UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Espacios sobre una categoría y representabilidad de Brown

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestra en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Cynthia Guadalupe Esquer Pérez

Directores de tesis: Dr. Jesús F. Espinoza y Dr. Rafael R. Ramos

Hermosillo, Sonora, México 2017

Sinodales

Dr. José María Cantarero López
CONACYT
Centro de Investigación en Matemáticas, Unidad Mérida

Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

Dr. Genaro Hernández Mada
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

A mis padres.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, José Manuel Esquer y María del Carmen Pérez, por estar siempre a mi lado, por apoyarme en cada decisión que tomo, por aconsejarme y guiarme, por todo lo que me han dado, mis logros son de ustedes.

A mis hermanos, Ximena, Francisco y Manuel, por todo su apoyo, por los momentos buenos y malos que hemos compartido, por el cariño y confianza que nos tenemos.

Muchas gracias a mis directores de tesis, Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa y Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro, por el tiempo dedicado a la preparación y revisión de este trabajo, por sus clases y enseñanzas, por las sugerencias, gracias por haberme guiado en parte de la licenciatura y ahora la maestría.

Gracias a mis sinodales, Dr. José María Cantarero López y Dr. Genaro Hernández Mada, por el tiempo invertido a la revisión de esta tesis, gracias por sus observaciones y sugerencias.

Este trabajo de tesis contó con el apoyo del CONACYT mediante beca nacional para programas de posgrado del PNPC.

Índice general

Introducción

Sea Top_2 la categoría cuyos objetos son parejas de espacios topológicos (X, A) y los morfismos son funciones entre parejas. Sea $R : \mathrm{Top}_2 \longrightarrow \mathrm{Top}_2$ el funtor que envía el par (X, A) al par $(A, \varnothing)$ y a la función entre pares $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ a $f|_A$. Una teoría de cohomología (generalizada) h^* sobre Top_2 es una colección de funtores contravariantes

$$h^q : \mathrm{Top}_2 \longrightarrow \mathrm{Abel}$$

y transformaciones naturales (llamados homomorfismos de conexión)

$$\delta^q : h^q \circ R \longrightarrow h^{q+1}$$

ambas indexadas por $q \in \mathbb{Z}$, que satisface los siguientes axiomas:

i) Homotopía. Si $f_0 \simeq f_1 : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ entonces

$$f_0^* = f_1^* : h^q(Y, B) \longrightarrow h^q(X, A)$$

para toda $q \in \mathbb{Z}$

ii) Escisión. Para cada par de espacios (X, A) y cada subconjunto $U \subset A$ que satisface $\overline{U} \subset \mathring{A}$, la inclusión $j : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo

$$h^q(X, A) \xrightarrow{\cong} h^q(X - U, A - U)$$

para toda $q \in \mathbb{Z}$

iii) Exactitud. Para cada par de espacios (X, A), las inclusiones $i : (X, \varnothing) \hookrightarrow (X, A)$, $j : (A, \varnothing) \hookrightarrow (X, \varnothing)$ inducen una sucesión exacta larga

$$\ldots \xrightarrow{\delta^{q-1}} h^q(X, A) \xrightarrow{i^*} h^q(X) \xrightarrow{j^*} h^q(A) \xrightarrow{\delta^q} h^{q+1}(X, A) \longrightarrow \ldots$$

donde escribimos $h^q(X)$ en lugar de $h^q(X, \varnothing)$.

Los funtores de cohomología son ejemplos de lo que se llama funtores de Brown. El Teorema de representabilidad de Brown caracteriza ciertos funtores (funtores de Brown) en la subcategoría de complejos CW. Este resultado dice lo siguiente:

Teorema. *Cada funtor de Brown* $T : \mathrm{Top}_*^h \longrightarrow \mathrm{Abel}$ *es representable en la categoría de complejos CW punteados conexos por trayectorias. Más específicamente, existe un complejo CW punteado* Y*, único salvo homotopía y una equivalencia natural*

$$\phi : [-, Y]_* \longrightarrow T.$$

Así, los funtores de una teoría de cohomología pueden ser siempre expresados en términos homotópicos.

El objetivo de este trabajo es generalizar el Teorema de representabilidad de Brown a la categoría de espacios sobre una categoría.

En el apartado de preliminares se exhiben propiedades de los complejos CW y el cálculo de homología celular haciendo uso sólo del grado de determinadas funciones. También se encuentran algunas definiciones básicas de topología.

En el capítulo 1 definimos espacio sobre una categoría y presentamos algunas de sus propiedades. Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$, definimos un $\mathcal{C}$-espacio covariante (contravariante) como un funtor covariante (contravariante)

$$X : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ESPACIOS}_+$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\phi"'] & X(c) \arrow[d, "X(\phi)"] \\ c \arrow[r, mapsto] & X(d) \end{tikzcd}$$

de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría cuya clase de objetos son espacios topológicos punteados compactamente generados y los morfismos son funciones continuas. Esta definición generaliza conceptos clásicos que resultan de tomar ciertas categorías. Por ejemplo, si consideramos la categoría trivial $\mathcal{C}$, un $\mathcal{C}$-espacio es simplemente un espacio topológico. Ahora, dado un grupo G, si consideramos la categoría $\mathcal{C}$ cuyo único objeto es un punto y los morfismos son los elementos de G, un $\mathcal{C}$-espacio es un espacio topológico junto con una acción de G, es decir, caemos en el caso equivariante.

Otro concepto importante es el de $\mathcal{C}$-CW-complejo libre. Un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre contravariante X es un $\mathcal{C}$-espacio contravariante junto con una filtración de $\mathcal{C}$-espacios

$$\varnothing = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X$$

tal que $X = \operatorname{colim}_{n\geq 0} X_n$ y para cada $n \geq 0$, el n-esqueleto de X_n se obtiene del $(n-1)$-esqueleto X_{n-1} adjuntando $\mathcal{C} - n$-celdas libres contravariantes, es decir, existe un pushout de $\mathcal{C}$-espacios de la forma

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I_n} \operatorname{mor}_{\mathcal{C}}(-, c_i) \times S^{n-1} \arrow[r, "\coprod_{i\in I_n} \varphi_n"] \arrow[d, hook] & X_{n-1} \arrow[d, hook] \\ \coprod_{i\in I_n} \operatorname{mor}_{\mathcal{C}}(-, c_i) \times D^n \arrow[r, "\coprod_{i\in I_n} \overline{\varphi_n}"] & X_n \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son inducidas por inclusiones, I_n es un conjunto de índices y los c_i's son objetos en $\mathcal{C}$. Para los $\mathcal{C}$-CW-complejos libres se tienen propiedades que generalizan las conocidas para complejos CW usuales.

El capítulo 3 muestra conceptos y resultados que llevan a la definición de cohomología equivariante de Bredon para posteriormente ver cómo ésta es un ejemplo de $\mathcal{C}$-cohomología tomando la categoría $\mathcal{C}$ como la categoría de órbitas del grupo G.

En el cuarto capítulo consideraremos funtores contravariantes $T : \mathcal{C} - \text{espacios} \longrightarrow \text{Abel}$ de la categoría de $\mathcal{C}$-espacios y transformaciones naturales a la categoría de grupos abelianos y homomorfismos de grupos. Para este caso, el teorema anterior queda enunciado como sigue:

Teorema. *Cada funtor $\mathcal{C}$-homotópico contravariante $T : \mathcal{C} - espacios \longrightarrow$ Abel que cumple el axioma cuña y el axioma Mayer-Vietoris es representable en la categoría de complejos $\mathcal{C}$-CW. Más específicamente, existe un complejo $\mathcal{C}$-CW punteado Y, único salvo $\mathcal{C}$-homotopía y una equivalencia natural*

$$\phi : [-, Y]_{\mathcal{C}} \longrightarrow T$$

La idea de la prueba es la siguiente: A partir de un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre X, para cada $n \geq 0$, construimos otro $\mathcal{C}$-CW-complejo libre Y_n, adjuntando $\mathcal{C}$-celdas a X de dimensión menor o igual a n, junto con un elemento $u_n \in T(Y_n)$, llamado elemento n-universal (esto es, $\varphi_{u_n} : [\text{mor}_{\mathcal{C}}(-, c)_+ \wedge S^q, Y_n]_{\mathcal{C}} \longrightarrow T(\text{mor}_{\mathcal{C}}(-, c)_+ \wedge S^q)$ es un isomorfismo para $q < n$ y es epimorfismo para $q = n$ y para todo objeto $c \in \mathcal{C}$). Después construimos el $\mathcal{C}$-CW complejo libre Y como el colimite de las Y_n, junto con un elemento ∞-universal $u \in T(Y)$. Se puede probar que el espacio Y así definido es único salvo $\mathcal{C}$-homotopía. Por último se prueba que dicho elemento $u \in T(Y)$ es tal que $\varphi_u : [X, Y]_{\mathcal{C}} \longrightarrow T(X)$ es una biyección.

Existe una generalización del Teorema de representabilidad de Brown para espacios sobre una categoría en [2]. A diferencia de este nosotros usamos una definición distinta y probamos un resultado menos restrictivo. Dicha definición es la 4.6 en [2], la cual dice que un funtor contravariante T es funtor de Brown si cumple el axioma cuña y si tiene la propiedad de que para cada sucesión de $\mathcal{C}$-pares $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} (X, A)$, la inducida por T es exacta. En nuestro caso pedimos que T cumpla el axioma cuña y la propiedad de Mayer-Vietoris, la cual dice que dada una terna escisiva $(X; A, B)$ y para cualesquiera $u \in T(A)$ y $v \in T(B)$ tal que $u|_{A \cap B} = v|_{A \cap B}$, existe $z \in T(X)$ tal que $z|_A = u$ y $z|_B = v$ (donde $u|_{A \cap B} = T([i])(u)$ con $i : A \cap B \longrightarrow A$ inclusión). La otra diferencia es el Lema 4.3 en [2] que está enunciado para un funtor de una teoría de $\mathcal{C}$-cohomología (y en consecuencia el Teorema de representabilidad de Brown queda probado para una teoría de $\mathcal{C}$-cohomología) y nosotros probamos ese mismo resultado pero para un funtor contravariante $T : \mathcal{C} - \text{espacios} \longrightarrow \text{Abel}$ que cumpla la propiedad de Mayer-Vietoris.

Capítulo 1

Preliminares

Partiremos dando por hecho que se conoce la homología singular que denotamos por H y que cumple los axiomas de una teoría de homología generalizada.

En este capítulo se presentan una serie de definiciones y resultados para complejos CW necesarios para el desarrollo de capítulos posteriores. Las demostraciones de los resultados pueden consultarse en [4, Capítulo IV].

1.1. Convenciones para complejos CW

Sean (X, x_0), (Y, y_0) dos espacios topológicos punteados. Se define la suma cuña de los espacios como

$$X \vee Y := X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$$

y su producto smash como

$$X \wedge Y := \frac{X \times Y}{(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)} = \frac{X \times Y}{X \vee Y}.$$

Si X y Y son compactos entonces $X \wedge Y$ es la compactificación por un punto de $(X - \{x_0\}) \times (Y - \{y_0\})$. Así, por ejemplo, $S^p \wedge S^q = S^{p+q}$ donde S^p es la esfera de dimensión p. En efecto,

$$\begin{aligned} S^p \wedge S^q &= (S^p - \{*\}) \times (S^q - \{*\}) \cup \{\infty\} \\ &\approx (\mathring{D}^p \times \mathring{D}^q) \cup \{\infty\} \\ &\approx (\mathring{I}^p \times \mathring{I}^q) \cup \{\infty\} \\ &= (\mathring{I}^{p+q}) \cup \{\infty\} \\ &\approx S^{p+q} \end{aligned}$$

Dos funciones continuas punteadas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Z \longrightarrow W$ dan lugar a una función $f \wedge g : X \wedge Z \longrightarrow Y \wedge W$ definida por $f \wedge g(\overline{x}) = \overline{f(x)}$ si $x \in X$ y $f \wedge g(\overline{z}) = \overline{g(z)}$ si $z \in Z$. La función $f \wedge g$ está bien definida, pues si x_0 y z_0 son los puntos base de X y Z respectivamente, entonces

$$f \wedge g(\overline{x_0}) = \overline{f(x_0)} = \overline{y_0} = \overline{w_0} = \overline{g(z_0)} = f \wedge g(\overline{z_0})$$

Sea $I = [0,1]$ con punto base $\{0\}$ y $S^1 = I/\partial I = I/\{0,1\}$ con punto base $\{\overline{0}\}$. Sea

$$\begin{aligned}\gamma_1 : I &\longrightarrow S^1\\ x &\mapsto \overline{x}\end{aligned}$$

la aplicación cociente. Sea

$$\gamma_p : I^p = I \times I \times ... \times I \to S^1 \wedge ... \wedge S^1 = S^p$$

esto es, $\gamma_p = \gamma^1 \wedge ... \wedge \gamma^1$ donde por definición $\gamma^1 \wedge \gamma^1$ es la composición

$$I \times I \xrightarrow{\gamma_1 \times \gamma_1} S^1 \times S^1 \xrightarrow{\pi} S^1 \times S^1/(S^1 \times \{*\}) \cup (\{*\} \times S^1) = S^1 \wedge S^1$$

con π la proyección. Notemos que γ_p se factoriza a través de $I \wedge ... \wedge I$, es decir, existe $\gamma_2 : I \wedge I \longrightarrow S^1 \wedge S^1$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \wedge S^1 \\ I^1 \wedge I^1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

La razón para usar I^n en vez de D^n es que tenemos que $I^{p+q} = I^p \times I^q$, no sólo homeomorfos. Esto será muy conveniente cuando usemos productos muy complicados. Note que con estas convenciones ∂I^p es homeomorfo a S^{p-1} pero no igual.

Sea I^0 un conjunto que consta de exactamente un punto. Por los axiomas de homología, $H_0(I^0) \cong \mathbb{Z}$ son los coeficientes de la teoría H_*. Sea $[I^0] \in H_0(I^0)$ un generador fijo (hay dos posibles generadores). Llamaremos a $[I^0]$ clase fundamental o una orientación.

Definimos

$$\begin{aligned}\gamma_0 : I^0 &\to S^0 = \{0,1\}\\ I^0 &\mapsto \{1\}\end{aligned}$$

donde $\{0\}$ es el punto base de S^0. Para cualquier espacio X, $X/\varnothing$ denota la unión ajena de X y un punto base $*$. Orientamos a S^0 definiendo $[S^0] \in H_0(S^0,*)$ tal que, $[S^0] = (\gamma_0)_*([I^0])$ donde

$$(\gamma_0)_* : H_0(I^0, \varnothing) \cong \mathbb{Z} \to H_0(S^0,*) \cong \widetilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$$

y $\widetilde{H}$ denota la homología reducida.
Ahora orientaremos a I^p, S^p y ∂I^p (recordemos que ∂I^p sólo es homeomorfo a S^{p-1}, pero no igual). Lo haremos inductivamente: supongamos que para $p \geq 1$, I^p está orientado mediante la elección de un generador

$$[I^p] \in H_p(I^p, \partial I^p) \cong H_p(D^p, S^{p-1}) \cong \mathbb{Z}.$$

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (D^p_+, S^{p-1}) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\widetilde{\gamma}_p"'] & (S^p, D^p_-) \arrow[dl, "h"] \\ (S^p, *) & \end{tikzcd}$$

donde D_+^p y D_-^p denotan los hemisferios superiores e inferiores de S^p respectivamente, $\widetilde{\gamma}_p$ manda S^{p-1} a $*$ y h colapsa todo D_-^p a un punto $*$. De aquí que h es una equivalencia homotópica. El diagrama anterior induce por funtorialidad el siguiente diagrama conmmutativo:

$$\begin{tikzcd} H_p(I^p, \partial I^p) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\gamma_p)_*"'] & H_p(D_+^p, S^{p-1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(\widetilde{\gamma}_p)_*"'] & H_p(S^p, D_-^p) \arrow[dl, "h_*"] \\ H_p(S^p, *) \arrow[r, "\cong"] & H_p(S^p, *) & \end{tikzcd}$$

con h_* isomorfismo, pues h es equivalencia homotópica. Tenemos también que i_* es isomorfismo, por el axioma de escisión. Entonces $(\widetilde{\gamma}_p)_*$ es isomorfismo, por la conmutatividad del diagrama, y por tanto

$$(\gamma_p)_* : H_p(I^p, \partial I^p) \longrightarrow H_p(S^p, *)$$

es isomorfismo. Orientamos a S^p eligiendo el generador

$$[S^p] = (\gamma_p)_*([I^p]).$$

Ahora orientaremos a ∂I^{p+1}. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} \wedge \gamma_p : I \times I^p &\to I \wedge S^p \\ (x_1, x_2) &\mapsto \overline{(x_1, \gamma_p(x_2))} \end{aligned}$$

Más precisamente, $\mathrm{Id} \wedge \gamma_p$ está dado por la composición de aplicaciones

$$I \times I^p \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\gamma_p} I \times S^p \xrightarrow{\pi} \frac{I\times S^p}{(I\times\{*\})\cup(\{0\}\times S^p)} = I \wedge S^p$$

Notemos que la restricción de $\mathrm{Id} \wedge \gamma_p$ a $\partial(I \times I^p) = (\partial I \times I^p) \cup (I \times \partial I^p)$ es tal que

$$\begin{tikzcd} \partial(I \times I^p) = (\partial I \times I^p) \cup (I \times \partial I^p) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}\wedge\gamma_p|_{\partial I^{p+1}}"'] & (\partial I \times S^p) \cup (I \times \{*\}) \arrow[r] & S^p = S^0 \wedge S^p \end{tikzcd}$$

Así, $\mathrm{Id}\wedge\gamma_p|_{\partial I^{p+1}}$ colapsa todo ∂I^{p+1} al punto base excepto por la cara $\{1\}\times I^p$. En dicha cara $\mathrm{Id} \wedge \gamma_p|_{\mathrm{Id}\times I^p}$ es esencialmente $\gamma_p|_{\mathrm{Id}\times I^p}$. Por tanto, $\mathrm{Id} \wedge \gamma_p|_{\partial(I^{p+1})}$ es equivalencia homotópica y en consecuencia tenemos un isomorfismo en homología

$$(\mathrm{Id} \wedge \gamma_p|_{\partial I^{p+1}})_* : H_p(\partial I^{p+1}, *) \xrightarrow{\cong} H_p(S^p, *).$$

Entonces elegimos $[\partial I^{p+1}] \in H_p(\partial I^{p+1}, *)$ tal que $((\mathrm{Id} \wedge \gamma_p)|_{\partial I^{p+1}})_*([\partial I^{p+1}]) = [S^p]$ es el que habíamos definido antes para orientar a S^p. Por último, definiremos la orientación para I^{p+1}. Tenemos que

$$\partial_* : H_{p+1}(I^{p+1}, \partial I^{p+1}) \longrightarrow H_p(\partial I^{p+1}, *) \cong \widetilde{H}_p(\partial I^{p+1}) \cong \widetilde{H}_p(S^p) \cong \mathbb{Z}$$

es isomorfismo, lo cual resulta de la sucesión exacta de la terna $\{*\} \subset \partial I^{p+1} \subset I^{p+1}$ (las propiedades de las sucesiones exactas pueden consultarse en [7, Capítulo 7])

$$\begin{tikzcd}
H_{p+1}(I^{p+1},*) \arrow[r] & H_{p+1}(I^{p+1},\partial I^{p+1}) \arrow[r, "\partial_*"] & H_p(\partial I^{p+1},*) \arrow[r] & H_p(I^{p+1},*) \\
\widetilde{H}_{p+1}(I^{p+1}) = 0 \arrow[u, "\cong"] & & & \widetilde{H}_p(I^{p+1}) = 0 \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Eligiendo $[I^{p+1}] \in H_{p+1}(I^{p+1},\partial I^{p+1})$ tal que $\partial_*([I^{p+1}]) = [\partial I^{p+1}]$ le damos orientación a I^{p+1}. Con esto completamos las definiciones inductivas para orientaciones.

Sea K un complejo CW. Para cada n-celda σ de K tenemos la aplicación caracteristica

$$f_\sigma : I^n \to K^{(n)}$$

y su restricción a ∂I^n es la aplicación de pegado

$$f_{\partial\sigma} : \partial I^n \to K^{(n-1)}.$$

Consideremos $K^{(n)}/K^{(n-1)}$ (para $n = 0$ tenemos $K^{(0)}/\varnothing = K^{(0)} \sqcup \{*\}$) como espacio punteado. Así,

$$K^{(n)}/K^{(n-1)} \approx \bigvee S^n$$

(una copia para cada n-celda σ). Hay una proyección canónica $\pi_\sigma : K^{(n)}/K^{(n-1)} \longrightarrow S^n$ al σ-ésimo sumando S^n y la composición

$$\begin{tikzcd}
\varphi : I^n \arrow[r, "f_\sigma"] & K^{(n)} \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "p_\sigma"'] & K^{(n)}/K^{(n-1)} \arrow[r, "\pi_\sigma"] & (S^n,*)
\end{tikzcd}$$

colapsa ∂I^n al punto base de S^n y en otro caso es homeomorfismo, esto es, φ induce un homeomorfismo

$$\overline{\varphi} : I^n/\partial I^n \to S^n.$$

De hecho podemos suponer que φ es la aplicación γ_n (si la orientación cambia al aplicar p_σ podemos componer φ con un homeomorfismo de grado -1). Más precisamente, elegimos $p_\sigma : K^{(n)} \to S^n$ la única aplicación con la propiedad de que

$$p_\sigma \circ f_\sigma = \gamma_n : I^n \to S^n \tag{1.1}$$

y tal que

$$p_\sigma \circ f_{\sigma'} = \{*\} \tag{1.2}$$

para toda $\sigma \neq \sigma'$.

1.2. Homología celular

Ahora mostraremos cómo calcular la homología de un complejo CW, usando únicamente información acerca de los grados de ciertas aplicaciones que surgen a partir de las aplicaciones de pegado.

Sea K un complejo CW y A un subcomplejo de K. Denotaremos $K^{(n)}$ como la unión del n-esqueleto de K con el espacio A. Sea $\bigsqcup_{\sigma\in K-A} I^n_\sigma$ la unión ajena de los n-discos I^n una por cada n-celda σ de K que no está en A. Si σ es una n-celda que no está en A, entonces $K_\sigma = f_\sigma(I_n)$ donde $f_\sigma : I^n_\sigma \to K^{(n)}$ es aplicación caracteristica, esto es, $f_\sigma|_{\partial I^n} : \partial I^n \to K^{(n-1)}$ y $f_\sigma|_{\mathring{I}^n} : \mathring{I}^n \to K^{(n)}$ es un homeomorfismo en su imagen. Definimos

$$f : \bigsqcup_{\sigma \in K-A} I^n_\sigma \to K^{(n)}$$

por $f|_{I^n_\sigma} = f_\sigma$, y así, $f|_{\partial I^n_\sigma} = f_{\partial\sigma} : \partial I^n_\sigma \to K^{(n-1)}$. En consecuencia,

$$f\left(\bigsqcup_{\sigma \in K-A} \partial I^n_\sigma\right) \subset K^{(n-1)}.$$

Lema 1.2.1. *El homomorfismo*

$$\bigoplus_{\sigma\in K-A} f_{\sigma_*} : \bigoplus_{\sigma\in K-A} H_n(I^n_\sigma, \partial I^n_\sigma) \to H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)})$$

es un isomorfismo. Además $H_i(K^{(n)}, K^{(n-1)}) = 0$ *para toda* $i \neq n$

Demostración. Ver [4, Lema 10.1] ■

Dado que $H_n(I^n, \partial I^n) \cong \mathbb{Z}$, tenemos por el Lema 1.2.1 que $H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)})$ es el grupo abeliano libre generado por las n-celdas de K que no están en A. También, por el mismo lema, sabemos que $H_i(K^{(n)}, K^{(n-1)}) = 0$ para toda $i \neq n$.

El homomorfismo $H_i(K^{(n-1)}, A) \xrightarrow{i_*} H_i(K^{(n)}, A)$ es un isomorfismo para toda $i \neq n, n-1$. Esto ocurre porque la terna $(K^{(n)}, K^{(n-1)}, A)$ induce la siguiente sucesión exacta

$$0 = H_{i+1}(K^{(n)}, K^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_*} H_i(K^{(n-1)}, A) \xrightarrow{i_*} H_i(K^{(n)}, A) \xrightarrow{j_*} H_i(K^{(n)}, K^{(n-1)}) = 0$$

Si $n < i$ ($i > 0$ fijo), entonces tenemos

$$H_i(K^{(0)}, A) \cong \cdots \cong H_i(K^{(n-1)}, A) \cong H_i(K^{(n)}, A)$$

pero $A = K^{(-1)}$, por lo que $0 = H_i(K^{(0)}, K^{(-1)}) \cong H_i(K^{(n)}, A)$. Esto implica que la sucesión exacta inducida por la terna $(K^{(n)}, K^{(n-1)}, A)$

$$\begin{aligned} 0 = H_n(K^{(n-1)}, A) \xrightarrow{i_*} H_n(K^{(n)}, A) \xrightarrow{j_*} H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{(n-1)}, A) \\ \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(K^{(n)}, A) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(K^{(n)}, K^{(n-1)}) = 0 \end{aligned}$$

es tal que sus extremos son cero.

Consideremos el siguiente diagrama, con renglones y columnas exactos,

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & H_{n+1}(K^{(n+1)}, A) \arrow[r, "j_{n+1}"] & H_{n+1}(K^{(n+1)}, K^{(n)}) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[dr, dashed, "\beta_{n+1}"] & H_n(K^{(n)}, A) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "j_n"] & H_n(K^{(n+1)}, A) \arrow[r] & 0 \\
 & & & H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)}) \arrow[d, "\partial_n"] & & \\
 & & & \widetilde{H}_{n+1}(K^{(n-1)}, A) & &
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Definimos $\beta_{n+1} \coloneqq j_n \circ \partial_{n+1}$. Notemos que $\beta_n \circ \beta_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
\beta_n \circ \beta_{n+1} &= (j_{n-1} \circ \partial_n) \circ (j_n \circ \partial_{n+1}) \\
&= j_{n-1} \circ (\partial_n j_n) \circ \partial_{n+1} \\
&= 0 && \text{(pues } \partial_n j_n = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Por tanto, β es operador frontera. También se tiene que

$$\begin{aligned}
\ker(\beta_{n+1}) &= \beta_{n+1}^{-1}(0) \\
&= (j_n \partial_{n+1})^{-1}(0) \\
&= \partial_{n+1}^{-1}(j_n^{-1}(0)) \\
&= \partial_{n+1}^{-1}(0) && \text{(pues } j_n \text{ es 1-1)} \\
&= \ker(\partial_{n+1}) \\
&= \mathrm{Im}(j_{n+1})
\end{aligned}$$

esto es,

$$\ker(\beta_{n+1}) = \ker(\partial_{n+1}) = \mathrm{Im}(j_{n+1}).$$

Por otra parte, dado que por exactitud de la flecha vertical, j_n es monomorfismo, entonces

$$H_n(K^{(n)}, A) \xrightarrow{j_n} \mathrm{Im}(j_n) = \ker(\beta_n)$$

es un isomorfismo. Así, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_n(K^{(n)}, A) \arrow[r, "j_n", "\cong"'] & \ker(\beta_n) \\
\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "j_n|"] & \mathrm{Im}(\beta_{n+1}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

De este diagrama tenemos que

$$\overline{j}_n : H_n(K^{(n)}, A)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \xrightarrow{\cong} \ker(\beta_n)/\mathrm{Im}(\beta_{n+1})$$

Por otra parte,

$$H_n(K^{(n+1)}, A) \cong \frac{H_n(K^{(n)}, A)}{\ker(i_n)} = \frac{H_n(K^{(n)}, A)}{\mathrm{Im}(\partial_{n+1})} \tag{1.5}$$

donde el isomorfismo se tiene por exactitud de renglón de (1.3) y por el primer teorema del isomorfismo. Entonces, de (1.5) y del isomorfismo $\overline{j}_n$ se tiene,

$$H_n(K^{(n+1)}, A) \cong \ker(\beta_n)/\mathrm{Im}(\beta_{n+1}) \tag{1.6}$$

pero,

$$H_n(K^{(n+1)}, A) \xrightarrow{\cong} H_n(K^{(n+2)}, A) \xrightarrow{\cong} H_n(K^{(n+3)}, A) \xrightarrow{\cong} \ldots \tag{1.7}$$

Así, si $\dim(K) < \infty$ (es decir, $K = K^{(m)}$ para algún m) obtenemos de (1.6) y (1.7) que

$$H_n(K, A) \cong H_n(K^{(n+1)}, A) \cong \ker(\beta_n)/\mathrm{Im}(\beta_{n+1})$$

En resumen, hemos construido un complejo de cadenas

$$H_{n+1}(K^{(n+1)}, K^{(n)}) \xrightarrow{\beta_{n+1}} H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)}) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(K^{(n-1)}, K^{(n-2)}) \xrightarrow{\beta_{n-1}} \cdots \tag{1.8}$$

y hemos probado que $H_n(K,A)$ es la n-ésima homología del complejo anterior.

El siguiente paso es analizar el complejo de cadenas (1.8). Con el diagrama (1.4) y el isomorfismo (1.6) obtenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"] & H_n(K^{(n)}, A) \arrow[r, "i_n^K"] \arrow[d, "\cong", "j_n^K"'] & H_n(K^{(n+1)}, A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{j}_n \circ (\bar{i}_n^K)^{-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & j_n(\mathrm{Im}(\partial_{n+1})) \arrow[r, hook] & \mathrm{Im}(j_n) \arrow[r, "\pi"] & \ker(\beta_n)/\mathrm{Im}(\beta_{n+1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 1.2.1 tenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} \bigoplus f_{\sigma *} : \bigoplus H_n(I_\sigma^n, \partial I_\sigma^n) &\longrightarrow H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)}) \\ (\alpha_\sigma)_{\sigma \in K^{(n)} - A} &\longmapsto \sum_{\sigma \in K^{(n)} - A} f_{\sigma *}(\alpha_\sigma) \end{aligned}$$

y sabemos que $H_n(I_\sigma^n, \partial I_\sigma^n) \cong \mathbb{Z}$ y $[I_\sigma^n] \in H_n(I_\sigma^n, \partial I_\sigma^n)$ es un generador. Así, todo elemento $\alpha_\sigma \in H_n(I_\sigma^n, \partial I_\sigma^n)$ es de la forma $n_\sigma[I_\sigma^n]$ para algún $n_\sigma \in \mathbb{Z}$. Entonces podemos reescribir el isomorfismo anterior como sigue:

$$(n_\sigma[I_\sigma^n])_{\sigma \in K^{(n)} - A} \longmapsto \sum_{\sigma \in K^{(n)} - A} f_{\sigma *}(n_\sigma[I_\sigma^n]) = \sum n_\sigma f_{\sigma *}([I_\sigma^n])$$

Sea $C_n(K,A)$ el grupo abeliano libre con base las n-celdas de K que no están en A. Definimos el homomorfismo

$$\psi : C_n(K,A) \longrightarrow H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)})$$

como la composición de los isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
C_n(K,A) \arrow[r, "h"] & \bigoplus H_n(I_\sigma^n, \partial I_\sigma^n) \arrow[r, "\oplus f_{\sigma *}"] & H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)})
\end{tikzcd}$$

$$\sum_{\sigma \in K^{(n)} - A} n_\sigma \sigma \longmapsto (n_\sigma[I_\sigma^n])_{\sigma \in K^{(n)} - A} \longmapsto \sum n_\sigma f_{\sigma *}([I_\sigma^n])$$

esto es,

$$\psi\left(\sum_\sigma n_\sigma \sigma\right) = \sum_\sigma n_\sigma f_{\sigma *}([I^n])$$

donde σ corre sobre todas las n-celdas de K que no están en A y $n_\sigma \in \mathbb{Z}$.

Sea

$$\phi_n : H_n(S^n, *) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

el único homomorfismo tal que

$$\phi_n([S^n]) = 1.$$

Usando ϕ_n definimos

$$\phi : H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)}) \longrightarrow C_n(K,A)$$

por

$$\phi(\alpha) = \sum_{\sigma} \phi_n(p_{\sigma *}(\alpha))\sigma$$

donde $p_\sigma : (K^{(n)}, K^{(n-1)}) \longrightarrow (S^n, *)$ es la única aplicación que cumple (1.1) y (1.2). Afirmamos que ϕ es el inverso de ψ. Basta probar que $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}$. Sea σ una n-celda de K que no está en A ($\sigma \in C_n(K, A)$). Sabemos que

$$p_\tau f_\sigma = \begin{cases} \gamma_n & \text{si } \tau = \sigma \\ * & \text{si } \tau \neq \sigma \end{cases}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \psi)(\sigma) &= \phi(f_{\sigma *}([I^n])) \\
&= \sum_{\tau} \phi_n(p_{\tau *} f_{\sigma *}([I^n]))\tau \\
&= \phi_n(p_{\sigma *} f_{\sigma *}([I^n]))\sigma \\
&= \phi_n((p_\sigma f_\sigma)_*([I^n]))\sigma \\
&= \phi_n(\gamma_{n*}([I^n]))\sigma \\
&= \phi_n([S^n])\sigma \\
&= \sigma
\end{aligned}$$

por tanto $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}$, o equivalentemente $\phi = \psi^{-1}$.

Los homomorfismos ψ, ψ^{-1} nos permiten "calcular" la homología como veremos a continuación: Dada una aplicación $f : S^n \longrightarrow S^n$ se define $\deg(f)$ como el entero tal que $f_*(a) = \deg(f)a$ para toda $a \in \widehat{H}(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Definimos el operador frontera $\widehat{\partial}$ en $C_*(K, A)$ por la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1}(K,A) \arrow[d, "\psi", "\cong"'] \arrow[rr, dashed, "\widehat{\partial}_{n+1}"] & & C_n(K,A) \\
H_{n+1}(K^{(n+1)}, K^{(n)}) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, bend right, "\beta_{n+1}"'] & H_n(K^{(n)}, A) \arrow[r, "j_n"] & H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)}) \arrow[u, "\psi^{-1}=\phi"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

donde, dado $\sigma \in C_{n+1}(K, A)$, las composiciones están dadas como sigue:

$$\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[d, "\psi", "\cong"'] \arrow[rr, mapsto, dashed, "\widehat{\partial}_{n+1}"] & & \sum_\tau \deg(p_\tau f_{\partial\sigma})\tau \\
(f_\sigma)_*([I^{n+1}]) \arrow[r, mapsto, "\partial_{n+1}"] & (f_{\partial\sigma})_*([\partial I^{n+1}]) \arrow[r, mapsto, "j_n"] & (f_{\partial\sigma})_*([\partial I^{n+1}]) \arrow[u, "\psi^{-1}=\phi"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

En efecto, tenemos el homomorfismo ∂_* que viene de la sucesión exacta asociada a la terna $\{*\} \subset \partial I^n \subset I^n$. Análogamente, tenemos ∂_* inducido por la terna $A \subset K^{(n-1)} \subset K^{(n)}$. De esto obtenemos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \arrow[r, "\partial_*", "\cong"'] \arrow[d, "f_{\sigma *}"] & H_n(\partial I^{n+1}, *) \arrow[d, "f_{\partial\sigma *}"] \\
H_{n+1}(K^{(n+1)}, K^{(n)}) \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(K^{(n)}, A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{[I^{n+1}]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \partial_*([I^{n+1}]) = [\partial I^{n+1}] \arrow[d, mapsto] \\
f_{\sigma *}([I^{n+1}]) \arrow[r, mapsto] & \partial_* f_{\sigma *}([I^{n+1}]) = f_{\partial\sigma *}([\partial I^{n+1}])
\end{tikzcd}$$

donde $\partial_*([I^{n+1}]) = [\partial I^{n+1}]$, por definición de orientación visto en la sección anterior y $\partial f_{\sigma *} = f_{\partial\sigma *}$ se tiene por la naturalidad de ∂ [4, Corolario 10.2, p. 201].
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}(f_{\partial\sigma *}([\partial I^{n+1}])) &= \phi(f_{\partial\sigma *}([\partial I^{n+1}])) \\
&= \sum_{\tau} \phi_n(p_{\tau *}(f_{\partial\sigma})_*[\partial I^{n+1}])\tau
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\phi_n(p_{\tau *} f_{\partial\sigma *}([\partial I^{n+1}])) &= \phi_n((p_\tau f_{\partial\sigma})_*[\partial I^{n+1}]) \\
&= \phi_n(\deg(p_\tau f_{\partial\sigma})[S^n]) \\
&= \deg(p_\tau f_{\partial\sigma}) = [\tau : \sigma]
\end{aligned}$$

donde $[\tau : \sigma]$ es llamado el *número de incidencia*. Consecuentemente, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.2.2. *La homología singular $H_*(K, A)$ es isomorfa a la homología del complejo de cadenas $C_*(K, A)$, donde el operador frontera $\partial : C_{n+1}(K, A) \longrightarrow C_n(K, A)$ está dado por*

$$\partial(\sigma) = \sum_{\tau} [\tau : \sigma]\tau$$

donde $[\tau : \sigma] = \deg(p_\tau \circ f_{\partial\sigma})$. A la nueva homología se le llama homología celular.

Veamos un ejemplo de cálculo de homología celular relativa.

Ejemplo 1.2.3. El n-espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ se define como el espacio cociente de la n-esfera con los puntos antipodales identificados, esto es, $S^n/(v \sim -v)$. Podemos ver que $\mathbb{R}P^n$ se obtiene de $\mathbb{R}P^{n-1}$ por adjuntarle una n-celda con la proyección cociente

$$S^{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \mathbb{R}P^{n-1}$$

como la aplicación de pegado. Se sigue entonces que la estructura celular de $\mathbb{R}P^n$ consta de una k-celda para cada $k \leq n$.

Consideremos el CW-par $(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n)$. Para cada entero no negativo k, el grupo abeliano libre $C_k(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n)$ está generado por las k-celdas de $\mathbb{R}P^{n+1}$ que no están en $\mathbb{R}P^n$, entonces

$$C_k(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n+1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Así, tenemos el complejo de cadenas relativo siguiente

$$0 \longrightarrow C_{n+1}(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Por tanto, la homología celular relativa de $(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n)$ es

$$H_k(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n+1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Calculemos ahora la homología celular relativa del CW-par $(\mathbb{R}P^{n+m}, \mathbb{R}P^n)$ con $m > 1$. Tenemos

$$C_k(\mathbb{R}P^{n+m}, \mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n+1 \leq k \leq n+m \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Entonces el complejo de cadenas relativo es

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_{n+m}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_{n+m-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde el operador frontera está definido por

$$\begin{aligned} \partial_k : C_k(\mathbb{R}P^{n+m}, \mathbb{R}P^n) &\longrightarrow C_{k-1}(\mathbb{R}P^{n+m}, \mathbb{R}P^n) \\ x &\longmapsto \deg(q \circ \pi_{k-1}) x \end{aligned}$$

con $q : \mathbb{R}P^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} = S^{k-2}$ la función cociente. La aplicación $q \circ \pi_{k-1}$ es un homeomorfismo cuando nos restringimos a cada componente de $S^{k-1} - S^{k-2}$, y estos dos homeomorfismos se obtienen uno del otro por componer con la aplicación antípoda de S^{k-1}, la cual tiene grado $(-1)^k$. Por tanto $\deg(q \circ \pi_{k-1}) = \deg(\mathrm{Id}) + \deg(-\mathrm{Id}) = 1 + (-1)^k$. Así, ∂_k es 0 si k es impar y es multiplicación por 2 si k es par (Ejemplo 2.42 de [6] pág. 144). En el caso cuando $n+m$ es par la homología celular relativa de $(\mathbb{R}P^{n+m}, \mathbb{R}P^n)$ es

$$H_k(\mathbb{R}P^{n+m}, \mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k \text{ es impar y } n+1 \leq k < n+m \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

y cuando $n+m$ es impar tenemos

$$H_k(\mathbb{R}P^{n+m}, \mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k \text{ es impar y } n+1 \leq k < n+m \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = n+m \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Capítulo 2

Espacios sobre una categoría

En este capítulo daremos algunas definiciones básicas y propiedades de los objetos de interés, que son los espacios sobre una categoría pequeña $\mathcal{C}$ (es decir, $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es un conjunto). Veremos qué es un complejo CW sobre una categoría y cómo se extienden ciertas propiedades y conceptos de los complejos CW usuales.

2.1. Homotopía de $\mathcal{C}$-espacios

Definición 2.1.1. *Un $\mathcal{C}$-espacio covariante (contravariante) sobre la categoría $\mathcal{C}$ es un funtor covariante (contravariante)*

$$X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{ESPACIOS}$$

de $\mathcal{C}$ en la categoría ESPACIOS *de espacios compactamente generados y funciones continuas. Una aplicación entre dos $\mathcal{C}$-espacios X, Y covariantes (contravariantes) es una transformación natural*

$$\varphi : X \longrightarrow Y.$$

Así mismo, un $\mathcal{C}$-espacio punteado X es un funtor de la categoría $\mathcal{C}$ en la categoría $\mathrm{ESPACIOS}_+$ de espacios punteados compactamente generados y funciones continuas entre espacios punteados. Todas las nociones presentadas en este capítulo se extienden a espacios punteados sobre una categoría cambiando unión disjunta y producto cartesiano por suma cuña y producto smash respectivamente.

Denotaremos por $\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ al conjunto de transformaciones naturales entre los $\mathcal{C}$-espacios X y Y. A $\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ lo dotamos de una estructura de espacio topológico dándole la topología inducida como subespacio de

$$\prod_{c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} M(X(c), Y(c))$$

donde $M(X(c), Y(c)) = \{f : X(c) \longrightarrow Y(c) \mid f \text{ es continua}\}$ tiene la topología compacto abierta para cada $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Análogamente, dado un anillo R conmutativo con 1, podemos definir un $R\Gamma$-módulo M covariante (contravariante) como un funtor de la categoría Γ en la categoría de R-módulos. Denotaremos al conjunto de transformaciones naturales entre dos $R\Gamma$-módulos (de la misma varianza) M y N por $\hom_{\Gamma}(M,N)$, el cual tiene estructura de R-módulo. En [11, Sección

11, Cap. I] podemos encontrar resultados para $R\Gamma$-módulos que aquí presentamos para $\mathcal{C}$-espacios.

Veamos algunos ejemplos de $\mathcal{C}$-espacios.

a) El $\mathcal{C}$-espacio

$$\{*\} : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ESPACIOS}$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & \{*\} \arrow[d, equal] \\ d \arrow[r, mapsto] & \{*\} \end{tikzcd}$$

se llama $\mathcal{C}$-espacio trivial.

b) Si la categoría $\mathcal{C}$ es la trivial entonces un $\mathcal{C}$-espacio X es simplemente un espacio topológico.

c) Sea G un grupo. Consideremos la categoría $\mathcal{C}$ cuya clase de objetos consta de un único elemento y los morfismos son los elementos de G. Entonces un $\mathcal{C}$-espacio covariante

$$X : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ESPACIOS}$$

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & X(*) \arrow[d, "X(g)"] \\ * \arrow[r, mapsto] & X(*) \end{tikzcd}$$

es un espacio topológico con una acción (por la izquierda) de G, es decir, X es un G-espacio. Si X es contravariante entonces la acción es por la derecha.

d) Dado $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tenemos un $\mathcal{C}$-espacio contravariante

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ESPACIOS}$$

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c) \\ e \arrow[r, mapsto] & \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e,c) \arrow[u, "\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)(\phi)"'] \end{tikzcd}$$

donde el espacio $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)$ tiene la topología discreta para cada $d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)(\phi)(f) = f \circ \phi$ con $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e,c)$. Análogamente, $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c,-)$ es un $\mathcal{C}$ espacio covariante.

Dado un $\mathcal{C}$-espacio contravariante X y un $\mathcal{C}$-espacio covariante Y, definimos su producto tensorial como el espacio topológico

$$X \otimes_{\mathcal{C}} Y = \coprod_{c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} X(c) \times Y(c) / \sim$$

donde $(X(\phi)(x), y) \in X(c) \times Y(c)$ se identifica con $(x, Y(\phi)(y)) \in X(d) \times Y(d)$, para cada morfismo $\phi : c \to d$ en $\mathcal{C}$ y para todos los puntos $x \in X(d)$, $y \in Y(c)$, tal como lo sugiere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\phi"'] & X(c) \times Y(c) \\ d \arrow[r, mapsto] & X(d) \times Y(d) \end{tikzcd} \qquad X(\phi) \uparrow \quad \downarrow Y(\phi)$$

La propiedad principal del producto tensorial es la siguiente.

Lema 2.1.2. *Sea X un $\mathcal{C}$-espacio contravariante, Y un $\mathcal{C}$-espacio covariante y Z un espacio topológico. Sea $M(Y,Z)$ el $\mathcal{C}$-espacio contravariante cuyo valor en el objeto c es el espacio de funciones $M(Y(c),Z)$. Entonces hay un homeomorfismo natural en X, Y y Z*

$$T = T(X,Y,Z) : M(X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z) \longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}(X, M(Y,Z))$$

Demostración. Sólo diremos como se define T y su inversa.

$$\begin{aligned} T : M(X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z) &\longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}(X, M(Y,Z)) \\ (g : X \otimes_{\mathcal{C}} Y \to Z) &\longmapsto \left\{ \begin{array}{lcl} X(c) & \xrightarrow{T(g)_c} & M(Y(c),Z) \\ x & \longmapsto & g \circ \pi_c \circ i_c(x,-) \end{array} \right\}_{c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

donde $g \circ \pi_c \circ i_c : X(c) \times Y(c) \longrightarrow Z$ es la composición de las aplicaciones

$$X(c) \times Y(c) \xrightarrow{i_c} \coprod_{c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} X(c) \times Y(c) \xrightarrow{\pi_c} X \otimes_{\mathcal{C}} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\begin{aligned} T^{-1} : \hom_{\mathcal{C}}(X, M(Y,Z)) &\longrightarrow M(X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z) \\ \{X(c) \xrightarrow{S_c} M(Y(c),Z)\}_{c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} &\longmapsto \left(\begin{array}{rl} g_S : X \otimes_{\mathcal{C}} Y & \longrightarrow Z \\ (\overline{x,y}) & \longmapsto S_c(x)(y) \end{array} \right) \end{aligned}$$

para $(x,y) \in X(c) \times Y(c)$. ■

Las nociones de producto, pushout, límite y colímite existen en la categoría de $\mathcal{C}$-espacios (puede consultar estos conceptos en [8, Cap. III]). Por ejemplo, el diagrama de pushout de $\mathcal{C}$-espacios covariantes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & Z \\ Y & \end{tikzcd}$$

(donde ψ y φ son aplicaciones de $\mathcal{C}$-espacios) está definido como el funtor

$$P : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ESPACIOS}$$

cuyo valor en un objeto c en $\mathcal{C}$ es el pushout $P(c)$ del siguiente diagrama de espacios topológicos

$$\begin{tikzcd}
X(c) \arrow[r, "\psi(c)"] \arrow[d, "\varphi(c)"'] & Z(c) \arrow[d, "P_2(c)"] \\
Y(c) \arrow[r, "P_1(c)"] & P(c)
\end{tikzcd}$$

Diremos cómo se define el funtor P en morfismos. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X : \mathcal{C} \to \text{ESPACIOS}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & (Z : \mathcal{C} \to \text{ESPACIOS}) \arrow[d, "P_2"] \\
(Y : \mathcal{C} \to \text{ESPACIOS}) \arrow[r, "P_1"] & (P : \mathcal{C} \to \text{ESPACIOS})
\end{tikzcd}$$

se traduce en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& X(c) \arrow[rr, "\psi(c)"] \arrow[d, "\varphi(c)"] \arrow[dl, "X(f)"'] & & Z(c) \arrow[d, "P_2(c)"] \arrow[dl, "Z(f)" near start] \\
& Y(c) \arrow[rr, "P_1(c)"' near start] \arrow[dl, "Y(f)" near end] & & P(c) \arrow[dl, dashed] \\
X(d) \arrow[rr, "\psi(d)"] \arrow[d, "\varphi(d)"'] & & Z(d) \arrow[d, "P_2(d)"'] & \\
Y(d) \arrow[rr, "P_1(d)"'] & & P(d) &
\end{tikzcd}$$

donde $f : c \longrightarrow d$. Por la conmutatividad del cubo, existe un único morfismo $P(f)$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
X(c) \arrow[r, "\psi(c)"] \arrow[d, "\varphi(c)"'] & Z(c) \arrow[d, "P_2(c)"] \arrow[ddr, bend left, "P_2(d) \circ Z(f)"] & \\
Y(c) \arrow[r, "P_1(c)"] \arrow[drr, bend right, "P_1(d) \circ Y(f)"'] & P(c) \arrow[dr, dashed, "\exists ! P(f)"] & \\
& & P(d)
\end{tikzcd}$$

Esta definición de $P(f)$ implica que los siguientes cuadrados conmutan

$$\begin{tikzcd}
Y(c) \arrow[r, "P_1(c)"] \arrow[d, "Y(f)"'] & P(c) \arrow[d, "P(f)"] \\
Y(d) \arrow[r, "P_1(d)"] & P(d)
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
Z(c) \arrow[r, "P_2(c)"] \arrow[d, "Z(f)"'] & P(c) \arrow[d, "P(f)"] \\
Z(d) \arrow[r, "P_2(d)"] & P(d)
\end{tikzcd}
$$

Por tanto, $P_1 : Y \longrightarrow P$ y $P_2 : Z \longrightarrow P$ son transformaciones naturales, es decir, son aplicaciones de $\mathcal{C}$-espacios.

El hecho de que $P : \mathcal{C} \longrightarrow$ ESPACIOS es funtor y pushout es consecuencia de nuestras definiciones.

Ahora, extenderemos el concepto de complejo CW de espacios a $\mathcal{C}$-espacios.

Definición 2.1.3. *Un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre contravariante X es un $\mathcal{C}$-espacio contravariante junto con una filtración de $\mathcal{C}$-espacios*

$$\varnothing = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X$$

tal que $X = \mathrm{colim}_{n\geq 0} X_n$ y para cada $n \geq 0$ el n-esqueleto de X_n se obtiene del $(n-1)$-esqueleto X_{n-1} adjuntando $\mathcal{C} - n$-celdas libres contravariantes, es decir, existe un pushout de $\mathcal{C}$-espacios de la forma

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I_n} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c_i) \times S^{n-1} \arrow[r, "\coprod_{i\in I_n} \varphi_n"] \arrow[d, hook] & X_{n-1} \arrow[d, hook] \\
\coprod_{i\in I_n} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c_i) \times D^{n} \arrow[r, "\coprod_{i\in I_n} \overline{\varphi_n}"] & X_n
\end{tikzcd}
$$

donde las flechas verticales son inducidas por inclusiones, I_n es un conjunto de índices y los c_i son objetos en $\mathcal{C}$.

Llamaremos a la aplicación inclusión de $\mathcal{C}$-espacios

$$\coprod_{i\in I_n} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c_i) \times \mathring{D}^n \longrightarrow X$$

$\mathcal{C} - n$-celda libre basada en c_i. Un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre tiene dimensión menor o igual a n si $X = X_n$. Análogamente se define $\mathcal{C}$-CW-complejo libre covariante intercambiando la posición de c_i:

$$\coprod_{i\in I_n} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times \mathring{D}^n \longrightarrow X$$

Como podemos notar, la definición de $\mathcal{C}$-CW-complejo libre es muy similar a la de complejo CW clásica. Más adelante veremos como los resultados para complejos CW se generalizan a $\mathcal{C}$-CW-complejos libres de manera directa.

Al igual que para espacios topológicos, podemos hablar de $\mathcal{C}$-espacios que son $\mathcal{C}$-homotópicamente equivalentes, como veremos a continuación.

Definición 2.1.4. *Dos aplicaciones $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$-espacios punteados se llaman $\mathcal{C}$-homotópicas si existe una aplicación de $\mathcal{C}$-espacios*

$$H : X \wedge I \longrightarrow Y$$

donde $I = [0,1]$ y $X \wedge I$ es el $\mathcal{C}$-espacio

$$X \wedge I : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ESPACIOS}_+$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & X(c) \wedge I \arrow[d, "X(f)\wedge \mathrm{Id}"] \\ d \arrow[r, mapsto] & X(d) \wedge I \end{tikzcd}$$

tal que $H|_{X\wedge\{0\}} = f_0$ y $H|_{X\wedge\{1\}} = f_1$. En tal caso denotamos $f_0 \simeq f_1$.

Así, $H = \{H_c : X(c) \wedge I \longrightarrow Y(c)\}_{c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$ es tal que H_c continua,

$$\begin{tikzcd} X(c) \wedge I \arrow[r, "H_c"] \arrow[d, "X(f)\wedge \mathrm{Id}"'] & Y(c) \arrow[d, "Y(f)"] \\ X(d) \wedge I \arrow[r, "H_d"] & Y(d) \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $f : c \longrightarrow d$, y también

$$H_c|_{X(c)\wedge\{0\}} = (f_0)_c$$

y

$$H_c|_{X(c)\wedge\{1\}} = (f_1)_c$$

para cada $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.
Diremos que dos $\mathcal{C}$-espacios X y Y son $\mathcal{C}$-homotópicamente equivalentes si existen aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ tales que $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$.

Recordemos algunas definiciones generales de topología.

Definición 2.1.5. *Sea $n \geq 1$. Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es llamada una n-equivalencia si para cada $x \in X$ el homomorfismo*

$$f_* : \pi_q(X, x) \longrightarrow \pi_q(Y, f(x))$$

es isomorfismo para $q \leq n-1$ y es un epimorfismo para $q = n$. Diremos que f es equivalencia homotópica débil si es una n-equivalencia para toda $n \geq 1$. Diremos también que $f : (A, X) \longrightarrow (Y, B)$ es una equivalencia homotópica débil de pares si $f : X \longrightarrow Y$ y $f|_A : A \longrightarrow B$ son equivalencias homotópicas débiles.

Para $\mathcal{C}$-espacios, tenemos la definición siguiente:

Definición 2.1.6. *Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$-espacios es n-equivalencia (una equivalencia homotópica débil) si para cada objeto c en $\mathcal{C}$ la aplicación de espacios $f(c) : X(c) \longrightarrow Y(c)$ es n-equivalencia (una equivalencia homotópica débil).*

Definición 2.1.7. *Sea* (X, A) *un par de* $\mathcal{C}$*-espacios (esto es, para cada* $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*,* $A(c) \subset X(c)$*). Una* $\mathcal{C}$*-CW-aproximación*

$$(u, v) : (X', A') \longrightarrow (X, A)$$

es un $\mathcal{C}$*-CW-par libre* (X', A') *junto con aplicaciones de* $\mathcal{C}$*-espacios*

$$u : X' \longrightarrow X$$

$$v : A' \longrightarrow A$$

tal que (u, v) *es equivalencia homotópica débil de* $\mathcal{C}$*-espacios.*

Una $\mathcal{C}$*-CW-aproximación de un* $\mathcal{C}$*-espacio* X *es una* $\mathcal{C}$*-CW- aproximación del par* $(X, \varnothing)$

La definición anterior es una generalización categórica de la noción de CW-aproximación para un espacio topológico.

El siguiente resultado es también una generalización del caso para complejos CW ordinarios y la prueba puede leerse en [5, Teo. 3.7].

Teorema 2.1.8. *Sea* (X, A) *un par de* $\mathcal{C}$*-espacios.*

i) (Existencia) Existe una $\mathcal{C}$*-CW-aproximación de* (X, A)*.*

ii) (Unicidad) Dada una aplicación de pares de $\mathcal{C}$*-espacios*

$$(f, g) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

y dadas $\mathcal{C}$*-CW-aproximaciones*

$$(u, v) : (X', A') \longrightarrow (X, A)$$

y

$$(a, b) : (Y', B') \longrightarrow (Y, B)$$

entonces existe una aplicación de pares

$$(f', g') : (X', A') \longrightarrow (Y', B')$$

tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X', A') \arrow[r, "(u,v)"] \arrow[d, "(f',g')"'] & (X, A) \arrow[d, "(f,g)"] \\
(Y', B') \arrow[r, "(a,b)"] & (Y, B)
\end{tikzcd}$$

conmuta salvo homotopía. Además la aplicación de $\mathcal{C}$*-espacios* (f', g') *es única salvo* $\mathcal{C}$*-homotopía.*

Sea $E\mathcal{C}$ cualquier $\mathcal{C}$-CW-complejo libre tal que $E\mathcal{C}(c)$ es contraible para cada objeto c en $\mathcal{C}$.

Observación 2.1.9. Dada una categoría $\mathcal{C}$, el $\mathcal{C}$-CW-complejo libre $E\mathcal{C}$ existe y es único salvo $\mathcal{C}$-homotopía.

En efecto, $E\mathcal{C}$ es una $\mathcal{C}$-CW-aproximación para el $\mathcal{C}$-espacio trivial $\{*\}$

$$(E\mathcal{C}, \varnothing) \xrightarrow{(u,\mathrm{Id})} (\{*\}, \varnothing)$$

$$\begin{tikzcd}
E\mathcal{C}(c) \arrow[r, "E\mathcal{C}(f)"] \arrow[d, "u"'] & E\mathcal{C}(d) \arrow[d, "u"] \\
\{*\} \arrow[r, equal] & \{*\}
\end{tikzcd}$$

Por el Teorema 2.1.8, $E\mathcal{C}$ es único salvo $\mathcal{C}$-homotopía.

Observación 2.1.10. Notemos que el $\mathcal{C}$-espacio trivial contravariante (covariante) no es en general un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, pero lo es cuando la categoría $\mathcal{C}$ tiene un objeto final (inicial).

Por ejemplo, sea $\mathcal{C}$ la categoría cuyos objetos son los enteros no negativos y hay una única flecha de i a j si $i \leq j$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

Definimos el $\mathcal{C}$-espacio contravariante

$$E\mathcal{C} : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ESPACIOS}$$

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {[i, \infty)} \\
j \arrow[r, mapsto] & {[j, \infty)} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Notemos que $E\mathcal{C}$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre cuyo 0-esqueleto es $E\mathcal{C}_0(c) = E\mathcal{C}(c) \cap \mathbb{Z} = [c, \infty) \cap \mathbb{Z}$. Además, $E\mathcal{C}(c)$ es contraíble para todo $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Sin embargo el $\mathcal{C}$-espacio trivial contravariante

$$* : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ESPACIOS}$$

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & * \\
j \arrow[r, mapsto] & * \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

no es $\mathcal{C}$-CW complejo libre pues por ejemplo, $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(1,0) = \varnothing$ y entonces

$$\begin{tikzcd}
\varnothing = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(1,0) \times S^{-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_{-1}(1) = \varnothing \arrow[d, hook] \\
\varnothing = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(1,0) \times D^{0} \arrow[r] & X_0(1) = *
\end{tikzcd}$$

no es pushout. Pero el $\mathcal{C}$-espacio trivial covariante es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, pues para cada $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(0, c) \neq \varnothing$ (0 es objeto inicial en $\mathcal{C}$). Por tanto, en el caso covariante podemos tomar a $E\mathcal{C}$ como dicho espacio trivial.

Dado un conjunto A, denotamos también por A a la categoría cuyos objetos son los elementos de A y los únicos morfismos son los morfismos identidad. En particular, si $\mathcal{C}$ es una categoría cualquiera, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ denotará la correspondiente categoría con $A = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Una aplicación f entre dos $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$-espacios

$$X, Y : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{ESPACIOS}$$

es simplemente una colección

$$\{f_c : X(c) \longrightarrow Y(c)\}_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}.$$

Existe un funtor olvidador $F : \mathcal{C} - \mathrm{ESPACIOS} \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) - \mathrm{ESPACIOS}$ de la categoría de $\mathcal{C}$-espacios contravariantes a la categoría de $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$-espacios definido como sigue:

$$F : \mathcal{C} - \mathrm{ESPACIOS} \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) - \mathrm{ESPACIOS}$$

$$\left(\begin{array}{c} X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{ESPACIOS} \\ \begin{tikzcd} c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & X(c) \\ d \arrow[r, mapsto] & X(d) \arrow[u, "X(f)"'] \end{tikzcd} \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{c} F(X) : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{ESPACIOS} \\ \begin{tikzcd} c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"'] & X(c) \arrow[d, equal, "X(\mathrm{Id})"] \\ c \arrow[r, mapsto] & X(c) \end{tikzcd} \end{array}\right)$$

Definimos un funtor

$$B : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) - \mathrm{ESPACIOS} \longrightarrow \mathcal{C} - \mathrm{ESPACIOS}$$

$$\left(\begin{array}{c} X(-) : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{ESPACIOS} \\ \begin{tikzcd} c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"'] & X(c) \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] \\ c \arrow[r, mapsto] & X(c) \end{tikzcd} \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{c} \coprod_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c) \times X(c) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{ESPACIOS} \\ \begin{tikzcd} d \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & \coprod_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d, c) \times X(c) \\ d' \arrow[r, mapsto] & \coprod_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d', c) \times X(c) \arrow[u, "(-)\circ\varphi\times\mathrm{Id}"'] \end{tikzcd} \end{array}\right)$$

Note que la clase de objetos en $\mathcal{C}$-ESPACIOS son $\mathcal{C}$-espacios contravariantes. En el caso cuando la categoría es $\mathcal{C}$-espacios covariantes usamos $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, -)$.

Lema 2.1.11. *El funtor B es adjunto izquierdo de F.*

Demostración. Debemos probar que para cada $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$-espacio X y para cada $\mathcal{C}$-espacio contravariante Y, tenemos una biyección natural (de hecho es homeomorfismo) dada por

$$T(X, Y) : \hom_{\mathcal{C}}(B(X), Y) \longrightarrow \hom_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}(X, F(Y))$$

$$\{f_d : \coprod_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d, c) \times X(c) \longrightarrow Y(d)\}_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \longmapsto \{f_d|_{\mathrm{Id}_d \times X(d)} : X(d) \longrightarrow Y(d)\}_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

Definimos

$$T'(X,Y): \hom_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}(X, F(Y)) \longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}(B(X), Y)$$

$$g = \{g_c : X(c) \longrightarrow Y(c)\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \longmapsto \left\{ \begin{array}{lll} B(X) = \coprod\limits_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c) \times X(c) & \xrightarrow{u_d} & Y(d)\}_{d\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ \qquad\qquad (d \xrightarrow{\phi} c, x) & \longmapsto & Y(\phi)\circ g_c(x) \end{array} \right\}_{d\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

$T'(X,Y)(g)$ es transformación natural pues, para $d \xrightarrow{\varphi} d'$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c) \times X(c) \arrow[r, "u_d"] & Y(d) \\ \coprod\limits_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d',c) \times X(c) \arrow[r, "u_{d'}"] \arrow[u, "(-)\circ\varphi\times\mathrm{Id}"] & Y(d') \arrow[u, "Y(\varphi)"'] \end{tikzcd}$$

En efecto,

$$\begin{tikzcd} (d \overset{\varphi}{\to} d' \overset{\phi}{\to} c, x) \arrow[r, mapsto] & Y(\phi\varphi)(g_c(x)) = Y(\varphi)Y(\phi)(g_c(x)) \\ (d' \overset{\phi}{\to} c, x) \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto, "(-)\circ\varphi\times\mathrm{Id}"] & Y(\phi)(g_c(x)) \arrow[u, mapsto, "Y(\varphi)"'] \end{tikzcd}$$

Probaremos que $T'(X,Y)\circ T(X,Y) = \mathrm{Id}$.
Sea $f \in \hom_{\mathcal{C}}(B(X), Y)$. Dado $\phi : d \longrightarrow c$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c) \times X(c) \arrow[r, "f_d"] & Y(d) \\ \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c,c) \times X(c) \arrow[r, "f_c"] \arrow[u, "(-)\circ\phi\times\mathrm{Id}"] & Y(c) \arrow[u, "Y(\phi)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathrm{Id}_c\circ\phi, x) \arrow[r, mapsto] & f_d(\phi,x) = Y(\phi)\circ f_c(c \overset{\mathrm{Id}}{\to} c, x) \\ (c \overset{\mathrm{Id}}{\to} c, x) \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & f_c(c \overset{\mathrm{Id}}{\to} c, x) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

de aquí que,

$$f_d(\phi, x) = Y(\phi)\circ f_c(c \overset{\mathrm{Id}}{\to} c, x) \tag{2.1}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (T'(X,Y)\circ T(X,Y))(f) &= T'(X,Y)(T(X,Y)(f)) \\ &= T'(X,Y)(\{X(d) \xrightarrow{f_d|_{\{\mathrm{Id}_d\}\times X(d)}} Y(d)\}_{d\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}) \\ &= \left\{ \begin{array}{lll} \coprod\limits_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c) \times X(c) & \longrightarrow & Y(d) \\ \qquad\qquad (d \overset{\phi}{\to} c, x) & \longmapsto & Y(\phi)(f_c|_{\{\mathrm{Id}\}\times X(c)}(x)) \end{array} \right\}_{d\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \{f_d : \coprod_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)\times X(c) \longrightarrow Y(d)\}_{d\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \quad \text{(por (2.1))} \end{aligned}$$

Por tanto, $T'(X,Y)\circ T(X,Y)(f) = f$.

Ahora, mostraremos que $T(X,Y)\circ T'(X,Y) = \mathrm{Id}$.

Sea $g \in \hom_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}(X, F(Y))$.

$$(T(X,Y) \circ T'(X,Y))(g) = T(X,Y)\left\{ \begin{array}{rcl} B(X) = \coprod_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c) \times X(c) & \xrightarrow{u_d} & Y(d) \\ (d \xrightarrow{\phi} c, x) & \longmapsto & Y(\phi) \circ g_c(x) \end{array} \right\}_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

$$= \left\{ \begin{array}{rcl} X(d) & \xrightarrow{u_d|_{\{\mathrm{Id}\} \times X(d)}} & Y(d) \\ & & \\ (d \xrightarrow{\mathrm{Id}} d, x) & \longmapsto & Y(\mathrm{Id}_d)(g_d(x)) = g_d(x) \end{array} \right\}_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

$$= g$$

■

Sea $f : Y \longrightarrow Z$ una aplicación de $\mathcal{C}$-espacios y X un $\mathcal{C}$-espacio. La aplicación de clases de homotopía en $\mathcal{C}$-espacios inducida por la composición con f se denota por

$$\begin{aligned} f_* : [X,Y]^{\mathcal{C}} &\longrightarrow [X,Z]^{\mathcal{C}} \\ [X \xrightarrow{\phi} Y] &\longmapsto [X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{f} Z] \end{aligned}$$

Teorema 2.1.12. *Sea $f : Y \longrightarrow Z$ una aplicación de $\mathcal{C}$-espacios y X un $\mathcal{C}$-espacio. Entonces*

i) f es n-conexa si y sólo si f_* es biyectiva para cualquier $\mathcal{C}$-CW-complejo libre X con $\dim(X) < n$ y sobreyectiva para cualquier $\mathcal{C}$-CW-complejo libre X con $\dim(X) \leq n$.

ii) f es una equivalencia homotópica débil si y sólo si f_* es biyectiva para cualquier $\mathcal{C}$-CW-complejo libre X.

Demostración. Probaremos sólo el siguiente caso particular de la parte *ii)* de este teorema. Dada la función constante $f : Y \longrightarrow \{*\}$, si $f_* : [X,Y]^{\mathcal{C}} \longrightarrow [X,\{*\}]^{\mathcal{C}}$ es biyectiva para cualquier $\mathcal{C}$-CW-complejo libre X, entonces f es una $\mathcal{C}$-equivalencia homotópica. Como Z es el $\mathcal{C}$-espacio trivial ($Z = \{*\}$) tenemos que

$$[X,Z]^{\mathcal{C}} = \{*\}$$

pues sólo existe una única transformación natural de X en Z

$$\begin{tikzcd} X(c) \arrow[r] & Z(c) = \{*\} \\ X(d) \arrow[u, "X(\phi)"] \arrow[r] & Z(d) = \{*\} \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

Por la biyectividad de $f_* : [X,Y]^{\mathcal{C}} \longrightarrow [X,Z]^{\mathcal{C}}$, existe una única clase de homotopía en $[X,Y]^{\mathcal{C}}$ para cada $\mathcal{C}$-CW-complejo X. Tomamos el $\mathcal{C}$-CW-complejo $X = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) \times S^k$ para cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ fijo, tenemos que $[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) \times S^k, Y]$ consta de una única clase de homotopía. Por el Lema 2.1.11 tenemos un homeomorfismo

$$\begin{aligned} \hom_{\mathcal{C}}\left(\coprod_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) \times S^k, Y \right) &\longrightarrow \hom_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}(S^k, F(Y)) = \prod_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} M(S^k, Y(c)) \\ \left(\coprod_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) \times S^k \xrightarrow{f} Y \right) &\longmapsto \{\, S^k \xrightarrow{f|_{\mathrm{Id}_c \times S^k}} Y(c) \,\}_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

(donde hemos tomado el $\mathcal{C}$-espacio constante $X(c) = S^k$ para todo $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ en el Lema 2.1.11). Por otro lado, tenemos el homeomorfismo

$$\prod_{c\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \hom_{\mathcal{C}}(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)\times S^k, Y) \longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}\left(\coprod_{c\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)\times S^k, Y\right)$$

$$\{\{\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)\times S^k \xrightarrow{f_d^c} Y(d)\}_{d\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\}_{c\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \longmapsto \left\{\coprod_{c\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)\times S^k \xrightarrow{\amalg f_d^c} Y(d)\right\}_{d\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

Por tanto tenemos el homeomorfismo restricción

$$\hom_{\mathcal{C}}(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)\times S^k, Y) \xrightarrow{\approx} M(S^k, Y(c))$$

Este homeomorfismo induce una biyección natural

$$\begin{aligned} [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)\times S^k, Y]^{\mathcal{C}} &\xrightarrow{J} [S^k, Y(c)] \\ [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)\times S^k \xrightarrow{f} Y] &\longmapsto [S^k \xrightarrow{f_c|_{\mathrm{Id}_c\times S^k}} Y(c)] \end{aligned} \tag{2.2}$$

En efecto, si $f, g \in \hom_{\mathcal{C}}(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)\times S^k, Y)$ son transformaciones naturales $\mathcal{C}$-homotópicas, entonces existe

$$H : (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)\times S^k)\times I \longrightarrow Y$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)\times S^k)\times I \arrow[r, "H_d"] & Y(d) \\
(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d',c)\times S^k)\times I \arrow[r, "H_{d'}"] \arrow[u, "(-)\circ\varphi"] & Y(d') \arrow[u, "Y(\varphi)"']
\end{tikzcd}$$

aplicación de $\mathcal{C}$-espacios tal que

$$H_d|_{(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)\times S^k)\times\{0\}} = f_d$$

$$H_d|_{(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)\times S^k)\times\{1\}} = g_d$$

para cada $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Y así,

$$H_d|_{(\{\mathrm{Id}_d\}\times S^k)\times I} : S^k\times I \longrightarrow Y(d)$$

es tal que

$$H_d|_{(\{\mathrm{Id}_d\}\times S^k)\times\{0\}} = f_d|_{\{\mathrm{Id}_d\}\times S^k}$$

$$H_d|_{(\{\mathrm{Id}_d\}\times S^k)\times\{1\}} = g_d|_{\{\mathrm{Id}_d\}\times S^k}$$

para cada $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. De aquí que J está bien definida.
Definamos el inverso de J:

$$\begin{aligned} [S^k, Y(c)] &\xrightarrow{K} [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)\times S^k, Y]^{\mathcal{C}} \\ [S^k \xrightarrow{g_c} Y(c)] &\longmapsto [\{\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)\times S^k \longrightarrow Y(d)\}_{d\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}}] \\ & \qquad (d \xrightarrow{\phi} c, x) \longmapsto Y(\phi)(g_c(x)) \end{aligned}$$

Si $f, g : S^k \longrightarrow Y(c)$ son homotópicas, existe $H_c : S^k \times I \longrightarrow Y(c)$ tal que $H_c|_{S^k \times \{0\}} = f_c$ y $H_c|_{S^k \times \{1\}} = g_c$. Definimos para cada $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$\begin{aligned} (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c) \times S^k) \times I &\xrightarrow{\widetilde{H}_d} Y(d) \\ ((d \xrightarrow{\phi} c, x), t) &\longmapsto Y(\phi)(H_c(x,t)) \end{aligned}$$

y obtenemos que $K(f_c)$ y $K(g_c)$ son homotópicas. Note que $\widetilde{H} : \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) \times S^k \times I \longrightarrow Y(-)$ es transformación natural, pues dado $\varphi : d \longrightarrow d'$,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c) \times S^k \times I \arrow[r, "\widetilde{H}_d"] & Y(d) \\ \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d',c) \times S^k \times I \arrow[r, "\widetilde{H}_{d'}"] \arrow[u, "()\circ\varphi\times\mathrm{Id}\times\mathrm{Id}"] & Y(d') \arrow[u, "Y(\varphi)"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} ((d \xrightarrow{\varphi} d' \xrightarrow{\phi} c, x), t) \arrow[r, mapsto, "\widetilde{H}_d"] & Y(\phi \circ \varphi) H_c(x,t) \\ ((d' \xrightarrow{\phi} c, x), t) \arrow[r, mapsto, "\widetilde{H}_{d'}"] \arrow[u, mapsto] & Y(\phi) H_c(x,t) \arrow[u, mapsto, "Y(\varphi)"] \end{tikzcd}$$

Por tanto, K está bien definida.
Dado que $[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d',c) \times S^k]^{\mathcal{C}}$ consta de un único punto, entonces $[S^k, Y(c)]$ consta de un único elemento. Afirmamos que $\pi_k(Y(c)) = 0$. En general se tiene que $[S^k, Y(c)] \cong \pi_k(Y(c))/\pi_1(Y)$ (puede consultarse Proposición 4.A.2 de [6]) y como $[S^1, Y(c)] = 0$, entonces

$$\pi_1(Y(c))/\pi_1(Y(c)) = 0.$$

La acción de $\pi_1(Y(c))$ sobre sí mismo es por conjugación, así que todo elemento en $\pi_1(Y(c))$ es conjugado al elemento trivial. De aquí que todo elemento es trivial, es decir, $\pi_1(Y(c)) = 0$. Ahora, para $k \geq 1$ tenemos

$$0 = [S^k, Y(c)] = \pi_k(Y(c))/\pi_1(Y(c)) = \pi_k(Y(c)).$$

Entonces

$$(f_*)_c : \pi_k(Y(c)) \longrightarrow \pi_k(Z(c)) = 0$$

es isomorfismo de grupos para toda k y por definición $f_c : Y(c) \longrightarrow Z(c)$ es equivalencia homotópica débil para cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, esto es,

$$f : Y \longrightarrow Z$$

es equivalencia homotópica débil.
El resto de la prueba de *ii)* puede consultarse en [5, Teo. 3.4]. ■

Con (2.2) se puede mostrar que las clases de homotopía punteadas $[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) \wedge S^k, Y]^{\mathcal{C}}$ y $\pi_k(Y(c), y_0)$ son isomorfos y por tanto $[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) \wedge S^k, Y]^{\mathcal{C}}$ es grupo.

2.2. Colímites de $\mathcal{C}$-espacios

Definición 2.2.1. *Sea X un $\mathcal{C}$-espacio covariante. Definimos el colímite homotópico de X sobre $\mathcal{C}$ como el espacio topológico*

$$\operatorname{hocolim}_{\mathcal{C}}(X) = E\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}} X$$

La propiedad más importante del colímite homotópico es que si $X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica débil de $\mathcal{C}$-espacios covariantes entonces también lo es la aplicación inducida

$$\operatorname{hocolim}_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow \operatorname{hocolim}_{\mathcal{C}}(Y)$$

lo cual es consecuencia del siguiente teorema cuya demostración puede consultarse en [5, Teo. 3.11].

Teorema 2.2.2. *Sea $f : Y \longrightarrow Z$ una equivalencia homotópica débil de $\mathcal{C}$-espacios covariantes. Sea X un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre contravariante. Entonces la aplicación inducida*

$$\operatorname{Id} \otimes_{\mathcal{C}} f : X \otimes_{\mathcal{C}} Y \longrightarrow X \otimes_{\mathcal{C}} Z$$

es una equivalencia homotópica débil.

Definición 2.2.3. *Sea X un $\mathcal{C}$-espacio covariante. Definimos el colímite de X sobre $\mathcal{C}$ como el espacio topológico*

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{C}}(X) = \{*\} \otimes_{\mathcal{C}} X$$

Ahora, dado un $\mathcal{C}$-espacio covariante X daremos una definición equivalente del colímite en términos de su propiedad universal. Definimos $\operatorname{colim}_{\mathcal{C}}(X)$ como una pareja $(Z, \{\varphi_c\}_{c\in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})})$ donde Z es un espacio topológico y $\{\varphi_c : X(c) \longrightarrow Z\}_{c\in\operatorname{Ob}(\mathcal{C})}$ es una colección de aplicaciones con las siguientes propiedades:

i) Para cada par de objetos c, d en $\mathcal{C}$ y cada morfismo $f : c \longrightarrow d$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X(c) \arrow[rr, "X(f)"] \arrow[dr, "\varphi_c"'] & & X(d) \arrow[dl, "\varphi_d"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

ii) Dado cualquier par $(N, \{\psi_c\}_{c\in\operatorname{Ob}(\mathcal{C})})$ donde N es un espacio topológico y $\{\psi_c : X(c) \longrightarrow Z\}_{c\in\operatorname{Ob}(\mathcal{C})}$ es una colección de aplicaciones con la propiedad de que el siguiente diagrama conmuta para cualquier morfismo $f : c \to d$ en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X(c) \arrow[rr, "X(f)"] \arrow[dr, "\psi_c"'] & & X(d) \arrow[dl, "\psi_d"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

entonces existe una única aplicación $u : Z \longrightarrow N$ tal que los tres triángulos en el siguiente diagrama conmutan

$$\begin{tikzcd}
X(c) \arrow[rr, "X(f)"] \arrow[dr, "\varphi_c"'] \arrow[ddr, bend right, "\psi_c"'] & & X(d) \arrow[dl, "\varphi_d"] \arrow[ddl, bend left, "\psi_d"] \\
& Z \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
& N &
\end{tikzcd}$$

Sea $\varphi_c : X(c) \longrightarrow \{*\} \otimes_{\mathcal{C}} X$ la proyección canónica para cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. La pareja $(\{*\} \otimes_{\mathcal{C}} X, \{\varphi\}_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})})$ es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X(c) \arrow[rr, "X(f)"] \arrow[dr, "\varphi_c"'] & & X(d) \arrow[dl, "\varphi_d"] \\
& \{*\} \otimes_{\mathcal{C}} X &
\end{tikzcd}$$

pues, $\varphi_d(X(f)(x)) = \overline{(*, X(f)(x))} = \overline{(*, x)} = \varphi_c(x)$. También se puede probar que $(\{*\} \otimes_{\mathcal{C}} X, \{\varphi\}_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})})$ cumple el inciso *ii)* anterior, definiendo $u(\overline{(*, x)}) = \psi_c(x)$ para $(*, x) \in \{*\} \times X(c)$. Por tanto ambas definiciones del colímite son equivalentes.

Por ejemplo, consideremos el conjunto dirigido de los naturales $\mathbb{N}$ y un sistema dirigido $\{f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j\}_{i \leq j}$, es decir, $f_{ii} = \mathrm{Id}_{A_i}$ y

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "f_{ik}"'] & & A_j \arrow[dl, "f_{jk}"] \\
& A_k &
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i \leq j \leq k$. Sea $\mathcal{C}$ la categoría cuya clase de objetos son los naturales y dados $i, j \in \mathbb{N}$ hay un único morfismo si $i \leq j$. Tomemos el $\mathcal{C}$-espacio

$$A : \mathcal{C} = \mathbb{N} \longrightarrow \text{ESPACIOS}$$

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r] \arrow[d, "i \leq j"'] & A_i \arrow[d, "f_{ij}"] \\
j \arrow[r] & A_j
\end{tikzcd}$$

Notemos que en efecto A es funtor:

$$A(i \xrightarrow{\mathrm{Id}} i) = f_{ii} = \mathrm{Id}$$
$$A(i \longrightarrow j \longrightarrow k) = A(i \longrightarrow k) = f_{ik}$$
$$A(j \longrightarrow k) \circ A(i \longrightarrow j) = f_{jk} \circ f_{ik} = f_{ik}$$

En este caso, la definición de colímite dada al inicio de esta sección coincide con la definición usual, pues

$$
\begin{aligned}
\{*\} \otimes_{\mathcal{C}} A &= \frac{\coprod_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \{*\} \times A(c)}{(*, y) \sim (*, A(f)(y))} \\
&= \frac{\coprod_{i \in \mathbb{N}} A_i}{y \sim X(i \to j)(y)} \\
&= \frac{\coprod_{i \in \mathbb{N}} A_i}{y \sim f_{ij}(y)} \\
&= \mathrm{colim}_{i \to \infty}(A_i)
\end{aligned}
$$

Tenemos una aplicación entre espacios topológicos

$$\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} X \longrightarrow \mathrm{colim}_{\mathcal{C}} X$$

inducida por la aplicación $E\mathcal{C} \longrightarrow \{*\}$ que en general no es una equivalencia homotópica débil, sin embargo se tiene lo siguiente:

Observación 2.2.4. Cuando la categoría $\mathcal{C}$ tiene un objeto final f podemos tomar $E\mathcal{C} = \{*\}$, por la Observación 2.1.10, y entonces tenemos una equivalencia homotópica débil entre $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}}$ y $\mathrm{colim}_{\mathcal{C}}$. Además, usando la propiedad universal del colimite, es fácil ver que

$$\mathrm{colim}_{\mathcal{C}} X \cong X(f)$$

Por tanto, existe una equivalencia homotópica débil entre $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}} X$ y $X(f)$.

2.3. $\mathcal{C}$-Cohomología

Definiremos el n-ésimo grupo de $\mathcal{C}$-cohomología de un $\mathcal{C}$-espacio con coeficientes en un $\mathbb{Z}\mathcal{C}$-módulo M (ambos de la misma varianza) como sigue:

Tenemos el siguiente funtor

$$C_* : \mathrm{ESPACIOS} \longrightarrow \mathrm{COMP}$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & C_*(X) \arrow[d, "C_*(f)"] \\
Y \arrow[r, mapsto] & C_*(Y)
\end{tikzcd}
$$

donde COMP es la categoría complejos de cadenas y $C_*(X)$ es el complejo de cadenas asociado al espacio X (en nuestro caso usaremos el complejo de cadenas celular y la categoría de CW-complejos y funciones celulares). Para cada $n \in \mathbb{Z}$ fijo tenemos el funtor

$$C_n : \mathrm{ESPACIOS} \longrightarrow \mathbb{Z}-\mathrm{Mod}$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & C_n(X) \arrow[d, "C_n(f)"] \\
Y \arrow[r, mapsto] & C_n(Y)
\end{tikzcd}
$$

Dado un $\mathcal{C}$-espacio X', para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos el $\mathbb{Z}$-módulo de transformaciones naturales

$$\hom_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(C_n(X'), M) = \{t = \{C_n(X'(c)) \xrightarrow{t_c} M(c)\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mid t \text{ es natural}\}$$

Definimos el complejo de cadenas

$$\begin{array}{ccc} \hom_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(C_n(X'), M) & \xrightarrow{()\circ\partial_{n+1}} & \hom_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(C_{n+1}(X'), M) \\ \{C_n(X'(c)) \xrightarrow{t_c} M(c)\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} & \longmapsto & \{C_{n+1}(X'(c)) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X'(c)) \xrightarrow{t_c} M(c)\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \end{array}$$

Efectivamente, la imagen de $() \circ \partial_{n+1}$ es transformación natural pues, dada $f : c \longrightarrow d$, se tiene

$$\left(\begin{tikzcd} C_n(X'(c)) \arrow[r, "t_c"] \arrow[d, "(C_*(X'(f))_n"] & M(c) \arrow[d, "M(f)"] \\ C_n(X'(d)) \arrow[r, "t_d"] & M(d) \end{tikzcd}\right) \longmapsto \left(\begin{tikzcd} C_{n+1}(X'(c)) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "(C_*(X'(f))_{n+1}"] & C_n(X'(c)) \arrow[r, "t_c"] \arrow[d, "(C_*(X'(f))_n"] & M(c) \arrow[d, "M(f)"] \\ C_{n+1}(X'(d)) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n(X'(d)) \arrow[r, "t_d"] & M(d) \end{tikzcd}\right)$$

Finalmente tomamos la cohomología de este complejo de co-cadena dada en la siguiente definición.

Definición 2.3.1. *Sea $X : \mathcal{C} \longrightarrow$ ESPACIOS un $\mathcal{C}$-espacio y $M : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ un $\mathbb{Z}\mathcal{C}$-módulo de la misma varianza. Sea $X' \longrightarrow X$ una $\mathcal{C}$-CW-aproximación. Definimos el n-ésimo grupo de $\mathcal{C}$-cohomología de X con coeficientes en M*

$$H^n_{\mathcal{C}}(X; M) = H^n(\hom_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(C_*(X'), M))$$

donde $C_*(X')$ es el complejo celular de X'. Para un par de $\mathcal{C}$-espacios (X, A) definimos

$$H^n_{\mathcal{C}}((X, A); M) = H^n(\hom_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(C_*(X', A'), M))$$

donde $(X', A') \longrightarrow (X, A)$ es una $\mathcal{C}$-CW-aproximación.

Definimos $H^n_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} - \text{pares} \longrightarrow \mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ como el funtor

$$H^n_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} - \text{pares} \longrightarrow \mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$$

$$\begin{tikzcd} (X, A) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & H^n_{\mathcal{C}}(X, A) \\ (Y, B) \arrow[r] & H^n_{\mathcal{C}}(Y, B) \arrow[u, "H^n_{\mathcal{C}}(u)=u^*"'] \end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{array}{ccc} & H^n_{\mathcal{C}}(u) = u^* : H^n_{\mathcal{C}}(Y, B) \longrightarrow H^n_{\mathcal{C}}(X, A) & \\ \hline \{C_n(Y(c), B(c)) \xrightarrow{t_c} M(c)\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} & \longmapsto & \{C_n(X(c), A(c)) \xrightarrow{t_c\circ(C_*(u_c))_n} M(c)\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \end{array}$$

(la barra superior indica tomar la clase en cohomología). Podemos suponer que (X, A) es $\mathcal{C}$-CW-aproximación por el Teorema 2.1.8 (pues se tiene la funtorialidad). Veamos que u^* está bien definida. Dado que u es transformación natural, para cada $f : c \longrightarrow d$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X(c) \arrow[r, "u_c"] & Y(c) \\
X(d) \arrow[r, "u_d"] \arrow[u, "X(f)"'] & Y(d) \arrow[u, "Y(f)"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, para cada n, el siguiente diagrama también conmuta en todas sus caras

$$\begin{tikzcd}
& C_n(X(c)) \arrow[rr, "(C_*(u_c))_n"] & & C_n(Y(c)) \\
C_{n+1}(X(c)) \arrow[ur, "\partial_{n+1}^{X(c)}"] \arrow[rr, "(C_*(u_c))_{n+1}"] & & C_{n+1}(Y(c)) \arrow[ur, "\partial_{n+1}^{Y(c)}"] & \\
& C_n(X(d)) \arrow[uu] \arrow[rr, "(C_*(u_d))_n"] & & C_n(Y(d)) \arrow[uu, "(C_*(Y(f)))_n"'] \\
C_{n+1}(X(d)) \arrow[uu, "C_*(X(f))_{n+1}"] \arrow[ur, "\partial_{n+1}^{X(d)}"'] \arrow[rr, "(C_*(u_d))_{n+1}"'] & & C_{n+1}(Y(d)) \arrow[uu] \arrow[ur, "\partial_{n+1}^{Y(d)}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Sea $t = \{C_n(Y(c)) \xrightarrow{t_c} M(c)\}_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ un cociclo en $\hom_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(C_n(Y), M)$. Entonces $t_c \circ \partial_{n+1}^{Y(c)} = 0$ para todo $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Consideremos

$$u^{\#}(t) = \{t_c \circ (C_*(u_c))_n\}_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

esto es,

$$\begin{tikzcd}
C_n(X(c)) \arrow[r, "C_*(u_c)_n"] & C_n(Y(c)) \arrow[r, "t_c"] & M(c) \\
C_n(X(d)) \arrow[r, "C_*(u_d)_n"] \arrow[u, "C_*(X(f))_n"] & C_n(Y(d)) \arrow[r, "t_d"] \arrow[u, "C_*(Y(f))_n"'] & M(d) \arrow[u, "M(f)"']
\end{tikzcd}$$

conmuta para cada $c, d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Calculemos $(u^{\#}t)\circ\partial_{n+1}^{X(c)}$: se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1}(X(c)) \arrow[r, "\partial_{n+1}^{X(c)}"] \arrow[rr, bend left, "\partial_{n+1}^{Y(c)} C_*(u_c)_{n+1}"] & C_n(X(c)) \arrow[r, "C_*(u_c)_n"] & C_n(Y(c)) \arrow[r, "t_c"] & M(c) \\
C_{n+1}(X(d)) \arrow[u, "C_*(X(f))_{n+1}"] \arrow[r, "\partial_{n+1}^{X(d)}"] \arrow[rr, bend right, "\partial_{n+1}^{Y(d)} C_*(u_d)_{n+1}"'] & C_n(X(d)) \arrow[u, "C_*(X(f))_n"] \arrow[r, "C_*(u_d)_n"] & C_n(Y(d)) \arrow[u, "C_*(Y(f))_n"'] \arrow[r, "t_d"] & M(d) \arrow[u, "M(f)"']
\end{tikzcd}$$

donde el primer y segundo cuadrado conmutan por la cara izquierda y cara posterior del cubo (2.3) respectivamente y las flechas superior e inferior se tienen por la conmutatividad de la cara superior e inferior del mismo diagrama (2.3). Por tanto, obtenemos

$$\begin{aligned}
(t_c \circ C_*(u_c)_n) \circ \partial_{n+1}^{X(c)} &= t_c(C_*(u_c)_n \circ \partial_{n+1}^{X(c)}) \\
&= t_c(\partial_{n+1}^{Y(c)} \circ C_*(u_c)_{n+1}) && \text{(conmutatividad anterior)} \\
&= (t_c \circ \partial_{n+1}^{Y(c)}) \circ C_*(u_c)_{n+1} \\
&= 0 && (t_c \circ \partial_{n+1}^{Y(c)} = 0 \text{ por hipótesis})
\end{aligned}$$

Esto ocurre para cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. De aquí que $u^{\#}(t) = \{t_c \circ C_*(u_c)_n\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ es un cociclo en $\hom_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(C_*(X), M)$. Ahora veamos que cofronteras van a dar a cofronteras: sea $(t \circ \partial_{n+1}^{Y}) = \{t_c \circ \partial_{n+1}^{Y(c)} : C_{n+1}(Y(c)) \longrightarrow M(c)\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ una cofrontera en $\hom_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(C_{n+1}(Y), M)$. Entonces

$$\begin{aligned}
u^{\#}(t \circ \partial_{n+1}^{Y}) &= \{(t_c \circ \partial_{n+1}^{Y(c)}) \circ C_*(u_c)_{n+1}\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\
&= \{t_c \circ (\partial_{n+1}^{Y(c)} \circ C_*(u_c)_{n+1})\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\
&= \{t_c \circ (C_*(u_c)_n \circ \partial_{n+1}^{X(c)})\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\
&= \{(t_c \circ C_*(u_c)_n) \circ \partial_{n+1}^{X(c)}\}_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}
\end{aligned}$$

Por tanto $u^{\#}(t \circ \partial_{n+1}^{Y})$ es cofrontera. Y con ello $u^* = H_{\mathcal{C}}^n(u)$ está bien definida.

Notemos que en el caso en que $\mathcal{C}$ es la categoría trivial, un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre es un CW-complejo y tanto $C_n(X')$ como M son grupos abelianos (es decir, $\mathbb{Z}$-módulos). Por tanto $H_{\mathcal{C}}^n(\hom_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(C_n(X'), M))$ es la cohomología celular usual con coeficientes en el grupo M.

Capítulo 3

Teorías de cohomología equivariante

En este capítulo definiremos G-CW-complejo y veremos algunas de sus propiedades. También definiremos cohomología equivariante de Bredon de un G-CW-complejo y veremos que esta resulta ser un ejemplo de $\mathcal{C}$-cohomología tomando $\mathcal{C}$ igual a la categoría de órbitas y cierto $\mathcal{C}$-espacio asociado al G-CW-complejo. Los resultados en este capítulo fueron tomados de [3] y de [10].

3.1. La categoría de órbitas canónicas

Sea G un grupo finito. La categoría de órbitas canónicas denotada por $\mathcal{O}(G)$ se define como la categoría cuyos objetos son los espacios de clases laterales izquierdas G/H (con la topología discreta), es decir,

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{O}(G)) = \{G/H \mid H \text{ es subgrupo de } G\}$$

y cuyos morfismos son las funciones G-equivariantes

$$G/H \xrightarrow{f} G/K$$

respecto a la traslación izquierda (es decir, la acción de G en G/H está dada por $(s, gH) \mapsto sgH$). Esto es, f es tal que

$$\begin{tikzcd}
G/H \arrow[r, "s\cdot()"] \arrow[d, "f"] & G/H \arrow[d, "f"'] \\
G/K \arrow[r, "s\cdot()"'] & G/K
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $s \in G$. Denotaremos $\hom^G(G/H, G/K)$ al conjunto de funciones G-equivariantes de G/H en G/K. Vamos a clasificar cómo son dichas funciones G-equivariantes.

Observación 3.1.1. Sea $f : G/H \to G/K$ cualquier función G-equivariante. Así $f(H) = aK$ para algún $a \in G$. Se cumple que f es equivariante si y sólo si $f(gH) = gaK$ para toda $g \in G$.

En efecto, supongamos que $f : G/H \to G/K$ es equivariante. Entonces $f(sgH) = sf(gH)$ para toda $s, g \in G$. Tomando g igual al neutro de G, se tiene $f(sH) = sf(H) = saK$ para todo $s \in G$.
Ahora supongamos que $f(gH) = gaK$ para toda $g \in G$. Entonces $f(s(gH)) = f(sgH) = (sg)aK = s(gaK) = sf(gH)$. Por tanto f es equivariante.

Observación 3.1.2. $f : G/H \to G/K$ está bien definida como función si y sólo si $f(ghH) = f(gH)$ para toda $h \in H$, para todo $g \in G$.

La necesidad es inmediata. Probemos entonces la suficiencia. Supongamos que $f(ghH) = f(gH)$ para toda $h \in H$, para todo $g \in G$. Sea $g_1H = g_2H$. Entonces $g_1^{-1}g_2H = H$ lo que implica que $g_1^{-1}g_2 \in H$. Así, $f(g_1H) = f(g_1(g_1^{-1}g_2)H) = f(g_2H)$, es decir, f está bien definida.

Si definimos $f(gH) = gaK$ con $a \in G$ fijo (lo cual equivale a que f sea equivariante por Observación 3.1.1), tenemos que $f : G/H \to G/K$ está bien definida si y sólo si $f(ghH) = f(gH)$ para toda $h \in H$ por la Observación 3.1.2, pero esto equivale a que $gh(aK) = gaK$ para toda $h \in H$, es decir, es necesario y suficiente que $a^{-1}Ha \subset K$. Tenemos entonces el siguiente resultado: $f(gH) := gaK$ está bien definida y es equivariante si y sólo si $a^{-1}Ha \subset K$.

Para $a \in G$ tal que $a^{-1}Ha \subset K$, definimos

$$\begin{aligned} \widehat{a} : G/H &\to G/K \\ gH &\mapsto gaK \end{aligned} \tag{3.1}$$

Entonces $\widehat{a}$ es equivariante (es decir, $\widehat{a} \in \hom^G(G/H, G/K)$) y toda aplicación equivariante $G/H \to G/K$ es de esta forma.

Observación 3.1.3. $\widehat{a} = \widehat{b}$ si y sólo si $aK = bK$

En efecto, supongamos primero que $\widehat{a} = \widehat{b}$. Entonces $\widehat{a}(H) = \widehat{b}(H)$ y por definición de $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ se tiene $aK = bK$. Supongamos ahora que $aK = bK$. Sea $gH \in G/H$, entonces

$$\widehat{a}(gH) = gaK$$

$$\widehat{b}(gH) = gbK$$

y por la hipótesis tenemos que $gaK = gbK$, por tanto $\widehat{a} = \widehat{b}$.

Supongamos que se cumple la condición $a^{-1}Ha \subset K$. Entonces la inclusión $a^{-1}Ha \subset K$ induce una proyección natural

$$\begin{aligned} G/a^{-1}Ha &\xrightarrow{\pi} G/K \\ g(a^{-1}Ha) &\longmapsto gK \end{aligned}$$

equivariante.

Análogamente, si se cumple $a^{-1}Ha \subset K$, entonces $H \subset aKa^{-1}$ y esta inclusión induce la proyección canónica equivariante

$$\begin{aligned} G/H &\xrightarrow{\pi} G/aKa^{-1} \\ gH &\longmapsto g(aKa^{-1}) \end{aligned}$$

La traslación por un elemento $a \in G$ por la derecha, induce una función equivariante

$$\begin{aligned} R_a : G/H &\longrightarrow G/a^{-1}Ha \\ gH &\longmapsto ga(a^{-1}Ha) \end{aligned}$$

Así, el conjunto de funciones equivariantes, $\hom^G(G/H, G/K)$ consiste en todas las composiciones

$$G/H \xrightarrow{\pi} G/aKa^{-1} \xrightarrow{R_a} G/K$$

con $a^{-1}Ha \subset K$, o equivalentemente

$$G/H \xrightarrow{R_a} G/a^{-1}Ha \xrightarrow{\pi} G/K$$

con $a^{-1}Ha \subset K$. Más precisamente, $\pi \circ R_a = R_a \circ \pi = \widehat{a} : G/H \longrightarrow G/K$ con $a^{-1}Ha \subset K$. En particular, tomando $K = H$ y asumiendo que $a^{-1}Ha \subset H$ entonces

$$\hom^G(G/H, G/H) = \{R_a : G/H \to G/H \mid a \in N_G(H)\}$$

donde $N_G(H) = \{a \in G \mid a^{-1}Ha \subset H\}$ es el normalizador de H. En efecto, notemos que $f \in \hom^G(G/H, G/H)$ si y sólo si $f = \widehat{a}$ para algún $a \in G$ ($\widehat{a}$ definida en (3.1)) tal que $a^{-1}Ha \subset H$, es decir, $a \in N_G(H)$. Recíprocamente, si $a \in N_G(H)$ entonces $a^{-1}Ha \subset H$ y así $\widehat{a} \in \hom^G(G/H, G/H)$. Por tanto

$$\hom^G(G/H, G/H) = \{\widehat{a} : G/H \to G/H \mid a \in N_G(H)\}$$

Observemos que $R_aR_b = R_{ba} : G/H \to G/H$, donde $R_a, R_b \in \hom^G(G/H, G/H)$. Esto se tiene pues

$$\begin{aligned} G/H \xrightarrow{R_b} G/b^{-1}Hb = G/H &\xrightarrow{R_a} G/H \\ gH \longmapsto gbH &\longmapsto (gb)aH = R_{ba}(gH) \end{aligned}$$

Observación 3.1.4. El conjunto $\hom^G(G/H, G/H)$ es un grupo bajo composición de funciones.

i) Elemento Neutro.

Sea e el elemento neutro de G, entonces

$$\begin{aligned} R_e : G/H &\longrightarrow G/H \\ gH &\longmapsto geH = gH \end{aligned}$$

luego $R_e = \mathrm{Id} : G/H \to G/H$ es el neutro de $\hom^G(G/H, G/H)$

ii) Asociatividad.

$$\begin{aligned} (R_aR_b)R_c &= (R_{ba})R_c = R_{c(ba)} \\ R_a(R_bR_c) &= R_a(R_{cb}) = R_{(cb)a} \end{aligned}$$

pero $c(ba) = (cb)a$ pues G es grupo.

iii) Inverso.

Sea $R_a \in \hom^G(G/H, G/H)$, entonces $a \in N_G(H)$ y como $N_G(H)$ es grupo tenemos $a^{-1} \in N_G(H) \Rightarrow R_{a^{-1}} \in \hom^G(G/H, G/H)$. Además

$$R_aR_{a^{-1}} = R_{a^{-1}a} = R_e = \mathrm{Id}$$

$$R_{a^{-1}}R_a = R_{aa^{-1}} = R_e = \mathrm{Id}$$

3.2. Sistemas de coeficientes genéricos

Para la teoría clásica de cohomología (que cumple el axioma de la dimensión) el conocimiento del grupo de coeficientes ($H^0(*)$ en este caso) permite el cálculo de la cohomología de cualquier complejo simplicial finito. Esencialmente esto es cierto porque los objetos contraíbles (como los simplejos) forman los bloques de construcción de todos los complejos. Para la teoría equivariante la situación es diferente. Los "bloques de construcción" son esencialmente las órbitas del grupo G, es decir, las clases laterales G/H con H subgrupo de G forman un conjunto de bloques de construcción. Por ello, un sistema de coeficientes debería contener todos los grupos $H^*(G/H)$ además de las funciones equivariantes.

A continuación definimos precisamente un sistema de coeficientes para después definir cohomología equivariante.

Definición 3.2.1. *Un sistema de coeficientes genérico para G es un funtor contravariante*

$$\mathcal{O}(G) \xrightarrow{M} \text{Abel}$$

Esquemáticamente,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(G) \arrow[r, "M"] & \text{Abel} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G/H \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\widehat{a}"] & M(G/H) \\ G/K \arrow[r, mapsto] & M(G/K) \arrow[u, "M(\widehat{a})"'] \end{tikzcd}$$

con $a^{-1}Ha \subset K$.

Sean $M, N : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \text{Abel}$ sistemas de coeficientes. Un morfismo T entre M y N es una transformación natural entre los funtores M y N. Explícitamente, T es una colección de homomorfismos entre grupos abelianos

$$T = \{T_{G/H} : M(G/H) \to N(G/H)\}_{G/H \in \mathrm{Obj}(\mathcal{O}(G))}$$

tales que el diagrama siguiente conmuta para todo morfismo $\widehat{a} : G/H \to G/K$

$$\begin{tikzcd} M(G/H) \arrow[r, "T_{G/H}"] & N(G/H) \\ M(G/K) \arrow[u, "M(\widehat{a})"] \arrow[r, "T_{G/K}"] & N(G/K) \arrow[u, "N(\widehat{a})"'] \end{tikzcd}$$

Los sistemas de coeficientes genéricos para G forman una categoría abeliana

$$\mathcal{C}_G = \text{Fun}(\mathcal{O}(G)^{\text{op}}, \text{Abel})$$

donde los objetos son funtores contravariantes de $\mathcal{O}(G)$ en Abel y los morfismos son las transformaciones naturales entre ellos.

Por ejemplo consideremos A un G-módulo. Definimos

$$M : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathrm{Abel} \tag{3.2}$$

$$\begin{tikzcd}
G/H \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\widehat{g}"] & A^H & g \cdot a \\
G/K \arrow[r, mapsto] & A^K \arrow[u, "M(\widehat{g})"'] & a \arrow[u, mapsto, "M(\widehat{g})"']
\end{tikzcd}$$

donde $A^K = \{a \in A \mid k \cdot a = a \ \forall k \in K\}$, $g^{-1}Hg \subset K$. Note que A^H y A^K son submódulos de A. A continuación veremos que $M(\widehat{g})$ está bien definido: dado que $g \in G$ es tal que $g^{-1}Hg \subset K$ entonces $H \subset gKg^{-1}$. Esto implica que $g : A \longrightarrow A$ es tal que $g(A^K) \subset A^H$. En efecto, para $a \in A^K$

$$H(ga) \subset (gKg^{-1})(ga) = gKa = ga$$

la última igualdad se tiene pues $a \in A^K$. Por tanto $g \cdot a \in A^H$. Así, $g \cdot A^K \subset A^H$.

Denotamos este morfismo (homomorfismo de grupos abelianos) $M(\widehat{g})$ por

$$\begin{aligned} g_{H,K} : A^K &\longrightarrow A^H \\ a &\longmapsto g \cdot a \end{aligned}$$

Notemos que si $\widehat{g} = \widehat{g'}$ entonces $g^{-1}g' \in K$ y así para toda $a \in A^K$ se tiene $(g^{-1}g') \cdot a = a$, esto es, $g' \cdot a = g \cdot a$ y por definición $g'_{H,K}(a) = g_{H,K}(a)$ para cada $a \in A^K$, así que $M(\widehat{g})$ está bien definido. Veamos ahora que M es funtor.

$$\begin{tikzcd}
G/H \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{g}_1"] \arrow[dd, bend right=60, "\widehat{g}_2 \circ \widehat{g}_1"'] & A^H \\
G/K \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{g}_2"] & A^K \arrow[u, "M(\widehat{g}_1)"'] \\
G/L \arrow[r] & A^L \arrow[u, "M(\widehat{g}_2)"'] \arrow[uu, bend right=60]
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in A^L$ y $g_1, g_2 \in G$

$$\begin{aligned}
M(\widehat{g}_2 \circ \widehat{g}_1)(a) &= M(\widehat{g_1 \circ g_2})(a) \\
&= (g_1 g_2) \cdot a \\
M(\widehat{g}_1) \circ M(\widehat{g}_2)(a) &= M(\widehat{g}_1) \circ (g_2 \cdot a) \\
&= g_1 \cdot (g_2 \cdot a) \\
&= (g_1 g_2) \cdot a \\
M(\widehat{e})(a) &= e \cdot a = a
\end{aligned}$$

Por tanto M es funtor.

3.3. Sistemas de coeficientes en un G-CW-complejo

Diremos que un CW-complejo K es G-CW-complejo si hay una acción celular de G sobre K tal que: para cada $g \in G$, $\{x \in K \mid g \cdot x = x\}$ es un subcomplejo de K. Por acción celular nos referimos a cualquier acción que satisfaga las siguientes dos condiciones:

i) si E es una n-celda de K, entonces para cada $g \in G$, $g \cdot E$ es de nuevo una n-celda de K.

ii) Si la acción envía la celda en sí misma entonces la acción sobre esa celda es trivial.

A partir de un G-CW-complejo K, formamos una categoría $\mathcal{K}$ cuyos objetos son los G-subcomplejos finitos de K y los morfismos son como sigue: dados dos objetos L, L' en $\mathcal{K}$, entonces

$$\hom(L, L') = \{f : L \longrightarrow L' \mid f(x) = g \cdot x \text{ para algún } g \in G\}$$

(Note que $\hom(L, L')$ puede ser vacío).

Observación 3.3.1. Los morfismos de $\mathcal{K}$ son uno de los tres casos siguientes:

i) Inclusiones

ii) $a : L \longrightarrow a \cdot L$ donde $a \in G$.

iii) Composiciones de los dos casos anteriores.

Dada una celda σ de K denotamos por $K(\sigma)$ al subcomplejo más pequeño de K que contiene a la celda σ. Estos subcomplejos serán los más importantes, pero para algunas construcciones necesitaremos considerar también complejos más generales.

Definimos un funtor canónico contravariante (para un G-CW-complejo K fijo)

$$\theta : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}(G) \tag{3.3}$$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & G/G_L \\
L' \arrow[r, mapsto] & G/G_{L'} \arrow[u, "\theta(g):=\widehat{g}"']
\end{tikzcd}$$

donde $f(x) = g \cdot x$ para algún $g \in G$ y $G_L = \{g \in G \mid g \cdot x = x \quad \forall x \in L\}$. La aplicación $\theta(g) = \widehat{g}$ está bien definida pues: si $g \cdot x = h \cdot x$ para toda $x \in L$ y para algunos $g, h \in G$ entonces $h^{-1}g \cdot x = x$, esto es, $h^{-1}g \in G_L$ y de aquí que $g \in hG_L$, análogamente $h \in gG_L$. Se sigue que $gG_L = hG_L$ y por la Observación 3.1.3 se tiene $\widehat{g} = \widehat{h}$. Además $g^{-1}G_{L'}g \subset G_L$. En efecto, sea $s \in G_{L'}$ y $x \in L$, entonces

$$\begin{aligned}
(g^{-1}sg) \cdot x &= g^{-1} \cdot (s \cdot (g \cdot x)) \\
&= g^{-1}(g \cdot x)) && \text{pues } s \in G_{L'} \text{ y } g \cdot x \in gL \subset L' \\
&= (g^{-1}g) \cdot x \\
&= x
\end{aligned}$$

Por tanto $g^{-1}sg \in G_L$ para cualquier $s \in G_{L'}$, esto es, $g^{-1}G_{L'}g \subset G_L$.

En particular, si $L \subset L'$ (caso *i)* de la Observación 3.3.1)

$$\theta : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}(G)$$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, mapsto] \arrow[d, hook, "g"'] & G/G_L & sgG_L = sG_L \\
L' \arrow[r, mapsto] & G/G_{L'} \arrow[u, "\widehat{g}"'] & sG_{L'} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

donde la igualdad $sgG_L = sG_L$ se tiene porque g es la inclusión y entonces $g \cdot x = x$ para toda $x \in L$, es decir, $g \in G_L$. Por tanto $\widehat{g}$ es la proyección natural. Mientras que si $g : L \longrightarrow gL$ (caso *ii)* de la Observación 3.3.1) entonces

$$\theta : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}(G) \tag{3.4}$$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & G/G_L & sgG_L \\
g \cdot L \arrow[r, mapsto] & G/G_{g \cdot L} \arrow[u, "\widehat{g}"'] & sG_{g \cdot L} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Pero se tiene $G_{g \cdot L} = gG_Lg^{-1}$, ya que

$$\begin{aligned}
G_{g \cdot L} &= \{s \in G \mid s \cdot x = x \quad \forall x \in g \cdot L\} \qquad (3.5)\\
&= \{s \in G \mid s \cdot (g \cdot y) = g \cdot y \quad \forall y \in L\} \\
&= \{s \in G \mid (g^{-1}sg) \cdot y = y \quad \forall y \in L\} \\
&= \{gsg^{-1} \in G \mid g^{-1}(gsg^{-1})g \cdot y = y \quad \forall y \in L\} & &(\text{pues } G = gGg^{-1}) \\
&= g\{s \in G \mid s \cdot y = y \quad \forall y \in L\}g^{-1} \\
&= gG_Lg^{-1}
\end{aligned}$$

Por lo que el diagrama (3.4) queda:

$$\theta : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}(G)$$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & G/G_L & sg(g^{-1}G_{g \cdot L}g) \\
g \cdot L \arrow[r, mapsto] & G/G_{g \cdot L} = G/gG_Lg^{-1} \arrow[u, "\widehat{g}"'] & sG_{g \cdot L} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(sG_{g \cdot L}) &= sgG_L & &(\text{por definición de } \widehat{g}) \\
&= sg(g^{-1}G_{g \cdot L}g) & &(\text{pues } G_{g \cdot L} = gG_Lg^{-1})
\end{aligned}$$

por lo que $\widehat{g}$ es la multiplicación por la derecha por g en este caso.

Si $M : \mathcal{O}(G) \longrightarrow$ Abel es un sistema de coeficientes genéricos, entonces dado un G-CW-complejo finito K, la composición

$$M \circ \theta : \mathcal{K} \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}(G) \xrightarrow{M} \text{Abel} \tag{3.6}$$

se llama sistema de coeficientes (simple) de K.

Ahora generalizaremos (3.6) como sigue:

Definición 3.3.2. *Un sistema de coeficientes locales en K es un funtor covariante $\mathcal{L} : \mathcal{K} \longrightarrow$ Abel.*

De nuevo, los coeficientes locales en K forman una categoria abeliana $\mathcal{LC}_K$ (los morfismos son transformaciones naturales). Si $\mathcal{L} \in \mathcal{LC}_K$ y σ es una celda de K entonces denotaremos por $\mathcal{L}(\sigma)$ a $\mathcal{L}(K(\sigma))$. Para $K(\tau) \subset K(\sigma)$ a veces denotaremos por $\mathcal{L}(\tau \to \sigma)$ a $\mathcal{L}(K(\tau) \hookrightarrow K(\sigma))$.

3.4. Cohomología

Dado un G-CW-complejo K y un sistema de coeficientes locales $\mathcal{L} : \mathcal{K} \longrightarrow$ Abel, para cada $n \geq 0$, definiremos el n-ésimo grupo de cohomología equivariante de Bredon $H^n_G(K; \mathcal{L})$. Orientamos las celdas de K de tal modo que G preserva orientación.

Definición 3.4.1. *Sea*

$$\begin{aligned} C^q(K; \mathcal{L}) &= \{f : \{\sigma \mid \sigma \text{ es } q\text{-celda de } K\} \longrightarrow \bigcup_\sigma \mathcal{L}(K(\sigma)) \mid f(\sigma) \in \mathcal{L}(K(\sigma))\} \\ &= \prod_\sigma \mathcal{L}(K(\sigma)) \end{aligned}$$

donde $\sigma \in K_q$ (donde K_q denota al conjunto de q-celdas de K).

El conjunto $C^q(K; \mathcal{L})$ es grupo abeliano por ser producto cartesiano de grupos abelianos. Si $f_1, f_2 \in C^q(K; \mathcal{L})$ la operación suma está definida como sigue: $(f_1 + f_2)(\sigma) = f_1(\sigma) + f_2(\sigma)$.

Definimos el homomorfismo $\delta : C^q(K; \mathcal{L}) \longrightarrow C^{q+1}(K; \mathcal{L})$ por

$$(\delta f)(\sigma) = \sum_\tau [\tau : \sigma] \mathcal{L}(K(\tau) \hookrightarrow K(\sigma)) f(\tau) \tag{3.7}$$

donde τ corre sobre el conjunto de q-celdas de K y σ es una $q+1$-celda (la cual tiene sentido ya que $K(\tau) \notin K(\sigma)$ implica que $[\tau : \sigma] = 0$).

El homomorfismo δ es operador frontera, es decir, $\delta \circ \delta = 0$. En efecto, sea σ una

$q+2$-celda de K,

$$\begin{aligned}
(\delta(\delta f))(\sigma) &= \sum_{\tau\in K_{q+1}} [\tau:\sigma]\mathcal{L}(K(\tau)\hookrightarrow K(\sigma))((\delta f)(\tau))\\
&= \sum_{\tau\in K_{q+1}} [\tau:\sigma]\mathcal{L}(K(\tau)\hookrightarrow K(\sigma))\left(\sum_{\omega\in K_q}[\omega:\tau]\mathcal{L}(K(\omega)\hookrightarrow K(\tau))f(\omega)\right)\\
&= \sum_{\tau\in K_{q+1}} [\tau:\sigma]\sum_{\omega\in K_q}[\omega:\tau]\mathcal{L}(K(\tau)\hookrightarrow K(\sigma))\circ\mathcal{L}(K(\omega)\hookrightarrow K(\tau))f(\omega)\\
&= \sum_{\tau\in K_{q+1}}\sum_{\omega\in K_q}[\omega:\tau][\tau:\sigma]\mathcal{L}(K(\omega)\hookrightarrow K(\sigma))f(\omega) \qquad \text{(pues } \mathcal{L} \text{ es funtor)}\\
&= \sum_{\omega\in K_q}\left(\sum_{\tau\in K_{q+1}}[\omega:\tau][\tau:\sigma]\mathcal{L}(K(\omega)\hookrightarrow K(\sigma)\right)f(\omega)\\
&= 0
\end{aligned}$$

la última igualdad se tiene porque $\sum_\tau[\omega:\tau][\tau:\sigma]=\partial\circ\partial=0$ donde $\partial_n : C_n(K)\longrightarrow C_{n-1}(K)$ es el operador de homología celular (ver en Preliminares, Homología celular).

Ahora, definimos una acción de G sobre $C^q(K;\mathcal{L})$ mediante

$$\begin{gathered}
(g\cdot f)(\sigma) = \mathcal{L}(K(g^{-1}\sigma)\xrightarrow{g} K(\sigma))(f(g^{-1}\sigma)) \in \mathcal{L}(K(\sigma))\\
x \longmapsto g\cdot x
\end{gathered} \tag{3.8}$$

para $g\in G$, $f\in C^q(K;\mathcal{L})$.
Notemos que $\cdot$ está bien definida pues, $f(g^{-1}\sigma)\in\mathcal{L}(K(g^{-1}\sigma))$ y porque

$$\mathcal{L}(K(g^{-1}\sigma)\xrightarrow{g} K(\sigma))f(g^{-1}\sigma)\in\mathcal{L}(K(\sigma)).$$

Así, $g\cdot f\in C^q(K;\mathcal{L})$. Ahora veamos que $\cdot$ es acción. Es claro que $e\cdot f=f$ con e el neutro de G, probemos entonces que $g\cdot(g_1\cdot f)=(gg_1)\cdot f$

$$\begin{aligned}
(g\cdot(g_1\cdot f))(\sigma) &= \mathcal{L}(K(g^{-1}\sigma)\xrightarrow{g} K(\sigma))((g_1\cdot f)(g^{-1}\sigma))\\
&= \mathcal{L}(K(g^{-1}\sigma)\xrightarrow{g} K(\sigma))\mathcal{L}(K(g_1^{-1}(g^{-1}\sigma))\xrightarrow{g_1} K(g^{-1}\sigma))f(g_1^{-1}(g^{-1}\sigma)))\\
&= \mathcal{L}(K(g_1^{-1}(g^{-1}\sigma))\xrightarrow{g_1} K(g^{-1}\sigma)\xrightarrow{g} K(\sigma))f(g_1^{-1}(g^{-1}\sigma)) \quad (\mathcal{L}\text{ covariante})\\
&= \mathcal{L}(K(g_1^{-1}g^{-1}\sigma)\xrightarrow{gg_1} K(\sigma))f(g_1^{-1}g^{-1}\sigma)\\
&= \mathcal{L}(K(gg_1)^{-1})(\sigma)\xrightarrow{gg_1} K(\sigma))(f((gg_1)^{-1}(\sigma))\\
&= ((gg_1)\cdot f)(\sigma).
\end{aligned}$$

Por último, comprobemos que $\cdot$ es acción lineal:

$$\begin{aligned}
(g\cdot(f_1+f_2))(\sigma) &= \mathcal{L}(K(g^{-1}\sigma)\xrightarrow{g} K(\sigma))((f_1+f_2)(g^{-1}\sigma))\\
&= \mathcal{L}(K(g^{-1}\sigma)\xrightarrow{g} K(\sigma))(f_1(g^{-1}\sigma)+f_2(g^{-1}\sigma))\\
&= \mathcal{L}(K(g^{-1}\sigma)\xrightarrow{g} K(\sigma))f_1(g^{-1}\sigma)+\mathcal{L}(K(g^{-1}\sigma)\xrightarrow{g} K(\sigma))f_2(g^{-1}\sigma)\\
&= (g\cdot f_1)(\sigma)+(g\cdot f_2)(\sigma)
\end{aligned}$$

Por tanto, $C^q(K;\mathcal{L})$ es un G-módulo y entonces

$$C_G^q(K;\mathcal{L}) = \{f\in C^q(K;\mathcal{L}) \mid g\cdot f = f \;\; \forall g\in G\}$$

es un G-submódulo de $C^q(K;\mathcal{L})$.

Denotaremos de manera compacta a $(g\cdot f)(\sigma)$ por $\mathcal{L}(g)f(g^{-1}\sigma)$ y a $\mathcal{L}(g)$ por g_*. Entonces

$$(g\cdot f)(\sigma) = g_* f(g^{-1}\sigma) \tag{3.9}$$

y reemplazando σ por $g\sigma$ en (3.9) obtenemos

$$(g\cdot f)(g\sigma) = g_* f(g^{-1}(g\sigma)) = g_* f(\sigma) \tag{3.10}$$

Notemos que $f \in C^q_G(K;\mathcal{L})$ si y sólo si $g\cdot f = f$ para toda $g \in G$ y por (3.10), $f(g\sigma) = g_* f(\sigma)$ para toda σ q-celda de K y $g \in G$. Entonces se tiene que

$$C^q_G(K;\mathcal{L}) = \{f \in C^q(K;\mathcal{L}) \mid f(g\sigma) = g_* f(\sigma)\ \forall g \in G,\ \forall\ q\text{-celda } \sigma \text{ de } K\} \tag{3.11}$$

Note que $C^*_G(K;\mathcal{L})$ es un subcomplejo de cadena de $C^*(K;\mathcal{L})$.

Definición 3.4.2. *El q-ésimo grupo de cohomología equivariante del G-CW-complejo K con coeficientes en $\mathcal{L}$ es*

$$H^q_G(K;\mathcal{L}) = H^q(C^*_G(K;\mathcal{L})).$$

Si $M \in \mathcal{C}_G$ entonces $M\theta$ es un sistema de coeficientes local, es decir, $M\theta \in \mathcal{C}_K \subset \mathcal{LC}_K$ (θ definido en (3.3)). En el caso especial en que $\mathcal{L} = M\theta$ denotaremos

$$H^q_G(K;M) = H^q_G(K;M\theta).$$

3.5. Ejemplos

A continuación veremos dos ejemplos de cálculo de cohomología equivariante de Bredon con coeficientes en el sistema M definido en (3.2). Cosideremos la acción del grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1,\sigma\}$ sobre el CW-complejo S^1 por reflexión. La estructura celular de S^1 consta de dos 0-celdas a y b y dos 1-celdas α y β. Orientamos las celdas de S^1 de la forma que la acción de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ respete la orientación. Denotaremos por $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejemplo 3.5.1. Sea $A = \mathbb{Z}$ y definimos la acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre A por $\sigma\cdot x = x$. Notemos que $G_a = \{g \in \mathbb{Z}_2 \mid g\cdot a = a\} = \mathbb{Z}_2$ y $G_\alpha = \{1\}$ por tanto el sistema de coeficientes local $M\circ\theta$ (donde θ es el funtor canónico contravariante definido en (3.3)) es:

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{M} \text{Abel}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \arrow[r, mapsto] & A^{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Z} \arrow[d, "M(\widehat{1})"] & \\
\alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\sigma"] & \mathbb{Z}_2/\{1\} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, "\widehat{1}"] & A^{\{1\}} = \mathbb{Z} \arrow[d, "M(\widehat{\sigma})"] & x \arrow[d, mapsto] \\
\beta \arrow[r, mapsto] & \mathbb{Z}_2/\{1\} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, "\widehat{\sigma}"] & A^{\{1\}} = \mathbb{Z} & \sigma\cdot x = x
\end{tikzcd}$$

análogamente para b y β. Entonces

$$C^0(S^1,M) = \prod_{\tau\in K_0} M\theta(\tau) = M\theta(a)\times M\theta(b) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

y las cocadenas equivariantes son

$$\begin{aligned} C^0_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) &= \{f \in C^0(S^1, M) \mid g \cdot f = f \ \ \forall g \in \mathbb{Z}_2\} \\ &= \{f : \{a, b\} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid g \cdot f = f \ \ \forall g \in \mathbb{Z}_2\} \end{aligned}$$

donde la acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre las cocadenas (Definición 3.8) es

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot f)(a) &= M(K(\sigma \cdot a) \xrightarrow{\sigma} K(a)) f(\sigma \cdot a) \\ &= M(a \xrightarrow{\sigma} a) f(a) \\ &= M(1) f(a) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

de igual manera $(\sigma \cdot f)(b) = f(b)$. Por tanto $C^0_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
Ahora, $C^1(S^1, M) = M\theta(\alpha) \times M\theta(\beta) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot f)(\alpha) &= M(K(\sigma \cdot \alpha) \xrightarrow{\sigma} K(\alpha)) f(\sigma \cdot \alpha) \\ &= M(\beta \xrightarrow{\sigma} \alpha) f(\beta) \\ &= M(1) f(\beta) \\ &= f(\beta) \\ (\sigma \cdot f)(\beta) &= f(\alpha) \end{aligned}$$

entonces $C^1_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) = \{f : \{\alpha, \beta\} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid f(\alpha) = f(\beta)\} \cong \mathbb{Z}$.
Notemos que $[a : \alpha] = \deg(p_a \circ f_{\partial\alpha}) = 1$ y $[b : \alpha] = -1$. En efecto, la composición

$$\begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r, "f_{\partial\alpha}"] & \{a, b\} \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "p_a"'] & S^0 \sqcup \{*\} \arrow[r, "\pi_a"] & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

es la identidad, pues $0 \overset{f_{\partial\alpha}}{\longmapsto} b \overset{\pi}{\longmapsto} b \overset{\pi_a}{\longmapsto} 0$ y $1 \overset{f_{\partial\alpha}}{\longmapsto} a \overset{\pi}{\longmapsto} a \overset{\pi_a}{\longmapsto} 1$, por tanto $[a : \alpha] = \deg(p_a \circ f_{\partial\alpha}) = 1$. La composición

$$\begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r, "f_{\partial\alpha}"] & \{a, b\} \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "p_b"'] & S^0 \sqcup \{*\} \arrow[r, "\pi_b"] & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

es tal que $0 \longmapsto 1$ y $1 \longmapsto 0$, de aquí que su grado es $[b : \alpha] = -1$. Entonces el operador frontera $\delta : C^0(S^1, M) \longrightarrow C^1(S^1, M)$ está dado por

$$\begin{aligned} (\delta f)(\alpha) &= \sum_{\tau \in K_0} [\tau : \alpha] M(K(\tau) \longrightarrow K(\alpha)) f(\tau) \\ &= [a : \alpha] M(a \hookrightarrow \alpha) f(a) + [b : \alpha] M(b \hookrightarrow \alpha) f(b) \\ &= f(a) - f(b). \end{aligned}$$

Así, tenemos el siguiente complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong C^0_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) \xrightarrow{\delta} C^1_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

y por tanto los grupos de cohomología de Bredon equivariantes son

$$\begin{aligned}
H^0_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) &= \ker(\delta) = \{k(1,1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \\
H^1_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) &= \mathbb{Z}/\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \{0\} \\
H^n_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) &= \{0\} \ \ \forall n \geq 2
\end{aligned}$$

que coinciden con los grupos de cohomología celular del espacio de órbitas $S^1/\mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 3.5.2. Sea $A = \mathbb{Z}$ y definimos la acción por $\sigma \cdot x = -x$. El sistema de coeficientes local $M\theta$ es

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\ \theta\ } \mathcal{O}(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\ M\ } \mathrm{Abel}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "1"] & \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \arrow[r, mapsto] & A^{\mathbb{Z}_2} = \{0\} \arrow[d, "M(\widehat{1})"] & \\
\alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\sigma"] & \mathbb{Z}_2/\{1\} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, "\widehat{1}"'] & A^{\{1\}} = \mathbb{Z} \arrow[d, "M(\widehat{\sigma})"] & x \arrow[d, mapsto] \\
\beta \arrow[r, mapsto] & \mathbb{Z}_2/\{1\} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, "\widehat{\sigma}"'] & A^{\{1\}} = \mathbb{Z} & \sigma \cdot x = -x
\end{tikzcd}$$

En este caso

$$C^0(S^1, M) = \{f : a, b \longrightarrow \{0\}\} = \{0\} = C^0_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M)$$

y

$$C^1(S^1, M) = \{f : \{\alpha, \beta\} \longrightarrow \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Notemos que $(\sigma \cdot f)(\alpha) = M(\beta \xrightarrow{\sigma} \alpha) f(\beta) = -f(\beta)$, por lo que

$$C^1_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) = \{f : \{\alpha, \beta\} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid f(\alpha) = -f(\beta)\} \cong \mathbb{Z}$$

Tenemos entonces el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \{0\} = C^0_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) \xrightarrow{\ \delta\ } C^1_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

y así

$$\begin{aligned}
H^0_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) &= \{0\} \\
H^1_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) &= \mathbb{Z}/\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z} \\
H^n_{\mathbb{Z}_2}(S^1, M) &= \{0\} \ \ \forall n \geq 2.
\end{aligned}$$

3.6. Otra descripción para las co-cadenas

El objetivo de esta sección es probar que hay un isomorfismo entre el grupo $C^n_G(K; M)$ y las transformaciones naturales entre los sistemas de coeficientes genéricos $\underline{C_n}(K; \mathbb{Z})$ y M, y en consecuencia, $H^n_G(K, M) \cong H^n(\hom(\underline{C_*}(K; \mathbb{Z}), M))$.

Definiremos un elemento $\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}) \in \mathcal{C}_G$ (es decir, un sistema de coeficientes genérico $\underline{C_n}(K;\mathbb{Z})$) de la siguiente manera:

$$\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}) : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathrm{Abel}$$

$$\begin{tikzcd}
G/H \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\widehat{g}"'] & C_n(K^H;\mathbb{Z}) & \sum_\alpha n_\alpha g\cdot\sigma_\alpha \\
G/H' \arrow[r, mapsto] & C_n(K^{H'};\mathbb{Z}) \arrow[u, "g=\underline{C_n}(K;\mathbb{Z})(\widehat{g})"'] & \sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

con $g^{-1}Hg \subset H'$ y $C_n(K^H;\mathbb{Z})$ es el grupo abeliano libre generado por las n-celdas de K^H. Notemos que de la definición de G-CW-complejo se sigue que K^H es subcomplejo de K. Además, se tiene que $g\cdot(K^{H'}) \subset K^H$, entonces $\underline{C_n}(K;\mathbb{Z})(\widehat{g})$ está bien definida.

Para todo H y H' tal que $g^{-1}Hg \subset H'$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C_n(K^H;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial_{G/H}"] & C_{n-1}(K^H;\mathbb{Z}) \\
C_n(K^{H'};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial_{G/H'}"] \arrow[u, "g"] & C_{n-1}(K^{H'};\mathbb{Z}) \arrow[u, "g"]
\end{tikzcd}$$

pues el operador ∂ de homología celular es equivariante. Entonces, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underline{C_n}(K;\mathbb{Z})(G/H) \arrow[r, "\partial_{G/H}"] & \underline{C_{n-1}}(K;\mathbb{Z})(G/H) \\
\underline{C_n}(K;\mathbb{Z})(G/H') \arrow[r, "\partial_{G/H'}"] \arrow[u, "g"] & \underline{C_{n-1}}(K;\mathbb{Z})(G/H') \arrow[u, "g"]
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Es claro que $\partial\circ\partial = 0$. Por tanto, se tiene un complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow \underline{C_{n+1}}(K;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \underline{C_n}(K;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_n} \underline{C_{n-1}}(K;\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

Enseguida, construiremos una transformación $\widehat{f} \in \hom(\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}), M)$ a partir de $f \in C^n_G(K;M)$ con $M \in \mathcal{C}_G$. Para cada n-celda σ en K se cumple que

$$f(\sigma) \in M\theta(K(\sigma)) = M(G/G_{K(\sigma)}).$$

Sea $\sigma \subset K^H$. Notemos que $H \subset G_{K(\sigma)}$ pues para $h \in H$ se tiene

$$\begin{aligned}
& h\cdot x = x \ \forall\ x \in K^H \\
& h\cdot x = x \ \forall\ x \in K^H(\sigma) && (\text{pues } K^H(\sigma) \subset K^H) \\
& h \in G_{K(\sigma)}
\end{aligned}$$

por tanto, $H \subset G_{K(\sigma)}$, es decir $a^{-1}Ha \subset G_{K(\sigma)}$ para $a = 1$. Así, tenemos definido

$$\mathcal{O}(G) \xrightarrow{M} \text{Abel}$$

$$\begin{array}{ccc} G/H & \longmapsto & M(G/H) \\ \downarrow{\scriptstyle \widehat{1}} & & \uparrow{\scriptstyle M(\widehat{1})} \\ G/G_{K(\sigma)} & \longmapsto & M(G/G_{K(\sigma)}) \end{array}$$

donde $\widehat{1}(gH) = gG_{K(\sigma)}$. En particular, dado que $f(\sigma) \in M(G/G_{K(\sigma)})$, tenemos el elemento

$$M(\widehat{1})f(\sigma) \in M(G/H).$$

Denotaremos

$$\begin{aligned} \widehat{f}(G/H)(\sigma) := M(G/H &\xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)})f(\sigma) \\ gH &\longmapsto gG_{K(\sigma)} \end{aligned}$$

Para $f \in C^n_G(K; M)$ fijo, definimos

$$\begin{aligned} \widehat{f}(G/H) : C_n(K^H; \mathbb{Z}) &\longrightarrow M(G/H) \\ \sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha &\longmapsto \sum_\alpha n_\alpha(\widehat{f}(G/H)(\sigma_\alpha)) \end{aligned}$$

Lema 3.6.1. *El homomorfismo $\widehat{f}(G/H) : C_n(K^H; \mathbb{Z}) \longrightarrow M(G/H)$ es natural respecto a los morfismos de $\mathcal{O}(G)$, esto es, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} C_n(K^H; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\widehat{f}(G/H)} & M(G/H) \\ \uparrow{\scriptstyle g} & & \uparrow{\scriptstyle M(\widehat{g})} \\ C_n(K^{H'}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\widehat{f}(G/H')} & M(G/H') \end{array} \tag{3.12}$$

Demostración. Sea σ una n-celda en $K^{H'}$, entonces

$$\begin{aligned} M(\widehat{g}) \circ \widehat{f}(G/H')(\sigma) &= M(\widehat{g})(M(G/H' \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)}))f(\sigma) \\ &= \begin{array}{ccccc} M(G/H & \xrightarrow{\widehat{g}} & G/H' & \xrightarrow{\widehat{1}} & G/G_{K(\sigma)})f(\sigma) \\ sH & \longmapsto & sgH' & \longmapsto & sgG_{K(\sigma)} \end{array} && \text{(pues } M \text{ es contravariante)} \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \widehat{f}(G/H)(g \cdot \sigma) &= M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(g\cdot\sigma)})f(g \cdot \sigma) \\ &= M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(g\cdot\sigma)})g_* f(\sigma) && \text{(por Obs. (3.11))} \\ &= M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(g\cdot\sigma)})M\theta(K(\sigma) \xrightarrow{g} K(g\cdot\sigma))f(\sigma) && \text{(def. de } g_*\text{)} \\ &= M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(g\cdot\sigma)})M(G/G_{K(g\sigma)} \xrightarrow{\widehat{g}} G/G_{K(\sigma)})f(\sigma) && \text{(por def. de } \theta\text{)} \\ &= \begin{array}{ccccc} M(G/H & \xrightarrow{\widehat{1}} & G/G_{K(g\cdot\sigma)} & \xrightarrow{\widehat{g}} & G/G_{K(\sigma)})f(\sigma) \\ sH & \mapsto & sG_{K_{g\cdot\sigma}} & \mapsto & sgG_{K(\sigma)} \end{array} && \text{(pues } M \text{ es contravariante)} \end{aligned}$$

Por tanto el diagrama conmuta. ■

Para $f \in C^n_G(K;M)$ hemos definido una transformación natural $\widehat{f} \in \hom(\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}), M)$. Probaremos en la siguiente observación que se da el caso recíproco.

Lema 3.6.2. *Una transformación* $\widehat{f} \in \hom(\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}), M)$ *determina un elemento* $f \in C^n_G(K;M\theta)$.

Demostración. Sea σ una n-celda en K. Dado que $\sigma \subset K(\sigma) \subset K^{G_{K(\sigma)}}$ entonces $\sigma \in C_n(K^{G_{K(\sigma)}};\mathbb{Z})$, en consecuencia

$$C_n(K^{G_{K(\sigma)}};\mathbb{Z}) \overset{\widehat{f}(G/G_{K(\sigma)})}{\longrightarrow} M(G/G_{K(\sigma)})$$

está bien definido. Definimos

$$\begin{aligned} f : \{\sigma \mid \sigma \text{ es } n\text{-celda de } K\} &\longrightarrow \bigcup_{\tau} M\theta(K(\tau)) \\ \sigma &\longmapsto \widehat{f}(G/G_{K(\sigma)})(\sigma) \in M(G/G_{K(\sigma)})) = M\theta(K(\sigma)) \end{aligned}$$

donde τ corre sobre las n-celdas de K. De aquí que $f \in C^n(K;M\theta)$. Probemos ahora que f es equivariante, es decir, $f \in C^n_G(K;M\theta)$.

Notemos primero que $g^{-1}G_{K(g\cdot\sigma)}g = g^{-1}G_{g\cdot K(\sigma)}g = G_{K(\sigma)}$, por el argumento que se dio en (3.5). Entonces, $\widehat{g} : G/G_{K(g\cdot\sigma)} \longrightarrow G/G_{K(\sigma)}$ está bien definida. Dado que $\widehat{f}$ es transformación natural, para $G_{K(g\cdot\sigma)}, G_{K(g\cdot\sigma)} \leq G$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C_n(K^{G_{K(g\cdot\sigma)}};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\widehat{f}(G/G_{K(g\cdot\sigma)})"] & M(G/G_{K(g\cdot\sigma)}) \\ C_n(K^{G_{K(\sigma)}};\mathbb{Z}) \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\widehat{f}(G/G_{K(\sigma)})"] & M(G/G_{K(\sigma)}) \arrow[u, "M(\widehat{g})=M\theta(g)"'] \end{tikzcd} \tag{3.13}$$

Así

$$\begin{aligned} f(g\cdot\sigma) &= \widehat{f}(G/G_{K(g\cdot\sigma)})(g\cdot\sigma) && \text{(por definición)} \\ &= M(\widehat{g})\widehat{f}(G/G_{K(\sigma)})(\sigma) && \text{(diagrama (3.13))} \\ &= M\theta(g)\widehat{f}(G/G_{K(\sigma)})(\sigma) \\ &= g_*\widehat{f}(G/G_{K(\sigma)})(\sigma) && \text{(por definición de } g_*) \\ &= g_* f(\sigma) && \text{(por definición de } f) \end{aligned}$$

por tanto $f \in C^n_G(K;M\theta)$. ■

Veamos que las construcciones de los lemas 3.6.1 y 3.6.2 son inversas la una de la otra.

Teorema 3.6.3. *La función*

$$\begin{aligned} C^n_G(K;M) &\overset{\varphi}{\longrightarrow} \hom(\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}), M) \\ f &\longmapsto \varphi(f) = \widehat{f} = \left\{ \begin{array}{ll} C_n(K^H;\mathbb{Z}) & \overset{\varphi(f)_{G/H}}{\longrightarrow} M(G/H) \\ & \sigma \longmapsto M(G/H \overset{\widehat{1}}{\to} G/G_{K(\sigma)})f(\sigma) \end{array} \right\}_{H\leq G} \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Recordemos la función definida en la Proposición 3.6.2

$$\hom(\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}),M) \xrightarrow{\phi} C^n_G(K;M)$$
$$\widehat{f} \longmapsto \left(\begin{array}{ll} \{\sigma \mid \sigma \text{ es } n\text{-celda en } K\} & \xrightarrow{\phi(\widehat{f})} \bigcup M\theta(K(\sigma)) \\ & \sigma \longmapsto \widehat{f}(G/G_{K(\sigma)})(\sigma) \end{array} \right)$$

Es fácil ver que ϕ es homomorfismo de grupos. Probemos que ϕ es el inverso de φ: sea $f \in C^n_G(K;M)$, entonces

$$(\phi\varphi)(f) : \{\sigma \mid \sigma \text{ es } n\text{-celda en } K\} \longrightarrow \bigcup M\theta(K(\sigma))$$

para cada n-celda σ en K se tiene

$$\begin{aligned} (\phi\varphi)(f)(\sigma) &= (\varphi(f)(G/G_{K(\sigma)}(\sigma)) && \text{(por def. de } \phi) \\ &= M(G/G_{K(\sigma)} \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)})f(\sigma) && \text{(por def. de } \varphi) \\ &= \mathrm{Id}(f(\sigma)) && \text{(pues } M(\widehat{1}) = \mathrm{Id}) \\ &= f(\sigma) \end{aligned}$$

esto es, $\phi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. Ahora, sea $\widehat{f} \in \hom(\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}),M)$

$$\begin{aligned} (\varphi\phi)(\widehat{f}) &= \varphi(\phi(\widehat{f})) \\ &= \left\{ \begin{array}{ccl} C_n(K^H;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & M(G/H) \\ \sigma & \longmapsto & M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)})(\phi(\widehat{f})(\sigma)) \end{array} \right\}_{H\leq G} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccl} C_n(K^H;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & M(G/H) \\ \sigma & \longmapsto & M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)})(\widehat{f}(G/G_{K(\sigma)}))(\sigma)) \end{array} \right\}_{H\leq G} \\ &= \{\widehat{f}(G/H) : C_n(K^H;\mathbb{Z}) \longrightarrow M(G/H)\}_{H\leq G} = \widehat{f} \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene pues el diagrama (3.12) conmuta. Por tanto $(\varphi\phi)(\widehat{f}) = \widehat{f}$, y se sigue que φ es isomorfismo. ■

Lema 3.6.4. *El isomorfismo* $\varphi : C^n_G(K;M) \longrightarrow \hom(\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}),M)$ *es compatible con el operador frontera, es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} C^n_G(K;M) \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\delta"'] & \hom(\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}),M) \arrow[d, "(-)\circ\partial"] \\ C^{n+1}_G(K;M) \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] & \hom(\underline{C_{n+1}}(K;\mathbb{Z}),M) \end{tikzcd} \tag{3.14}$$

donde la flecha vertical izquierda δ es el operador frontera definida en (3.7).

Demostración. Sea $\sigma \in \underline{C_{n+1}}(K;\mathbb{Z})(G/H) = C_{n+1}(K^H;\mathbb{Z})$ y $f \in C^n_G(K;M)$. Por un lado,

$$\varphi(\delta f) = \left\{ \begin{array}{ccl} C_n(K^H;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi(\delta f)_{G/H}} & M(G/H) \\ \sigma & \longmapsto & M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)})(\delta f)(\sigma) \end{array} \right\}_{H\leq G}$$

donde el homomorfismo $\varphi(\delta f)_{G/H}$ en cada σ es

$$
\begin{aligned}
\varphi(\delta f)_{(G/H)}(\sigma) &= M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)})(\delta f)(\sigma)\\
&= M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)})\left(\sum_{\tau}[\tau:\sigma]M\theta(K(\tau)\hookrightarrow K(\sigma)\right)f(\tau))\\
&= \sum_{\tau}[\tau:\sigma]M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)})M\theta(K(\tau)\hookrightarrow K(\sigma))f(\tau)\\
&= \sum_{\tau}[\tau:\sigma]M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)})M(G/G_{K(\sigma)} \xrightarrow{\pi} G/G_{K(\tau)})f(\tau) \quad (\text{def. } \theta)\\
&= \sum_{\tau}[\tau:\sigma]M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)} \xrightarrow{\pi} G/G_{K(\tau)})f(\tau)
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
G/H &\xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\sigma)} \xrightarrow{\pi} G/G_{K(\tau)}\\
sH &\longmapsto sG_{K(\sigma)} \longmapsto sG_{K(\tau)}
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
(\varphi(f)\circ\partial)(G/H)(\sigma) &= \varphi(f)(G/H)\circ\partial_{G/H}(\sigma)\\
&= \varphi(f)_{G/H}(\partial_{G/H}(\sigma))\\
&= \varphi(f)_{G/H}\left(\sum_{\tau}[\tau:\sigma]\tau\right) \qquad (\text{por def. de } \partial_{G/H})\\
&= \sum_{\tau}[\tau:\sigma]\varphi(f)_{G/H}(\tau)\\
&= \sum_{\tau}[\tau:\sigma]M(G/H \xrightarrow{\widehat{1}} G/G_{K(\tau)})f(\tau) \qquad (\text{por def. de } \varphi(f)_{G/H})
\end{aligned}
$$

por tanto el diagrama (3.14) conmuta. ■

Tenemos entonces un isomorfismo entre complejos de cadenas y así, los grupos de cohomología asociados a los complejos son isomorfos, es decir,

$$H^n_G(K;M) \xrightarrow{\varphi_*} H^n(\hom(\underline{C}_*(K;\mathbb{Z}),M)$$

es isomorfismo.

Sea K un G-CW complejo. Cuando $\mathcal{C} = \mathcal{O}(G)$ y

$$X : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ESPACIOS}$$

$$
\begin{tikzcd}
G/H \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\widehat{g}"] & K^H \\
G/L \arrow[r, mapsto] & K^L \arrow[u, "g"]
\end{tikzcd}
$$

entonces $C_n(X)$ es el funtor

$$\mathcal{C} \xrightarrow{X} \text{ESPACIOS} \xrightarrow{C_n} \text{Abel}$$

$$\begin{tikzcd}
G/H \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\widehat{g}"] & K^H \arrow[r, mapsto] & C_n(K^H;\mathbb{Z}) \\
G/L \arrow[r, mapsto] & K^L \arrow[r, mapsto] \arrow[u, "g\cdot()"'] & C_n(K^L;\mathbb{Z}) \arrow[u, "g\cdot()"']
\end{tikzcd}$$

es decir, $C_n(X)$ es el funtor $\underline{C_n}(K;\mathbb{Z})$. Así

$$H^n(\hom_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(C_*(X'),M)) = H^n(\hom(\underline{C_*}(K;\mathbb{Z}),M))$$

pero del Lema 3.6.4 se tiene que

$$H^n(\hom(\underline{C_n}(K;\mathbb{Z}),M)) \cong H^n_G(K;M)$$

por tanto, la $\mathcal{C}$-cohomología del $\mathcal{C}$-espacio X con coeficientes en el $\mathbb{Z}\mathcal{C}$-módulo M coincide con la cohomología equivariante de Bredon del G-CW-complejo K con coeficientes en M, esto es,

$$H^n_{\mathcal{C}}(X;M) \cong H^n_G(K;M).$$

Capítulo 4

Representabilidad de Brown

En este capítulo probaremos el Teorema de representabilidad de Brown para espacios punteados sobre una categoría, es decir, para $\mathcal{C}$-espacios punteados. Este resultado caracteriza ciertos funtores en la categoría de $\mathcal{C}$-CW complejos punteados. Todos los $\mathcal{C}$-CW complejos los consideraremos conexos por trayectorias para cada objeto en $\mathcal{C}$.

En [2] se prueba el Teorema de representabilidad de Brown para espacios punteados sobre una categoría, pero a diferencia de éste, aquí usamos la definición de funtor de Brown distinta (Definición 4.2.1) y un resultado menos restrictivo (Proposición 4.2.2). Para la prueba de dicho teorema seguimos el Capítulo 12 de [1].

Consideraremos un funtor contravariante $\mathcal{C}$-homotópico $T : \mathcal{C}\text{-h-ESPACIOS} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$, donde $\mathcal{C}$-h-ESPACIOS es la categoría cuyos objetos son $\mathcal{C}$-espacios punteados y un morfismo $[f] : X \longrightarrow Y$ es una clase de homotopía punteada con $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación de $\mathcal{C}$-espacios punteados. La composición esta dada por $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

4.1. Coecualizadores

Definición 4.1.1. *Sean $f, g : Z \longrightarrow Y$ dos aplicaciones punteadas entre $\mathcal{C}$-espacios covariantes (contravariantes). Un coecualizador para $[f]$ y $[g]$ es un $\mathcal{C}$-espacio covariante (contravariante) X junto con una clase de $\mathcal{C}$-homotopía punteada $[j] : Y \longrightarrow X$, tal que*

i) $[j] \circ [f] = [j] \circ [g]$.

ii) *Si $[j'] : Y \longrightarrow X'$ es una clase de $\mathcal{C}$-homotopía punteada tal que $[j'] \circ [f] = [j'] \circ [g]$ entonces existe un único $[g'] : X \longrightarrow X'$ tal que $[j'] = [g'] \circ [j]$.*

La condición *ii)* de la definición anterior establece que si existe otra clase de $\mathcal{C}$-homotopía $[j'] : Y \longrightarrow X'$ que coecualiza a $[f]$ y a $[g]$, entonces existe una única clase de $\mathcal{C}$-homotopía $[g'] : X \longrightarrow X'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j'"'] & X \arrow[d, dashed, "g'"] \\ & & X' \end{tikzcd}$$

La siguiente construcción muestra que los coecualizadores siempre existen. Sean $f, g : Z \longrightarrow Y$ dos aplicaciones punteadas entre $\mathcal{C}$-espacios y sea X el doble cilindro de f y g, esto es,

$$
\begin{tikzcd}
X:\mathcal{C} \arrow[r] & \text{ESPACIOS}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\phi"'] & Z(c)\times I_+ \coprod Y(c)/\sim \arrow[d, "Z(\phi)\times \mathrm{Id} \coprod Y(\phi)"] \\
d \arrow[r, mapsto] & Z(d)\times I_+ \coprod Y(d)/\sim
\end{tikzcd}
$$

donde $(c',0) \sim f_c(c')$, $(c',1) \sim g_c(c')$ y $(c'_0,t) \sim y_0$ para $c' \in Z(c)$, $t \in I$ y c'_0, y_0 son los correspondientes puntos base. La aplicación $X(\phi) = Z(\phi)\times \mathrm{Id} \coprod Y(\phi)$ se define como sigue

$$
\begin{aligned}
X(\phi) = Z(\phi)\times \mathrm{Id} \coprod Y(\phi) : \frac{Z(c)\times I_+ \coprod Y(c)}{\sim} &\longrightarrow \frac{X(d)\times I_+ \coprod Y(d)}{\sim} \\
\overline{(x,t)} &\longmapsto \overline{(Z(\phi)(x),t)} \qquad \text{si } (x,t)\in Z(c)\times I \\
\overline{y} &\longmapsto \overline{Y(\phi)(y)} \qquad \text{si } y \in Y(c)
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Esta función está bien definida, pues al ser f transformación natural se tiene que

$$(Z(\phi)\times \mathrm{Id})(x,0) = (Z(\phi)(x),0) \sim f_d(Z(\phi)(x)) = Y(\phi)(f_c(x))$$

y además, si y'_0 y d'_0 son los puntos base de $Y(d)$ y $Z(d)$ respectivamente, se tiene

$$(Z(\phi)\times \mathrm{Id})(c'_0,t) = (Z(\phi)(c'_0),t) = (d'_0,t) \sim y'_0 = Y(\phi)(y_0).$$

De esto se sigue que $X(\phi)$ está bien definida.

Definimos la clase de $\mathcal{C}$-homotopía $[j] : Y \longrightarrow X$ de la aplicación entre $\mathcal{C}$-espacios j tal que $j_c(y) = q_c(y)$, donde $q : Z\times I \coprod Y \longrightarrow X$ es la transformación natural tal que $q_c : Z(c)\times I \coprod Y(c) \longrightarrow X(c)$ es aplicación cociente para cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, esto es, para cada objeto c en $\mathcal{C}$, $j_c : Y(c) \longrightarrow X(c)$ es la siguiente composición

$$
\begin{aligned}
Y(c) \xrightarrow{i_c} Z(c)\times I \coprod Y(c) &\xrightarrow{q_c} \frac{Z(c)\times I \coprod Y(c)}{\sim} = X(c) \\
y \longmapsto \quad y \quad &\longmapsto \quad \overline{y}
\end{aligned}
$$

La aplicación j es transformación natural, pues

$$
\begin{tikzcd}
Y(c) \arrow[r, "j_c"] \arrow[d, "Y(\phi)"'] & X(c) \arrow[d, "X(\phi)"] \\
Y(d) \arrow[r, "j_d"] & X(d)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \overline{y} \arrow[d, mapsto] \\
Y(\phi)(y) \arrow[r, mapsto] & \overline{Y(\phi)(y)} = X(\phi)(\overline{(y)})
\end{tikzcd}
$$

y la igualdad $\overline{Y(\phi)(y)} = X(\phi)(\overline{(y)})$ se tiene por (4.1). El hecho de que X es un coecualizador para $[f]$ y $[g]$ se sigue del siguiente resultado.

Lema 4.1.2. *Sean $f,g : Z \longrightarrow Y$ dos aplicaciones punteadas entre $\mathcal{C}$-espacios covariantes (contravariantes). Si X es el $\mathcal{C}$-espacio dado por el doble cilindro de f y g, entonces la clase de $\mathcal{C}$-homotopía $[j] : Y \longrightarrow X$ es un coecualizador para $[f]$ y $[g]$.*

Demostración. Para probar la parte *i)* de la Definición 4.1.1 veamos que $j \circ f : Z \longrightarrow X$ es $\mathcal{C}$-homotópica a $j \circ g : Z \longrightarrow X$. Definimos

$$H : Z \wedge I \longrightarrow X$$

$$\begin{tikzcd}
Z(c) \wedge I \arrow[r, "H_c"] \arrow[d, "Z(\phi)\wedge \mathrm{Id}"'] & X(c) \arrow[d, "X(\phi)"] \\
Z(d) \wedge I \arrow[r, "H_d"] & X(d)
\end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{aligned} H_c : Z(c) \wedge I &\longrightarrow X(c) \\ (z,t) &\longmapsto q_c(z,t) \end{aligned}$$

la cual es una aplicación continua, pues q_c lo es; además H es transformación natural,

$$\begin{tikzcd}
(z,y) \arrow[r, mapsto, "H_c"] \arrow[d, mapsto, "Z(\phi)\wedge \mathrm{Id}"'] & q_c(z,t) \arrow[d, mapsto, "X(\phi)"] \\
(Z(\phi)(z),t) \arrow[r, mapsto, "H_d"] & q_d(Z(\phi)(z),t) = X(\phi)(q_c(z,t))
\end{tikzcd}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} H_c(z,0) = q_c(z,0) = \overline{(z,0)} = \overline{f_c(z)} = (j_c \circ f_c)(z) \\ H_c(z,1) = q_c(z,1) = \overline{(z,1)} = \overline{g(z)} = (j_c \circ g_c)(z) \end{aligned}$$

esto es, $[j_c \circ f_c] = [j_c \circ g_c]$. Pero esto pasa para cada objeto c en $\mathcal{C}$, por tanto $[j \circ f] = [j \circ g]$ y se cumple *i)* de la Definición 4.1.1.
Ahora probemos que se cumple *ii)*. Sea $[j'] : Y \longrightarrow X'$ una clase de $\mathcal{C}$-homotopía punteada tal que $[j'] \circ [f] = [j'] \circ [g]$ y sea

$$H' : Z \wedge I \longrightarrow X'$$

$$\begin{tikzcd}
Z(c) \wedge I \arrow[r, "H'_c"] \arrow[d, "Z(\phi)\wedge \mathrm{Id}"'] & X'(c) \arrow[d, "X'(\phi)"] \\
Z(d) \wedge I \arrow[r, "H'_d"] & X'(d)
\end{tikzcd}$$

una $\mathcal{C}$-homotopía entre $j' \circ f$ y $j' \circ g$. Definimos la aplicación natural entre $\mathcal{C}$-espacios

$$g' : X \longrightarrow X'$$

$$\begin{tikzcd}
X(c) \arrow[r, "g'_c"] \arrow[d, "X(\phi)"'] & X'(c) \arrow[d, "X'(\phi)"] \\
X(d) \arrow[r, "g'_d"] & X'(d)
\end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{aligned} g'_c : X(c) &\longrightarrow X'(c) & \\ \overline{(z,t)} &\longmapsto H'(z,t) & (z,t) \in Z(c) \times I \\ \overline{y} &\longmapsto j'_c(y) & y \in Y(c) \end{aligned}$$

Para ver que la aplicación g'_c está bien definida, notemos que

$$\overline{(z,0)} = (f_c^{-1}(f_c(z)) \times \{0\}) \cup \{f_c(z)\}$$

$$\overline{(z,1)} = (g_c^{-1}(g_c(z)) \times \{1\}) \cup \{g_c(z)\}$$

así

$$\begin{aligned} g'_c(f_c^{-1}(f_c(z)) \times \{0\}) &= H'_c(f_c^{-1}(f_c(z)) \times \{0\}) \\ &= (j'_c \circ f_c)(f_c^{-1}(f_c(z))) \\ &= j'_c(f_c(z)) \\ &= g'_c(\overline{f_c(z)}) \\ g'_c(g_c^{-1}(g_c(z)) \times \{1\}) &= H'_c(g_c^{-1}(g_c(z)) \times \{1\}) \\ &= (j'_c \circ g_c)(g_c^{-1}(g_c(z))) \\ &= j'_c(g_c(z)) \\ &= g'_c(\overline{g_c(z)}) \end{aligned}$$

se sigue que g'_c está bien definida para todo $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Además la aplicación g' es natural,

$$\begin{tikzcd} \overline{(z,t)} \arrow[r, mapsto, "g'_c"] \arrow[d, mapsto, "X(\phi)"] & H'_c(z,t) \arrow[d, mapsto, "X'(\phi)"] \\ X(\phi)\overline{(z,t)} = (Z(\phi)(z),t) \arrow[r, mapsto] & H'_d(Z(\phi)(z),t) = H'_d(Z(\phi) \times \mathrm{Id}(z,t)) = X'(\phi)(H'_c(z,t)) \end{tikzcd}$$

donde la igualdad $H'_d(Z(\phi) \times \mathrm{Id}(z,t)) = X'(\phi)(H'_c(z,t))$ se sigue por la naturalidad de H'. Finalmente, tenemos que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} X(c) \arrow[r, "g'_c"] \arrow[d, "X(\phi)"'] & X'(c) \arrow[d, "X'(\phi)"] \\ X(d) \arrow[r, "g'_d"] & X'(d) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{y} \arrow[r, mapsto, "g'_c"] \arrow[d, mapsto, "X(\phi)"] & j'_c(y) \arrow[d, mapsto, "X'(\phi)"] \\ X(\phi)\overline{y} = Y(\phi)(y) \arrow[r, mapsto] & j'_d(Y(\phi)(y)) = X'(\phi)(j'_c(y)) \end{tikzcd}$$

por construcción. Notemos que g' depende de la elección de H' y es única salvo $\mathcal{C}$-homotopía. ■

4.2. Funtores de Brown y elementos universales

El Lema de Yoneda, resultado importante para el teorema de representabilidad establece que existe una correspondencia uno a uno entre las transformaciones naturales

$e : \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) \longrightarrow T$ y los elementos $u \in T(c)$. La correspondencia es tal que para cada objeto d en $\mathcal{C}$, $e_d : \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c) \longrightarrow T(d)$ está dada por $e_d(f) = T(f)(u)$ para cada $f : d \longrightarrow c$ (puede consultarse la prueba en [1] Lema 12.2.2). Esto es,

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c), T(-)) \xrightarrow{\cong} T(c)$$
$$(e : \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) \longrightarrow T(-)) \longmapsto e_c(\mathrm{Id}_c : c \to c)$$
$$\varphi_u = \left\{ \begin{array}{rl} (\varphi_u)_d : \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c) & \longrightarrow T(d) \\ (d \xrightarrow{f} c) & \longmapsto T(f)(u) \end{array} \right\}_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \longleftarrow u$$

Un funtor contravariante $T : \mathcal{D} \longrightarrow$ CONJUNTOS naturalmente equivalente al funtor $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,d) : \mathcal{D} \longrightarrow$ CONJUNTOS para algún objeto fijo d de $\mathcal{D}$ se llama **representable**. El elemento $u \in T(d)$ asociado a Id_d bajo tal correspondencia natural es llamado **elemento universal**. El caso en el que $\mathcal{D}$ es la categoría de $\mathcal{C}$-espacios y un $\mathcal{C}$-espacio Y representa a T, diremos que Y es un **objeto clasificante**.

Sea $T : \mathcal{C}$-ESPACIOS $\longrightarrow \mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ un funtor $\mathcal{C}$-homotópico contravariante. Dados $\mathcal{C}$-espacios X y A tales que $A(c) \subset X(c)$ para todo objeto c en $\mathcal{C}$ y dado $u \in T(X)$, denotaremos $u|_A$ a $T([i])(u)$, donde $i : A \longrightarrow X$ es la aplicación tal que $i_c : A(c) \longrightarrow X(c)$ es la inclusión para todo $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Definición 4.2.1. *Decimos que $T : \mathcal{C}$-ESPACIOS $\longrightarrow \mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ es un **funtor de Brown** si satisface las siguientes propiedades:*

i) Mayer-Vietoris: sea $(X; A, B)$ una terna escisiva de $\mathcal{C}$-espacios, esto es, $A(c), B(c) \subset X(c)$ y $\mathring{A}(c) \cup \mathring{B}(c) = X(c)$ para cada objeto c en $\mathcal{C}$. Entonces para cualquier $u \in T(A)$ y $v \in T(B)$ tal que $u|_{A \cap B} = v|_{A \cap B}$, existe $z \in T(X)$ tal que $z|_A = u$ y $z|_B = v$ donde $A \cap B$ es el $\mathcal{C}$ − espacio

$$A \cap B : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{ESPACIOS}$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & A(c) \cap B(c) \arrow[d, "A(\phi) \cap B(\phi)"] \\ d \arrow[r] & A(d) \cap B(d) \end{tikzcd}$$

con $A(\phi) \cap B(\phi) := X(\phi)|_{A(c) \cap B(c)}$

ii) Axioma cuña: para cada familia de $\mathcal{C}$-espacios $\{X_i\}_i$, las transformaciones inclusiones $\lambda_i : X_i \hookrightarrow \bigvee_i X_i$

$$\begin{tikzcd} X_i(c) \arrow[r, "\lambda_i(c)"] \arrow[d, "X_i(\phi)"'] & \bigvee_i X_i(c) \arrow[d, "\vee X_i(\phi)"] \\ X_i(d) \arrow[r, "\lambda_i(d)"] & \bigvee_i X_i(d) \end{tikzcd}$$

inducen isomorfismos de grupos abelianos

$$T\left(\bigvee_i X_i\right) \cong \prod_i T(X_i).$$

En [2] la propiedad *i)* es distinta, pues en ella se pide que para cada sucesión de $\mathcal{C}$-pares, $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} (X, A)$ la sucesión inducida $T(A, X) \xrightarrow{T(j)} T(X) \xrightarrow{T(i)} T(A)$ es exacta.

Un ejemplo de funtor de Brown es el funtor de $\mathcal{C}$-cohomología de grado fijo con coeficientes en M, es decir, $T := H^q_{\mathcal{C}}(-, \varnothing) : \mathcal{C}\text{-ESPACIOS} \longrightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$.

Dado que estamos tratando con funtores invariantes bajo $\mathcal{C}$-homotopías definidas en la categoría de $\mathcal{C}$-espacios, la correspondencia dada en el Lema de Yoneda queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hom_{\mathcal{C}}([-, X]_{\mathcal{C}}, T(-)) &\xrightarrow{\cong} T(X) \\ (e : [-, X]_{\mathcal{C}} \longrightarrow T(-)) &\longmapsto e_X(\mathrm{Id}_X : X \to X) \\ \varphi_u = \left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_u)_Y : [Y, X]_{\mathcal{C}} & \longrightarrow T(Y) \\ (Y \xrightarrow{f} X) & \longmapsto T(f)(u) \end{array} \right\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}\text{-espacios})} &\longleftarrow u \end{aligned}$$

Proposición 4.2.2. *Supongamos que el funtor* $T : \mathcal{C}\text{-}ESPACIOS \longrightarrow \mathbb{Z} - \text{Mod}$ *satisface el axioma de Mayer-Vietoris. Entonces tiene la siguiente propiedad: si* $f, g : Z \longrightarrow Y$ *son* $\mathcal{C}$*-aplicaciones y* $w \in T(Y)$ *satisface* $T([f])(w) = T([g])(w) \in T(Z)$*, entonces existe* $v \in T(X)$ *tal que* $T([j])(v) = w$*, donde* $[j] : Y \longrightarrow X$ *es un coecualizador para* $[f]$ *y* $[g]$*.*

Demostración. Sea $X' = Y \bigcup_f^g Z \times I$ el doble cilindro de f y g. Consideremos los siguientes $\mathcal{C}$-espacios,

$$A = Y \bigcup_f Z \times [0,1) = \frac{Z \times [0,1) \coprod Y}{\sim} \subset X'$$

$$B = Y \bigcup_g Z \times (0,1] = \frac{Z \times (0,1] \coprod Y}{\sim} \subset X'$$

Notemos que para cada objeto c en $\mathcal{C}$,

$$A(c) = Y(c) \bigcup_{f_c} Z(c) \times [0,1) = \frac{Z(c) \times [0,1) \coprod Y(c)}{\sim} \subset X'(c)$$

y $B(c) \subset X'(c)$, son abiertos en $X'(c)$. También tenemos que $X'(c) = \mathring{A}(c) \cup \mathring{B}(c)$. Por tanto, la terna $(X'; A, B)$ es escisiva.

Para cada $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $A(c) \cap B(c) = Z(c) \times (0,1) \bigvee Y(c)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $Z(c) \bigvee Y(c)$. Sean $p : A \longrightarrow Y$ y $q : B \longrightarrow Y$ las transformaciones naturales tales que

$$\begin{aligned} p_c : A(c) &\longrightarrow Y(c) & \\ \overline{(z,t)} &\longmapsto f_c(z) & (z,t) \in Z(c) \times [0,1) \\ \overline{y} &\longmapsto y & y \in Y(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_c : B(c) &\longrightarrow Y(c) & \\ \overline{(z,t)} &\longmapsto g_c(z) & (z,t) \in Z(c) \times (0,1] \\ \overline{y} &\longmapsto y & y \in Y(c) \end{aligned}$$

son proyecciones canónicas para cada $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Dichas proyecciones son equivalencias homotópicas (pues son retractos fuertes); definimos la $\mathcal{C}$-homotopía $H : A \times I \longrightarrow A$ entre

$k_c \circ p_c$ y la identidad $\mathrm{Id}_c : A(c) \longrightarrow A(c)$, donde $k : Y \longrightarrow A$ es la transformación inclusión, como sigue

$$H = \left\{ \begin{array}{lll} H_c : A(c) \times I & \longrightarrow \overline{A(c)} & \\ (\overline{(z,t)}, s) & \longmapsto \overline{(z,ts)} & \text{si } (z,t) \in Z(c) \times I \\ (\overline{y}, s) & \longmapsto \overline{y} & \text{si } y \in Y(c) \end{array} \right\}_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

Se tiene que H es transformación natural ya que,

$$\begin{tikzcd} A(d) \times I \arrow[r, "H_d"] \arrow[d, "A(\phi)\times I"'] & A(d) \arrow[d, "A(\phi)=X'(\phi)|_{A(d)}"] \\ A(c) \times I \arrow[r, "H_c"] & A(c) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\overline{(z,t)}, s) \arrow[r, mapsto, "H_d"] \arrow[d, mapsto, "A(\phi)\times I"'] & \overline{(z,ts)} \arrow[d, mapsto, "A(\phi)"] \\ (\overline{(Z(\phi)(z),t)}, s) \times I \arrow[r, mapsto, "H_c"] & \overline{(Z(\phi)(z),ts)} \end{tikzcd}$$

Tomemos

$$\begin{aligned} u &= T([p])(w) \in T(A) \\ v' &= T([q])(w) \in T(B) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Afirmamos que $u|_{A\cap B} = v'|_{A\cap B}$. En efecto, sean $\phi_A : A \cap B \hookrightarrow A$ y $\phi_B : A \cap B \hookrightarrow B$ las transformaciones naturales tales que

$$\phi_{A(c)} : A(c) \cap B(c) \hookrightarrow A(c)$$

$$\phi_{B(c)} : A(c) \cap B(c) \hookrightarrow B(c)$$

son inclusiones para cada $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Entonces

$$\begin{aligned} u|_{A\cap B} &= T([\phi_A])(u) \\ &= T([\phi_A])(T([p])(w)) \\ &= T([p \circ \phi_A])(w) \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} v'|_{A\cap B} &= T([\phi_B])(v') \\ &= T([\phi_B])(T([q])(w)) \\ &= T([q \circ \phi_B])(w) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Sea $h : Z \longrightarrow Z \times (0,1)$ la equivalencia $\mathcal{C}$-homotópica dada por $z \mapsto (z, 1/2)$. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "\phi_A"] & A \arrow[r, "p"] & Y \\ Z \times (0,1) \arrow[u, "i_Z"] & & Z \arrow[ll, "h"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

el cual conmuta, pues para cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd} A(c) \cap B(c) \arrow[r, "\phi_{A(c)}"] & A(c) \arrow[r, "p_c"] & Y(c) \\ Z(c) \times (0,1) \arrow[u, "(i_Z)_c"] & & Z(c) \arrow[ll, "h"] \arrow[u, "f_c"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (z, \frac{1}{2}) \arrow[r, mapsto] & \overline{(z, \frac{1}{2})} \arrow[r, mapsto] & f_d(z) \\ (z, \frac{1}{2}) \arrow[u, mapsto] & & z \arrow[ll, mapsto] \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Por otra parte, la composición

$$T(Y) \xrightarrow{T([p])} T(A) \xrightarrow{T([\phi_A])} T(Y \vee Z \times (0,1)) \xrightarrow[\cong]{\psi} T(Y) \times T(Z \times (0,1)) \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Id} \times T(h)} T(Y) \times T(Z)$$

dada por $x \longmapsto (T([p \circ \phi_A \circ i_Y])(x), T([p \circ \phi_A \circ i_Z \circ h])(x))$, es igual a $\mathrm{Id} \times T([f])$ pues notemos que

$$\begin{aligned} p \circ \phi_A \circ i_Y(y) &= p \circ \phi_A(y) \\ &= p(\overline{y}) \\ &= y \end{aligned}$$

es decir, $p \circ \phi_A \circ i_Y = \mathrm{Id}$ y además por la conmutatividad del diagrama (4.5) tenemos que $T([p \circ \phi_A \circ i_Z \circ h]) = T([f])$ (se tiene un resultado análogo para B). Por hipótesis $T([f])(w) = T([g])(w)$, entonces

$$\mathrm{Id} \times T([h]) \circ \psi \circ T([p \circ \phi_A])(w) = \mathrm{Id} \times T([h]) \circ \psi \circ T([q \circ \phi_B])(w)$$

pero $\mathrm{Id} \times T([h]) \circ \psi$ es biyectiva ya que h es equivalencia $\mathcal{C}$-homotópica y ψ es el isomorfismo dado por el axioma cuña, lo cual implica que

$$T([p \circ \phi_A])(w) = T([q \circ \phi_B])(w).$$

Por tanto, de (4.3) y (4.4) tenemos que $u|_{A \cap B} = v'|_{A \cap B}$. Por el axioma de Mayer-Vietoris para T, existe $z \in T(X')$ tal que $z|_A = u$ y $z|_B = v'$ (por definición $z|_A = T([i_A])(z)$ y $z|_B = T([i_B])(z)$ donde $i_A : A \longrightarrow X'$ y $i_B : B \longrightarrow X'$ son inclusiones).
Ahora, la transformación inclusión

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend left, "j'"] & A \arrow[r, "i_A"] & X' \end{tikzcd}$$

es tal que $j' \circ f \simeq j' \circ g$, ya que j' es coecualizador (Lema 4.1.2). Como $[j] : Y \longrightarrow X$ es un coecualizador, existe $g' : X \longrightarrow X'$ tal que $g' \circ j \simeq j'$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo salvo $\mathcal{C}$-homotopía

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j'"'] & X \arrow[d, dashed, "g'"] \\ & & X' \end{tikzcd}$$

y así tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T(Z) & T(Y) \arrow[l, shift right, "T([f])"'] \arrow[l, shift left, "T([g])"] \arrow[d, "T([p])"] & T(X) \arrow[l, "T([j])"'] \\ & T(A) \arrow[d, "T([\phi_A])"] & T(X') \arrow[l] \arrow[ul, "T([j'])"'] \arrow[u, "T([g'])"'] \arrow[d] \\ & T(A \cap B) & T(B) \arrow[l, "T([\phi_B])"] \end{tikzcd}$$

El elemento $v = T([g'])(z) \in T(X)$ es tal que $T([j])(v) = w$, pues

$$\begin{aligned}
T([j])(v) &= T([j])T([g'])(z) & \\
&= T([g' \circ j])(z) & (T \text{ contravariante}) \\
&= T([j'])(z) & (g' \circ j \simeq j') \\
&= T([i_A \circ k])(z) & (j' = i_A \circ k) \\
&= T([k]) \circ T([i_a])(z) & \\
&= T([k])(u) & (T([i_a])(z) = z|_A = u) \\
&= T([k])T([p])(w) & (\text{por } (4.2)) \\
&= T([p \circ k])(w) & (p \circ k = \mathrm{Id}) \\
&= T([\mathrm{Id}])(w) & \\
&= w &
\end{aligned}$$

■

En [2, Lema 4.3] se enuncia el mismo resultado de la proposición anterior pero en éste T es una teoría de $\mathcal{C}$-cohomología.

Observemos que si T es un funtor que satisface los axiomas cuña y Mayer-Vietoris entonces $T(*)$ es trivial. En efecto, notemos que $* \vee * = *$,

$$* \vee * : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ESPACIOS}$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\phi"'] & * \vee * = * \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
d \arrow[r, mapsto] & * \vee * = *
\end{tikzcd}$$

luego, sean $i_j : * \longrightarrow *_j$ y $\eta_j : *_j \longrightarrow *_1 \vee *_2 = *$ las funciones obvias para $j = 1, 2$ ($*_1 = *_2 = *$). Del axioma cuña tenemos que

$$T(*) = T(*_1 \vee *_2) \cong T(*_1) \times T(*_2)$$

$$\begin{tikzcd}
T(*_1 \vee *_2) = T(*) \arrow[r, "\cong"] & T(*_1) \times T(*_2) \arrow[r, "\cong"] & T(*) \times T(*) \\
x \arrow[r, mapsto] & (T(\eta_1)(x), T(\eta_2)(x)) \arrow[r, mapsto] & (T(i_1)T(\eta_1)(x), T(i_2)T(\eta_2)(x))
\end{tikzcd}$$

$$= (T(\mathrm{Id})(x), T(\mathrm{Id})(x)) = (x, x)$$

Si $x' \in T(*)$ entonces $(x, x') \in T(*) \times T(*)$ lo que implica que $x' = x$, i.e., $T(*) = *$.

Definición 4.2.3. *Sea T un funtor de Brown y Y un $\mathcal{C}$-espacio, un elemento $u \in T(Y)$ se dice ser n-universal si la función*

$$\varphi_u : [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c)_+ \wedge S^q, Y]_{\mathcal{C}} \longrightarrow T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c)_+ \wedge S^q)$$

dada por el Lema de Yoneda, es un isomorfismo para $0 < q < n$ y es un epimorfismo para $q = n$ y para todo objeto $c \in \mathcal{C}$. Un elemento $u \in T(Y)$ es ∞-universal si es n-universal para toda $n \geq 1$.

A continuación probaremos que, a partir de un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre punteado (conexo por trayectorias para cada objeto en $\mathcal{C}$), podemos construir inductivamente otros $\mathcal{C}$-CW-complejos libres junto con elementos n-universales. Para iniciar con este proceso inductivo podemos empezar tomando el $\mathcal{C}$-CW complejo libre contraíble $E\mathcal{C}$.

Lema 4.2.4. *Sea T un funtor de Brown, X un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre punteado y $v \in T(X)$. Entonces existe un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre punteado Y_1 obtenido por adjuntar $\mathcal{C}$-celdas a X, junto con un elemento 1-universal $u_1 \in T(Y_1)$ tal que $u_1|_X = v$.*

Demostración. Para cada elemento $\alpha \in T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1)$ tomamos una copia $(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1)_\alpha$ de $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1$ y construimos

$$Y_1 = X \vee \bigvee_\alpha (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1)_\alpha$$

Por el axioma cuña, hay un isomorfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned} T(Y_1) &\xrightarrow{\phi} T(X) \times \prod_\alpha T((\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1)_\alpha) \\ x &\longmapsto (T([i_X])(x), (T([i_\alpha])(x))_\alpha) \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $i_X : X \longrightarrow Y_1$, $i_\alpha : (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1)_\alpha = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1 \longrightarrow Y_1$ son las transformaciones inclusión. Tomamos $u_1 \in T(Y_1)$ correspondiente al elemento

$$(v, (\alpha)_\alpha) \in T(X) \times \prod_\alpha T((\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1)_\alpha) \tag{4.7}$$

bajo el isomorfismo. Probaremos que u_1 es un elemento 1-universal, es decir, mostraremos que

$$\varphi_{u_1} : [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1, Y_1]_{\mathcal{C}} \longrightarrow T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1)$$

es sobreyectiva. Sea $\alpha \in T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1)$ y consideremos

$$i_\alpha : \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1 \longrightarrow Y_1 = X \vee \bigvee_\alpha (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1)_\alpha$$

la inclusión del $\mathcal{C}$-espacio $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1$ como $(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^1)_\alpha$. De (4.6) y (4.7),

$$u_1 \overset{\phi}{\longmapsto} (T([i_X])(u_1), (T([i_\alpha])(u_1))_\alpha) = (v, (\alpha)_\alpha)$$

entonces

$$\varphi_{u_1}(i_\alpha) = T([i_\alpha])(u_1) = \alpha.$$

Por tanto, φ_{u_1} es sobreyectiva. Más aún, $X(c) \subset Y_1(c)$ para cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y $u_1|X = T([i_X])(u_1) = v$. ■

El siguiente resultado será útil para probar la existencia de elementos n-universales cuando $n > 1$.

Lema 4.2.5. *Sea (X, A) una pareja de $\mathcal{C}$-CW-complejos libres. Si todas las $\mathcal{C}$-celdas de $X - A$ son de dimensión menor a n, entonces*

$$[(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge D^q, \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{q-1}), (X, A)] = 0$$

para toda $q \leq n$.

Demostración. Sea $[f] \in [(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge D^q, \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{q-1}), (X,A)]$. La clase $[f]$ es trivial si y sólo si existe

$$g : (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge D^q, \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{q-1}) \longrightarrow (X,A)$$

tal que $f \simeq_{\mathcal{C}} g$ y $g_d(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)_+ \wedge D^q) \subset A(d)$ para toda $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Existe una aplicación celular $g : (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge D^q, \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{q-1}) \longrightarrow (X,A)$ tal que $g \simeq_{\mathcal{C}} f$ (Teorema 3.5 de [9]). Entonces para cada $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,

$$g_d(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)_+ \wedge D^q) \subset X^q(d) \cup A(d) \subset X^n(d) \cup A(d)$$

y como $X^n(d) \subset A(d)$ por hipótesis, se sigue que $g_d(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,c)_+ \wedge D^q) \subset A(d)$. ■

Probemos ahora la existencia de elementos n-universales para $n > 1$.

Lema 4.2.6. *Dado un funtor de Brown T, un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre punteado X y $v \in T(X)$, existe un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre punteado Y_n, obtenido a partir de X adjuntando $\mathcal{C}$-celdas de dimensión menor o igual a n, junto con un elemento n-universal $u_n \in T(Y_n)$ tal que $u_n|_X = v$.*

Demostración. Supongamos que hemos construido inductivamente para $n \geq 2$ el $\mathcal{C}$-espacio Y_{n-1}, a partir de X adjuntando celdas de dimensión menor o igual a $n-1$, junto con un elemento $(n-1)$-universal $u_{n-1} \in T(Y_{n-1})$ tal que $u_{n-1}|_X = v$.

Construiremos Y_n como sigue. Para cada elemento $\beta \in T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n)$ tomamos una copia $(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n)_\beta$ de $(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n)$ y construimos

$$Y'_n = Y_{n-1} \vee \bigvee_\beta (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n)_\beta.$$

Por el axioma cuña tenemos el isomorfismo de grupos abelianos

$$T(Y'_n) \cong T(Y_{n-1}) \times \prod_\beta T((\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n)_\beta).$$

Tomemos $u'_n \in T(Y'_n)$ tal que bajo la equivalencia anterior va a

$$(u_{n-1}, (\beta)_\beta) \in T(Y_{n-1}) \times \prod_\beta T((\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n)_\beta).$$

De la misma forma que en el Lema 4.2.4,

$$\varphi_{u'_n} : [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n, Y'_n]_{\mathcal{C}} \longrightarrow T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n)$$

es sobreyectiva y también

$$u'_n|_{Y_{n-1}} = T([\lambda'])(u'_n) = u_{n-1} \tag{4.8}$$

con $\lambda' : Y_{n-1} \longrightarrow Y'_n$ la inclusión.

Ahora, cada elemento $\alpha \in [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1}, Y'_n]_{\mathcal{C}}$ tal que $\varphi_{u'_n}(\alpha) = 0$ está representado por una transformación natural

$$f_\alpha : (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1} \longrightarrow Y'_n.$$

Para cada α adjuntamos una n-celda del tipo $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge D^n$ con f_α como aplicación de pegado,

$$f : \bigvee_\alpha (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha \longrightarrow Y'_n$$

con $f|_{(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha} = f_\alpha$.
Definimos Y_n como el $\mathcal{C}$-espacio que resulta de adjuntar estas celdas. Como Y_n está obtenido de Y'_n y por tanto también de Y_{n-1}, por adjuntar n-celdas, y como $[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y_n]_{\mathcal{C}}$ depende sólo del $(n-1)$-esqueleto de Y_n para $0 \neq q \leq n-2$, se sigue que la aplicación

$$[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y_{n-1}]_{\mathcal{C}} \xrightarrow{j_*} [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y_n]_{\mathcal{C}}$$

inducida por la inclusión $j : Y_{n-1} \hookrightarrow Y_n$, es isomorfismo para $q \leq n-2$ y es epimorfismo para $q = n-1$ (Lema 4.2.5).

Construiremos un elemento n-universal $u_n \in T(Y_n)$ tal que $u_n|_{Y_{n-1}} = u_{n-1}$. De aquí se seguirá que $u_n|_X = v$. Esto último se tiene porque el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "i_{Y_{n-1}}"'] \arrow[dr, "i_{Y_n}"] & \\ Y_{n-1} \arrow[rr, "j"] & & Y_n \end{tikzcd} \tag{4.9}$$

donde las aplicaciones son inclusiones. Entonces

$$\begin{aligned} u_n|_X &= T([i_{Y_n}])(u_n) & \\ &= T([j \circ i_{Y_{n-1}}])(u_n) & \text{((4.9) conmuta)} \\ &= T([i_{Y_{n-1}}]) \circ T([j])(u_n) & (T([j])(u_n) = u_n|_{Y_{n-1}} = u_{n-1}) \\ &= T([i_{T_{n-1}}])(u_{n-1}) & \\ &= u_{n-1}|_X & \\ &= v & \text{(hipótesis de inducción)} \end{aligned}$$

Ahora, consideremos

$$\bigvee_\alpha (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha \underset{[t]}{\overset{[f]}{\rightrightarrows}} Y'_n \xrightarrow{[j']} Y_n,$$

donde t es la aplicación constante y j' es la inclusión. Observemos que

$$T([f])(u'_n) = T([t])(u'_n).$$

En efecto, para cada $\alpha \in [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1}, Y'_n]_{\mathcal{C}}$ tenemos la inclusión

$$(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} \bigvee_\beta (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\beta$$

y la equivalencia

$$\begin{aligned} T(\bigvee_\alpha (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha) &\xrightarrow{\psi} \prod_\alpha T((\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha) \\ u &\longmapsto (T([i_\alpha])(u))_\alpha \end{aligned}$$

con $\alpha \in [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1}, Y'_n]$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\psi \circ T([f]))(u'_n) &= (T([i_\alpha]) \circ T([f])(u'_n))_\alpha \\
&= (T([f \circ i_\alpha])(u'_n))_\alpha \\
&= (T([f_\alpha])(u'_n))_\alpha && (f \circ i_\alpha = f_\alpha) \\
&= (\varphi_{u'_n}([f_\alpha])_\alpha && (\text{Definición } \varphi_{u'_n}) \\
&= (0)_\alpha && (f_\alpha \in \ker(\varphi_{u'_n})) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pero ψ es uno a uno, por tanto $T([f])(u'_n) = 0$. Por otra parte,

$$\begin{tikzcd}
\bigvee_\alpha (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "t"] & * \arrow[r] & Y'_n
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T(Y'_n) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "T({[t]})"] & T(*) = 0 \arrow[r] & T(\bigvee_\alpha \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha)
\end{tikzcd}$$

Entonces $T([t])(u'_n) = 0$. Así $T([f])(u'_n) = T([t])(u'_n)$.

Notemos que el doble cilindro de $[f]$ y $[t]$ es el $\mathcal{C}$-espacio Y_n. Por definición, el doble cilindro de $[i]$ y $[t]$ es:

$$Y'_n \cup_i^t \bigvee_\alpha (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha \times I = \frac{\bigvee_\alpha (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha \times I \coprod Y'_n}{\sim}$$

donde $(s,0) \sim f(s) = i(s)$, $(s,1) \sim t(s)$ y $(s_0, r) \sim y'_0$ para $s \in \bigvee_\alpha (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha$, $r \in I$ y s_0, y'_0 son los correspondientes puntos base. Por tanto

$$Y_n = Y'_n \cup_i^t \bigvee_\alpha (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1})_\alpha \times I$$

y así $[j'] : Y'_n \longrightarrow Y_n$ es un coecualizador para $[i]$ y para $[t]$.

Por la Proposición 4.2.2, existe $u_n \in T(Y_n)$ tal que

$$u_n|_{Y'_n} = T([j'])(u_n) = u'_n \tag{4.10}$$

Veamos que se cumple $u_n|_{Y_{n-1}} = T([j])(u_n) = u_{n-1}$. El siguiente diagrama es conmutativo donde las aplicaciones son inclusiones

$$\begin{tikzcd}
Y'_n \arrow[rr, "j'"] & & Y_n \\
& Y_{n-1} \arrow[ul, "\lambda'"] \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.11}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
u_n|_{Y_{n-1}} &= T([j])(u_n) \\
&= T([j' \circ \lambda'])(u_n) && ((4.11) \text{ conmuta}) \\
&= T([\lambda'])T([j'])(u_n) && (T \text{ contravariante}) \\
&= T([\lambda'])(u'_n) && (\text{por } (4.10)) \\
&= u'_n|_{Y_{n-1}} \\
&= u_{n-1} && (\text{por } (4.8))
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que u_n es un elemento n-universal. Afirmamos que el siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{tikzcd}[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y_{n-1}]_{\mathcal{C}} \arrow[rr, "j_*"] \arrow[dr, "\varphi_{u_{n-1}}"'] & & [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y_n]_{\mathcal{C}} \arrow[dl, "\varphi_{u_n}"] \\ & T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q) & \end{tikzcd}$$

donde j_* es un isomorfismo para $q \leq n-2$ y es epimorfismo para $q = n-1$. Efectivamente, el diagrama anterior conmuta: sea $[f] \in [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y_{n-1}]_{\mathcal{C}}$, entonces

$$\begin{aligned}(\varphi_{u_n} \circ j_*)([f]) &= \varphi_{u_n}([j \circ f]) \\ &= T([j \circ f])(u_n) \\ &= (T([f]) \circ T([j]))(u_n) \\ &= T([f])(u_{n-1}) && (T([j])(u_n) = u_n|_{Y_{n-1}} = u_{n-1}) \\ &= \varphi_{u_{n-1}}([f])\end{aligned}$$

Sabemos que $\varphi_{u_{n-1}}$ es un isomorfismo para $q \leq n-2$ y es epimorfismo para $q = n-1$ pues u_{n-1} es un elemento $(n-1)$-universal (por hipótesis de inducción). Así, φ_{u_n} es un isomorfismo para $q \leq n-2$ y es epimorfismo para $q = n-1$. Probemos entonces que es monomorfismo para $q = n-1$ y que es epimorfismo para $q = n$. Supongamos que

$$\varphi_{u_n}([\gamma]) = 0$$

para algún $[\gamma] \in [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1}, Y_n]_{\mathcal{C}}$. Como j_* es epimorfismo para $q = n-1$, existe $[\gamma'] \in [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1}, Y_{n-1}]_{\mathcal{C}}$ tal que $j_*([\gamma']) = [\gamma]$. Entonces

$$\varphi_{u_{n-1}}([\gamma']) = 0$$

por la conmutatividad del diagrama. Luego,

$$\begin{aligned}0 = \varphi_{u_{n-1}}([\gamma']) &= T([\gamma'])(u_{n-1}) \\ &= T([\gamma'])T([\lambda'])(u'_n) && \text{(por (4.8))} \\ &= T([\lambda' \circ \gamma'])(u'_n) \\ &= \varphi_{u'_n}([\lambda' \circ \gamma'])\end{aligned}$$

Entonces $[\lambda' \circ \gamma'] = [f_\alpha] \in \ker(\varphi_{u'_n})$ para algún α. La composición

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1} \xrightarrow{f_\alpha} Y'_n \xrightarrow{j'} Y_n$$

es $\mathcal{C}$-homotópicamente trivial pues tiene una extensión a $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge D^n$. Esto último ya que f_α es aplicación de pegado para Y_n. Entonces

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1} \xrightarrow{\gamma'} Y_{n-1} \xrightarrow{\lambda'} Y'_n \xrightarrow{j'} Y_n$$

es $\mathcal{C}$-homotópicamente trivial, pero

$$(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1} \xrightarrow{\gamma'} Y_{n-1} \xrightarrow{\lambda'} Y'_n \xrightarrow{j'} Y_n) = (\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^{n-1} \xrightarrow{\gamma'} Y_{n-1} \xrightarrow{j} Y_n)$$

es decir,

$$j' \circ \lambda' \circ \gamma' = j \circ \gamma'$$

por tanto

$$[\gamma] = j_*([\gamma']) = 0.$$

Por último, probemos que φ_{u_n} es epimorfismo para $q = n$. Esto ocurre pues $\varphi_{u'_n}$ es epimorfismo y el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
{[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n, Y'_n]_{\mathcal{C}}} \arrow[rr, "j'_*"] \arrow[dr, "\varphi_{u'_n}"'] & & {[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n, Y_n]_{\mathcal{C}}} \arrow[dl, "\varphi_{u_n}"] \\
& T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n) &
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea $[f] \in [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^n, Y'_n]_{\mathcal{C}}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\varphi_{u_n} \circ j'_*)([f]) &= \varphi_{u_n}([j' \circ f]) \\
&= T([j' \circ f])(u_n) \\
&= T([f])T([j'])(u_n) \\
&= T([f])(u'_n) && \text{(por (4.10))} \\
&= \varphi_{u'_n}([f])
\end{aligned}$$

Por tanto, u_n es n-universal. ∎

Los resultados anteriores nos permiten construir elementos ∞-universales, los cuales juegan un papel fundamental en el Teorema de representabilidad de Brown.

Teorema 4.2.7. *Sea T un funtor de Brown, Y_0 un $\mathcal{C}$-CW complejo libre punteado y $u_0 \in T(Y_0)$. Entonces existe un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre punteado Y obtenido a partir de Y_0 adjuntando celdas, junto con un elemento ∞-universal $u \in T(Y)$ tal que $u|_{Y_0} = u_0$.*

Demostración. Dado el $\mathcal{C}$-espacio Y_0 y $u_0 \in T(Y_0)$, por el Lema 4.2.6 tenemos la sucesión de $\mathcal{C}$-espacios

$$Y_0 \xrightarrow{i_0} Y_1 \xrightarrow{i_1} \dots \xrightarrow{i_{n-1}} Y_n \xrightarrow{i_n} \dots$$

junto con elementos n-universales $u_n \in T(Y_n)$, donde cada Y_n está obtenido a partir de Y_{n-1} adjuntando celdas de dimensión menor o igual a n. El $\mathcal{C}$-espacio

$$Y = \mathrm{colim}_n Y_n$$

es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, pues satisface canónicamente la construcción de la Definición 2.1.3.

Consideremos las transformaciones naturales

$$f_0, f_1 : \bigvee_n Y_n \longrightarrow \bigvee_n Y_n,$$

donde $f_0|_{Y_n} = i_n : Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$ es la inclusión y $f_1 = \mathrm{Id}_{\bigvee_n Y_n}$. Entonces la clase de $\mathcal{C}$-homotopía de

$$i : \bigvee_n Y_n \longrightarrow Y$$

tal que $i|_{Y_n} : Y_n \hookrightarrow Y$, es un coecualizador para $[f_0]$ y $[f_1]$. Esto se tiene pues, para cada Y_n y para cada $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

$$\begin{tikzcd} Y_n(c) \arrow[r, "(f_0)_c|_{Y_n(c)}"] \arrow[rr, bend right, "i_c|_{Y_n(c)}"'] & Y_{n+1}(c) \arrow[r, "i_c|_{Y_{n+1}(c)}"] & Y(c). \end{tikzcd}$$

Por tanto, $(i \circ f_0)|_{Y_n} = i|_{Y_n}$ para cada Y_n. De aquí que $[i \circ f_0] = [i \circ f_1]$. Por otro lado,

$$Y = \mathrm{colim}_n Y_n \approx \frac{\bigvee_n Y_n}{y \sim f_0(y)} \qquad y \in Y_n$$

y tenemos las aplicaciones

$$\begin{tikzcd} \bigvee_n Y_n/y \sim f_0(y) \arrow[r, hook, "i_0"] & \bigvee_n Y_n \times I \coprod \bigvee_n Y_n/(y,0) \sim f_0(y), (y,1) \sim f_1(y), (y_0,t) \sim y_0 \arrow[l, bend right, "p"'] \end{tikzcd}$$

donde i_0 es la aplicacion inclusión y

$$\begin{aligned} p(\overline{y}) &= [\overline{y}] & y &\in \bigvee_n Y_n \\ p(\overline{y,t}) &= [\overline{y}] & (y,t) &\in \bigvee_n Y_n \times I \end{aligned}$$

Por tanto, p es un retracto por deformación, así $\frac{\bigvee_n Y_n}{\sim}$ tiene el mismo tipo de $\mathcal{C}$-homotopía que $\bigvee_n Y_n \times I \coprod \bigvee_n Y_n/\sim$. Por otra parte, dada $j' : \bigvee Y_n \longrightarrow Y$ tal que $j' \circ f_0 \simeq j' \circ f_1$, tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigvee_n Y_n \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_1"'] & \bigvee_n Y_n \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "j'"'] & \bigvee_n Y_n/y \sim f_0(y) \arrow[r, "i_0"] & \bigvee_n Y_n \times I \coprod \bigvee_n Y_n/\sim \arrow[d, dashed, "g'"] \\ & & & Y' \end{tikzcd}$$

donde para cada objeto c de $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} g'_c : \bigvee_n Y_n(c) \times I \coprod \bigvee_n Y_n(c)/\sim &\longrightarrow Y'(c) \\ \overline{(y,t)} &\longmapsto H_c(y,t) & (y,t) &\in \bigvee_n Y_n(c) \times I \\ \overline{y} &\longmapsto j'_c(y) & y &\in \bigvee_n Y_n(c) \end{aligned}$$

y $H : \bigvee Y_n \times I \longrightarrow Y'$ es la $\mathcal{C}$-homotopía entre $j' \circ f_0$ y $j' \circ f_1 = j'$. Por tanto $i : \bigvee_n Y_n \longrightarrow Y$ es efectivamente un coecualizador.

El axioma cuña nos da la siguiente biyección

$$\begin{aligned} T\left(\bigvee_n Y_n\right) &\xrightarrow{\psi} \prod_n T(Y_n) \\ y &\longmapsto (T([i_{Y_n}])(y))_n \end{aligned}$$

donde $i_{Y_n} : Y_n \hookrightarrow \bigvee_n Y_n$ es la inclusión. Sea $\widetilde{u} \in T(\bigvee_n Y_n)$ tal que $\psi(\widetilde{u}) = (u_n)_n$. Probemos que

$$T([f_0])(\widetilde{u}) = T([f_1])(\widetilde{u}) = \widetilde{u}$$

Primero

$$(f_0 \circ i_{Y_n}) = (i_{Y_{n+1}} \circ i_n). \tag{4.12}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(\psi \circ T([f_0]))(\widetilde{u}) &= \psi(T([f_0])(\widetilde{u})) \\
&= (T([i_{Y_n}](T([f_0])(\widetilde{u})))_n && (\text{con } Y_n \overset{i_{Y_n}}{\hookrightarrow} \bigvee Y_n) \\
&= (T([f_0 \circ i_{Y_n}])(\widetilde{u}))_n \\
&= (T([i_{Y_{n+1}} \circ i_n])(\widetilde{u}))_n && (\text{por } (4.12)) \\
&= (T([i_n])T([i_{Y_{n+1}}])(\widetilde{u}))_n \\
&= (T([i_n])(u_{n+1}))_n && (T([i_{Y_{n+1}}])(\widetilde{u}) = \widetilde{u}|_{Y_{n+1}} = u_{n+1}) \\
&= (u_{n+1}|_{Y_n})_n \\
&= (u_n)_n.
\end{aligned}$$

Y por otra parte,

$$\begin{aligned}
(\psi \circ T([f_1]))(\widetilde{u}) &= \psi(T([\mathrm{Id}])(\widetilde{u})) \\
&= \psi(\widetilde{u}) \\
&= (u_n)_n.
\end{aligned}$$

Entonces $\psi(T([f_0])(\widetilde{u})) = \psi(T([f_1])(\widetilde{u}))$. Pero ψ es una biyección, por tanto

$$T([f_0])(\widetilde{u}) = T([f_1])(\widetilde{u}).$$

Por la Proposición 4.2.2, existe $u \in T(Y)$ tal que $T([i])(u) = \widetilde{u}$. Probemos que $u|_{Y_n} = u_n$,

$$\begin{aligned}
u|_{Y_n} = T([i|_{Y_n}])(u) &= T([i \circ i_{Y_n}])(u) \\
&= T([i_{Y_n}])T([i])(u) \\
&= T([i_{Y_n}])(\widetilde{u}) \\
&= u_n.
\end{aligned}$$

Ahora, tenemos el siguiente isomorfismo para toda $q \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{colim}_n([\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y_n]) &\xrightarrow{(\varphi_{u_n})_n} T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q) \\
\overline{[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{f} Y_n]} &\longmapsto \varphi_{u_n}(f)
\end{aligned}$$

La función $(\varphi_{u_n})_n$ está bien definida: sea $\overline{[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{f} Y_n]}$ un elemento en el colímite. Entonces $[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{f} Y_n \overset{i_n}{\hookrightarrow} Y_{n+1}] \in \overline{[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{f} Y_n]}$.

$$\begin{aligned}
(\varphi_{u_n})_n(\overline{[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{f} Y_n \overset{i_n}{\hookrightarrow} Y_{n+1}]}) &= \varphi_{u_{n+1}}(i_n \circ f) \\
&= T(i \circ f)(u_{n+1}) \\
&= T(f)T(i_{n+1})(u_{n+1}) \\
&= T(f)(u_n) && (T(i_{n+1})(u_{n+1}) = u_{n+1}|_{Y_n} = u_n) \\
&= \varphi_{u_n}(f)
\end{aligned}$$

Probemos que efectivamente $(\varphi_{u_n})_n$ es isomorfismo. Supongamos que

$$(\varphi_{u_n})_n(x) = (\varphi_{u_n})_n(y)$$

para algunos $x, y \in \mathrm{colim}_n([\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y_n])$. Entonces $x = \overline{[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{f} Y_n]}$ y $y = \overline{[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{g} Y_m]}$ para algunos enteros n, m. Podemos suponer que $n \leq m$. Sea r tal que $n + r = m$ y s tal que $m + s > q$. Entonces

$$x = \overline{[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{f} Y_n \xrightarrow{i_{n'}} Y_{m+s}]}$$

$$y = \overline{[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{g} Y_m \xrightarrow{i_{m'}} Y_{m+s}]}$$

donde $i_{n'}$ es la composición

$$Y_n \overset{i_n}{\hookrightarrow} Y_{n+1} \overset{i_{n+1}}{\hookrightarrow} \dots \overset{i_{m+s-1}}{\hookrightarrow} Y_{m+s}$$

e $i_{m'}$ es la composición

$$Y_m \overset{i_m}{\hookrightarrow} Y_{m+1} \overset{i_{m+1}}{\hookrightarrow} \dots \overset{i_{m+s-1}}{\hookrightarrow} Y_{m+s}$$

Entonces

$$(\varphi_{u_n})_n(x) = \varphi_{u_{m+s}}(\overline{[i_{n'} \circ f]})$$
$$(\varphi_{u_n})_n(y) = \varphi_{u_{m+s}}(\overline{[i_{m'} \circ g]})$$

pero $\varphi_{u_{m+s}}$ es isomorfismo, entonces $\overline{[i_{n'} \circ f]} = \overline{[i_{m'} \circ g]}$ y de esto que $x = y$. Ahora, sea $y \in T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q)$, existe m suficientemente grande tal que $q < m$ y así φ_{u_m} es epimorfismo para $q = n$. Por tanto, existe $[f] \in [\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y_m]$ tal que

$$(\varphi_{u_n})_n(\overline{[f]}) = \varphi_{u_m}(\overline{[f]}) = y.$$

De este modo concluimos que $(\varphi_{u_n})_n$ es isomorfismo.

Falta ver que φ_u es isomorfismo. Para ello, veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{colim}_n([\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y_n]) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"', "(\varphi_{u_n})_n"] & & {[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y]} \arrow[dl, "\varphi_u"] \\
& T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q) &
\end{tikzcd}$$

(el isomorfismo horizontal es fácil de probar usando que S^q es compacto). En efecto,

$$\begin{tikzcd}
\overline{[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{f} Y_n]} \arrow[r, mapsto, "\cong"] \arrow[d, mapsto, "(\varphi_{u_n})_n"', "\cong"] & {[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q \xrightarrow{f} Y_n \xrightarrow{i|_{Y_n}} Y]} \arrow[d, mapsto, "\varphi_u"] \\
T([f])(u_n) & T([i|_{Y_n} \circ f])(u) = T([f])T([i|_{Y_n}])(u) = T([f])(u_n)
\end{tikzcd}$$

lo que implica que φ_u es isomorfismo para toda $q \geq 1$. Así, $u \in T(Y)$ es un elemento ∞-universal. ■

Veamos a continuación que el $\mathcal{C}$-espacio Y del teorema anterior es único salvo $\mathcal{C}$-equivalencia homotópica.

Teorema 4.2.8. *Sea T funtor de Brown. Si Y y Y' son complejos $\mathcal{C}$-CW punteados con elementos ∞-universales $u \in T(Y)$ y $u' \in T(Y')$, entonces existe una equivalencia $\mathcal{C}$-homotópica*

$$f : Y \longrightarrow Y'$$

tal que $T([f])(u') = u$.

Demostración. Tomemos $Y_0 = Y \vee Y'$, del axioma cuña tenemos

$$T(Y_0) \cong T(Y) \times T(Y').$$

Sea $u_0 \in T(Y_0)$ el elemento correspondiente a $(u, u') \in T(Y) \times T(Y')$ bajo la equivalencia anterior. Entonces, por el Teorema 4.2.7, existe Y'' obtenido a partir de Y_0 junto con un elemento ∞-universal $u'' \in T(Y'')$ tal que $u''|_{Y_0} = u_0$. La composición

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[rr, bend right, "j"'] & Y_0 = Y \vee Y' \arrow[r, hook, "i''"] & Y'' \end{tikzcd}$$

induce

$$\begin{tikzcd} {[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y]_{\mathcal{C}}} \arrow[rr, "j_*"] \arrow[dr, "\cong"', "\varphi_u"] & & {[\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q, Y'']_{\mathcal{C}}} \arrow[dl, "\cong", "\varphi_{u''}"'] \\ & T(\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)_+ \wedge S^q) & \end{tikzcd}$$

y así j_* es un isomorfismo para toda q. Por tanto j es una equivalencia $\mathcal{C}$-homotópica débil. Pero Y y Y' son complejos $\mathcal{C}$-CW, entonces j es equivalencia $\mathcal{C}$-homotópica [5, Teo. 3.5]. Similarmente, la aplicación análoga $j' : Y' \longrightarrow Y''$ es equivalencia $\mathcal{C}$-homotópica. Si $j'' : Y'' \longrightarrow Y'$ es la inversa $\mathcal{C}$-homotópica de j', entonces la composición

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & Y'' \arrow[r, "j''"] & Y' \end{tikzcd}$$

es una equivalencia $\mathcal{C}$-homotópica. Veremos que f es tal que $T([f])(u') = u$.

$$\begin{aligned} T([f])(u') &= T([j'' \circ j])(u') \\ &= T([j])T([j''])(u') \\ &= T([j])T([j''])T([i_0'])(u_0) \qquad\qquad (u' = T([i_0'])(u_0)) \\ &= T([j])T([i_0' \circ j''])(u_0) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Afirmamos que $T([i_0' \circ j''])(u_0) = u''$

$$\begin{aligned} T([i_0' \circ j''])(u_0) = u'' &\text{ si y sólo si } T([j''])T([i_0'])(u_0) = u'' \\ &\text{ si y sólo si } T([i_0'])(u_0) = T([j''])^{-1}(u'') \\ &\text{ si y sólo si } T([i_0'])(u_0) = T([j'])(u'') \qquad (\text{pues } T([j''])^{-1} = T([j'])) \end{aligned}$$

Mostraremos que en efecto $T([i_0'])(u_0) = T([j'])(u'')$, y así, $T([i_0' \circ j''])(u_0) = u''$.

$$\begin{aligned}
T([j'])(u'') &= T([i'' \circ i_0'])(u'') && (j' = i'' \circ i_0') \\
&= T([i_0'])T([i''])(u'') \\
&= T([i_0'])(u_0) && (T([i''])(u'') = u''|_{Y_0} = u_0)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$T([i_0' \circ j''])(u_0) = u'' \tag{4.14}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
T([f])(u') &= T([j])T([i_0' \circ j''])(u_0) && (\text{de } (4.13)) \\
&= T([j])(u'') && (\text{por } (4.14)) \\
&= T([i'' \circ i_0])(u'') && (j = i'' \circ i_0) \\
&= T([i_0])T([i''])(u'') \\
&= T([i_0])(u_0) && (T([i''])(u'') = u_0) \\
&= u
\end{aligned}$$

como se quería probar. ■

Proposición 4.2.9. *Sea T un funtor de Brown, Y un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre punteado, $u \in T(Y)$ un elemento ∞-universal y (X, A) un par $\mathcal{C}$-CW. Dada una transformación natural punteada $g : A \longrightarrow Y$ y un elemento $v \in T(X)$ tal que $v|_A = T([g])(u)$, entonces existe una extensión $f : X \longrightarrow Y$ de g tal que $v = T([f])(u)$.*

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "i_0"] & & \\
A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "g"'] & & X \bigvee Y \arrow[r, "j"] & Z \\
& Y \arrow[ur, "i_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde i, i_0, i_1 son inclusiones y j es tal que $[j]$ es un coecualizador para $[i_0 \circ i]$ y $[i_1 \circ g]$. Por la construcción del coecualizador en el Lema 4.1.2,

$$Z = (X \bigvee Y) \bigcup_{i_0 \circ i}^{i_1 \circ g} (A \times I)$$

es un complejo $\mathcal{C}$-CW. Por el axioma cuña, tenemos un isomorfismo

$$T(X \bigvee Y) \xrightarrow{\psi} T(X) \times T(Y).$$

Sea $v' \in T(X \bigvee Y)$ tal $v'|_X = v$ y $v'|_Y = u$ es decir,

$$\psi(v') = (T([i_0])(v'), T([i_1])(v')) = (v, u). \tag{4.15}$$

Notemos que $T([i_0 \circ i])(v') = T([i_1 \circ g])(v')$:

$$\begin{aligned} T([i_0 \circ i])(v') &= T([i])T([i_0])(v') \\ &= T([i])(v) \\ &= T([g])(u) && \text{(por hipótesis)} \\ T([i_1 \circ g])(v') &= T([g])T([i_1])(v') \\ &= T([g])(u) \end{aligned}$$

Por la Proposición 4.2.2, existe $w \in T(Z)$ tal que

$$T([j])(w) = v'. \tag{4.16}$$

Por el Teorema 4.2.7 existe un $\mathcal{C}$-espacio punteado Y' obtenido de Z adjuntando celdas (que por lo tanto es $\mathcal{C}$-CW-complejo) y un elemento ∞-universal $u' \in T(Y')$ tal que

$$u'|_Z = T([j'])(u') = w. \tag{4.17}$$

Entonces, tenemos dos $\mathcal{C}$-CW-complejos Y y Y' junto con elementos ∞-universales $u \in T(Y)$ y $u' \in T(Y')$, por el Teorema 4.2.8 hay una equivalencia $\mathcal{C}$-homotópica

$$h : Y' \longrightarrow Y$$

tal que $T([h])(u) = u'$.

Definimos f' como la composición

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0"] \arrow[rrrr, bend right, "f'"'] & X \vee Y \arrow[r, "j"] & Z \arrow[r, hook, "j'"] & Y' \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces g es $\mathcal{C}$-homotópica a $f' \circ i$. Esto se tiene pues $[j \circ i_0 \circ i] = [j \circ i_1 \circ g]$, ya que j es coecualizador y tenemos la siguiente igualdad

$$\left(A \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{k_0} Y''\right) = \left(A \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{i} X \vee Y \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{j'} Y' \xrightarrow{k_1} Y''\right),$$

donde Y'' es el $\mathcal{C}$-CW-complejo libre obtenido a partir de $Y \vee Y'$ por pegar celdas (el que se construye en la prueba del Teorema 4.2.8) y k_0, k_1, j, j' son inclusiones seguidas de aplicaciones cociente. Entonces tenemos que

$$[k_0][h][j'][j \circ i_0 \circ i] = [k_1][j'][j \circ i_1 \circ g]$$

ya que $[k_0][h] = [k_0 \circ q \circ k_1] = [\mathrm{Id} \circ k_1] = [k_1]$, donde $q : Y'' \longrightarrow Y$ es la inversa homotópica de k_0. Como $i : A \hookrightarrow X$ es cofibración, podemos extender una $\mathcal{C}$-homotopía H entre $f' \circ i$ y g iniciando con f' [1, Teo. 5.1.29]. Esto es, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "j_0"] \arrow[drr, bend left, "f'"] & & \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j_0"'] & & X \times I \arrow[r, dashed, "\widetilde{H}"] & Y \\ & A \times I \arrow[ur, "i \times \mathrm{Id}"'] \arrow[urr, bend right, "H"'] & & \end{tikzcd}$$

Definimos $f := \widetilde{H}(-,1) : X \longrightarrow Y$. Entonces $f \simeq f'$ y

$$f_c \circ i_c = f_c|_{A(c)} = \widetilde{H}_c(-,1)|_{A(c)} = H_c(-,1) = g_c(-) : A(c) \longrightarrow Y(c)$$

para cada objeto c en $\mathcal{C}$ y por tanto, $f \circ i = g$.

Probemos ahora que $T([f])(u) = v$:

$$\begin{aligned}
T([f])(u) &= T([f'])(u) && (f \simeq f') \\
&= T([h \circ j' \circ j \circ i_0])(u) \\
&= T([i_0])T([j])T([j'])T([h])(u) \\
&= T([i_0])T([j])T([j'])(u') && (T([h])(u) = u') \\
&= T([i_0])T([j])(w) && (\text{por } (4.17)) \\
&= T([i_0])(v') && (\text{por } (4.16)) \\
&= v && (\text{por } (4.15))
\end{aligned}$$

■

El Teorema de representabilidad de Brown establece que si T es un funtor de Brown, entonces T es representable en la categoría de complejos $\mathcal{C}$-CW. Más específicamente, existe un $\mathcal{C}$-CW-complejo punteado Y, único salvo $\mathcal{C}$-homotopía y una equivalencia natural

$$\phi : [-,Y]_{\mathcal{C}} \longrightarrow T.$$

Probamos dicho resultado en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.10. *Sea $u \in T(Y)$ un elemento ∞-universal. Entonces u es un elemento universal en la categoría de complejos $\mathcal{C}$-CW punteados, y por tanto Y es un $\mathcal{C}$-espacio clasificante para T. En otras palabras, si X es un $\mathcal{C}$-CW-complejo punteado, entonces*

$$\varphi_u : [X,Y]_{\mathcal{C}} \longrightarrow T(X)$$

es una biyección natural, y así queda determinada una equivalencia natural

$$[-,Y]_{\mathcal{C}} \longrightarrow T.$$

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow X'$. Veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
{[X,Y]_{\mathcal{C}}} \arrow[r, "\varphi_u"] & T(X) \\
{[X',Y]_{\mathcal{C}}} \arrow[u, "f_*=[(-)\circ f]"] \arrow[r, "\varphi_u"] & T(X') \arrow[u, "T([f])"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{[X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{h} Y]} \arrow[r, mapsto] & T([h\circ f])(u) = T([f])T([h])(u) \\
{[X' \xrightarrow{h} Y]} \arrow[u, mapsto, "f_*=[(-)\circ f]"] \arrow[r, mapsto] & T([h])(u) \arrow[u, mapsto, "T([f])"']
\end{tikzcd}$$

y esto prueba la naturalidad.

Probemos ahora que φ_u es sobreyectiva. Sea $v \in T(X)$. Por el Teorema 4.2.7 construimos el $\mathcal{C}$-CW complejo libre Y' a partir de X junto con un elemento ∞-universal $u' \in T(Y')$ tal que $T([j])(u') = u'|_X = v$. Por el Teorema 4.2.8 existe una equivalencia $\mathcal{C}$-homotópica $f : Y' \longrightarrow Y$ tal que $T([f])(u) = u'$. Entonces la clase de

$$X \xrightarrow{j} Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\mathrm{Id}_Y} Y$$

es tal que $\varphi_u([\mathrm{Id}_Y \circ f \circ j]) = v$. En efecto,

$$\begin{aligned} \varphi_u([\mathrm{Id}_Y \circ f \circ j]) &= T([\mathrm{Id}_Y \circ f \circ j])(u) \\ &= T([j])T([f])T([\mathrm{Id}_Y])(u) \\ &= T([j])T([f])(u) \\ &= T([j])(u') \\ &= v && (u'|_X = v) \end{aligned}$$

Por último probemos que φ_u es inyectiva. Supongamos que $\varphi_u([g_0]) = \varphi_u([g_1])$ para $[g_0], [g_1] \in [X, Y]_{\mathcal{C}}$, entonces

$$T([g_0])(u) = T([g_1])(u). \tag{4.18}$$

El $\mathcal{C}$-espacio

$$X' = \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I}$$

es un complejo $\mathcal{C}$-CW con q-esqueleto

$$X'^q = \left(\frac{X^{q-1} \times I}{\{x_0\} \times I} \right) \cup X^q \times \partial I.$$

Consideremos ahora el $\mathcal{C}$-espacio

$$A = \frac{X \times \partial I}{\{x_0\} \times \partial I}$$

Notemos que $A(c) \subset X'(c)$ para cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y que A es equivalente al $\mathcal{C}$-espacio $X \bigvee X$,

Definimos la transformación natural $g : A \longrightarrow Y$ tal que para cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$\begin{aligned} g_c : A(c) &\longrightarrow Y(c) \\ \overline{(x,0)} &\longmapsto (g_0)_c(x) \\ \overline{(x,1)} &\longmapsto (g_1)_c(x) \end{aligned}$$

con $x \in X(c)$. Por otro lado, la proyección $p : X' \longrightarrow X$ es una equivalencia $\mathcal{C}$-homotópica. Tomemos $v' = T([p])T([g_0])(u) \in T(X')$ y sea $j : A \longrightarrow X'$ la inclusión. Afirmamos que $T([j])(v') = T([g])(u)$. Tenemos la siguiente composición de biyecciones

$$T(A) \xrightarrow[\cong]{T([h])} T(X_1 \bigvee X_2) \xrightarrow[\cong]{(T([\lambda_1]), T([\lambda_2]))} T(X_1) \times T(X_2)$$

donde $h : X_1 \bigvee X_2 \longrightarrow A$ es la equivalencia natural canónica $(X_1 = X_2 = X)$ y $\lambda_i : X_i \longrightarrow X_1 \bigvee X_2$ es la inclusión para $i = 1, 2$. Entonces

$$T([j])(v') \xmapsto{T([h])} T([h])T([j])(v') \longmapsto (T([\lambda_1])T([h])T([j])(v'), T([\lambda_2])T([h])T([j])(v'))$$

$$T([g])(u) \xmapsto{T([h])} T([h])T([g])(u) \longmapsto (T([\lambda_1])T([h])T([g])(u), T([\lambda_2])T([h])T([g])(u))$$

Luego,

$$\begin{aligned} T([\lambda_1])T([h])T([j])(v') &= T([j \circ h \circ \lambda_1])(v') \\ &= T([g_0 \circ p \circ j \circ h \circ \lambda_1])(u) && (v' = T([p])T([g_0])(u)) \\ &= T([g_0 \circ \mathrm{Id}])(u) && (p \circ j \circ h \circ \lambda_i = \mathrm{Id}) \\ &= T([g_0])(u) && (\text{por } (4.18)) \end{aligned}$$

Análogamente, $T([\lambda_2])T([h])T([j])(v') = T([g_0])(u) = T([g_1])(u)$. Por tanto,

$$(T([\lambda_1])T([h])T([j])(v'), T([\lambda_2])T([h])T([j])(v')) = (T([g_0])(u), T([g_1])(u))$$

Y por otro lado,

$$(T([g \circ h \circ \lambda_1])(u), T([g \circ h \circ \lambda_2])(u)) = (T([g_0])(u), T([g_1])(u)),$$

esto es,

$$((T([\lambda_1]), T([\lambda_2])) \circ T([h]))(T([j])(v')) = ((T([\lambda_1]), T([\lambda_2])) \circ T([h]))(T([g])(u)).$$

Pero $((T([\lambda_1]), T([\lambda_2])) \circ T([h]))$ es biyección, por tanto

$$T([j])(v') = T([g])(u).$$

Por la Proposición 4.2.9, existe una extensión $f : X' \longrightarrow Y$ de g tal que $T([f])(u) = v'$. La composición

$$H : X \times I \xrightarrow{\rho} X' \xrightarrow{f} Y$$

donde $\rho : X \times I \longrightarrow X'$ es la aplicación cociente, es tal que para cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$H_c(x,0) = f_c(\overline{(x,0)}) = g_c(\overline{(x,0)}) = (g_0)_c(x)$$

$$H_c(x,1) = f_c(\overline{(x,1)}) = g_c(\overline{(x,1)}) = (g_1)_c(x)$$

y así H es una $\mathcal{C}$-homotopía entre g_0 y g_1. Por tanto, $[g_0] = [g_1]$ y φ_u es inyectiva. ■

Bibliografía

[1] M. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. *Algebraic topology from a Homotopical viewpoint.* Springer-Verlag, 2002.

[2] N. Bárcenas. Brown representation and spaces over a category. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 2014.

[3] G. E. Bredon. *Equivariant cohomology theories.* Lecture Notes in Mathematics, No. 34, Springer-Verlag, 1967.

[4] G. E. Bredon. *Topology and geometry.* 139. Graduate Texts in Mathematics 139, Springer-Velarg, 1993.

[5] J. Davis and W. Lück. Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in K-and L-theory. *Proceedings of the AMS*, June 1996.

[6] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2001.

[7] E. Lluis-Puebla. *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-teoría algebraica clásica.* Iberoamericana, 1990.

[8] S. MacLane. *Categories for working mathematician.* Springer-Verlag, March 1971.

[9] R. Piacenza. Homotopy theory of diagrams and CW-complexes over a category. *Can. J. Math. Vol. 43 (4)*, 1991.

[10] J.-P. Shah. Equivariant algebraic topology. August 2010.

[11] T. tom Dieck. *Transformation groups.* Walter de Gruyter, 1987.