_1) = V(f, E)$.

Si además f es una función Lipschitz, entonces φ es Lipschitz con constante $Lip(\varphi) \le Lip(f)$, y si $E = [a, b]$ y f es una función absolutamente continua, entonces φ es absolutamente continua.

Demostración. Sea $\varphi(t) = V(f, E_t^-)$ para $t \in E$, entonces $\varphi : E \to \mathbb{R}$ está bien definida, es acotada ($\varphi(t) \le V(f, E)$), es no negativa y es no decreciente en E por la propiedad 2, Proposición 2.1.1.

Para $\tau \in E_1$ sea $\varphi^{-1}(\{\tau\}) = \{t \in E | \ \varphi(t) = \tau\}$ la imagen inversa de $\{\tau\}$ bajo la función φ. Entonces definimos la función $g : E_1 \to X$ de la forma siguiente: si $\tau \in E_1$, sea

$$g(\tau) = f(t) \quad \text{para cada } t \in \varphi^{-1}(\tau). \tag{2.2}$$

Esta definición es consistente, es decir, $f(t)$ es el mismo elemento de X para todo $t \in \varphi^{-1}(\tau)$ porque, por las propiedades 1 y 3, Proposición 2.1.1, tenemos

$$d(f(s), f(t)) \le V(f, E_t^s) = \varphi(s) - \varphi(t) \qquad \text{para } t, s \in E \quad t \le s, \tag{2.3}$$

por lo que, si $t, s \in \varphi^{-1}(\tau)$ y $t \le s$, entonces $\varphi(t) = \tau = \varphi(s)$ y por lo tanto $f(t) = f(s)$. Así la representación de f descrita en $a)$ es consecuencia de (2.2), ya que si $t \in E$ entonces t pertenece a $\varphi^{-1}(\tau)$, donde $\tau := \varphi(t) \in E_1$, por lo tanto por (2.2) obtenemos que

$$f(t) = g(\tau) = g(\varphi(t)) = (g \circ \varphi)(t).$$

Las afirmaciones $b)$ y $c)$ se obtienen como consecuencia de $a)$ y por la propiedad 4, Proposición 2.1.1. Resta probar que g es una función natural. Tenemos que

$$(E_1)_\tau^- = \varphi(E_t^-) \quad \text{para todo } \tau \in E_1 \text{ y } t \in \varphi^{-1}(\tau).$$

Por lo tanto por la propiedad 4, Proposición 2.1.1, vemos que

$$V(g,(E_1)_\tau^-) = V(g,\varphi(E_t^-)) = V(g\circ\varphi, E_t^-) = V(f,E_t^-) = \varphi(t) = \tau.$$

Como consecuencia, si $\alpha,\beta \in E_1$ y $\alpha \leq \beta$, podemos concluir por la propiedad 3, Proposición 2.1.1, que

$$V(g,(E_1)_\alpha^\beta) = V(g,(E_1)_\beta^-) - V(g,(E_1)_\alpha^-) = \beta - \alpha.$$

Veamos ahora que si la función $f : E \to X$ es Lipschitz entonces nuestra φ definida previamente es también Lipschitz. Para $t,s \in E$, $s \leq t$ por la propiedad 3, Proposición 2.1.1, obtenemos

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| = V(f,E_t^-) - V(f,E_s^-) = V(f,E_s^t) \leq Lip(f)(t-s).$$

La última desigualdad se tiene por lo siguiente: para cada $P = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathscr{P}(E_s^t)$

$$V(f,P) = \sum_{i=1}^m d(f(t_i),f(t_{i-1})) \leq Lip(f)(t_m - t_0) \leq Lip(f)(t-s).$$

Finalmente, supongamos que $f : [a,b] \to X$ es una función absolutamente continua y sea $\varphi(t) = V(f,[a,t])$, $t \in [a,b]$. Veremos que φ es también una función absolutamente continua. Para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada colección arbitraria de puntos $a \leq t_{11} < t_{12} \leq \ldots \leq t_{N1} < t_{N2} \leq b$, si $\sum_{n=1}^N (t_{n2} - t_{n1}) \leq \delta(\epsilon)$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^N d(f(t_{n2}),f(t_{n1})) \leq \epsilon.$$

Fijemos una colección de puntos $a \leq a_1 < b_1 \leq \ldots \leq a_N < b_N \leq b$ tal que $\sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) \leq \delta(\epsilon)$. Para cada $n = 1, \ldots, N$ y $k \in \mathbb{N}$ sea $P_n = \{t_{n,i}\}_{i=0}^{m_n}$ una partición del intervalo $[a_n, b_n]$ tal que

$$V(f, [a_n, b_n]) \leq V(f, P_n) + (\epsilon/Nk).$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{m_n}(t_{n,i} - t_{n,i-1}) = \sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) \leq \delta(\epsilon)$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|\varphi(b_n) - \varphi(a_n)| &= \sum_{n=1}^{N} V(f, [a_n, b_n]) \leq \sum_{n=1}^{N} V(f, P_n) + (\epsilon/k) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{m_n} d(f(t_{n,i}), f(t_{n,i-1})) + (\epsilon/k) \leq \epsilon + (\epsilon/k).\end{aligned}$$

ya que $k \in \mathbb{N}$ fue arbitrario, tenemos que $\sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) \leq \delta$ implica que $\sum_{n=1}^{N}|\varphi(b_n) - \varphi(a_n)| \leq \epsilon$. ■

Notemos que la función g del lema anterior tiene la siguiente propiedad: si $\alpha, \beta \in E_1$, $t \in \varphi^{-1}(\alpha)$ y $s \in \varphi^{-1}(\beta)$ entonces

$$d(g(\alpha), g(\beta)) = d(f(t), f(s)).$$

Si la función $\varphi : E \to E_1$ es estrictamente creciente entonces es una biyección, por lo tanto la igualdad $f = g \circ \varphi$ en E es equivalente a $g = f \circ \varphi^{-1}$ en E_1, donde $\varphi^{-1} : E_1 \to E$ es la función inversa de φ.

Para $f : E \to \mathbb{R}$ una función real tenemos también la descomposición de Jordan: Una función f es de variación acotada si, y sólo si, puede ser representada como la diferencia de dos funciones acotadas no decrecientes en E. La suficiencia es consecuencia de que las funciones monótonas y acotadas son de variación acotada y la diferencia de tales funciones también es una función de variación acotada. La necesidad es consecuencia de la igualdad $f = \varphi - (\varphi - f)$ donde $\varphi(t) = V(f, E_t^-)$, $t \in E$ y la desigualdad (2.3), es decir, para $t, s \in E$ y $t \leq s$, entonces $f(s) - f(t) \leq \varphi(s) - \varphi(t)$, o bien, $(\varphi - f)(t) \leq (\varphi - f)(s)$. Así, la descomposición de Jordan es una propiedad muy especial para las funciones reales.

2.3. Caminos geodésicos

El teorema de estructura que hemos probado en la sección anterior nos permitirá demostrar para espacios métricos compactos X la existencia de caminos geodésicos Lipschitz entre dos puntos cualesquiera de X, siempre que exista al menos un camino de longitud finita que conecta a estos puntos.

A continuación, introducimos alguna notación y definiciones.

Denotaremos por $C([a,b], X)$ al conjunto de todas las funciones continuas definidas en $[a,b]$ y con valores en el espacio métrico X. Un camino en X es una función continua $f : [a,b] \to X$; su trayectoria es la imagen $f([a,b])$ que, como es bien sabido, es un subespacio compacto de X. El dominio $[a,b]$ de f se llama un conjunto de parámetros del camino; en este caso diremos que el camino es parametrizado por el intervalo cerrado $[a,b]$. La longitud del camino $f : [a,b] \to X$ es la variación total $V(f, [a,b])$. Decimos que dos puntos $x, y \in X$ están conectados por un camino en X si existe un camino $f : [a,b] \to X$ tal que $f(a) = x$ y $f(b) = y$; en este caso diremos que f es un camino entre x e y.

Teorema 2.3.1. *Sea $K \subset X$ un subconjunto compacto. Si los puntos $x, y \in K$ pueden ser conectados por un camino en K de longitud finita, entonces existe un camino Lipschitz en K entre x e y de mínima longitud. Dicho camino se llama camino geodésico entre x e y.*

Demostración. El teorema es trivial si $x = y$, por lo tanto suponemos que $x \neq y$. Ya que cualquier camino $f : [a,b] \to X$ puede ser reemplazado por un camino de la misma longitud (y misma trayectoria) y el conjunto de parámetros $[0,1]$ (ver la propiedad 4, Proposición 2.1.1), basta con restringir el análisis a los caminos definidos en $[0,1]$. Así consideremos el conjunto de caminos en K definidos en $[0,1]$, y que conecten los puntos x e y:

$$W(x,y) = \{f \in C([0,1],K) : \ f(0) = x, \ f(1) = y\}.$$

Sea

$$l = \text{ínf}\{V(f,[0,1]) : \ f \in W(x,y)\}.$$

Por hipótesis, $W(x,y)$ contiene un camino f_0 de longitud finita, por lo tanto $l \leq V(f_0,[0,1])$ es finita. Por otro lado, para cada $f \in W(x,y)$ tenemos, por la propiedad 1, Proposición 2.1.1, que

$$V(f,[0,1]) \geq d(f(0),f(1)) = d(x,y) > 0 \tag{2.4}$$

por lo que $l \geq d(x,y)$. Como $l < \infty$, entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W(x,y)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} l_n = l \ \text{ donde } \ l_n = V(f_n,[0,1]) > 0$$

por (2.4). La existencia de este límite implica que si $L = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} l_n$, entonces L es finito y mayor que cero, por lo tanto la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de variación acotada uniformemente. Por el Lema 2.2.4, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un camino natural $g_n : [0,l_n] \to X$ con la propiedad de que

$$d(g_n(\alpha),g_n(\beta)) \leq |\alpha - \beta| \quad \alpha,\beta \in [0,l_n],$$

$$f_n = g_n \circ \varphi_n \text{ en } [0,1], \text{ donde } \varphi_n(t) = V(f_n,[0,t]), \quad t \in [0,1],$$

y, en particular, $g_n(0) = f_n(0) = x$, $g_n(l_n) = f_n(1) = y$, $g_n([0,l_n]) = f_n([0,1]) \subset K$ y $V(g_n,[0,l_n]) = V(f_n,[0,1]) = l_n$. Ahora definimos $h_n(\tau) = g_n(\tau l_n)$, $\tau \in [0,1]$, entonces tenemos que

$$h_n \in W(x,y),$$

$$V(h_n,[0,1]) = l_n \to l \text{ cuando } n \to \infty, \text{ por la propiedad 4, Proposición 2.1.1,}$$

$$d(h_n(\alpha),h_n(\beta)) \le l_n|\alpha-\beta| \le L|\alpha-\beta|, \quad \alpha,\beta \in [0,1].$$

Se sigue de lo anterior que la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,1],K)$ es equicontinua y usando el Teorema de Arzelà-Ascoli[1] [10], pp. $137-138$, esta sucesión tiene una subsucesión $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\tau\in[0,1]} d(h_{n_k}(\tau),h(\tau)) = 0 \text{ para algún } h \in C([0,1],K).$$

Claramente, $h \in W(x,y)$ y h es Lipschitz con constante $Lip(h) \le L$ por la continuidad de la métrica d. Por la propiedad 7, Proposición 2.1.1, se sigue que

$$V(h,[0,1]) \le \liminf_{k\to\infty} V(h_{n_k},[0,1]) = \lim_{k\to\infty} l_{n_k} = l.$$

Finalmente, de la definición de l tenemos que $l \le V(h,[0,1])$, por lo tanto $l = V(h,[0,1])$, lo que completa la demostración. ■

2.4. Principio de selección de Helly

El resultado central de esta sección es el teorema de compacidad para funciones de variación acotada, que es una generalización del clásico principio de selección de Helly para funciones con valores en un espacio métrico y en un espacio de Banach.

[1]Si (X_1,d_1), (X_2,d_2) son dos espacios métricos compactos y $\{f_n\}_n \subset C(X_1,X_2)$ es una sucesión puntualmente acotada y equicontinua, entonces existe una función $f \in C(X_1,X_2)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_k$ que converge a f uniformemente en X_1.

Teorema 2.4.1. *Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico X y sea $\mathcal{F} \subset C([a,b],K)$ una familia infinita de funciones continuas con variación acotada uniformemente, es decir, $\sup_{f\in\mathcal{F}} V(f,[a,b]) < \infty$. Entonces existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ que converge puntualmente en $[a,b]$ a una función $f:[a,b] \to K$ de variación acotada de tal manera que $V(f,[a,b]) \le \sup_{f_1\in\mathcal{F}} V(f_1,[a,b])$.*

Además, si X es un espacio de Banach entonces la hipótesis de continuidad de las funciones de la familia $\mathcal{F}$ puede ser omitida.

Demostración.

- Paso 1. Observaciones generales. Por el Teorema 2.2.2 cada función $f \in \mathcal{F}$ puede representarse en $[a,b]$ como la composición $f = g_f \circ \varphi_f$, donde $\varphi_f(t) = V(f,[a,t])$, $t \in [a,b]$, y $g_f : E_{1f} = \varphi_f([a,b]) \to K$ es Lipschitz con constante $Lip(g_f) \le 1$. Notemos que φ_f es no decreciente, no negativa y $\varphi_f(a) = 0$.

  La familia de funciones $\{\varphi_f | \, f \in \mathcal{F}\}$ es infinita y es uniformemente acotada en $[a,b]$ (pues $\omega(\varphi_f,[a,b])] = \varphi_f(b) = V(f,[a,b])$), por lo tanto, por un resultado ampliamente conocido[2] (Ver [13], Lema 2, p. 221), esta familia contiene una subsucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ que corresponde a alguna descomposición $f_n = g_n \circ \varphi_n$ para $n \in \mathbb{N}$ (es decir, $\varphi_n = \varphi_{f_n}$ y $g_n = g_{f_n}$) que converge puntualmente en $[a,b]$ a una función $\varphi:[a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa y no decreciente (por lo tanto acotada). Si definimos $l = V(\varphi,[a,b]) = \varphi(b)$ entonces $0 \le l < \infty$, más aún, si $l_n = V(f_n,[a,b])$ entonces $l_n = V(\varphi_n,[a,b]) = \varphi_n(b)$ y $l_n \to l$ cuando $n \to \infty$.

[2]Sea $\mathcal{F}$ una familia infinita de funciones no decrecientes definidas en $[a,b]$. Si todas las funciones de la familia son acotadas, es decir,

$$|f(x)| \le K, \quad f \in \mathcal{F} \quad x \in [a,b]$$

entonces existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ que converge puntualmente en $[a,b]$ a una función no decreciente f.

- Paso 2. Suponemos que estamos bajo las hipótesis de la primera parte del teorema. Ya que $f_n \in \mathcal{F}$ es continua, entonces φ_n también es continua en $[a,b]$, para lo cual bastará probar que $\varphi_n(t) = \varphi_n(t^+)$ y $\varphi_n(t) = \varphi_n(t^-)$ para $t \in [a,b]$. Veamos por ejemplo que $\varphi_n(t) = \varphi_n(t^+)$. Como φ_n es no decreciente en $[a,b]$ se tiene que $\varphi_n(t) \leq \varphi_n(t^+)$; para obtener la otra desigualdad probaremos que dado $\epsilon > 0$ es posible encontrar t_0 tal que $t < t_0$ y que si $t < s < t_0$ entonces

$$\varphi_n(s) - \varphi_n(t) \leq d(f_n(s), f_n(t)) + \epsilon. \tag{2.5}$$

Tomando límite en (2.5) cuando $s \to t$, $s > t$ obtenemos que $\varphi_n(t^+) - \varphi(t) \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $\varphi_n(t^+) \leq \varphi_n(t)$ que es lo que se busca. Así, probaremos (2.5). Sea $\epsilon > 0$, como $V(f_n, [t,b]) \leq V(f_n, [a,b]) < \infty$ entonces por la propiedad 2, Proposición 2.1.1, existe $t_0 > t$ y $P \in \mathscr{P}([t_0, b])$, $P = \{t_0 < \ldots < t_m = b\}$ tal que

$$V(f_n, [t,b]) \leq d(f_n(t_0), f_n(t)) + V(f_n, P) + \epsilon.$$

Así, para $t < s < t_0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} V(f_n, [t,b]) \leq & d(f_n(t_0), f_n(s)) + d(f_n(s), f_n(t)) + V(f_n, [t_0, b]) + \epsilon \\ \leq & V(f_n, [s, t_0]) + d(f_n(s), f_n(t)) + V(f_n, [t_0, b]) + \epsilon \\ = & V(f_n, [s,b]) + d(f_n(s), f_n(t)) + \epsilon, \end{aligned}$$

y por la propiedad 3, Proposición 2.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned} V(f_n, [a,s]) - V(f_n, [a,t]) = & V(f_n, [t,b]) - V(f_n[s,b]) \\ \leq & d(f_n(s), f_n(t)) + \epsilon, \end{aligned}$$

que es lo mismo que

$$\varphi_n(s) - \varphi_n(t) \leq d(f_n(s), f_n(t)) + \epsilon,$$

lo que prueba (2.5). De modo análogo se prueba que $\varphi_n(t) = \varphi_n(t^-)$. Por lo tanto φ_n es continua, y como consecuencia la función Lipschitz g_n está definida en el intervalo $E_{1n} = \varphi_n([a,b]) = [0, l_n]$. Si $l_n \geq l$ entonces restringimos g_n a $[0, l]$, mientras que si $l_n < l$ entonces tomamos g_n definida solamente en el intervalo $(l_n, l]$ de la siguiente manera: $g_n(\tau) = g_n(l_n)$ para $\tau \in (l_n, l]$. Por el Teorema de Arzelà-Ascoli la sucesión de funciones Lipschitz $g_n : [0, l] \to K$ con constantes $Lip(g_n) \leq 1$ contiene una subsucesión $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ uniformemente convergente. Si $g : [0, l] \to K$ es el límite uniforme de $\{g_{n_k}\}$ entonces g es Lipschitz con constante $Lip(g) \leq 1$ por la continuidad de la métrica, así por el Lema 2.2.3, la función $f = g \circ \varphi : [a,b] \to X$ es de variación acotada. Ahora, si $t \in [a,b]$ entonces

$$\begin{aligned} d(f_{n_k}(t), f(t)) =& d((g_{n_k} \circ \varphi_{n_k})(t), (g \circ \varphi)(t)) \\ \leq& d(g_{n_k}(\varphi_{n_k}(t)), (g_{n_k}(\varphi(t))) + d(g_{n_k}(\varphi(t)), g(\varphi(t))) \\ \leq& |\varphi_{n_k}(t) - \varphi(t)| + d(g_{n_k}(\varphi(t)), g(\varphi(t))). \end{aligned}$$

Los términos de la derecha tienden a cero cuando $k \to \infty$, por lo tanto la sucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ converge a f puntualmente en $[a,b]$. La desigualdad del teorema se sigue de la propiedad 7, Proposición 2.1.1, ya que

$$V(f, [a,b]) \leq \liminf_{n \to \infty} V(f_n, [a,b]) \leq \sup_{f_1 \in \mathcal{F}} V(f_1, [a,b]).$$

- Paso 3. Sea X un espacio de Banach, mostraremos que la hipótesis de continuidad de la familia $\mathcal{F}$ puede ser omitida. Primero veamos que si $g : E \to X$ una función Lipschitz entonces puede ser extendida a todo $\mathbb{R}$ como una función Lipschitz $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to X$ tal que $Lip(\widetilde{g}) \leq Lip(g)$. En efecto, ya que g es uniformemente continua en E entonces tiene una extensión $g_1 : \overline{E} \to X$ a la cerradura $\overline{E}$ de E definida de la siguiente manera: para $x \in \overline{E}$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, así definimos

$$g_1(x) = \lim_{n \to \infty} g(x_n).$$

Primero veamos que el límite existe y que la función g_1 no depende de la elección de la sucesión que converge a x; es claro que para $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ tal que $x_n \to x$ obtenemos que

$$\|g(x_n) - g(x_m)\| \leq Lip(g)|x_n - x_m| \to 0 \quad \text{cuando } m, n \to \infty,$$

así $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$ existe en X. Suponemos ahora que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ son dos sucesiones que convergen a x entonces

$$\|g(y_n) - g(x_n)\| \leq Lip(g)|x_n - y_n| \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Además, g_1 es Lipschitz pues si $x, y \in \overline{E}$ entonces existen sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ tales que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ y $y_k \to y$ cuando $k \to \infty$, así

$$\begin{aligned}
\|g_1(x) - g_1(y)\| &= \lim_{n\to\infty} \|g(x_n) - g_1(y)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{k\to\infty} \|g(x_n) - g(y_k)\| \right] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} Lip(g)|x_n - y_k| \\
&= Lip(g)|x - y|
\end{aligned}$$

y además $Lip(g_1) \leq Lip(g)$. Definimos $\widetilde{g} = g_1$ en $\overline{E}$. Como $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$ es abierto entonces es la unión de una cantidad a lo más numerable de intervalos abiertos y disjuntos (a_k, b_k); sobre los intervalos acotados (a_k, b_k) definimos $\widetilde{g}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{g}(t) = g_1(a_k) + \mu_k(t - a_k), \quad \mu_k := \frac{g_1(b_k) - g_1(a_k)}{b_k - a_k} \text{ con } t \in (a_k, b_k).$$

Si $a_k = -\infty$ entonces definimos $\widetilde{g}(t) = g_1(b_k)$ para todo $t \in (-\infty, b_k]$, mientras que si $b_k = \infty$ entonces definimos $\widetilde{g}(t) = g_1(a_k)$ para todo $t \in [a_k, \infty)$.

Claramente $\|\mu_k\| \leq Lip(g_1) \leq Lip(g)$, por lo tanto cuando $b_k - a_k < \infty$ se tiene para $t, s \in [a_k, b_k]$

$$\|\widetilde{g}(t) - \widetilde{g}(s)\| = \|\mu_k\||(t - a_k) - (s - a_k)| \leq Lip(g)|t - s|.$$

Notemos que si $a_k = -\infty$ (o $b_k = \infty$), entonces $\widetilde{g}$ es la función constante en $(-\infty, b_k]$ (o bien en $[a_k, \infty)$). Resta mostrar que $\widetilde{g}$ es una función Lipschitz. Hay tres casos posibles: 1) $t, s \in \overline{E}$, 2) $t \in \overline{E}, s \notin \overline{E}$ y 3) $t, s \notin \overline{E}$. El caso 1) es claro por lo anterior. En el caso 2) suponemos que $s \in (a_k, b_k)$ y $b_k \leq t$. Entonces por la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{g}(t) - \widetilde{g}(s)\| \leq &\|g_1(t) - g_1(b_k)\| + \|g_1(b_k) - \widetilde{g}(s)\| \\ \leq &Lip(g)((t - b_k) + (b_k - s)) \\ = &Lip(g)|t - s|.\end{aligned}$$

En el caso 3) suponemos $t \in (a_m, b_m)$, $s \in (a_k, b_k)$ y $b_k \leq a_m$. De nuevo, por la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{g}(t) - \widetilde{g}(s)\| \leq &\|\widetilde{g}(t) - g_1(a_m)\| + \|g_1(a_m) - g_1(b_k)\| + \|g_1(b_k) - \widetilde{g}(s)\| \\ \leq &Lip(g)((t - a_m) + (a_m - b_k) + (b_k - s)) \\ = &Lip(g)|t - s|.\end{aligned}$$

- Paso 4. Sea X un espacio de Banach y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones de $[a, b]$ a K de variación acotada uniformemente. Argumentaremos primero como en el paso 1). Notemos que $E_{1n} = \varphi_n([a, b]) \subset [0, l_n]$ en nuestro caso; además si $L = \sup_{n \in \mathbb{N}} l_n$ entonces $0 \leq L < \infty$ y $l = \lim_{n \to \infty} l_n \leq L$.

  Sea $\overline{g_n}$ la restricción a $[0, L]$ de la función $\widetilde{g_n}$ del paso 3). Por el Teorema de Arzelà-Ascoli la sucesión de funciones Lipschitz $\overline{g_n} : [0, L] \to K$ con constantes Lipschitz $Lip(\overline{g_n}) \leq 1$ tiene una subsucesión $\{\overline{g_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge uniformemente a una función que denotamos por $\overline{g}$. Claramente $\overline{g} : [0, L] \to K$ es una función Lipschitz con constante $Lip(\overline{g}) \leq 1$.

Sea $E_1 = \varphi([a, b])$ y sea g la restricción de $\overline{g}$ a E_1. Por el Lema 2.2.3 la función $f = g \circ \varphi : [a, b] \to K$ tiene variación acotada. Ahora, si $t \in [a, b]$ entonces procediendo de manera similar que en el paso 2) tenemos que

$$\begin{aligned} d(f_{n_k}(t), f(t)) =& d(\overline{g_{n_k}}(\varphi_{n_k}(t)), \overline{g}(\varphi(t))) \\ \leq& |\varphi_{n_k}(t) - \varphi(t)| + d(\overline{g_{n_k}}(\varphi(t)), \overline{g}(\varphi(t))), \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración.

■

Notemos que en el teorema anterior nuestra suposición de que la familia $\mathcal{F}$ está formada por funciones continuas no implica que la función límite f también es continua. Por ejemplo, sea $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) definida de la siguiente manera

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n & \text{si } t \in [0, 1] \\ (2 - t)^n & \text{si } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Claramente, $\{f_n\}$ converge puntualmente cuando $n \to \infty$ a la función f cuyo valor es cero para $t \neq 1$ y 1 para $t = 1$, la cual evidentemente es discontinua.

El interés matemático en el principio de selección de Helly radica fundamentalmente en el hecho de que proporciona una herramienta muy efectiva para demostrar teoremas de existencia en análisis. Por ejemplo, uno puede demostrar la existencia de funciones en $L^p(T)$ que representan bajo la integral de Poisson a cierto tipo de funciones holomorfas en el disco unitario.

Existen también diferentes nociones que generalizan el concepto clásico de variación acotada, de manera particular, la noción de p-variación para $p \geq 1$ (introducida originalmente por N. Wiener en [16] para $p = 2$ y L.C. Young en [18] para $p \geq 1$) en la cual las sumas $V(f,P)$ para una función $f : E \to X$ se substituyen por sumas

$$V_p(f,P) = \sum_{i=1}^{m} d(f(t_i), f(t_{i-1}))^p.$$

Las funciones de p-variación acotada han sido utilizadas para resolver problemas en ecuaciones diferenciales estocásticas y ecuaciones integrales (ver [17], [11]). Además, como se muestra en [14], es posible también demostrar un principio de selección de Helly para funciones de este tipo.

Capítulo 3

Teorema de Banach-Zarecki para funciones con valores en un espacio métrico

El objetivo central de este capítulo es demostrar el caso general del teorema de Banach-Zarecki para funciones con valores en un espacio métrico, el cual muestra la equivalencia entre continuidad absoluta y variación acotada junto con la propiedad (N). Esta generalización ha sido demostrada en [6] y como veremos, necesitamos introducir la noción de medida de Hausdorff en un espacio métrico.

3.1. Medida de Hausdorff

Con el fin de demostrar el teorema de Banach-Zarecki para funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}$ y con valores en un espacio métrico X, es necesario introducir la medida de Hausdorff $s-$dimensional y resultados importantes de la misma, los cuales pueden consultarse en [8], [9] y [15].

Definición 3.1.1. *Sea X un conjunto. Una función $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ se llama medida exterior en X si*

I*)* $\mu(\varnothing) = 0$.

II*)* $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ *cuando* $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Si μ es una medida exterior en X y $A \subset B \subset X$, entonces

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

Definición 3.1.2. *Un conjunto $A \subset X$ es μ-medible si para cada subconjunto $B \subset X$,*

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A).$$

Observación 3.1.3. Sea $A \subset X$. Entonces A es μ-medible si, y sólo si, $X - A$ es μ-medible.

Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos μ-medibles. Entonces tenemos las siguientes propiedades, a saber:

1. Los conjuntos $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ son μ-medibles.
2. Si los conjuntos $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ son disjuntos, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$
3. Si $A_1 \subset \ldots A_k \subset A_{k+1} \ldots$, entonces
$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$
4. Si $A_1 \supset \ldots A_k \supset A_{k+1} \ldots$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces
$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Por lo anterior tenemos que la colección de todos los subconjuntos μ-medibles de X forman una σ-álgebra.

Definición 3.1.4. *La σ-álgebra de Borel de un espacio métrico X es la σ-álgebra de subconjuntos de X más pequeña que contiene a los abiertos de X.*

Definición 3.1.5. *Sea X un espacio métrico.*

1. *Una medida exterior μ en X es regular si para cada conjunto $A \subset X$ existe un conjunto B μ-medible tal que $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$.*

2. *Una medida exterior μ en X se llama de Borel si cada conjunto de Borel es μ-medible.*

3. *Una medida exterior μ en X es de Borel regular si μ es de Borel y para cada $A \subset X$ existe un conjunto de Borel B tal que $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$.*

4. *Si X es un espacio métrico localmente compacto, una medida exterior μ en X es de Radon si μ es de Borel regular y $\mu(K) < \infty$ para cada conjunto compacto $K \subset X$.*

Teorema 3.1.6 (Aproximación por conjuntos abiertos y compactos)**.** *Sea μ una medida exterior de Radon en $\mathbb{R}^n$. Entonces*

1. *Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U) |\ A \subset U, U \textit{ abierto}\}.$$

2. *Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-medible*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) |\ K \subset A, K \textit{ compacto}\}.$$

Observemos que en 1 no es necesario que $A \subset \mathbb{R}^n$ sea un conjunto μ-medible. Para finalizar con esta serie de resultados conocidos de teoría de la medida, enunciaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.7 (Criterio de Carathéodory)**.** *Sea μ una medida exterior en un espacio métrico X. Si $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para todos los conjuntos $A, B \subset X$ con $dist(A, B) > 0$, entonces μ es una medida exterior de Borel.*

3.1.1. Definición y propiedades elementales de la medida de Hausdorff en $\mathbb{R}^n$

Con el objetivo de lograr una exposición más clara de la medida de Hausdorff s−dimensional, daremos inicio con el análisis del caso particular $X = \mathbb{R}^n$. Esto nos permitirá abordar más fácilmente el caso general.

Definición 3.1.8.

1. *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le s < \infty$, $0 < \delta \le \infty$. *Se define*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \text{ínf}\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \le \delta \right\},$$

donde

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}.$$

Aquí $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$, $(0 < s < \infty)$, *es decir, es la función gamma usual.*

2. *Para* A *y* s *como antes, se define*

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

$\mathcal{H}^s$ *se llama la medida de Hausdorff* s−*dimensional en* $\mathbb{R}^n$.

Observación 3.1.9.

- El requisito $\delta \to 0$ fuerza a las cubiertas a “seguir la geometría local” del conjunto A.
- La idea intuitiva que subyace en la definición de $\mathcal{H}^s$ es que si $s \in \mathbb{N}$ y A es un subconjunto s−dimensional de $\mathbb{R}^n$ (por supuesto $1 \le s < n$), como por ejemplo, un abierto relativo en un subespacio lineal s−dimensional de $\mathbb{R}^n$, la “cantidad” de A que está contenida en una región de diámetro r, debería ser de algún modo proporcional a r^s.

- Es importante en la definición de medida de Hausdorff considerar cubiertas de diámetro pequeño para poder obtener una medida aproximada de conjuntos con muchas "irregularidades", ya que de no hacerse estas elecciones con los diámetros uno podría simplemente cubrir un conjunto con él mismo, dando como resultado que su medida sería a lo sumo la s−ésima potencia de su diámetro.

  Para dejar lo anterior más claro, consideremos por ejemplo la curva

  $$A_m = \{(x, \operatorname{sen}(mx)) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

  Vemos que

  $$\begin{aligned} \operatorname{diam} A_m = \sup_{p,q \in A_m} |p - q| =& \sqrt{2^2 + 2^2 \operatorname{sen}^2 m} \\ =& \sqrt{4(1 + \operatorname{sen}^2 m)} \\ \leq& 2 \cdot 2^{1/2}, \end{aligned}$$

  esto es, $\operatorname{diam} A_m \leq 2^{3/2}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sin embargo, la longitud de la curva A_m tiende a infinito cuando $m \to \infty$.

  Esto muestra que se necesita tomar δ mucho más pequeño que $1/m$ para que $\mathcal{H}^1_\delta(A_m)$ proporcione una estimación aproximada de las longitudes de las curvas A_m.

- Para justificar el número $\alpha(s)$ en la definición de medida de Hausdorff observemos que si denotamos por $\mathcal{L}^n$ a la medida de Lebesgue n−dimensional entonces

  $$\mathcal{L}^n(B_r(x)) = \alpha(n) r^n$$

  para toda bola $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$, ya que para el caso $x = 0$ y usando coordenadas polares, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(B_r(0)) = \int_{B_r(0)} dx = \int_0^r \left[\int_{S^{n-1}} d\sigma\right] \rho^{n-1} d\rho \\
=& \mathcal{L}^{n-1}(S^{n-1}) \int_0^r \rho^{n-1} d\rho = \frac{r^n}{n} \mathcal{L}^{n-1}(S^{n-1}) \\
=& (2r)^n \frac{\mathcal{L}^{n-1}(S^{n-1})}{n2^n} = \frac{\mathcal{L}^{n-1}(S^{n-1})}{n2^n} [\text{diam } B_r(0)]^n;
\end{aligned}
$$

además

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^n(B_r(0)) =& \alpha(n) \left(\frac{\text{diam } (B_r(0))}{2}\right)^n \\
=& \frac{\alpha(n)}{2^n} [\text{diam } (B_r(0))]^n.
\end{aligned}
$$

Así, para que $\mathcal{H}^n(B_r(0)) = \mathcal{L}^n(B_r(0))$ debemos tomar $\alpha(n) = \frac{\mathcal{L}^{n-1}(S^{n-1})}{n}$.

Teorema 3.1.10. *$\mathcal{H}^s$ es una medida exterior de Borel regular ($0 \le s < \infty$).*

Demostración.

- Paso 1. $\mathcal{H}^s_\delta$ es una medida exterior. Para la demostración sea $\epsilon > 0$; para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $\{C^k_j\}_{j=1}^\infty$ tal que $A_k \subset \bigcup_{j=1}^\infty C^k_j$, diam $C^k_j \le \delta$ y
$$
\sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C^k_j}{2}\right)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.
$$
Así, si $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ tendremos que
$$
A \subset \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{j=1}^\infty C^k_j,
$$
con diam $C^k_j \le \delta$ para todos los $k, j \in \mathbb{N}$ y
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C^k_j}{2}\right)^s &\le \sum_{k=1}^\infty (\mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \epsilon/2^k) \\
&= \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \epsilon,
\end{aligned}
$$

esto es,

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{\text{diam } C_j^k}{2}\right)^s \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \epsilon$$

y como ϵ fue elegido arbitrariamente obtenemos

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}^s_\delta(A_k),$$

lo que prueba que $\mathcal{H}^s_\delta$ es una medida exterior.

- Paso 2. $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior. En efecto, sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}^s_\delta(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(A_k),$$

así, sólo basta hacer que δ tienda a cero para obtener que

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(A_k).$$

- Paso 3. $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior de Borel. Escogemos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ con $\text{dist}(A,B) > 0$ y tomamos $0 < \delta < \frac{1}{4}\text{dist}(A,B)$. Suponemos que $A \cup B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ y que diam $C_k \leq \delta$.

  Sean $\mathcal{A} = \{C_j | C_j \cap A \neq \varnothing\}$ y $\mathcal{B} = \{C_j | C_j \cap B \neq \varnothing\}$. Entonces $A \subset \bigcup_{C_j \in \mathcal{A}} C_j$ y $B \subset \bigcup_{C_j \in \mathcal{B}} C_j$, además $C_i \cap C_j = \varnothing$ si $C_i \in \mathcal{A}$, $C_j \in \mathcal{B}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s &\geq \sum_{C_j \in \mathcal{A}}\alpha(s)\left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s + \sum_{C_j \in \mathcal{B}}\alpha(s)\left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \\ &\geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).\end{aligned}$$

  Tomando el ínfimo sobre todos los conjuntos $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$, vemos que $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$, con $0 < 4\delta <$dist(A,B). Haciendo δ tender a cero obtenemos que $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$. Por consiguiente

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$$

para todo $A, B \subset \mathbb{R}^n$ con $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Por el criterio de Carathéodory se obtiene que $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior de Borel.

- Paso 4. $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior de Borel regular. Primero notemos que diam $\overline{C}$ =diam C para todo $C \subset \mathbb{R}^n$, por lo tanto

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{ diam } C_j \leq \delta \text{ y } C_j \text{ cerrado }\right\}.$$

Elíjase $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty$ para cada $\delta > 0$. Para cada $k \geq 1$, escogemos conjuntos cerrados $\{C_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ tales que diam $C_j^k \leq \frac{1}{k}$, $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^k$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\text{diam } C_j^k}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Sean $A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^k$ y $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, claramente B es Borel, además $A \subset A_k$ para todo k, y entonces $A \subset B$. Así

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\text{diam } C_j^k}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Haciendo $k \to \infty$ obtenemos que $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$, pero como $A \subset B$ finalmente llegamos a que $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$, es decir, $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior de Borel regular.

■

En el siguiente teorema aparece la medida exterior de Lebesgue unidimensional. Recordemos que ésta se define de la siguiente manera (ver [8], p.26):

$$\mathcal{L}^1(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } C_j \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\, C_j \subset \mathbb{R}\right\},$$

donde A es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1.11. *La medida de Hausdorff satisface las siguientes propiedades:*

a) $\mathcal{H}^0$ *es la medida exterior de contar.*

b) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ *en* $\mathbb{R}^1$.

c) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ *para todo* $\lambda > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

d) $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ *para toda transformación isométrica afín* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

e) $\mathcal{H}^s = 0$ *en* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $s > n$.

Demostración.

a) Primero observamos que $\alpha(0) = 1$. Entonces es fácil ver que $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$ y por lo tanto obtenemos a).

b) Sea $A \subset \mathbb{R}^1$ y $\delta > 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(A) &= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } C_j \middle| A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right\} \\
&\leq \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } C_j \middle| A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{ diam } C_j \leq \delta\right\} \\
&= \mathcal{H}^1_\delta(A).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, sea $I_k = [k\delta, (k+1)\delta]$, $(k \in \mathbb{Z})$. Entonces diam $(C_j \cap I_k) \leq \delta$ y

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{diam } (C_j \cap I_k) \leq \text{diam } C_j.
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(A) &= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } C_j \middle| A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right\} \\
&\geq \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{diam } (C_j \cap I_k) \middle| A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right\} \\
&\geq \mathcal{H}^1_\delta(A).
\end{aligned}
$$

Por consiguiente tenemos que $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1_\delta$ para todo $\delta > 0$, y entonces $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ en $\mathbb{R}^1$.

c) Para $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$ fijo se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_\delta(\lambda A) &= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \mid \lambda A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{ diam } C_j < \delta\right\}\\
&= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^s\alpha(s)\left(\frac{\text{diam } \frac{1}{\lambda}C_j}{2}\right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}C_j, \text{ diam } \frac{1}{\lambda}C_j < \delta\right\}\\
&=\lambda^s\mathcal{H}^s_\delta(A),
\end{aligned}$$

y haciendo δ tender a cero obtenemos que $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s\mathcal{H}^s(A)$.

d) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación isométrica afín, entonces para $\delta > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_\delta(L(A)) &= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \mid L(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{ diam } C_j < \delta\right\}\\
&= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{\text{diam } L^{-1}(C_j)}{2}\right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} L^{-1}(C_j), \text{ diam } L^{-1}(C_j) < \delta\right\}\\
&=\mathcal{H}^s_\delta(A),
\end{aligned}$$

y haciendo δ tender a cero obtenemos que $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$.

e) Fijamos un número entero $m \geq 1$. El cubo unitario $\mathcal{Q}$ en $\mathbb{R}^n$ puede ser descompuesto en m^n cubos con lado de longitud $1/m$ y diámetro $n^{1/2}/m$. Por lo tanto

$$\mathcal{H}^s_{\sqrt{n}/m}(\mathcal{Q}) \leq \sum_{i=1}^{m^n}\alpha(s)(n^{1/2}/m)^s = \alpha(s)n^{s/2}m^{n-s},$$

y el último término tiende a cero cuando $m \to \infty$ si $s > n$. Por lo tanto $\mathcal{H}^s(\mathcal{Q}) = 0$. Podemos cubrir a todo $\mathbb{R}^n$ con traslaciones del cubo unitario $\mathcal{Q}$, y como la traslación es una transformación isométrica afín, usando d) obtenemos que $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$ para todo $s > n$.

■

Proposición 3.1.12. *Supongamos que* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y que* $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ *para algún* $0 < \delta \le \infty$. *Entonces* $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

Demostración. La prueba es clara para $s = 0$, por lo tanto suponemos que $s > 0$. Sea $\epsilon > 0$ fijo, entonces existen conjuntos $\{C_j\}_{j=1}^\infty$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j$, y

$$\sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \le \epsilon.$$

En particular, para cada $i \in \mathbb{N}$

$$\text{diam } C_i \le 2\left(\frac{\epsilon}{\alpha(s)}\right)^{1/s} = \delta(\epsilon).$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}^s_{\delta(\epsilon)}(A) \le \epsilon,$$

y como $\delta(\epsilon) \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$, obtenemos

$$\mathcal{H}^s(A) = 0.$$

■

Finalizamos esta subsección con el siguiente resultado.

Proposición 3.1.13. *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $0 \le s < t < \infty$. *Si* $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, *entonces*

$$\mathcal{H}^t(A) = 0.$$

Demostración. Sea $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ y $\delta > 0$. Entonces existen conjuntos $\{C_j\}_{j=1}^\infty$ tales que diam $C_j \le \delta$, $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j$ y

$$\sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \le \mathcal{H}^s(A) + 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(t) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^t \\
&= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s (\text{diam } C_j)^{t-s} \\
&\le \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + 1).
\end{aligned}$$

Haciendo δ tender a cero concluimos que $\mathcal{H}^t(A) = 0$. ■

3.1.2. Medida de Hausdorff r-dimensional en un espacio métrico

El trabajo realizado en la subsección anterior, ahora nos permite presentar la noción de medida de Hausdorff $r-$dimensional en un espacio métrico X dentro de un contexto natural. Por conveniencia en la escritura, de aquí en adelante omitiremos el número $\alpha(r)$ en la definición de medida de Hausdorff $r-$dimensional en $\mathbb{R}^n$.

Así, sea (X, d) un espacio métrico y sea $r \ge 0$. Para cada $S \subset X$ y cada $\delta > 0$ fijo defínase

$$\mathcal{H}^r_\delta(S) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j \ge 1} (\text{diam } B_j)^r | \, S \subset \bigcup_{j \ge 1} B_j, \text{ diam } B_j \le \delta \right\},$$

en donde hemos convenido que $\text{ínf} \varnothing = +\infty$. De modo totalmente análogo a como lo hicimos en el caso $X = \mathbb{R}^n$ podemos ver que $\mathcal{H}^r_\delta$ es una medida exterior.
Notemos que si $0 < \delta < \sigma$ entonces $\mathcal{H}^r_\delta \ge \mathcal{H}^r_\sigma$, por lo que

$$\mathcal{H}^r(S) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^r_\delta(S) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^r_\delta(S), \qquad S \subset X$$

y nuevamente, igual que en el caso $X = \mathbb{R}^n$ podemos mostrar que $\mathcal{H}^r$ es una medida exterior (todo esto puede ser consultado en [15]). También, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.14. *La función* $\mathcal{H}^r$ *es una medida exterior métrica en* X*, esto es, dados* $S_1, S_2 \subset X$ *tales que* $\inf\{d(x,y) \,|\, x \in S_1,\, y \in S_2\} > 0$ *entonces*

$$\mathcal{H}^r(S_1 \cup S_2) = \mathcal{H}^r(S_1) + \mathcal{H}^r(S_2).$$

Demostración. Sean $S_1, S_2 \subset X$ tal que

$$\epsilon = \inf\{d(x,y) | x \in S_1,\, y \in S_2\} > 0.$$

Notemos ahora que cualquier conjunto de diámetro $0 \leq \delta < \epsilon$ que intersecte a $S_1 \cup S_2$ debe de hecho intersectar sólo uno de estos conjuntos. Así, si $\delta < \epsilon$ entonces

$$\mathcal{H}^r_\delta(S_1 \cup S_2) = \mathcal{H}^r_\delta(S_1) + \mathcal{H}^r_\delta(S_2)$$

y tomando el límite cuando $\delta \to 0$ obtenemos que

$$\mathcal{H}^r(S_1 \cup S_2) = \mathcal{H}^r(S_1) + \mathcal{H}^r(S_2)$$

como deseábamos mostrar. ∎

Como consecuencia del Criterio de Carathéodory obtenemos que $\mathcal{H}^r$ es una medida exterior de Borel. La medida exterior $\mathcal{H}^r$ se llama medida de Hausdorff $r-$dimensional.

3.2. Teorema de Banach-Zarecki

En esta sección probaremos una versión más general del teorema de Banach-Zarecki sobre la continuidad absoluta y la propiedad (N). La versión original para funciones de una variable real con valores en los reales fue probada por Banach y de manera independiente por Zarecki.

Como veremos, el caso general para una función de una variable real con valores en un espacio métrico X se obtendrá utilizando un viejo resultado de Luzin.

Denotamos por $\mathcal{L}^1$ a la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y por $\mathcal{H}^1$ a la medida de Hausdorff 1−dimensional en el espacio métrico (X, d).

Sea $f : [0,1] \to X$. Diremos que f posee la propiedad (N) o la propiedad de Luzin si

$$\mathcal{H}^1(f(B)) = 0 \text{ cuando } B \subset [0,1] \text{ con } \mathcal{L}^1(B) = 0. \tag{3.1}$$

Luzin demostró (ver [12]) que si $X = \mathbb{R}$ y f es continua, entonces obtenemos la misma noción si sólo nos restringimos a los conjuntos cerrados B en (3.1).

Para la demostración del teorema de Banach-Zarecki será necesario demostrar antes los siguientes lemas, que además son valiosos por sí mismos.

Lema 3.2.1. *Todo espacio métrico (X, d) puede incluirse isométricamente en un espacio de Banach.*

Demostración. Consideremos el espacio de Banach

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada}\}$$

con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Sea $x_0 \in X$ un elemento fijo. Definamos

$$\begin{aligned} \phi : X &\to \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \phi(x), \end{aligned}$$

donde $\phi(x)(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$ para cada $y \in X$.

Notemos primero que $\phi(x) \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ pues por la desigualdad del triángulo para d podemos mostrar fácilmente que

$$|d(x,y) - d(x_0,y)| \leq d(x,x_0) \quad \text{para todo } y \in X,$$

por lo que

$$\sup_{y \in X} |\phi(x)(y)| \leq d(x,x_0),$$

que es una cota que no depende de y, es decir $\|\phi(x)\|_\infty \leq d(x,x_0)$ para cada $x \in X$.

Veamos ahora que ϕ es una isometría (por tanto ϕ será inyectiva). Sean $x, x' \in X$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\phi(x) - \phi(x')\|_\infty &= \sup_{y \in X} |\phi(x)(y) - \phi(x')(y)| \\
&= \sup_{y \in X} |d(x,y) - d(x_0,y) - d(x',y) + d(x_0,y)| \\
&= \sup_{y \in X} |d(x,y) - d(x',y)| \\
&\leq \sup_{y \in X} |d(x,x')| = d(x,x').
\end{aligned}$$

Puesto que también tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\phi(x) - \phi(x')\|_\infty &= \sup_{y \in X} |d(x,y) - d(x',y)| \\
&\geq |d(x,x') - d(x',x')| \\
&= d(x,x'),
\end{aligned}$$

vemos que $\|\phi(x) - \phi(x')\|_\infty = d(x,x')$, probando que ϕ es una isometría y así siempre podemos considerar a un espacio métrico incluido dentro de un espacio de Banach. ■

A continuación establecemos la versión vectorial del teorema de la indicatriz de Banach, la versión que aparece en [9], p. 177. Sólo esbozamos las ideas principales de su demostración ya que requiere de un buen número de resultados bastante técnicos que hemos enlistado en el Apéndice, junto con la construcción de Carathéodory para producir medidas exteriores, todos ellos pueden ser consultados en [9].

Lema 3.2.2. *Sea $f : [a,b] \to Y$ una función continua con valores en un espacio de Banach Y. Entonces*

$$V(f,[a,b]) = \int N(f,y)d\mathcal{H}^1(y),$$

donde $N(f,y) = \#\{x \in [a,b] | \, f(x) = y\}$.

Demostración. Por el Corolario 4 del Apéndice para cada conjunto conexo $C \subset Y$ se tiene que

$$\mathcal{H}^1(C) \geq \text{diam } C$$

y por consiguiente si $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = b$ entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j+1})\|_Y \leq \sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^1(f(t_j,t_{j+1})), \tag{3.2}$$

lo cual se obtiene a partir del hecho de que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j+1})\|_Y &\leq \sum_{j=1}^{n} \text{diam } f([t_j,t_{j+1}]) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \text{diam } \overline{f((t_j,t_{j+1}))} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \text{diam } f((t_j,t_{j+1})) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^1(f(t_j,t_{j+1}))
\end{aligned}$$

pues $f(t_j,t_{j+1})$ es conexo. Tomando supremo sobre todas las particiones $P = \{t_j\}$ de $[a,b]$ en ambos lados de (3.2) y usando el Teorema 1 y el Teorema 2 del Apéndice obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sup_P \sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j+1})\|_Y &\leq \sup_P \sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^1(f(t_j,t_{j+1})) \\
&\leq \sup_P \sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^1(f(I_j)) \\
&\leq \mathcal{H}^1(f([a,b])) \\
&= \int N(f,y)d\mathcal{H}^1(y)
\end{aligned}$$

donde $I_j = [t_j, t_{j+1})$ y $I_n = [t_n, b]$ con $1 \leq j < n$. Para mostrar la desigualdad opuesta, supongamos que $V(f,[a,b]) < \infty$ (si $V(f,[a,b]) = \infty$ el resultado se obtiene de manera inmediata). Por el Teorema 2.2.2 podemos escribir a $f = g \circ \varphi$, donde $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función no negativa, creciente y acotada, $g : \varphi([a,b]) \to Y$ es una función natural y también

$$V(f,[a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Usando que φ es no decreciente y continua obtenemos que $\mathcal{L}^1(\varphi([a,b])) = \varphi(b) - \varphi(a)$, y como $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathcal{H}^1(\varphi([a,b])) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Además, como g es Lipschitz con $Lip(g) \leq 1$ podemos usar el Corolario 3 del Apéndice para obtener

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\varphi([a,b])) &\geq \int N(g|_{\varphi([a,b])}, y) d\mathcal{H}^1(y) \\ &= \int N(f,y) d\mathcal{H}^1(y), \end{aligned}$$

ya que $N(g|_{\varphi([a,b])}, y) = N(f,y)$ excepto posiblemente por una colección a lo más numerable de puntos de y y cada punto $y \in Y$ tiene medida de Hausdorff $\mathcal{H}^1$ igual a cero. Esto completa nuestra demostración. ∎

Lema 3.2.3. *Sea (X,d) un espacio métrico, sea $\{0,1\} \subset B \subset [0,1]$ un conjunto cerrado, y sea $f : [0,1] \to X$ una función continua. Si $\mathcal{H}^1(f(B)) = 0$, entonces*

$$V(f,[0,1]) = \sum_{i \in I} V(f,[c_i,d_i]),$$

donde $I_i = (c_i, d_i)$, $(i \in I \subset \mathbb{N})$, son todas las componentes conexas (disjuntas) de $[0,1] \setminus B$.

Demostración. Por el Lema 3.2.1 sabemos que podemos incluir isométricamente el espacio métrico X en un espacio de Banach. Para cada conjunto $A \subset [0,1]$ y $y \in X$, definimos

$$N(f|_A, y) = \#\{x \in A \mid f(x) = y\}.$$

Usando el Lema 3.2.2 y la igualdad $N(f,y) = \sum_{i\in I} N(f|_{I_i}, y)$ para $y \in f([0,1]) \setminus f(B)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
V(f,[0,1]) &= \int_{f([0,1])} N(f,y)\,d\mathcal{H}^1(y) \\
&= \int_{f([0,1])\setminus f(B)} N(f,y)\,d\mathcal{H}^1(y) \\
&= \sum_{i\in I} \int_{f([0,1])\setminus f(B)} N(f|_{I_i},y)\,d\mathcal{H}^1(y) \\
&= \sum_{i\in I} V(f,[c_i,d_i]).
\end{aligned}$$

■

Ahora ya podemos probar la versión general del teorema de Banach-Zarecki.

Teorema 3.2.4. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f : [0,1] \to X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *f es absolutamente continua.*
- *f es continua, es de variación acotada y posee la propiedad (N).*

Demostración. Si $f : [0,1] \to X$ es una función absolutamente continua, entonces ya vimos que f es continua y de variación acotada. Mostraremos que si H es un subconjunto Lebesgue medible de $[0,1]$ tal que $\mathcal{L}^1(H) = 0$ entonces $\mathcal{H}^1(f(H)) = 0$, es decir, f posee la propiedad (N). Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\eta > 0$ tal que para cada colección a lo más numerable de subintervalos disjuntos de $[0,1]$, digamos $\{J_m\}_m$, $J_m = (\alpha_m, \beta_m)$ que satisfacen $\sum_m (\beta_m - \alpha_m) < \eta$ entonces

$$\sum_m d(f(\beta_m), f(\alpha_m)) < \epsilon.$$

Puesto que H tiene medida de Lebesgue cero, para el $\eta > 0$ encontrado previamente, podemos encontrar una colección a lo más numerable de intervalos cerrados $\{I_k\}_k$

con extremos $a_k \leq b_k$ respectivamente, los cuales no se traslapan y tales que

$$H \subset \bigcup_k I_k \text{ y } \sum_k (b_m - a_m) < \eta.$$

Se sigue de lo anterior que para cualquier elección de puntos $x^{(k)}, y^{(k)} \in I_k \cap [0,1]$ tal que $x^{(k)} \leq y^{(k)}$ tendremos que $\sum_k (y^{(k)} - x^{(k)}) < \eta$ y por consiguiente

$$\sum_k d(f(y^{(k)}), f(x^{(k)})) < \epsilon. \tag{3.3}$$

Ahora, para cada k consideremos la función $\psi_k : I_k \cap [0,1] \times I_k \cap [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $\psi_k(x,y) = d(f(x), f(y))$. Claramente ψ_k es una función continua y su dominio es un subconjunto compacto del plano. Como ψ toma valores reales, podemos encontrar $(x^{(k)}, y^{(k)}) \in I_k \cap [0,1] \times I_k \cap [0,1]$ tal que

$$\sup\{\psi_k(x,y) \mid x, y \in I_k \cap [0,1]\} = \psi_k(x^{(k)}, y^{(k)}),$$

esto es

$$\text{diam } f(I_k \cap [0,1]) = d(f(x^{(k)}), f(y^{(k)})) \tag{3.4}$$

Sustituyendo (3.4) en (3.3) obtenemos que

$$\sum_k \text{diam } f(I_k \cap [0,1]) < \epsilon.$$

Por lo tanto, $f(H) \subset \bigcup_k f(H \cap I_k)$, diam $f(H \cap I_k) < \epsilon$ y

$$\sum_k \text{diam } f(H \cap I_k) \leq \sum_k \text{diam } f(I_k \cap [0,1]) < \epsilon,$$

lo que implica que $\mathcal{H}^1_\epsilon(f(H)) \leq \epsilon$. Tomando el límite cuando ϵ tiende a cero obtenemos que

$$\mathcal{H}^1(f(H)) = 0$$

como deseábamos mostrar.

Recíprocamente, supongamos que f es continua, de variación acotada y que posee la propiedad (N). Para $x \in [0,1]$ definimos la función $v_f(x) = V(f,[0,x])$. Claramente $d(f(x),f(y)) \leq |v_f(x) - v_f(y)|$, por lo que será suficiente probar que v_f es absolutamente continua.

Para demostrar que v_f es absolutamente continua, bastará mostrar que v_f posee la propiedad (N) y aplicar la versión escalar del teorema de Banach-Zarecki, ya que v_f es no decreciente y continua (esto último se puede probar de manera análoga que en el caso de la función $\varphi_n(t)$ en el Teorema 2.4.1, paso 2).

Por lo tanto es suficiente demostrar que $\mathcal{L}^1(v_f(B)) = 0$ para cualquier conjunto cerrado $B \subset [0,1]$ con $\mathcal{L}^1(B) = 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{0,1\} \subset B$; ya que f posee la propiedad (N) tenemos que $\mathcal{H}^1(f(B)) = 0$. Sean $I_i = (c_i,d_i)$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ subintervalos abiertos y disjuntos de $[0,1] \setminus B$. Por el lema 3.2.3 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(v_f(\bigcup_{i\in I} I_i)) =& \mathcal{L}^1(\bigcup_{i\in I}(v_f(I_i)))\\ =& \sum_{i\in I}(v_f(d_i) - v_f(c_i))\\ =& V(f,[0,1])\\ =& \mathcal{L}^1(v_f([0,1])),\end{aligned}$$

ya que v_f es continua, no decreciente y $v_f(d_i) - v_f(c_i) = V(f,(c_i,d_i))$ para $i \in I$. Observemos que $v_f(B) \cap v_f(\bigcup_{i\in I} I_i)$ es a lo más numerable, por lo tanto obtenemos que

$$\mathcal{L}^1(v_f(B)) = \mathcal{L}^1(v_f([0,1]) \setminus v_f(\bigcup_{i\in I} I_i)) = 0,$$

lo que completa la demostración. ■

Conclusiones

Esta tesis es una compilación de algunos resultados notables sobre funciones de variable real con valores en un espacio métrico X. De manera específica, se estudia la relación entre las nociones de continuidad absoluta, variación finita y propiedad de Luzin de una función.

El objetivo principal del trabajo fue demostrar el caso general del teorema de Banach-Zarecki, para lo cual fue necesario presentar un acercamiento a la medida de Hausdorff en $\mathbb{R}^n$ con la intención de que el lector obtenga una idea general de esta medida en un espacio métrico.

Como puede verse en la demostración del Teorema de Banach-Zarecki para funciones con valores en un espacio métrico, la prueba de la necesidad se remite sólo a mostrar la propiedad (N) o propiedad de Luzin para f, mientras que la prueba de la suficiencia se remite sólo a su versión escalar gracias a los resultados demostrados en el capítulo 1 y el capítulo 2 y a la versión vectorial del teorema de la indicatriz de Banach.

De igual manera, los resultados que presentamos en el capítulo 2 son de interés por sí mismos ya que representan una generalización al contexto de espacios métricos de algunos resultados clásicos de la teoría de funciones de variación acotada. Por ejemplo, el teorema de la estructura que se demuestra en dicho capítulo es una generalización de la descomposición de Jordan y es un resultado de gran importancia en el desarrollo de este trabajo, ya que se utiliza como herramienta en la demostración del teorema de existencia de caminos geodésicos, en el principio de selección de Helly y principalmente en el caso general del teorema de Banach-Zarecki, además de proporcionar muchos ejemplos de funciones de variación acotada.

Apéndice

Construcción de Carathéodory.

Sea X un espacio métrico, $F \subset 2^X$ y $\zeta : F \to [0, \infty]$. Usando ζ podemos construir una medida exterior preliminar ϕ_δ en 2^X, $0 < \delta \leq \infty$ y posteriormente una medida exterior final ψ en 2^X del modo siguiente: si $A \subset X$

$$\phi_\delta(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{S \in G} \zeta(S) \mid A \subset \bigcup G\right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las familias a lo más numerables G tales que $G \subset F \cap \{S : \text{ diam } S \leq \delta\}$ y $A \subset \bigcup G$.

Además, tenemos que $\phi_\delta \geq \phi_\sigma$ para $0 < \delta < \sigma \leq \infty$, lo que implica la existencia de

$$\psi(A) = \lim_{\delta \to 0} \phi_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \phi_\delta(A) \quad \text{ cuando } A \subset X.$$

Las funciones ϕ_δ y ψ son medidas exteriores en X.

La medida exterior ψ se conoce como la medida exterior resultante del proceso de construcción de Carathéodory a partir de ζ en F, y ϕ_δ como la medida exterior de aproximación de tamaño δ.

La construcción de Carathéodory convierte un método arbitrario de estimación en F con una función ζ en una medida exterior ψ de buen comportamiento en el espacio métrico X.

Por lo general, ψ no es una extensión de ζ, pero refleja propiedades de ζ y F de manera sutil. Para elecciones apropiadas de ζ y F se producen medidas ψ de importancia geométrica.

Teorema 1. *Supongamos que ψ es la medida exterior resultante del proceso de construcción de Carathéodory a partir de ζ en la familia de todos los subconjuntos de Borel de un espacio métrico separable X, con*

$$\zeta(A) \leq \sum_{B \in G} \zeta(B)$$

donde G es una familia numerable de conjuntos de Borel y $A \subset \bigcup G$. Si A es un subconjunto de Borel de X, entonces

$$\psi(A) = \sup \left\{ \sum_{B \in H} \zeta(B) \mid H \text{ es una partición de Borel de } A \right\};$$

además, si $H_1, H_2, H_3, \ldots$ es una partición de Borel de A, entonces

$$\lim_{j \to \infty} \sup\{diam\ B \mid B \in H_j\} = 0 \text{ implica que } \lim_{j \to \infty} \sum_{B \in H_j} \zeta(B) = \psi(A).$$

Teorema 2. *Supongamos que X es un espacio métrico separable, μ una medida exterior en Y, f una función de X en Y, y $f(A)$ es $\mu-$medible siempre que A sea un subconjunto de Borel de X. Si*

$$\zeta(S) = \mu[f(S)] \text{ para } S \subset X,$$

y ψ es la medida en X resultante de la construcción de Carathéodory a partir de ζ en la familia de todos los subconjuntos de Borel de X, entonces

$$\psi(A) = \int N(f|_A, y) d\mu(y)$$

para cada conjunto de Borel $A \subset X$.

Corolario 3. *Si f es una función Lipschitz de un espacio métrico separable y completo X en un espacio métrico Y, $0 \leq m < \infty$, y A un subconjunto de Borel de X, entonces*

$$(Lip\, f)^m \mathcal{H}^m(A) \geq \int N(f|_A, y) d\mathcal{H}^m(y).$$

Corolario 4. *Si X es un espacio métrico, entonces*

$$\mathcal{H}^1(C) \geq diam\ C \text{ para cada conjunto conexo } C \subset X.$$

Bibliografía

[1] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley, 1976.

[2] S. Banach. Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie. *Fund. Math.*, 7:225–236, 1925.

[3] J. Bruckner, A. Bruckner, y B. Thomson. *Real Analysis.* Prentice Hall, 1997.

[4] V. V. Chistyakov. On mappings of bounded variation. *J. Dyn. Control Syst.*, 3:261–269, 1997.

[5] V. V. Chistyakov. On the theory of set-valued maps of bounded variation of one real variable. *Sb. Math.*, 189:797–819, 1998.

[6] J. Duda y L. Zajíček. The Banach-Zarecki theorem for functions with values in metric spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133:3631–3633, 2005.

[7] J. Duoandikoetxea. *Fourier Analysis*, volumen 29. American Mathematical Society, 2001.

[8] L. C. Evans y R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, volumen 5. Studies in advanced mathematics, 1991.

[9] H. Federer. *Geometric Measure Theory.* Springer, 1969.

[10] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Wiley, 2^{nd} edición, 1999.

[11] K. Kubilius. An approximation of a non-linear integral equation driven by a function of bounded p-variation. *Let. Mat. Rink.*, 39:317–330, 1999.

[12] N. Luzin. The integral and trigonometric series. *Mat. Sborn.*, 30:1–242, 1916.

[13] I. P. Natanson. *Theory of Functions of a Real Variable*, volumen 1. Frederick Ungar, 1961.

[14] J. Porter. Helly´s selection principle for functions of bounded p-variation. *Rocky Mountain J. Math.*, 35:675–679, 2005.

[15] M. E. Taylor. *Measure Theory and Integration*, volumen 76. American Mathematical Society, 2006.

[16] N. Wiener. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. *Massachusetts J. Math. Phys.*, 3:72–94, 1924.

[17] D. Williams. Path-wise solution of stochastic differential equations driven by Lévy processes. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 17:295–329, 2001.

[18] L. Young. Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p-iéme bornée au sens de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 204:470–472, 1937.