

"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Geometría de Sistemas Hamiltonianos en \mathbb{R}^3

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Jesús Jairo Rodríguez Padilla

Director de Tesis: Dr. Yuri Vorobev

Hermosillo, Sonora, México, Junio de 2012

SINODALES

Dr. Rubén Flores Espinoza
Universidad de Sonora

Dr. José Antonio Vallejo
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Dr. Yuri Vorobev
Universidad de Sonora

Dr. Guillermo Dávila Rascón
Universidad de Sonora

Contenido

Introducción	1
1 Concepto General del Formalismo Hamiltoniano	7
1.1 Definiciones algebraica y geométrica de corchetes de Poisson en \mathbb{R}^n .	7
2 Geometría de Poisson y Sistemas Hamiltonianos en \mathbb{R}^3	19
2.1 Vectores de Poisson y la ecuación de integrabilidad.	19
2.2 Teorema de Frobenius y Foliación Simpléctica	32
2.3 Funciones de Poisson y Equivalencia	39
2.4 Automorfismos infinitesimales de Poisson	40
2.5 Problema de Hamiltonización	46
3 Espacios de Poisson Afines	53
3.1 Parametrización	53
3.2 Teorema de Clasificación	56
3.3 Funciones de Casimir y Foliaciones Simplécticas	65
3.4 Sistemas Localmente Hamiltonianos	77
Apéndice 1	85
Bibliografía	87

Introducción

Las cuestiones de existencia y construcción de estructuras Hamiltonianas para sistemas dinámicos en \mathbb{R}^3 dieron como resultado el surgimiento de un campo activo de investigación estimulado por un gran número de modelos dinámicos conocidos en física matemática, los cuales admiten una formulación Hamiltoniana (ver, por ejemplo, [1],[2],[4],[6],[13],[14],[15],[16],[17],[20],[23],[30],[31],[32]). Este trabajo se enfoca en algunos aspectos geométricos del formalismo Hamiltoniano no canónico para sistemas dinámicos en \mathbb{R}^3 relacionados a la teoría de corchetes de Poisson degenerados, métodos de integrabilidad para ecuaciones diferenciales y la teoría de foliaciones.

En mecánica clásica, un sistema Hamiltoniano canónico

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (1)$$

describe la dinámica de una partícula, donde la función (llamada Hamiltoniano) H es la energía total y p, q denotan las variables de momento y posición, respectivamente.

Utilizando el corchete de Poisson canónico no degenerado

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} \quad (2)$$

para $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, podemos reescribir las ecuaciones Hamiltonianas (1) como sigue

$$\dot{p} = \{H, p\}, \quad \dot{q} = \{H, q\}.$$

La ventaja principal de esta representación es que se pueden derivar muchas características de la dinámica Hamiltoniana de las siguientes propiedades básicas del corchete de Poisson: (i) bilinealidad y antisimetría; (ii) la identidad de Jacobi y (iii) la regla de Leibniz. Por ejemplo, la conservación de la energía H es una consecuencia de la propiedad de antisimetría de $\{, \}$. Al tomar estas propiedades como axiomas, podemos extender la noción de corchete de Poisson a un espacio fase arbitrario (una C^∞ -variedad) M , el cual no necesariamente es de dimensión par. Por lo tanto, un corchete de Poisson en M se define como un corchete de Lie $\{, \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ en el espacio de funciones suaves el cual es compatible con el producto (en cada punto) mediante la regla de Leibniz: $\{fh, g\} = h\{f, g\} + f\{h, g\}$. Esto implica que para cada función suave H en M , el operador lineal $\{H, \cdot\}$ es una derivación del \mathbb{R} -álgebra conmutativa $C^\infty(M)$ y por lo tanto existe un único campo vectorial V_H en M , llamado el campo vectorial Hamiltoniano de H , tal que $\{H, \cdot\}$ coincide con la derivada de Lie L_{V_H} .

Los sistemas dinámicos asociados a los campos vectoriales Hamiltonianos V_H dan como resultado la dinámica Hamiltoniana en el espacio fase (una *variedad*

de Poisson) $(M, \{, \})$ de un tipo general. La condición de degeneración para el corchete de Poisson significa que la distribución característica integrable $m \mapsto \mathcal{D}_m = \text{Span}\{V_F(m) \mid F \in C^\infty(M)\}$ generada por los campos vectoriales Hamiltonianos tiene dimensión menor que $\dim M$ en algunos puntos. En este caso, la variedad de Poisson se representa como una unión disjunta de variedades simplécticas, llamadas *hojas simplécticas*, (en general, de varias dimensiones), las cuales se unen de manera suave [24],[37],[38]. Las funciones suaves en M que son constantes a lo largo de las hojas simplécticas (i.e. el corchete de Poisson conmuta con cualquier función) son llamadas *funciones de Casimir* y presentan las integrales primeras intrínsecas de los sistemas Hamiltonianos.

La primera situación interesante donde se encuentran corchetes de Poisson degenerados es en el espacio 3-dimensional $M = \mathbb{R}^3$. Cada corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 es de la forma

$$\{F, G\}_\psi = \langle \psi, \nabla F \times \nabla G \rangle, \quad (3)$$

donde la función vectorial ψ en \mathbb{R}^3 se llama *vector de Poisson* y satisface la ecuación

$$\langle \psi, \text{rot}\psi \rangle = 0, \quad (4)$$

la cual es equivalente a la identidad de Jacobi para (3). Para corchetes de Poisson degenerados en general, la identidad de Jacobi escrita en términos del corchete de Schouten [24],[37], presenta un sistema complicado de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Una propiedad especial de los corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 es la invarianza conforme la cual establece que la ecuación (4) es invariante con respecto a la multiplicación $\psi \mapsto g\psi$ por un factor escalar arbitrario $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Como consecuencia, en el conjunto regular $N^{\text{reg}} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \psi(x) \neq 0\}$, la distribución característica del corchete (3) se define como la distribución de planos ortogonal a las rectas generadas por el vector de Poisson en cada punto,

$$x \mapsto \mathcal{D}_x := \langle \psi(x) \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^3. \quad (5)$$

Esta distribución de planos es integrable, pues la identidad de Jacobi (4) se reconoce como la condición de integrabilidad de Frobenius [15],

$$d\alpha_\psi \wedge \alpha_\psi = 0,$$

donde $\alpha_\psi = \psi_1 dx_1 + \psi_2 dx_2 + \psi_3 dx_3$ es la correspondiente 1-forma de Poisson. Las superficies integrales S de \mathcal{D} son simplemente las hojas simplécticas del corchete de Poisson degenerado (3). Cada sistema dinámico en \mathbb{R}^3 el cual es relativo al corchete (3), deja invariante la distribución de planos \mathcal{D} y su restricción a cada superficie simpléctica S da lugar a un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad. Por lo tanto, podemos pensar en un sistema dinámico en \mathbb{R}^3 como una “familia uno-paramétrica” de sistemas Hamiltonianos 1-dimensionales en espacios fase con diferente estructura topológica. En general, podemos tener algún tipo de bifurcación: El retrato fase de un sistema Hamiltoniano 1-dimensional varía dependiendo en la hoja donde se encuentre.

En este trabajo, en el contexto de la geometría de Poisson y dinámica Hamiltoniana en \mathbb{R}^3 , estamos interesados en los siguientes problemas.

- (I) *La Existencia de Funciones de Casimir Globales y Factores Integrantes.* Para un corchete de Poisson dado (3), asociado a un vector de Poisson ψ , una función de Casimir K se define por la condición $\psi \times \nabla K = 0$ y ésta da lugar a una integral primera común para todos los sistemas Hamiltonianos. Como el subconjunto regular N^{reg} es invariante con respecto a la dinámica Hamiltoniana, es natural buscar una función de Casimir no trivial K que esté bien definida en todo el dominio N^{reg} . La existencia de tal función de Casimir global no está garantizada. Como es conocido [11],[15],[33], los correspondientes contraejemplos son dados por algunos corchetes de Poisson lineales.

Un enfoque algebraico para encontrar funciones de Casimir cuando se tienen corchetes de Poisson homogéneos fué propuesto en [27],[28],[35]. En este trabajo reformulamos algunas condiciones para la existencia de funciones de Casimir global las cuales se basan en la noción de factores integrantes de Poisson [12],[15],[28]. Un factor integrante (global) del corchete Poisson (3), es una función $m \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, no nula, tal que la 1-forma de Poisson $\frac{1}{m}\alpha_\psi$ es cerrada en N^{reg} . Si tal m existe, entonces por la propiedad de invarianza conforme, la cuestión sobre la existencia de una función de Casimir global se reduce a la condición de la trivialidad de la clase de cohomología de de Rham de la 1-forma $\frac{1}{m}\alpha_\psi$ (por ejemplo, esta condición se satisface si el dominio N^{reg} es simplemente conexo). Por lo tanto, el siguiente punto es estudiar la existencia de un factor integrante global de Poisson m . Esta cuestión no es trivial y nos lleva al estudio de las clases características de la foliación simpléctica en N^{reg} . Mostramos que las correspondientes condiciones necesarias y suficientes para la existencia de m están relacionadas con el hecho de que la clase de cohomología de de Rham foliada [8],[11],[38] de una 1-forma η_ψ asociada al corchete de Poisson se anula. Estos resultados se ilustran mediante algunos ejemplos.

- (II) *Automorfismos Infinitesimales de Poisson y Sistemas Localmente Hamiltonianos.* Un campo vectorial en \mathbb{R}^3 se dice ser un automorfismo infinitesimal de Poisson si su flujo preserva el corchete de Poisson. El espacio de tales campos vectoriales forman un álgebra de Lie, la cual contiene el álgebra de campos vectoriales Hamiltonianos. El espacio cociente formado por los automorfismos infinitesimales de Poisson y los campos vectoriales Hamiltonianos genera la primera cohomología de Poisson [11],[38], siendo ésta una característica importante del corchete de Poisson. Aún en el caso 3 dimensional, el cálculo de la cohomología de Poisson no es un problema estudiado a fondo [11],[38]. Utilizando las ventajas del cálculo vectorial en \mathbb{R}^3 , derivamos algunas propiedades especiales del álgebra de Lie de automorfismos infinitesimales de Poisson del corchete de Poisson (3) y su subálgebra de campos localmente Hamiltonianos, la cual juega un papel importante en el contexto del problema de Hamiltonización.

- (III) *El Problema de Hamiltonización Global.* Empezando con un sistema 3-dimensional

$$\dot{x} = V(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (6)$$

asociado a un campo vectorial V cuyo conjunto regular $\text{Reg}(V)$ es denso en \mathbb{R}^3 , buscamos una estructura Hamiltoniana, esto es, un par (ψ, F) que consiste de un vector de Poisson ψ y una función suave F definidos, al menos, en un subconjunto abierto denso N en el conjunto regular $\text{Reg}(V)$, y tal que V es Hamiltoniano relativo al corchete de Poisson correspondiente $\{\cdot, \cdot\}_\psi$ y a la función F ,

$$V = V_F = \psi \times \nabla F.$$

Es claro que en este caso, el Hamiltoniano F es una integral primera de V y la distribución característica de planos \mathcal{D}^ψ es invariante bajo el flujo de V . Localmente, por el teorema de rectificación, en un entorno de cada punto regular en $\text{Reg}(V)$, siempre existe una estructura Hamiltoniana (en ocasiones este hecho se conoce como el teorema de Lie-Koenigs). Pero, la formulación de un criterio universal para la existencia de una estructura Hamiltoniana global es una tarea complicada. Para algunas clases particulares de sistemas dinámicos en \mathbb{R}^3 (la mayoría cuadráticas), este problema ha sido estudiado en varios artículos (por ejemplo, [1],[3],[6],[13],[14],[15],[16],[17],[21]). Una estrategia general es estudiar el problema de Hamiltonización en dos pasos (independientes): Primero, buscamos una integral primera y después, una foliación orientable invariante. Formulamos la siguiente versión del criterio de Hojman [3],[15],[21]: Si el sistema (6) admite una integral primera no trivial F y una distribución invariante de planos \mathcal{D} que son compatibles en el sentido de que $dF \neq 0$ sobre \mathcal{D} , entonces V admite una estructura Hamiltoniana global (ψ, F) . Si, además, el corchete de Poisson definido por el vector de Poisson ψ admite una función de Casimir global K , entonces el sistema (6) es integrable, es decir, tiene dos integrales primeras F y K .

- (IV) *La Clasificación de Corchetes de Poisson Afines.* La clasificación de corchetes de Poisson lineales en \mathbb{R}^3 se deriva, usualmente, de la clasificación de Bianchi de álgebras de Lie 3–dimensionales [9],[33],[34]. En este trabajo, presentamos una clasificación de corchetes de Poisson afines 3–dimensionales y estudiamos la geometría de la foliación simpléctica correspondiente, además de la existencia de funciones globales de Casimir. En particular, obtenemos el siguiente resultado: cada corchete de Poisson afín en \mathbb{R}^3 admite un factor integrante global.

El texto está organizado como se describe a continuación. En el Capítulo 1, se introduce el concepto general del corchete de Poisson y sistemas Hamiltonianos en espacios fase de dimensión arbitraria e introducimos nociones principales, además de formular hechos básicos. Después, en el Capítulo 2, estudiamos la geometría de Poisson y sistemas Hamiltonianos en \mathbb{R}^3 . En la Sección 2.1, analizamos a detalle la ecuación de integrabilidad (4) y formulamos criterios necesarios y suficientes para la existencia de factores integrantes de Poisson, globales (Teorema (2.6)). Estos resultados son aplicados en el caso importante de corchetes de Poisson homogéneos en \mathbb{R}^3 . En la Sección 2.2, discutimos una relación entre el Teorema de Frobenius y foliaciones simplécticas de corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 . Concretamente, en esta sección se introducen nociones importantes, precisamente, la de primera y segunda

clase característica de foliaciones simplécticas como foliaciones de clases de cohomología de de Rham. Mostramos que la existencia de un factor integrante global es equivalente a que la primera clase característica de la 1-forma η_ψ se anule (Teorema (2.18)). La segunda clase característica se define como la clase de cohomología foliada de de Rham de la 2-forma Ω_ψ en N^{reg} la cual induce la forma simpléctica en cada hoja. La restricción de Ω_ψ a cada superficie simpléctica S coincide con la forma de área σ_S multiplicada por el factor $\frac{1}{\|\psi\|}$ (Teorema (2.20)). En las Secciones 2.3 y 2.4, describimos las funciones de Poisson y algunas propiedades del álgebra de Lie $\text{Poiss}(\mathbb{R}^3; \psi)$ de automorfismos infinitesimales de Poisson del corchete de Poisson (3) (Teorema (2.29)). Más aún, formulamos algunos criterios importantes para campos localmente Hamiltonianos relativos al corchete de Poisson (3) (Teorema (2.32) y Proposición (2.33)). En la Sección 2.5 abordamos el problema de Hamiltonización para sistemas dinámicos en \mathbb{R}^3 . Aquí, el criterio principal se basa en la noción de campos vectoriales compatibles, el cual nos permite construir estructuras Hamiltonianas mediante foliaciones orientables invariantes (Teorema (2.36)). Combinando este criterio con resultados sobre la existencia de factores integrantes globales, derivamos algunas condiciones que establecen la integrabilidad de un sistema dinámico dado (Teorema (2.39)). Estos resultados se ilustran con algunos ejemplos de sistemas homogéneos. En el Capítulo 3 estudiamos la geometría y la dinámica Hamiltoniana en espacios de Poisson afines. En la Sección 3.1 describimos algunas propiedades del conjunto de todos los corchetes de Poisson afines en \mathbb{R}^3 . En la Sección 3.2 formulamos resultados sobre la clasificación de corchetes de Poisson afines (Teorema (3.4)). En la sección 3.3, presentamos un estudio detallado sobre la existencia de funciones de Casimir para corchetes de Poisson afines (Teorema (3.10)). Finalmente, en la sección 3.4, se presentan resultados sobre sistemas localmente Hamiltonianos relativos a corchetes de Poisson afines (Proposición (3.11) y Teorema (3.13)).

Capítulo 1

Concepto General del Formalismo Hamiltoniano

1.1 Definiciones algebraica y geométrica de corchetes de Poisson en \mathbb{R}^n .

Empezamos dando una definición meramente algebraica de la noción de corchete de Poisson, para ello, consideremos el espacio $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, \dots, x_m)\}$ y el espacio vectorial de funciones diferenciables en \mathbb{R}^m con valores en \mathbb{R} , $C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Luego tenemos la siguiente

Definición 1.1 Sean $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. El corchete de Poisson es una función \mathbb{R} -bilineal

$$\begin{aligned} \{, \} &: C^\infty(\mathbb{R}^m) \times C^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m) \\ f, g &\mapsto \{f, g\}, \end{aligned}$$

tal que

1. Es antisimétrica, $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
2. Satisface la identidad de Jacobi

$$\mathfrak{S}_{(f,g,h)} \{f, \{g, h\}\} = 0,$$

es decir, $(C^\infty(\mathbb{R}^m), \{, \})$ es un álgebra de Lie. Aquí el símbolo \mathfrak{S} denota la suma cíclica.

3. Satisface la regla de Leibniz

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\}.$$

El par $(\mathbb{R}^m, \{, \})$ se conoce como variedad de Poisson, y a $(C^\infty(\mathbb{R}^m), \{, \})$ junto con la propiedad 3 se le conoce como álgebra de Poisson.

A continuación procedemos a establecer una correspondencia entre campos vectoriales y funciones diferenciables mediante el uso de el corchete de Poisson. Para ello tenemos la siguiente

Proposición 1.1 Para cada función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ existe un único campo vectorial $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^m) \ni V = V_f$ tal que

$$L_{V_f}(g) = \{f, g\}, \quad (1.1)$$

para toda $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Demostración. De la regla de Leibniz tenemos que $D(\cdot) = \{f, \cdot\}$, $D : C^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m)$ es una derivación. Luego, existe un campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ tal que

$$D = L_V = \sum_{i=1}^m v_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $v_i(x) = D(x_i)$. ■

Estos campos vectoriales son de gran importancia y se conocen con cierto nombre, lo cual enunciamos como sigue en forma de

Definición 1.2 El campo vectorial V_f definido por (1.1) se llama campo vectorial Hamiltoniano de la función f .

Notemos que la aplicación

$$C^\infty(\mathbb{R}^m) \ni f \mapsto V_f \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m),$$

es lineal, esto es,

$$V_{c_1 f_1 + c_2 f_2} = c_1 V_{f_1} + c_2 V_{f_2},$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Esto es consecuencia de la linealidad del corchete de Poisson. De aquí tenemos entonces que el conjunto

$$\text{Ham}(\mathbb{R}^m, \{, \}) \stackrel{\text{def}}{=} \{V_f \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)\},$$

tiene estructura de espacio vectorial. Aún más, este conjunto tiene estructura de álgebra de Lie. Para justificar esta afirmación, nos basamos en el siguiente resultado

Proposición 1.2 Sean $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Entonces

$$[V_{f_1}, V_{f_2}] = V_{\{f_1, f_2\}}.$$

Demostración. Para probar este resultado procedemos como sigue. Primero, por propiedades de la derivada de Lie, se tiene

$$\begin{aligned} L_{[V_{f_1}, V_{f_2}]}(g) &= [L_{V_{f_1}}, L_{V_{f_2}}](g) = L_{V_{f_1}}(L_{V_{f_2}}(g)) - L_{V_{f_2}}(L_{V_{f_1}}(g)) = \\ &= \{f_1, \{f_2, g\}\} - \{f_2, \{f_1, g\}\}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$L_{V_{\{f_1, f_2\}}}g = \{\{f_1, f_2\}, g\},$$

y por la identidad de Jacobi, el resultado es válido. \blacksquare

De aquí tenemos que, en efecto, el conjunto $\text{Ham}(\mathbb{R}^m)$ tiene estructura de álgebra de Lie.

Tensor de Poisson.

Continuamos con otro concepto cuyo papel es fundamental para nuestros propósitos. Consideremos de nuevo el espacio \mathbb{R}^m . Para un corchete de Poisson dado $\{, \}$, definimos un 2-tensor Π por medio de la siguiente regla

$$\Pi_{ij} = \{x_i, x_j\} = -\{x_j, x_i\}, \quad (1.2)$$

es decir, Π es antisimétrico,

$$\Pi^T(x) = -\Pi(x). \quad (1.3)$$

Lema 1.3 *La identidad de Jacobi para el corchete de Poisson $\{, \}$ es equivalente a la siguiente ecuación para Π :*

$$\sum_{s=1}^m \mathfrak{S}_{(i,j,k)} \Pi_{is}(x) \frac{\partial}{\partial x_s} \Pi_{jk}(x) = 0, \quad (1.4)$$

donde $i, j, k = 1, 2, \dots, m$.

Demostración. Para justificar esta afirmación procedemos como sigue. Consideremos las funciones coordenadas x_i, x_j, x_k , luego

$$\{x_i, \{x_j, x_k\}\} = \{x_i, \Pi_{jk}(x)\} = L_{v_{x_i}}(\Pi_{jk}).$$

Por otra parte, sabemos también que

$$L_{v_{x_i}} = \sum_{s=1}^m \Pi_{is} \frac{\partial}{\partial x_s},$$

de esta manera

$$\{x_i, \{x_j, x_k\}\} = \sum \Pi_{is} \frac{\partial}{\partial x_s} \Pi_{jk},$$

por lo que concluimos

$$\mathfrak{S}_{(i,j,k)} \{x_i, \{x_j, x_k\}\} = 0. \quad \blacksquare$$

Un 2-tensor antisimétrico $\Pi(x)$ en \mathbb{R}^m que satisface (1.4) se llama tensor de Poisson.

El rango del corchete $\{, \}$ en el punto x se define como el rango del tensor Π en tal punto x , denotado $\text{rank } \Pi(x)$. Sea U_x una vecindad de x . Luego, x es un punto regular si $\text{rank } \Pi(y) = \text{const}$, para toda $y \in U_x$; por otro lado, x es un punto singular si $\text{rank } \Pi \neq \text{const}$ en cada vecindad de x , esto es, existe $y \in U_x$ tal que

$$\text{rank } \Pi(x) \neq \text{rank } \Pi(y).$$

Además, el corchete $\{, \}$ se llama regular si cada punto $x \in U_x$ es regular, y se llama singular si existe un punto $x \in U_x$ tal que x es singular.

A continuación presentamos un resultado muy útil cuando se realizan cálculos, el cual relaciona campos Hamiltonianos, corchetes de Poisson y el tensor de Poisson.

Lema 1.4 *Para cualesquiera $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ se tiene*

$$V_f = - \sum_{i,j=1}^m \Pi_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} e_i = -\Pi(x) \nabla f(x),$$

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^m \Pi_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \langle \nabla f, \Pi(x) \nabla g \rangle.$$

Demostración. Consideremos $f = x_i$, luego

$$V_{x_i} = \sum v_j(x) e_j,$$

donde

$$v_j(x) = L_{v_{x_i}}(x_j) = \{x_i, x_j\} = \Pi_{ij}(x).$$

Ahora, sea f una función arbitraria. Así

$$V_f = \sum v_i(x) e_i,$$

donde

$$\begin{aligned} v_i(x) &= L_{V_f}(x_i) = \{f, x_i\} = -\{x_i, f\} = -L_{v_{x_i}}(f) \\ &= - \sum_{i,j=1}^m \Pi_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Para la segunda parte, calculamos la derivada de Lie de la función g a lo largo del campo V_f . De esta manera

$$\begin{aligned} L_{V_f}(g) &= \langle -\Pi(x) \nabla f, \nabla g \rangle \\ &= \langle \nabla f, -\Pi^T(x) \nabla g \rangle \\ &= \langle \nabla f, \Pi(x) \nabla g \rangle, \end{aligned}$$

de donde concluimos $\{f, g\} = \langle \nabla f, \Pi(x) \nabla g \rangle$. ■

Ejemplo 1.1 *Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2)\}$. Para funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ su corchete de Poisson está dado por*

$$\{f, g\} = m(x) \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right),$$

donde $m \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ es una función arbitraria. Como sabemos, el tensor de Poisson es antisimétrico, de esta manera

$$\Pi(x) = m(x) J,$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Continuamos ahora con otro concepto asociado al corchete de Poisson. Para ello, consideremos la variedad de Poisson $(\mathbb{R}^m, \{, \})$ y sean $x \in \mathbb{R}^m$ y $N \subseteq \mathbb{R}^m$. Luego, tenemos la siguiente

Definición 1.3 *La distribución característica de $N \ni x \mapsto \mathcal{D}_x \in \mathbb{R}^m$ de $\{, \}$ es una distribución suave definida por*

$$\mathcal{P}_x := \text{Im}(\Pi(x)).$$

Notemos que $\mathcal{P}_x = \text{Span}\{X_F(x) \mid F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)\}$. Además, es claro que

$$\dim \mathcal{P}_x = \text{rank} \Pi(x).$$

Decimos que \mathcal{P}_x es regular si cada $x \in N$ es regular, es decir, $\dim \mathcal{P}_x = \text{rank} \Pi(x) = \text{const}$ en N . En caso contrario, decimos que \mathcal{P}_x es singular.

Procedemos a introducir otro concepto importante para nuestros propósitos.

Una función $K \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ se llama función de Casimir si

$$\{K, F\} = 0,$$

para toda $F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Observemos que esta definición es equivalente a decir que el campo Hamiltoniano asociado a la función K es $V_K = 0$ pues $\{K, F\} = L_{V_K}(F)$. Aún más, también es equivalente a decir que $\nabla K \in \text{Ker} \Pi(x)$, pues $V_K = -\Pi(x) \nabla K(x)$.

Procedemos ahora a estudiar otra clase de campos vectoriales, la cual juega un papel fundamental en el estudio de sistemas dinámicos.

Definición 1.4 *Sea $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ y ϕ^t su flujo. Decimos que Z es un campo vectorial de Poisson (o automorfismo de Poisson infinitesimal) si su flujo preserva el corchete de Poisson, es decir,*

$$\{F \circ \phi^t, G \circ \phi^t\} = \{F, G\} \circ \phi^t, \quad (1.5)$$

para cualesquiera $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ y para todo $t \in \mathbb{R}$.

En la práctica, no siempre resulta útil utilizar esta definición para verificar si un campo es de Poisson, pues en muchas ocasiones el cálculo del flujo de un campo vectorial no es una tarea sencilla. Por esta razón, es más fácil trabajar con una caracterización de estos campos, la cual relaciona los conceptos de corchete de Poisson y derivada de Lie, y que presentamos a continuación.

Lema 1.5 *Un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ es un automorfismo infinitesimal de Poisson si y sólo si*

$$\{L_Z(F), G\} + \{F, L_Z(G)\} - L_Z(\{F, G\}) = 0. \quad (1.6)$$

Demostración. Recordemos que si $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ y ϕ^t es su flujo se tiene que

$$\frac{d}{dt}(F \circ \phi^t) = (L_Z F) \circ \phi^t,$$

para toda $F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Ahora para verificar este resultado simplemente calculamos la derivada en $t = 0$ en ambos lados de la ecuación (1.5). Por un lado

$$\frac{d}{dt}(\{F \circ \phi^t, G \circ \phi^t\})|_{t=0} = (\{(L_Z) \circ \phi^t, G \circ \phi^t\} + \{F \circ \phi^t, L_Z(G \circ \phi^t)\})|_{t=0},$$

de donde concluimos

$$\frac{d}{dt}(\{F \circ \phi^t, G \circ \phi^t\})|_{t=0} = \{L_Z(F), G\} + \{F, L_Z(G)\}.$$

Por otro lado

$$\frac{d}{dt}(\{F, G\} \circ \phi^t)|_{t=0} = ((L_Z(\{F, G\})) \circ \phi^t)|_{t=0},$$

así

$$\frac{d}{dt}(\{F, G\} \circ \phi^t)|_{t=0} = (L_Z(\{F, G\})).$$

Por lo tanto

$$\{L_Z(F), G\} + \{F, L_Z(G)\} - L_Z(\{F, G\}) = 0,$$

■

En ocasiones es conveniente tener fórmulas en coordenadas para poder realizar cálculos de una manera más práctica. A continuación presentamos una fórmula equivalente al resultado anterior.

Lema 1.6 *La ecuación (1.6) es equivalente a*

$$\sum_s (\Pi_{js} \frac{\partial Z_i}{\partial x_s} - \Pi_{is} \frac{\partial Z_j}{\partial x_s} - Z_s \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_s}) = 0, \quad (1.7)$$

donde Π es el tensor de Poisson.

Demostración. Sean

$$Z = \sum_{s=1}^n Z_s(x) \frac{\partial}{\partial x_s}, \quad F = x_i, \quad G = x_j.$$

Luego, tenemos que

$$L_{\sum_{s=1}^n Z_s \frac{\partial}{\partial x_s}} x_i = Z_i,$$

y

$$L_{\sum_{s=1}^n Z_s \frac{\partial}{\partial x_s}} x_j = Z_j.$$

Además, puesto que

$$\{x_i, x_j\} = (\Pi_{ij}(x)), \quad \{f, g\} = \langle \nabla f, \Pi \nabla g \rangle,$$

se tiene

$$\begin{aligned}\{Z_i, x_j\} &= \langle \nabla Z_i, \Pi \nabla x_j \rangle = \langle \nabla Z_i, \Pi e_j \rangle \\ &= \langle -\Pi \nabla Z_i, e_j \rangle = \sum_s \Pi_{js} \frac{\partial Z_i}{\partial x_s}.\end{aligned}$$

Finalmente, al sustituir tanto Z, F y G en la ecuación (1.6) obtenemos (1.7) \blacksquare

Consideremos el conjunto de todos los campos vectoriales de Poisson, esto es,

$$\text{Poiss}(\mathbb{R}^m) = \{Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m) \mid Z \text{ es de Poisson}\}.$$

Este conjunto tiene propiedades interesantes y guarda una relación especial con el conjunto de todos los campos Hamiltonianos, es decir, el conjunto $\text{Ham}(\mathbb{R}^m)$, como se establece en el resultado siguiente

Proposición 1.7 *El par $(\text{Poiss}(\mathbb{R}^m), [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie. Además, se cumplen las siguientes propiedades*

1. $\text{Ham}(\mathbb{R}^m) \subseteq \text{Poiss}(\mathbb{R}^m)$ y
2. $[Z, X_F] = X_{L_Z F}$ para todo $Z \in \text{Poiss}(\mathbb{R}^m)$ y $F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$,

esto es, el conjunto $\text{Ham}(\mathbb{R}^m)$ es un ideal del conjunto $\text{Poiss}(\mathbb{R}^m)$.

Demostración. Para verificar que el conjunto $\text{Poiss}(\mathbb{R}^m)$ tiene estructura de álgebra de Lie, sólo basta con checar si el corchete de dos campos de Poisson, es de nuevo un campo de Poisson. En efecto, sean $Z_1, Z_2 \in \text{Poiss}(\mathbb{R}^m)$, por demostrar que $[Z_1, Z_2] \in \text{Poiss}(\mathbb{R}^m)$, es decir, el campo $[Z_1, Z_2]$ satisface

$$\{L_{[Z_1, Z_2]}(F), G\} + \{F, L_{[Z_1, Z_2]}(G)\} = L_{[Z_1, Z_2]}(\{F, G\}).$$

Procedemos a calcular el lado derecho de la expresión anterior. Dado que $Z_1, Z_2 \in \text{Poiss}(\mathbb{R}^m)$ tenemos

$$\begin{aligned}L_{[Z_1, Z_2]}(\{F, G\}) &= [L_{Z_1}, L_{Z_2}](\{F, G\}) \\ &= L_{Z_1}(L_{Z_2}(\{F, G\})) - L_{Z_2}(L_{Z_1}(\{F, G\})) \\ &= \{L_{Z_1}(L_{Z_2}F), G\} + \{L_{Z_2}F, L_{Z_1}G\} + \{L_{Z_1}F, L_{Z_2}G\} + \{F, L_{Z_1}L_{Z_2}G\} \\ &\quad - \{L_{Z_2}L_{Z_1}F, G\} - \{L_{Z_1}F, L_{Z_2}G\} - \{L_{Z_2}F, L_{Z_1}G\} - \{F, L_{Z_2}L_{Z_1}G\} \\ &= \{[L_{Z_1}, L_{Z_2}]F, G\} + \{F, [L_{Z_1}, L_{Z_2}]G\} \\ &= \{L_{[Z_1, Z_2]}F, G\} + \{F, L_{[Z_1, Z_2]}G\}.\end{aligned}$$

De esto se concluye que

$$L_{[Z_1, Z_2]}(\{F, G\}) = \{L_{[Z_1, Z_2]}(F), G\} + \{F, L_{[Z_1, Z_2]}(G)\},$$

es decir, $[Z_1, Z_2] \in \text{Poiss}(\mathbb{R}^m)$. Procedemos ahora a verificar la segunda parte de este resultado. Para ello, sea $Z = X_H \in \text{Ham}(\mathbb{R}^m)$, para alguna $H \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Por demostrar que X_H satisface (1.6). Primero, notemos que

$$\{L_{X_H}F, G\} = \{\{H, F\}, G\},$$

luego

$$\{F, L_{X_H}G\} = \{F, \{H, G\}\},$$

y además,

$$L_{X_H}(\{F, G\}) = \{H, \{F, G\}\}.$$

Ahora, utilizando la propiedad de antisimetría del corchete de Poisson, obtenemos $\{L_{X_H}F, G\} + \{F, L_{X_H}G\} - L_{X_H}(\{F, G\}) = \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{F, G\}, H\}$, para finalmente concluir, por la identidad de Jacobi, que

$$\{L_{X_H}F, G\} + \{F, L_{X_H}G\} - L_{X_H}(\{F, G\}) = 0,$$

como queríamos. Procedemos a probar la última parte. Por demostrar que $[Z, X_F] = X_{L_ZF}$. Esto es equivalente a

$$L_{[Z, X_F]} = L_{X_{L_ZF}}.$$

Por un lado, si $G \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tenemos

$$\begin{aligned} L_{[Z, X_F]}G &= [L_Z, X_F]G = L_Z(X_FG) - X_F(L_ZG) = \\ &= L_Z(\{F, G\}) - \{F, L_ZG\}, \end{aligned}$$

además

$$L_{X_{L_ZF}}G = \{L_ZF, G\}.$$

Finalmente, como $Z \in \text{Poiss}(\mathbb{R}^m)$, se cumple

$$\{L_ZF, G\} = L_Z(\{F, G\}) - \{F, L_ZG\},$$

y, por lo tanto,

$$[Z, X_F] = X_{L_ZF}. \quad \blacksquare$$

Sistemas Hamiltonianos.

Procedemos ahora a estudiar un tipo especial de sistemas, llamados sistemas Hamiltonianos. Dichos sistemas aparecen en el contexto de la física matemática, ya que modelan algunos fenómenos que surgen en la naturaleza.

Sea $(\mathbb{R}^m, \{, \})$. Un sistema Hamiltoniano es un sistema de la forma

$$\dot{x} = V_H(x), x \in \mathbb{R}^m, \quad (1.8)$$

donde

$$\begin{aligned} V_H(x) &= \sum_{i=1}^m v_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ v_i(x) &= \{H, x_i\}, \end{aligned}$$

es un campo Hamiltoniano con respecto al corchete de Poisson $\{, \}$ y una función $H \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

De la misma definición, notemos que estos sistemas también se pueden representar como

$$\dot{x}_i = \{H, x_i\},$$

donde $i = 1, 2, \dots, m$. Aún más, podemos también hacer uso del tensor de Poisson para obtener otra forma equivalente de estos sistemas:

$$\dot{x} = -\Pi(x)\nabla H.$$

Consideremos el sistema Hamiltoniano (1.8). A continuación presentamos algunas propiedades interesantes de este tipo de sistemas. Para ello tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.8 1. Sea $F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. La función F es una integral primera de (1.8) si y sólo si

$$\{H, F\} = 0.$$

Además, el Hamiltoniano H es siempre una integral primera (ley de conservación).

2. El par $(\mathcal{A}_H(\mathbb{R}^m), \{, \})$ donde

$$\mathcal{A}_H(\mathbb{R}^m) = \{F \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \mid \{H, F\} = 0\},$$

esto es, el conjunto de todas las integrales primeras de V_H , tiene estructura de álgebra de Lie. Este conjunto se conoce como álgebra de simetrías del campo vectorial V_H .

Demostración. Para verificar la primera parte, recordemos que una función $F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ es integral primera del campo vectorial V_H si su derivada de Lie a lo largo de este campo se anula, esto es,

$$L_{V_H}F = 0.$$

Dado que

$$L_{V_H}F = \{H, F\},$$

se tiene que

$$\{H, F\} = 0,$$

como queríamos. Ahora, como el corchete de Poisson es antisimétrico, tenemos que

$$\{H, H\} = 0,$$

esto es, la función H es integral primera del campo vectorial V_H .

Procedemos ahora con la segunda parte de la demostración. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{A}_H(\mathbb{R}^m)$. Vamos a probar que $\{F_1, F_2\} \in \mathcal{A}_H(\mathbb{R}^m)$. De la identidad de Jacobi, se tiene

$$\{H, \{F_1, F_2\}\} = -\{F_1, \{F_2, H\}\} - \{F_2, \{H, F_1\}\} = 0,$$

luego $\{F_1, F_2\} \in \mathcal{A}_H(\mathbb{R}^m)$. ■

Sean $N \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $\{, \}$ corchete de Poisson en \mathbb{R}^m . Luego

Proposición 1.9 *Si el corchete de Poisson es no-degenerado en N , esto es*

$$\det \Pi(x) \neq 0,$$

para toda $x \in N$, entonces $m = 2n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ y existe una 2-forma ω en N que satisface las siguientes

1. ω es no-degenerada en N .
2. ω es cerrada, $d\omega = 0$ en N .
3. $\omega(V_{F_1}, V_{F_2}) = \{F_1, F_2\}$ para cualesquiera $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Demostración. Por hipótesis, el tensor de Poisson es no-degenerado; además es antisimétrico, tenemos que

$$\det \Pi = \det \Pi^T = (-1)^m \det \Pi.$$

De esta manera,

$$\det \Pi = (-1)^m \det \Pi,$$

y esta igualdad sólo es válida cuando $m = 2n$ para algún entero $n \in \mathbb{Z}$. Definimos ω por

$$\omega(V_{F_1}, V_{F_2}) = \{F_1, F_2\},$$

para cualesquiera $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Ahora, sean $f, g, h \in C^\infty(N)$, así,

$$\begin{aligned} (d\omega)(V_f, V_g, V_h) &= \mathfrak{S}_{(f,g,h)} (L_{V_f} \omega(V_g, V_h) - \omega([V_f, V_g], V_h)) \\ &= \mathfrak{S}_{(f,g,h)} (\{f, \{g, h\}\}) - \mathfrak{S}_{(f,g,h)} (\{\{f, g\}, h\}) = 0, \end{aligned}$$

de donde concluimos

$$d\omega = 0,$$

esto es, ω es cerrada.

Recordemos que k -forma α es no-degenerada si la igualdad

$$i_v \alpha = 0$$

implica que $v = 0$.

Por otro lado,

$$(i_v \alpha)(u_1, \dots, u_{k-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(v, u_1, \dots, u_{k-1}),$$

de esta manera

$$(i_{V_{F_1}} \omega)(V_{F_2}) = \omega(V_{F_1}, V_{F_2}) = \{F_1, F_2\}.$$

Por lo tanto,

$$i_{V_f} \omega = 0$$

en N si y sólo si $\{f, g\} = 0$ para toda g , esto es $V_f = 0$. Pero

$$0 = V_f = -\Pi(x) \nabla f,$$

y como Π es no-degenerado concluimos que f es constante. De esta manera ω es no degenerada. ■

Si una forma diferencial ω satisface

1. ω es no-degenerada en N .
2. ω es cerrada, $d\omega = 0$ en N .

se llama forma simpléctica.

Consideremos el espacio \mathbb{R}^{2n} . Sea $\Pi(x) = (\Pi_{ij}(x))$ no degenerado, esto es

$$\det \Pi(x) \neq 0.$$

Luego, sea

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \omega_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j,$$

y definimos

$$\Omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_{ij}(x)).$$

Notemos que la matriz Ω es antisimétrica, esto es

$$\Omega(x) = -\Omega^T(x).$$

En el resultado siguiente presentamos una relación muy interesante entre la matriz Ω y el tensor de Poisson Π .

Lema 1.10 *La matriz $\Omega(x)$ satisface*

$$\Omega(x) = -\Pi^{-1}(x).$$

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ la base usual de \mathbb{R}^{2n} . Observemos que $i_{e_i} dx_j = \delta_{ij}$. De esta manera, $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$, y además $V_{x_i} = \sum_{s=1}^{2n} \Pi_{is}(x) e_s$, con $i = 1, 2, \dots, 2n$. Así

$$\begin{aligned} \omega(V_{x_i}, V_{x_j}) &= \sum_{s,k=1}^{2n} \Pi_{is} \omega(e_s, e_k) \Pi_{jk} \\ &= - \sum_{s,k=1}^{2n} \Pi_{is} \omega(e_s, e_k) \Pi_{kj} \\ &= - \sum_{s,k=1}^{2n} \Pi_{is} \omega_{s,k} \Pi_{kj}. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\Pi_{ij}(x) = \omega(V_{x_i}, V_{x_j})$, por lo que $\Pi = -\Pi\Omega\Pi$, o equivalentemente, $I = -\Omega\Pi$. Finalmente, $\Omega = -\Pi^{-1}$. ■

En el caso cuando $\Pi(x) = \text{const}$, tenemos

$$\sum_s \mathfrak{S}_{(i,j,k)} \Pi_{is} \frac{\partial}{\partial x_s} \Pi_{jk} = 0.$$

Así, Π define un corchete de Poisson.

Capítulo 2

Geometría de Poisson y Sistemas Hamiltonianos en \mathbb{R}^3

2.1 Vectores de Poisson y la ecuación de integrabilidad.

Aquí presentamos propiedades generales de los corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 . Durante la sección utilizaremos los isomorfismos

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(U) \ni w &\mapsto \alpha_w \in \Lambda^1(U), \\ \mathfrak{X}(U) \ni w &\mapsto \Omega_w \in \Lambda^2(U),\end{aligned}$$

y algunas identidades del cálculo vectorial introducidas en el apéndice.

Consideremos el espacio $(\mathbb{R}^3, \{, \})$ donde $\{, \}$ es el corchete de Poisson, esto es, para funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\{f, g\} = \langle \nabla f, \Pi(x) \nabla g \rangle.$$

Aquí, $\Pi(x)$ es el tensor de Poisson, es decir, $\Pi(x)$ es antisimétrico,

$$\Pi(x) = -\Pi^T(x).$$

Recordemos que, una matriz antisimétrica A , $A = -A^T$, se puede escribir como

$$A = \Lambda \circ \psi,$$

donde $\Lambda \circ \psi$ es la matriz de producto cruz en \mathbb{R}^3 , esto es, si $a \in \mathbb{R}^3$

$$(\Lambda \circ \psi)a = \psi \times a.$$

Si tenemos en cuenta estas consideraciones, entonces tenemos que el tensor de Poisson $\Pi(x)$ en \mathbb{R}^3 se puede expresar como

$$\Pi(x) = -\Lambda \circ \psi(x),$$

donde $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x))$ es una función vectorial suave en \mathbb{R}^3 . Luego tenemos el siguiente resultado

Proposición 2.1 *La identidad de Jacobi para el tensor de Poisson $\Pi(x)$ es equivalente a la ecuación para ψ*

$$\langle \psi(x), \text{rot}\psi(x) \rangle = 0, \tag{2.1}$$

o, de manera más precisa,

$$\psi_1\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\right) + \psi_2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right) + \psi_3\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right) = 0 \quad (2.2)$$

Demostración. Sean $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Notemos que

$$\{f, g\} = -\langle \nabla f, \psi \times \nabla g \rangle = -\langle \nabla f \times \psi, \nabla g \rangle = \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle,$$

de esta manera

$$\{f, g\} = \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle.$$

Ahora, sea $x = (x_1, x_2, x_3)$; así,

$$\{x_1, x_2\} = \langle \psi, e_1 \times e_2 \rangle = \langle \psi, e_3 \rangle = \psi_3(x).$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \{x_2, x_3\} &= \psi_1(x), \\ \{x_3, x_1\} &= \psi_2(x). \end{aligned}$$

Luego, por la identidad de Jacobi, tenemos

$$\begin{aligned} \{x_2, \{x_3, x_1\}\} &= \{x_2, \psi_2(x)\} \\ &= \{x_2, x_1\} \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + \{x_2, x_3\} \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} \\ &= -\psi_3 \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + \psi_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

De manera similar, obtenemos

$$\{x_3, \{x_1, x_2\}\} = \{x_3, \psi_3(x)\} = \psi_2 \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} - \psi_1 \frac{\partial\psi_3}{\partial x_2},$$

y

$$\{x_1, \{x_2, x_3\}\} = \{x_1, \psi_1(x)\} = \psi_3 \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \psi_2 \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}.$$

Por lo tanto

$$\{x_2, \{x_3, x_1\}\} + \{x_3, \{x_1, x_2\}\} + \{x_1, \{x_2, x_3\}\} = 0$$

si y sólo si

$$-\psi_3 \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + \psi_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} + \psi_2 \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} - \psi_1 \frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} + \psi_3 \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \psi_2 \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} = 0,$$

es decir, si la ecuación (2.2) se satisface. \blacksquare

A continuación presentamos una consecuencia inmediata a este resultado

Corolario 2.2 *La identidad de Jacobi para el tensor de Poisson Π es equivalente a la ecuación*

$$d\alpha_\psi \wedge \alpha_\psi = 0, \quad (2.3)$$

donde

$$\alpha_\psi = \psi_1 dx_1 + \psi_2 dx_2 + \psi_3 dx_3,$$

es la 1-forma asociada al vector ψ

Demostración. Sea $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Luego, podemos asociar a este campo la 2-forma

$$\omega_{\mathbf{w}} = w_1 dx_2 \wedge dx_3 + w_2 dx_3 \wedge dx_1 + w_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

y la 1-forma

$$\alpha_{\mathbf{w}} = w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3.$$

Además

$$d\alpha_{\mathbf{w}} = \omega_{\text{rot}\mathbf{w}},$$

por lo que

$$\alpha_{\mathbf{w}} \wedge d\alpha_{\mathbf{w}} = \alpha_{\mathbf{w}} \wedge \omega_{\text{rot}\mathbf{w}} = \langle \mathbf{w}, \text{rot}\mathbf{w} \rangle dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0,$$

lo cual, es válido, si y sólo si

$$\langle \mathbf{w}, \text{rot}\mathbf{w} \rangle = 0.$$

A la ecuación (2.3) se le conoce como ecuación de integrabilidad. ■

Una función vectorial ψ (1-forma α_{ψ}) en \mathbb{R}^3 que satisface (2.1) (o (2.3)) se llama *vector de Poisson* (1-forma de Poisson) y define un corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 :

$$\{F, G\}_{\psi} = \langle \psi, \nabla F \times \nabla G \rangle, \quad (2.4)$$

ó, en coordenadas,

$$\{x_1, x_2\}_{\psi} = \psi_3(x), \quad \{x_2, x_3\}_{\psi} = \psi_1(x), \quad \{x_3, x_1\}_{\psi} = \psi_2(x). \quad (2.5)$$

El campo vectorial Hamiltoniano de $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ relativo a (2.5) se representa como

$$V_F = \psi \times \nabla F.$$

Las funciones de Casimir correspondientes quedan determinadas por la ecuación $\psi \times \nabla K = 0$ o equivalentemente

$$\alpha_{\psi} \wedge dK = 0. \quad (2.6)$$

La ecuación (2.1) (o (2.3)) representa la identidad de Jacobi para el corchete de Poisson $\{, \}_{\psi}$ y se llama *ecuación de integrabilidad*. (Una motivación para este nombre proviene del teorema de Frobenius, véase la sección siguiente). La siguiente observación hace posible una representación alternativa de la ecuación de integrabilidad.

Proposición 2.3 Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial suave y

$$N^{\text{reg}} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \psi(x) \neq 0\} \quad (2.7)$$

el conjunto de puntos regulares. La ecuación de integrabilidad para la 1-forma α_{ψ} en N^{reg}

$$d\alpha_{\psi} \wedge \alpha_{\psi} = 0 \quad (2.8)$$

es equivalente a la siguiente ecuación

$$d\alpha_\psi = \eta_\psi \wedge \alpha_\psi, \quad (2.9)$$

donde la 1-forma η_ψ en N^{reg} está dada por

$$\eta_\psi = \frac{1}{\|\psi\|^2} \langle \psi \times \text{rot}\psi, dx \rangle. \quad (2.10)$$

Demostración. La implicación (2.9) \Rightarrow (2.8) es evidente, $d\alpha_\psi \wedge \alpha_\psi = \eta_\psi \wedge \alpha_\psi \wedge \alpha_\psi = 0$. Para el recíproco, supongamos que α_ψ satisface (2.8). Consideremos la función vectorial

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\|\psi\|^2} \psi \times \text{rot}\psi,$$

luego, tenemos

$$\begin{aligned} \varphi \times \psi &= -\frac{1}{\|\psi\|^2} \psi \times (\psi \times \text{rot}\psi) \\ &= \text{rot}\psi - \frac{1}{\|\psi\|^2} \langle \psi, \text{rot}\psi \rangle \psi, \end{aligned}$$

de esta manera

$$\text{rot}\psi = \varphi \times \psi.$$

Utilizando esta propiedad, y el hecho de que $\eta_\psi = \alpha_\varphi$, obtenemos

$$\eta_\psi \wedge \alpha_\psi = \alpha_\varphi \wedge \alpha_\psi = \Omega_{\varphi \times \psi} = \Omega_{\text{rot}\psi} = d\alpha_\psi.$$

■

Corolario 2.4 *La diferencial de la 1-forma η_ψ satisface*

$$d\eta_\psi = -\text{div} \left(\frac{\psi}{\|\psi\|^2} \right) \eta_\psi \wedge \alpha_\psi - \zeta \wedge \alpha_\psi,$$

donde ζ es una 1-forma en N^{reg} .

En la siguiente proposición, destacamos algunas propiedades de simetría de la ecuación de integrabilidad.

Proposición 2.5 *Sea ψ un vector de Poisson. Entonces, para cualquier función suave $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ y cualquier operador lineal invertible $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, las siguientes funciones vectoriales*

$$\tilde{\psi} = g\psi, \quad (2.11)$$

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\det L} L^T \psi(Lx), \quad (2.12)$$

son también vectores de Poisson.

Demostración. Tenemos que verificar que $\tilde{\psi}$ satisface la ecuación de integrabilidad.

Primero

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\psi}, \text{rot} \tilde{\psi} \rangle &= \langle g\psi, \text{rot}(g\psi) \rangle = \langle g\psi, \nabla g \times \psi + g \text{rot} \psi \rangle \\ &= g \langle \psi, \nabla g \times \psi \rangle + g^2 \langle \psi, \text{rot} \psi \rangle = 0.\end{aligned}$$

Sea $\phi(x) = Lx$. Luego, recordemos que si L es una matriz invertible, se tiene la relación

$$L(\Lambda \circ a)L^T = \Lambda \circ ((\det L)L^{-T})a$$

con $a \in \mathbb{R}^3$. De esta manera

$$L\Pi(x)L^{-T} = (\det L)L^{-T}\psi(x),$$

esto es

$$\tilde{\psi}(Lx) = (\det L)L^{-T}\psi(x),$$

de donde concluimos (2.12). ■

La invarianza de la ecuación de integrabilidad con respecto a la transformación (2.11) es una característica especial de los corchetes de Poisson tres dimensionales la cual se llama *invarianza conforme*.

Es importante notar que una combinación lineal de dos vectores de Poisson no es un vector de Poisson en general, debido a la no linealidad de la ecuación de integrabilidad. Dos vectores se dicen ser *compatibles* si existe una función g tal que $\psi + g\tilde{\psi}$ es de nuevo un vector de Poisson. Es fácil verificar que la condición de compatibilidad es

$$g(\alpha_\psi \wedge d\alpha_{\tilde{\psi}} + \alpha_{\tilde{\psi}} \wedge d\alpha_\psi) = dg \wedge \alpha_\psi \wedge \alpha_{\tilde{\psi}}. \quad (2.13)$$

Factores Integrantes. Una clase importante de corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 está dada por los vectores de Poisson que satisfacen la condición

$$\text{rot} \psi = 0, \quad (2.14)$$

la cual significa que la correspondiente 1-forma α_ψ es cerrada,

$$d\alpha_\psi = 0. \quad (2.15)$$

Este último hecho es consecuencia de la identidad $d\alpha_\psi = \Omega_{\text{rot} \psi}$. Si la condición (2.15) se cumple en todo el espacio \mathbb{R}^3 , entonces $\alpha_\psi = dK$ para alguna primitiva, suave, $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Por otro lado, para K arbitraria, el gradiente $\psi = \nabla K$ es un vector de Poisson y el correspondiente corchete de Poisson

$$\{F, G\}_{\nabla K} = \langle \nabla K, \nabla F \times \nabla G \rangle$$

se conoce como *corchete de cuerpo rígido*. Resulta claro que K es una función de Casimir de este corchete. Un ejemplo clásico es el corchete de Poisson cíclico asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$

$$\{x_1, x_2\} = x_3, \quad \{x_2, x_3\} = x_1, \quad \{x_3, x_1\} = x_2, \quad (2.16)$$

el cual corresponde a $K = \frac{\|x\|^2}{2}$.

De manera más general, de las relaciones (2.13) y (2.15) concluimos que para dadas algunas funciones $K, \tilde{K} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, la fórmula

$$\psi = \nabla K + h(K, \tilde{K})\nabla\tilde{K}$$

define un corchete de Poisson para una función arbitraria suave $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

La siguiente observación importante se sigue de la proposición (2.5) y establece que para una función arbitraria $m \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, la función vectorial

$$\psi = m\nabla K \tag{2.17}$$

es un vector de Poisson. La 1-forma correspondiente es

$$\alpha_\psi = mdK, \tag{2.18}$$

la cual no necesariamente es cerrada. Localmente, en un entorno de un punto regular, cada solución ψ de la ecuación de integrabilidad (2.1) es de la forma (2.17). Geométricamente, esto es precisamente el teorema de Frobenius (Local)(Véase la siguiente sección).

De esta manera, es posible formular el siguiente criterio global.

Si para una función vectorial dada ψ , existe una función $m \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $m \neq 0$ y

$$d\left(\frac{1}{m}\alpha_\psi\right) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^3, \tag{2.19}$$

entonces ψ es un vector de Poisson de la forma (2.17) con $K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$K(x) = \int_0^1 \frac{1}{m(tx)} \langle x, \psi(tx) \rangle dt. \tag{2.20}$$

En términos vectoriales, la ecuación (2.19) es equivalente a

$$\text{rot}\left(\frac{1}{m}\psi\right) = 0, \tag{2.21}$$

o lo que es lo mismo

$$\nabla m \times \text{rot}\psi = 0,$$

la cual se puede tratar como una ecuación para m . De forma aún más general, si la condición (2.19) se satisface en un dominio abierto simplemente conexo $N \subset \mathbb{R}^3$, entonces una función de Casimir en N está dada por

$$K(x) = \int_{\gamma_x} \frac{1}{m}\alpha_\psi.$$

Definición 2.1 *Si un vector de Poisson ψ satisface la condición (2.19) en un dominio abierto N en \mathbb{R}^3 para cierta $m \in C^\infty(N)$, entonces m se dice ser un factor integrate de ψ .*

Por lo tanto, para un vector de Poisson no nulo ψ , la existencia de un factor integrante definido en todo \mathbb{R}^3 implica que el corchete de Poisson $\{, \}_\psi$ admite una función de Casimir global no trivial $K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ dada por (2.20). Por el contrario, si $K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ es una función de Casimir y $\text{Reg}(K) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla K(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, entonces es posible garantizar la existencia de un factor integrante en el conjunto abierto $N^{\text{reg}} \cap \text{Reg}(K)$.

El problema de encontrar factores integrantes no es trivial y juega un papel muy importante en la teoría de integrabilidad de sistemas dinámicos de dimensión tres. En general, globalmente, la interpretación (2.17) no siempre es cierta. Algunas obstrucciones globales a la existencia de factores integrantes se relacionan con el hecho de que la clase de cohomología de la 1-forma η_ψ en (2.10) se anula.

Teorema 2.6 *Existe un factor integrante $m \in C^\infty(N^{\text{reg}})$ de un vector de Poisson ψ si y sólo si la 1-forma asociada η_ψ (2.10) admite una representación*

$$\eta_\psi = df + c\alpha_\psi, \quad (2.22)$$

para algunas $f, c \in C^\infty(N^{\text{reg}})$.

Para verificar este resultado, necesitamos la siguiente propiedad fundamental.

Lema 2.7 *Sea ψ un vector de Poisson y η_ψ la 1-forma asociada (2.10). Entonces, para cada $g \in C^\infty(N^{\text{reg}})$, con $g \neq 0$, bajo la transformación conforme $\psi \mapsto g\psi$, tenemos la siguiente regla de transición*

$$\eta_{g\psi} = \eta_\psi + \frac{dg}{g} + h\alpha_\psi, \quad (2.23)$$

donde

$$h = -\frac{\langle \nabla g, \psi \rangle}{g\|\psi\|^2}.$$

Demostración. Procedemos mediante cálculo directo

$$\begin{aligned} \eta_{g\psi} &= \frac{1}{\|g\psi\|^2} \langle (g\psi) \times \text{rot}(g\psi), dx \rangle \\ &= \frac{1}{g\|\psi\|^2} \langle \psi \times (\nabla g \times \psi) + g\psi \times \text{rot}\psi, dx \rangle \\ &= \frac{1}{g\|\psi\|^2} \langle \|\psi\|^2 \nabla g - \langle \psi, \nabla g \rangle \psi, dx \rangle + \eta_\psi \\ &= \frac{dg}{g} - \frac{\langle \psi, \nabla g \rangle}{g\|\psi\|^2} \alpha_\psi + \eta_\psi \end{aligned}$$

■

Corolario 2.8 *En el caso cuando $\psi = m\nabla K$, tenemos*

$$\eta_{m\nabla K} = \frac{dm}{m} - \frac{\langle \nabla m, \nabla K \rangle}{m\|\nabla K\|^2} dK \quad (2.24)$$

Demostración. (Del teorema (2.6)). Supongamos que existe un factor integrante m y de esta manera la 1-forma $\frac{1}{m}\alpha_\psi$ es cerrada. Así, por (2.9) tenemos

$$\eta_{\frac{\psi}{m}} \wedge \alpha_\psi = 0.$$

Como $\alpha_\psi \neq 0$, de la última igualdad concluimos $\eta_{\frac{\psi}{m}} = \tilde{c}\alpha_\psi$ para una cierta $\tilde{c} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Al sustituir esta última en (2.23) y al tomar $g = \frac{1}{m}$, obtenemos

$$\eta_\psi = d(\ln m) + (\tilde{c} - h)\alpha_\psi.$$

Por el contrario, supongamos que se cumple (2.22). Entonces, utilizando (2.9), derivamos

$$\begin{aligned} d(e^{-f}\alpha_\psi) &= -e^{-f}df \wedge \alpha_\psi + e^{-f}d\alpha_\psi \\ &= -e^{-f}df \wedge \alpha_\psi + e^{-f}\eta_\psi \wedge \alpha_\psi \\ &= -e^{-f}df \wedge \alpha_\psi + e^{-f}df \wedge \alpha_\psi + e^{-f}c\alpha_\psi \wedge \alpha_\psi = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $m = e^{-f}$ es un factor integrante de ψ . ■

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente

Corolario 2.9 *Existe un factor integrante, para α_ψ , $m = e^{-f}$ sí y sólo si*

$$d\alpha_\psi = df \wedge \alpha_\psi. \tag{2.25}$$

Demostración. Para verificar la parte de necesidad, simplemente calculamos

$$\eta_\psi \wedge \alpha_\psi = df \wedge \alpha_\psi,$$

pero $\eta_\psi \wedge \alpha_\psi = d\alpha_\psi$. Ahora, para verificar la parte de suficiencia, calculamos

$$d(e^{-f}\alpha_\psi) = -e^{-f}df \wedge \alpha_\psi + e^{-f}d\alpha_\psi = -e^{-f}df \wedge \alpha_\psi + -e^{-f}df \wedge \alpha_\psi = 0. \tag{2.25}$$

■

Proposición 2.10 *La condición (2.22) es invariante bajo la transformación conforme.*

Demostración. Supongamos que se cumple (2.22) para cierto vector de Poisson ψ . Entonces, para una función arbitraria no nula $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, es posible mostrar utilizando (2.23), que la 1-forma $\eta_{\tilde{\psi}}$ asociada al vector de Poisson $\tilde{\psi} = g\psi$ admite la misma representación

$$\eta_{\tilde{\psi}} = d\tilde{f} + \tilde{c}\alpha_{\tilde{\psi}},$$

donde

$$\tilde{f} = f + d(\ln g), \quad \tilde{c} = h + c.$$

Como mostramos en la sección siguiente, la condición (2.22) es equivalente a que una clase de cohomología asociada a la distribución característica de planos del tensor de Poisson ψ se anule. ■

Campos Vectoriales Compatibles. Otra mecanismo importante para la construcción de vectores de Poisson está dado por la siguiente observación.

Proposición 2.11 Sean W_1 y W_2 dos campos vectoriales en \mathbb{R}^3 compatibles en el siguiente sentido

$$[W_1, W_2] = c_1 W_1 + c_2 W_2,$$

para algunas $c_1, c_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Entonces, la función vectorial

$$\psi = W_1 \times W_2 \tag{2.26}$$

es un vector de Poisson.

Demostración. El hecho de que ψ satisface la ecuación de integrabilidad (2.1) se sigue de la identidad

$$\text{rot}(W_1 \times W_2) = \text{div}(W_2)W_1 - \text{div}(W_1)W_2 - [W_1, W_2].$$

Es importante notar que la 1-forma de Poisson α_ψ asociada a (2.26) se puede expresar en términos de la 3-forma de volumen $\Upsilon = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ en \mathbb{R}^3 como sigue

$$\alpha_\psi = \mathbf{i}_{W_2} \mathbf{i}_{W_1} \Upsilon.$$

Ejemplo 2.1 Sean M_1 y M_2 dos matrices de 3×3 que conmutan. Entonces, al tomar

$$W_1 = \langle M_1 x, \frac{\partial}{\partial x} \rangle, \quad W_2 = \langle M_2 x, \frac{\partial}{\partial x} \rangle,$$

obtenemos

$$[W_1, W_2] = \langle [M_1, M_2]x, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = 0,$$

de esta manera

$$\psi = M_1 x \times M_2 x$$

es un vector de Poisson.

Aún más, el criterio en la proposición (2.11) se puede aplicar a la siguiente clase importante de campos vectoriales

El caso Homogéneo. Una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ se dice ser homogénea de orden k si $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$, para cada $\lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}^3$. El teorema de Euler precisa el siguiente criterio: una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ es homogénea de orden k si y sólo si

$$L_E f = k f,$$

donde

$$E = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

es llamado el *campo vectorial de Euler*. Un campo vectorial V se dice ser homogéneo de orden k , si sus coeficientes son funciones homogéneas de orden k .

Lema 2.12 *El campo vectorial V es homogéneo de orden k si y sólo si*

$$[V, E] = -(k - 1)V.$$

Demostración. Primero, tenemos la descomposición

$$V = \sum V_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$E = \sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

de esta manera

$$\begin{aligned} [V, E] &= -(L_E V_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum V_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \\ &= -(k V_i) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum V_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \\ &= -kV + V = -(k - 1)V. \end{aligned}$$

■

Por lo tanto, es posible aplicar la proposición (2.11) a este caso, tomando $W_1 = V$ y $W_2 = E$.

Decimos que un corchete de Poisson $\{f, g\}_\psi$ en \mathbb{R}^3 es *homogéneo de orden k* si su correspondiente vector de Poisson ψ es un vector homogéneo de orden k . Como consecuencia de la proposición (2.11), tenemos el siguiente hecho importante:

Proposición 2.13 *Cada campo vectorial homogéneo de orden k induce el siguiente vector de Poisson homogéneo de orden $k + 1$:*

$$\psi(x) = V(x) \times x. \quad (2.27)$$

Notemos que el campo vectorial de Euler $E = \frac{1}{2} \nabla \|x\|^2$ es precisamente el vector de Poisson del corchete cíclico (2.16). Por lo tanto, para cualquier función $m \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\psi = mE$ es también un vector de Poisson. Ahora, analicemos la 1-forma de Poisson α_ψ y la 1-forma η_ψ (2.10) asociadas a (2.27). Primero, notemos que es posible asociar a cada campo vectorial de orden k , el siguiente campo vectorial

$$V^0 \stackrel{\text{def}}{=} V - \frac{\text{div} V}{2 + k} E. \quad (2.28)$$

Es claro que V^0 es también homogéneo de orden k . Más aún, $\text{div}(V^0) = 0$. Esta propiedad se sigue de la identidad $\text{div}(fE) = (2 + k)f$, para cualquier función f homogénea de orden k .

Por lo tanto, el vector de Poisson (2.27) se puede reescribir como $\psi = V^0 \times x$ y tenemos

$$\alpha_\psi = \langle V^0 \times x, dx \rangle.$$

El conjunto regular es

$$N^{\text{reg}} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid V^0 \times x \neq 0\}.$$

Ahora, calculamos

$$\begin{aligned} \text{rot}\psi &= \text{rot}(V^0 \times E) = \text{div}(E)V^0 - \text{div}(V^0)E - [V^0, E] \\ &= (2+k)V^0, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \eta_\psi &= \frac{2+k}{(\|V^0\|^2\|x\|^2 - \langle V^0, x \rangle^2)} (\|V^0\|^2 \langle x, dx \rangle - \langle V^0, x \rangle \langle V^0, dx \rangle) \\ &= \frac{2+k}{2\|V^0 \times x\|^2} [d(\|V^0 \times x\|^2) + \langle x \times (x \times V^0), dV^0 \rangle]. \end{aligned}$$

De esta manera, si existen $h, c \in C^\infty(N^{\text{reg}})$ tales que

$$\left\langle \left(\frac{\partial V^0}{\partial x} \right)^T (x \times (x \times V^0)), dx \right\rangle = \frac{2\|V^0 \times x\|^2}{2+k} (\nabla h + cV^0 \times x, dx), \quad (2.29)$$

o equivalentemente

$$\left(\frac{\partial V^0}{\partial x} \right)^T (x \times (x \times V^0)) = \frac{2\|V^0 \times x\|^2}{2+k} (\nabla h + cV^0 \times x), \quad (2.30)$$

entonces el vector de Poisson $\psi = V^0 \times x$ admite un factor integrante en N^{reg} de la forma

$$m = \|V^0 \times x\|^{2+k}. \quad (2.31)$$

Si la 1-forma cerrada

$$\frac{1}{m} \alpha_\psi = \frac{1}{\|V^0 \times x\|^{2+k}} \langle V^0 \times x, dx \rangle \quad (2.32)$$

es exacta en N^{reg} , entonces el vector de Poisson es de la forma (2.17). En particular, esto es verdadero en el caso cuando N^{reg} es simplemente conexo.

Ejemplo 2.2 Consideremos el caso cuando V es un campo vectorial constante. Luego, este campo induce el corchete de Poisson $\psi = V \times x$ cuyo conjunto regular es $N^{\text{reg}} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{recta}\}$, y la 1-forma asociada η_ψ es de la forma

$$\eta_\psi = d(\ln(\|V \times x\|^2)),$$

la cual es exacta en N^{reg} . De esta manera, el corchete de Poisson admite un factor integrante de la forma

$$m = \|V \times x\|^2.$$

Ejemplo 2.3 Sea $A \in \mathfrak{gl}(3)$ una matriz constante y consideremos el campo vectorial lineal $V(x) = Ax$. Luego, éste induce un corchete de Poisson cuadrático $\psi(x) = Ax \times x$, cuyo conjunto regular es $N^{\text{reg}} = \mathbb{R}^3 \setminus \{3 \text{ rectas}\}$. Notemos que tales rectas que no están en el dominio, son aquellas generadas por los vectores propios de la matriz A . Ahora, una función $g = e^{-f}$, se dice ser un factor integrante para ψ si satisface

$$\text{rot}(e^{-f}\psi) = 0.$$

Al desarrollar el lado izquierdo en la ecuación anterior obtenemos

$$\text{rot}(e^{-f}\psi) = -e^{-f}\nabla f \times \psi + e^{-f}\text{rot}\psi,$$

de esta manera, g es un factor integrante si f satisface

$$-\nabla f \times \psi + \text{rot}\psi = 0.$$

Pero

$$-\nabla f \times \psi = -\nabla f \times (Ax \times x) = -\langle \nabla f, x \rangle Ax + \langle \nabla f, Ax \rangle x.$$

Por otro lado

$$\text{rot}\psi = 3Ax - \text{traza}(A)x.$$

Por lo tanto, la función $g = e^{-f}$ es un factor integrante para ψ si la función f satisface el siguiente sistema

$$\langle \nabla f, x \rangle = 3, \quad \langle \nabla f, Ax \rangle = \text{traza}(A)$$

Una manera alternativa para construir factores integrantes en el caso homogéneo está dado por las siguientes observaciones. Para ello, reformulamos el lema (2.12) para 1-formas, como sigue,

Lema 2.14 Una 1-forma $\beta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ en \mathbb{R}^3 es homogénea de orden k si y sólo si

$$L_E\beta = (k+1)\beta.$$

Demostración. Primero, tenemos la descomposición $\beta = \sum_i \beta_i(x)dx_i$. De esta manera

$$\begin{aligned} L_E\beta &= \sum_i L_E\beta_i dx_i \\ &= (\sum_i L_E\beta_i) dx_i + \sum_i \beta_i L_E dx_i \\ &= \sum_i k\beta_i dx_i + \sum_i \beta_i dx_i \\ &= \sum_i (k+1)\beta_i dx_i = (k+1)\beta. \end{aligned}$$

■

Sea α_ψ una 1-forma de Poisson cuadrática homogénea polinomial. Definimos

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} d\alpha_\psi,$$

una 2-forma con coeficientes lineales, y

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i}_E\alpha_\psi,$$

una función cúbica. Luego, tenemos la siguiente

Proposición 2.15 *Sea α_ψ una 1-forma de Poisson. Entonces*

- Si P no es idénticamente cero, entonces $m = \frac{1}{P}$ es un factor integrante para la 1-forma α_ψ en el dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{P(x) = 0\}$.
- Si $P \equiv 0$, entonces cualquier polinomio cúbico homogéneo Q que satisface

$$dQ \wedge d\alpha_\psi = 0, \quad (2.33)$$

define un factor integrante $m = \frac{1}{Q}$ en el dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{Q(x) = 0\}$ para la 1-forma α_ψ .

Demostración. Primero, como α_ψ es una 1-forma de Poisson se tiene que

$$\alpha_\psi \wedge d\alpha_\psi = 0,$$

luego, aplicando producto interior en la igualdad anterior obtenemos

$$(\mathbf{i}_E \alpha_\psi) d\alpha_\psi - \alpha_\psi \wedge \mathbf{i}_E d\alpha_\psi = 0,$$

o equivalentemente

$$Pd\alpha_\psi + \mathbf{i}_E d\alpha_\psi \wedge \alpha_\psi = 0. \quad (2.34)$$

Por otro lado, de la fórmula de Cartan $L_E = \mathbf{i}_E \circ d + d \circ \mathbf{i}_E$, y el hecho de que la 1-forma de Poisson α_ψ es cuadrática homogénea, obtenemos

$$(\mathbf{i}_E d\alpha_\psi) \wedge \alpha_\psi + dP \wedge \alpha_\psi = 0,$$

así

$$(\mathbf{i}_E d\alpha_\psi) \wedge \alpha_\psi = -dP \wedge \alpha_\psi. \quad (2.35)$$

Al introducir (2.35) en (2.34) obtenemos

$$Pd\alpha_\psi - dP \wedge \alpha_\psi = 0,$$

esto es $d\left(\frac{1}{P}\alpha_\psi\right) = 0$.

Para la segunda parte, si $P \equiv 0$, de la condición (2.33) y el hecho de que α_ψ es una 1-forma de Poisson, obtenemos

$$3[Qd\alpha_\psi - dQ\alpha_\psi] = 0,$$

esto es $d\left(\frac{1}{Q}\alpha_\psi\right) = 0$. ■

Observaciones 2.1 *Si existe un polinomio cúbico homogéneo Q tal que*

$$dQ \wedge d\alpha_\psi = 0,$$

entonces se puede probar que la 1-forma cerrada $\frac{1}{Q}\alpha_\psi$ es exacta en cada componente conexa del dominio

$$N = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x) \neq 0\}.$$

(ver [27]).

Ejemplo 2.4 Consideremos el campo vectorial lineal $V = (0, x_3, -x_2)$. Luego, éste define un vector de Poisson cuadrático $\psi(x) = (x_2^2 + x_3^2, -x_1x_2, -x_1x_3)$, cuya 1-forma asociada α_ψ es

$$\alpha_\psi = (x_2^2 + x_3^2)dx_1 - (x_1x_2)dx_2 - (x_1x_3)dx_3,$$

además

$$\begin{aligned} d\alpha_\psi &= -3x_2dx_1 \wedge dx_2 - 3x_3dx_1 \wedge dx_3 \\ &= -\frac{3}{2}dx_1 \wedge d(x_2^2 + x_3^2), \end{aligned}$$

y el conjunto regular $N^{\text{reg}} = \{x_2^2 + x_3^2 \neq 0\}$. En este caso $P = 0$. Así, las funciones cúbicas

$$Q(x) = x_1^3,$$

ó

$$Q(x) = (x_2^2 + x_3^2)x_1,$$

definen factores integrantes para α_ψ en el conjunto $N^{\text{reg}} \setminus \{\text{plano } x_1 = 0\}$.

2.2 Teorema de Frobenius y Foliación Simpléctica

En esta sección estudiamos la relación existente entre el teorema de Frobenius y foliaciones simplécticas y corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 .

Teorema de Frobenius. La geometría de Poisson en \mathbb{R}^3 se basa en el teorema de Frobenius el cual establece la condición de integrabilidad para distribuciones de planos. En esta sección, presentamos una demostración de este teorema.

Recordemos que una distribución (suave) en un dominio abierto $N \subset \mathbb{R}^3$ es una asignación \mathcal{D} de un subespacio $\mathcal{D}_x \in \mathbb{R}^3$ a cada $x \in N$ tal que para cada $p \in N$ existen campos vectoriales W_1, \dots, W_k definidos en un entorno abierto de $p \in N$ tales que $\mathcal{D}_x = \text{Span}\{W_1(x), \dots, W_k(x)\}$ en cada x . Una distribución es regular si $x \mapsto \dim \mathcal{D}_x$ es constante. En el caso cuando $\dim \mathcal{D}_x = 2$, tenemos una distribución de planos cuyo complemento ortogonal $\langle \mathcal{D}_x \rangle^\perp$ en \mathbb{R}^3 es una recta. La distribución de planos \mathcal{D} se dice ser orientable si la recta $\langle \mathcal{D}_x \rangle^\perp$ es trivial, esto es, $\langle \mathcal{D} \rangle^\perp$ está generada por un campo vectorial en N no nulo.

Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial suave. Denotemos por $N^{\text{reg}} \equiv \text{Reg}(\psi) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \psi(x) \neq 0\}$ el subconjunto regular y consideremos la distribución orientada de planos

$$\text{Reg}(\psi) \ni x \mapsto \mathcal{D}_x^\psi \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi(x) \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^3.$$

En términos de la 1-forma α_ψ , la distribución de planos se representa mediante las ecuaciones de Pfaffian:

$$\mathcal{D}_x^\psi = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_\psi(u) = 0\}.$$

A continuación tenemos la siguiente versión del teorema de Frobenius (local).

Teorema 2.16 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) Para cada punto $p \in N^{\text{reg}}$, existen un entorno abierto U en N^{reg} y campos vectoriales linealmente independientes $W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(U)$ tales que

$$[W_1, W_2] = c_1 W_1 + c_2 W_2, \quad (2.36)$$

para algunas $c_1, c_2 \in C^\infty(U)$, y

$$\mathcal{D}_x^\psi = \text{Span}\{W_1(x), W_2(x)\}, \quad \forall x \in U. \quad (2.37)$$

(b) Para cada punto $p \in N^{\text{reg}}$, existen un entorno abierto U , campos vectoriales $W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(U)$ y una función $K \in C^\infty(U)$ tales que

$$\nabla K(x) \neq 0 \quad \forall x \in U, \quad (2.38)$$

la distribución característica \mathcal{D}^ψ está generada por W_1, W_2 (condición (2.37)) y K es una integral primera común de W_1 y W_2 ,

$$\langle W_1, \nabla K \rangle = \langle W_2, \nabla K \rangle = 0. \quad (2.39)$$

(c) La 1-forma α_ψ satisface la condición de integrabilidad en N^{reg} :

$$d\alpha_\psi \wedge \alpha_\psi = 0. \quad (2.40)$$

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los campos vectoriales W_1, W_2 conmutan, $[W_1, W_2] = 0$. Luego existen entornos V de U de p tales que la aplicación $\phi : V \rightarrow U$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \text{Fl}_{W_1}^{x_1} \circ \text{Fl}_{W_2}^{x_2}(p + x_3 W_1(p) \times W_2(p))$$

es un difeomorfismo. Es posible verificar que éste es un difeomorfismo de rectificación,

$$\phi^* W_1 = e_1, \quad \text{y} \quad \phi^* W_2 = e_2.$$

De esta manera $K = x_3 \circ \phi$ es una integral primera común para W_1 y W_2 .

(b) \Rightarrow (c) De la condición (2.37), se tiene que $\alpha_\psi = m dK$, así la ecuación (2.8) se cumple.

(c) \Rightarrow (a) Si se cumple (2.40), entonces tenemos el corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_\psi$. Luego para campos Hamiltonianos se tiene la siguiente

$$[V_{F_1}, V_{F_2}] = V_{\{F_1, F_2\}_\psi}.$$

Consideremos los campos vectoriales Hamiltonianos $V_{x_i} = \psi(x) \times e_i$ asociados a las funciones coordenadas x_1, x_2 y x_3

$$V_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_3 \\ -\psi_2 \end{pmatrix}, \quad V_{x_2} = \begin{pmatrix} -\psi_3 \\ 0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \quad V_{x_3} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ -\psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, obtenemos

$$\mathcal{D}_x^\psi = \text{Span}\{V_{x_i}(x), i = 1, 2, 3\}.$$

Como $\psi(p) \neq 0$, al menos una de las componentes $\psi_1(p), \psi_2(p)$ o $\psi_3(p)$ no es cero, digamos $\psi_3(p) \neq 0$. Entonces, existe un entorno U de p tal que $\psi_3(x) \neq 0$ para toda $x \in U$. Esto significa que los campos vectoriales V_{x_1} y V_{x_2} son linealmente independientes en U . Más aún, V_{x_1} y V_{x_2} son compatibles,

$$[V_{x_1}, V_{x_2}] = c_1 V_{x_1} + c_2 V_{x_2},$$

donde

$$c_1 = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} - \frac{\psi_1}{\psi_3}, \quad c_2 = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\psi_2}{\psi_3}.$$

Por lo tanto, al tomar $W_1 = V_{x_1}$ y $W_2 = V_{x_2}$ se satisfacen (2.36) y (2.37). \blacksquare

Corolario 2.17 *Si ψ es un vector de Poisson en \mathbb{R}^3 , entonces para cada punto regular $p \in N^{\text{reg}}$, existe un entorno abierto $U \ni p$ tal que*

$$\psi = m \nabla K, \quad \text{en } U \tag{2.41}$$

para alguna $m, K \in C^\infty(U)$.

Demostración. Por el teorema de Frobenius, en un entorno abierto U de p , existen campos vectoriales $W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(U)$ que satisfacen (2.36), (2.37) y que admiten una integral primera común K . De esta forma, se sigue que $\psi = \lambda_1 W_1 \times W_2$ y $\lambda_2 \nabla K = W_1 \times W_2$ para algunas funciones no nulas λ_1, λ_2 en U . Luego, al tomar $m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ se cumple (2.41). \blacksquare

Si las condiciones (2.36) y (2.37) se cumplen, entonces la distribución de planos \mathcal{D}^ψ se dice ser *involutiva*. Una distribución de planos \mathcal{D} en N se llama (*completamente*) *integrable* si para cada punto $p \in N$ existe una superficie integral (local) S_p en N que contiene a p , $\mathcal{D}_x = T_x S_p$ para toda $x \in S_p$. La hipótesis en el caso (b) del teorema (2.16) establece que la distribución de planos \mathcal{D}^ψ es integrable y que una superficie integral que contiene a p se define como el conjunto de nivel $S_p = \{x \in U \mid K(x) = K(p)\}$ de la integral primera común K en (2.39). Por lo tanto, el teorema de Frobenius establece que la involutividad es equivalente a la integrabilidad.

Ahora, una variedad maximal integral de una distribución integrable de planos \mathcal{D} en N es una superficie integral conexa la cual contiene cada superficie integral conexa que tiene un punto en común con ella. El teorema de Frobenius global establece que existe una superficie integral maximal de \mathcal{D} en cada punto de N , así N es la unión disjunta de superficies integrales maximales la cual forma una foliación regular. En general, una superficie integral maximal de S de \mathcal{D} es una superficie parametrizada (inmersa) en \mathbb{R}^3 . Pero si S es cerrada en \mathbb{R}^3 , entonces es una superficie regular (encajada).

Clase $\mathcal{C}_\mathcal{D}$ de primera característica. Sea ψ un vector de Poisson en \mathbb{R}^3 y α_ψ la correspondiente 1-forma de Poisson. Como consecuencia del teorema de Frobenius, es posible asociar a ψ la distribución de planos integral orientable $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\psi$ y la

correspondiente foliación regular \mathcal{S} en N^{reg} dada por superficies parametrizadas. Sea $\Lambda^k(N^{\text{reg}})$ el espacio de las k -formas en N^{reg} y denotemos por $I^k(\mathcal{S})$ ($k = 0, 1, 2, 3$) al conjunto de las k -formas que se anulan sobre la foliación,

$$I^k(\mathcal{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\beta \in \Lambda^k(N^{\text{reg}}) \mid \beta(u_1, \dots, u_k) = 0, \forall u_1, \dots, u_k \in \mathcal{D}_x^\psi, x \in N^{\text{reg}}\}.$$

Es claro que $I^k(\mathcal{S})$ es un subespacio de $\Lambda^k(N^{\text{reg}})$ e $I^0(\mathcal{S}) = \Lambda^0(N^{\text{reg}}) = C^\infty(N^{\text{reg}})$. Más aún, tenemos

$$\begin{aligned} I^1(\mathcal{S}) &= \{f\alpha_\psi \mid f \in C^\infty(N^{\text{reg}})\}, \\ I^2(\mathcal{S}) &= \{\beta \wedge \alpha_\psi \mid \beta \in \Lambda^1(N^{\text{reg}})\}, \\ I^3(\mathcal{S}) &= \Lambda^3(N^{\text{reg}}). \end{aligned}$$

De esta manera, debido a la ecuación de integrabilidad (2.40), se sigue que la diferencial exterior $d : \Lambda^k(N^{\text{reg}}) \rightarrow \Lambda^{k+1}(N^{\text{reg}})$ preserva los subespacios $I^k(\mathcal{S})$,

$$\beta \in I^k(\mathcal{S}) \Rightarrow d\beta \in I^{k+1}(\mathcal{S}).$$

Sea $\Lambda^k(\mathcal{S}) = \frac{\Lambda^k(N^{\text{reg}})}{I^k(\mathcal{S})}$ el espacio cociente y $\mathfrak{q} : \Lambda^k(N^{\text{reg}}) \rightarrow \Lambda^k(\mathcal{S})$ la proyección natural. Así, la diferencial exterior d induce un operador diferencial, el cual es un morfismo entre espacios vectoriales, $d_{\mathcal{S}} : \Lambda^k(\mathcal{S}) \rightarrow \Lambda^{k+1}(\mathcal{S})$ definido por $d_{\mathcal{S}}(\mathfrak{q}(\theta)) = \mathfrak{q}(d\theta)$. Es fácil verificar que $d_{\mathcal{S}}$ es un operador diferencial, $d_{\mathcal{S}} \circ d_{\mathcal{S}} = 0$, y la correspondiente cohomología, llamada la cohomología de de Rham foliada, se denota por

$$H^k(\mathcal{S}) = \frac{\text{Ker } d_{\mathcal{S}}}{\text{Im } d_{\mathcal{S}}}.$$

Una k -forma θ en N^{reg} se dice $d_{\mathcal{S}}$ -cerrada si $d_{\mathcal{S}}(\mathfrak{q}(\theta)) = 0$, esto es, la restricción de θ a cada hoja de la foliación \mathcal{S} es cerrada. Más aún, una k -forma θ en N^{reg} es llamada $d_{\mathcal{S}}$ -exacta si $\mathfrak{q}(\theta) = d_{\mathcal{S}}(\mathfrak{q}(\beta))$ para cierta $(k-1)$ -forma β en N^{reg} . Esto implica que θ se restringe a una forma cerrada en cada hoja de \mathcal{S} . Por ejemplo, una 1-forma $\theta \in \Lambda^1(N^{\text{reg}})$ es $d_{\mathcal{S}}$ -exacta si y sólo si $\theta = df + c\alpha_\psi$, para algunas $f, c \in C^\infty(N^{\text{reg}})$.

Luego, tenemos el siguiente

Teorema 2.18 *Sea ψ un vector de Poisson en \mathbb{R}^3 . Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- (a) *la 1-forma asociada η_ψ (2.10) es $d_{\mathcal{S}}$ -cerrada;*
- (b) *la clase de cohomología de de Rham de $\mathfrak{q}(\eta_\psi)$ depende solamente de la distribución integrable de planos $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\psi$.*
- (c) *Existe un factor integrante $m \in C^\infty(N^{\text{reg}})$ para ψ si y sólo si η_ψ es $d_{\mathcal{S}}$ -exacta.*

Demostración. El hecho de que η_ψ es $d_{\mathcal{S}}$ -cerrada se sigue de la representación local (2.41) y la fórmula (2.24). Los enunciados en los casos (a), (b) son precisamente el contexto de los teoremas (2.6) y (2.16). ■

Con estos resultados es posible definir la siguiente noción.

Definición 2.2 Sean \mathcal{D} una distribución orientable e integrable de planos en un dominio abierto $N \subseteq \mathbb{R}^3$ y \mathcal{S} la foliación correspondiente. La clase de primera característica de \mathcal{D} (de \mathcal{S}) se denota por $\mathfrak{c}_{\mathcal{D}}^1 = \mathfrak{c}_{\mathcal{S}}^1$ y se define como la clase de cohomología de de Rham foliada del elemento $\mathfrak{q}(\eta_\psi)$ asociado al vector de Poisson ψ que genera a la distribución \mathcal{D} ,

$$\mathfrak{c}_{\mathcal{D}}^1 \stackrel{\text{def}}{=} [\mathfrak{q}(\eta_\psi)] \in H^1(\mathcal{S}).$$

Por lo tanto, la no trivialidad de $\mathfrak{c}_{\mathcal{D}}^1$ es una obstrucción para la existencia de un factor integrante en N^{reg} para un vector de Poisson dado ψ .

Corolario 2.19 Si $\mathfrak{c}_{\mathcal{D}}^1 = 0$ y N es simplemente conexo, entonces un tensor de Poisson ψ que genera a la distribución \mathcal{D} es de la forma

$$\psi = m\nabla K, \text{ en } N.$$

Hojas simplécticas. Procedemos ahora, al estudio de foliaciones. Para ello, formulamos el siguiente resultado importante

Teorema 2.20 Sean ψ un vector de Poisson y $N^{\text{reg}} \subseteq \mathbb{R}^3$ el conjunto regular. Cada superficie integral maximal S de la distribución característica \mathcal{D}^ψ en N^{reg} está dotada con la forma simpléctica

$$\omega_S = \frac{1}{\|\psi\|} \sigma_S \quad (2.42)$$

donde

$$\sigma_S = \frac{1}{\|\psi\|} (\psi_1 dx_2 \wedge dx_3 + \psi_2 dx_3 \wedge dx_1 + \psi_3 dx_1 \wedge dx_2) \Big|_S \quad (2.43)$$

es la forma de área en S asociada a la orientación dada por el campo vectorial normal $\frac{\psi}{\|\psi\|}$. Más aún, para cada $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, el campo vectorial Hamiltoniano $V_F = \psi \times \nabla F$ es tangente a S y su restricción a S es el campo vectorial Hamiltoniano relativo a ω_S y $f = F|_S$,

$$v_f = V_F \Big|_S \quad (2.44)$$

$$\mathbf{i}_{v_f} \omega_S = -df. \quad (2.45)$$

Demostración. Es claro que la dos forma ω_S es no degenerada y como S es de dimensión dos, también es cerrada. De esta manera, tenemos que probar (2.45). Consideremos la siguiente dos forma en \mathbb{R}^3

$$\Omega_\psi = \psi_1 dx_2 \wedge dx_3 + \psi_2 dx_3 \wedge dx_1 + \psi_3 dx_1 \wedge dx_2. \quad (2.46)$$

Así, ω_S se puede representar como

$$\omega_S = \left(\frac{1}{\|\psi\|^2} \Omega_\psi \right) \Big|_S. \quad (2.47)$$

Al utilizar la igualdad

$$\begin{aligned}\psi \times V_F &= \psi \times (\psi \times \nabla F) \\ &= -\|\psi\|^2 \nabla F + \langle \psi, \nabla F \rangle \psi,\end{aligned}$$

y algunas identidades introducidas en el apéndice, calculamos

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{V_F} \Omega_\psi &= \alpha_{\psi \times V_F} \\ &= -\|\psi\|^2 \alpha_{\nabla F} + \langle \psi, \nabla F \rangle \alpha_\psi \\ &= -\|\psi\|^2 dF + \langle \psi, \nabla F \rangle \alpha_\psi,\end{aligned}$$

así, la igualdad (2.45) es consecuencia del cálculo anterior y el hecho de que α_ψ se anula en el vector tangente a S \blacksquare

Corolario 2.21 *La forma simpléctica (2.42) está definida de manera única por la condición de compatibilidad con corchete de Poisson*

$$\{F_1, F_2\}_\psi|_S = \omega_S(v_{f_1}, v_{f_2}),$$

para cualesquiera $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

También es importante notar que la forma simpléctica ω_S coincide con la forma de área σ_S en una hoja simpléctica módulo una constante multiplicativa si y sólo si el vector de Poisson satisface la relación

$$\psi \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^T \psi = 0,$$

donde $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right)$ es la matriz de Jacobi. Esta condición significa que $\|\psi\|^2$ es una función de Casimir.

El par (S, ω_S) se conoce como *hoja simpléctica* del vector de Poisson ψ (el corchete de Poisson $\{F_1, F_2\}_\psi$). Como la distribución característica de un vector de Poisson dado ψ está generada por el álgebra de campos vectoriales Hamiltonianos,

$$\mathcal{D}^\psi = \text{Span}\{V_F \mid F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)\},$$

las hojas simplécticas se pueden caracterizar de la siguiente manera. Introducimos una relación de equivalencia en \mathbb{R}^3 , diciendo que dos puntos x y y son equivalentes, $x \sim y$, si se pueden conectar mediante una curva suave por pedazos la cual consiste de trayectorias de campos vectoriales Hamiltonianos (locales), $x = \text{Fl}_{V_{F_k}}^{t_k} \circ \dots \circ \text{Fl}_{V_{F_1}}^{t_1}(y)$. Entonces, la hoja simpléctica S_x que pasa por $x \in N^{\text{reg}}$ es precisamente la clase de equivalencia de x , $S_x = [x]$. Como mencionamos antes, S_x es una superficie regular si S_x es un subconjunto cerrado en \mathbb{R}^3 . De acuerdo con esta definición, cada punto singular p , $\psi(p) = 0$ es una hoja simpléctica de dimensión cero. Por lo tanto, \mathbb{R}^3 es una unión de hojas simplécticas 0–dimensionales y 2–dimensionales las cuales

definen una foliación simpléctica (singular). Una característica importante de dicha foliación es que el espacio de hojas está definido como el espacio topológico cociente \mathbb{R}^3 / \sim .

En el caso cuando un vector de Poisson es de la forma $\psi = m\nabla K$ el conjunto regular es

$$N^{\text{reg}} = \{m(x) \neq 0\} \cap \{\nabla K(x) \neq 0\}.$$

La hoja simpléctica S_p que pasa por $p \in N^{\text{reg}}$ se define como una componente conexa del conjunto de nivel regular de la función de Casimir,

$$S_p = \{m(x) \neq 0\} \cap \{K(x) = K(p)\}.$$

Si un vector de Poisson no admite una función de Casimir global pero la distribución característica \mathcal{D}^ψ en N^{reg} está generada por campos vectoriales completos W_1, W_2 , entonces es posible dar una parametrización de la hoja simpléctica S_p que pasa por p mediante la aplicación

$$(\tau_1, \tau_2) \mapsto \text{FL}_{W_1}^{\tau_1} \circ \text{FL}_{W_2}^{\tau_2}(p)$$

Notemos que la 2-forma $\frac{1}{\|\psi\|^2}\Omega_\psi$ en (2.47) satisface las siguientes identidades

$$\Upsilon = \frac{1}{\|\psi\|^2}\Omega_\psi \wedge \alpha_\psi,$$

$$d\left(\frac{1}{\|\psi\|^2}\Omega_\psi\right) = \text{div}\left(\frac{\psi}{\|\psi\|^2}\right)\Upsilon,$$

por lo tanto, es d_S -cerrada. Más aún, esta forma es cerrada en N^{reg} sí y sólo si

$$\text{div}\left(\frac{\psi}{\|\psi\|^2}\right) = 0.$$

De esta manera, hemos establecido las condiciones para la siguiente

Definición 2.3 *La segunda clase característica de la distribución característica \mathcal{D} (ó, la foliación simpléctica \mathcal{S}) se denota por $\mathfrak{c}_{\mathcal{D}}^2 = \mathfrak{c}_{\mathcal{S}}^2$ y se define como la clase de cohomología de de Rham foliada del elemento $\mathfrak{q}\left(\frac{1}{\|\psi\|^2}\Omega_\psi\right)$,*

$$\mathfrak{c}_{\mathcal{D}}^2 := \left[\mathfrak{q}\left(\frac{1}{\|\psi\|^2}\Omega_\psi\right) \right] \in H^2(\mathcal{S}).$$

Si la segunda clase característica se anula $\mathfrak{c}_{\mathcal{D}}^2 = 0$, entonces existen 1-formas γ y ζ en N^{reg} tales que

$$\frac{1}{\|\psi\|^2}\Omega_\psi = d\gamma + \zeta \wedge \alpha_\psi.$$

En particular, esto significa que para cada hoja simpléctica S , la forma simpléctica ω_S es exacta.

2.3 Funciones de Poisson y Equivalencia

Para cualquier matriz de 3×3 L utilizaremos la siguiente notación

$$\det L \cdot L^{-T} = \begin{pmatrix} (L_{33}L_{22} - L_{32}L_{23}) & (L_{31}L_{23} - L_{33}L_{21}) & (L_{32}L_{21} - L_{31}L_{22}) \\ (L_{32}L_{13} - L_{33}L_{12}) & (L_{33}L_{11} - L_{31}L_{13}) & (L_{31}L_{12} - L_{32}L_{11}) \\ (L_{23}L_{12} - L_{22}L_{13}) & (L_{21}L_{13} - L_{23}L_{11}) & (L_{22}L_{11} - L_{21}L_{12}) \end{pmatrix}$$

Proposición 2.22 Sean ψ y $\tilde{\psi}$ dos vectores de Poisson definidos en dos dominios abiertos N y \tilde{N} en \mathbb{R}^3 . Sean $\{, \}_\psi$ y $\{, \}_{\tilde{\psi}}$ los corchetes de Poisson asociados a ψ y $\tilde{\psi}$ respectivamente. Entonces, una aplicación suave $\mathbf{f} : N \rightarrow \tilde{N}$ es un morfismo de Poisson,

$$\{F \circ \mathbf{f}, G \circ \mathbf{f}\}_\psi = \{F, G\}_{\tilde{\psi}} \circ \mathbf{f},$$

si y sólo si los vectores de Poisson están relacionados por la igualdad

$$\tilde{\psi}(\mathbf{f}(x)) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x} \right)^{-T} \psi(x), \quad (2.48)$$

donde $\left(\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i(x)}{\partial x_j} \right)$ es la matriz de Jacobi.

Demostración. Sean

$$\Pi(x) = -\Lambda \circ \psi(x), \text{ y } \tilde{\Pi}(x) = -\Lambda \circ \tilde{\psi} \quad (2.49)$$

los tensores de Poisson asociados a los corchetes de Poisson $\{, \}_\psi$ y $\{, \}_{\tilde{\psi}}$ respectivamente. Así, la condición para que una aplicación suave sea un morfismo de Poisson es

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{f}(x)) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x} \right) \cdot \Pi(x) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x} \right)^T. \quad (2.50)$$

Al introducir las representaciones (2.49) en esta igualdad, y utilizando la identidad

$$L \cdot (\Lambda \circ a) \cdot L^T = \Lambda \circ ((\det L)L^{-T}a),$$

derivamos la condición (2.48) ■

Corolario 2.23 Un difeomorfismo $\mathbf{f} : N \rightarrow \tilde{N}$ es un isomorfismo de Poisson entre los corchetes de Poisson $\{, \}_\psi$ y $\{, \}_{\tilde{\psi}}$ si y sólo si se satisface (2.48). La transformación inversa está dada por

$$\psi(x) = \frac{1}{\det \left(\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x} \right)} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x} \right)^T \tilde{\psi}(\mathbf{f}(x)). \quad (2.51)$$

En términos de 1-formas de Poisson, la condición (2.51) es equivalente a

$$\alpha_\psi = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x}\right)} \mathbf{f}^* \alpha_{\tilde{\psi}}. \quad (2.52)$$

Como consecuencia, también obtenemos el siguiente criterio para que un difeomorfismo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sea un automorfismo de un corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_\psi$:

$$\psi(x) = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x}\right)} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x}\right)^T \psi(\mathbf{f}(x)). \quad (2.53)$$

Todos los automorfismos de Poisson forman un grupo el cual se denota por $\text{Aut}(\mathbb{R}^3, \psi)$. Por ejemplo, es posible deducir de (2.53) que el grupo de automorfismos lineales del corchete cíclico (2.16) es precisamente el grupo ortogonal $O(3)$.

2.4 Automorfismos infinitesimales de Poisson

Sea $\{\cdot, \cdot\}_\psi$ el corchete de Poisson definido por el vector de Poisson ψ . Entonces, es posible asociar a ψ las siguientes dos álgebras de Lie de campos vectoriales

- el álgebra de Lie de campos vectoriales Hamiltonianos $\text{Ham}(\mathbb{R}^3, \psi)$,
- el álgebra de Lie de automorfismos infinitesimales de Poisson $\text{Poiss}(\mathbb{R}^3, \psi)$.

Luego, tenemos la inclusión

$$\text{Ham}(\mathbb{R}^3, \psi) \subseteq \text{Poiss}(\mathbb{R}^3, \psi),$$

y para cualquier $Z \in \text{Poiss}(\mathbb{R}^3, \psi)$ y $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, de la identidad

$$[Z, V_F] = V_{\langle Z, \nabla F \rangle}$$

obtenemos que $\text{Ham}(\mathbb{R}^3, \psi)$ es un ideal de $\text{Poiss}(\mathbb{R}^3, \psi)$. Notemos que el flujo (local) de cada campo vectorial $Z \in \text{Poiss}(\mathbb{R}^3, \psi)$ es un automorfismo del corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_\psi$.

El espacio cociente

$$H_\psi^1(\mathbb{R}^3) = \frac{\text{Poiss}(\mathbb{R}^3, \psi)}{\text{Ham}(\mathbb{R}^3, \psi)}$$

tiene estructura de álgebra de Lie y se llama la primera cohomología de Poisson del corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_\psi$ (citar bibliografía).

La siguiente proposición presenta información más precisa acerca de $\text{Poiss}(\mathbb{R}^3, \psi)$.

Proposición 2.24 *Un campo vectorial Z en \mathbb{R}^3 es un automorfismo infinitesimal de Poisson del corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_\psi$ si y sólo si se satisface la ecuación*

$$\text{div}(Z)\psi + Z \times \text{rot}\psi - \nabla(Z \cdot \psi) = 0, \quad (2.54)$$

Demostración. Recordemos que

$$[X_F, Z] + X_{L_Z F} = 0,$$

donde $X_F = \psi \times \nabla F$, además, si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, se cumple la siguiente

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \text{div}(\mathbf{w})\mathbf{v} - \text{div}(\mathbf{v})\mathbf{w} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}],$$

de esta manera, la ecuación

$$[\psi \times \nabla F, Z] + X_{L_Z F} = 0$$

es equivalente a la ecuación

$$\text{div}(Z)\psi \times \nabla F - \text{div}(\psi \times \nabla F)Z - \text{rot}((\psi \times \nabla F) \times Z) + \psi \times \nabla(L_Z F) = 0,$$

al seguir desarrollando el lado izquierdo obtenemos

$$\text{div}(Z)\psi \times \nabla F - \text{div}(\psi \times \nabla F)Z - \nabla(Z \cdot \psi) \times \nabla F + \nabla(Z \cdot \nabla F) \times \psi + (Z \cdot \nabla F)\text{rot}\psi + \psi \times \nabla(L_Z F) = 0,$$

de donde se llega a

$$\text{div}(Z)\psi \times \nabla F - (\nabla F \cdot \text{rot}\psi)Z - \nabla(Z \cdot \psi) \times \nabla F + \nabla(Z \cdot \nabla F) \times \psi + (Z \cdot \nabla F)\text{rot}\psi + \psi \times \nabla(L_Z F) = 0,$$

al utilizar la propiedad de triple producto cruz en \mathbb{R}^3 se concluye

$$\text{div}(Z)\psi \times \nabla F - [\text{rot}\psi, Z] \times \nabla F - \nabla(Z \cdot \psi) \times F = 0,$$

o equivalentemente

$$[\text{div}(Z)\psi + Z \times \text{rot}\psi - \nabla(Z \cdot \psi)] \times \nabla F = 0,$$

para toda F , por lo tanto

$$\text{div}(Z)\psi + Z \times \text{rot}\psi - \nabla(Z \cdot \psi) = 0. \quad \blacksquare$$

Es de gran utilidad presentar una versión covariante de la ecuación (2.54)

Proposición 2.25 *En términos de la 1-forma de Poisson α_ψ , la ecuación (2.54) para automorfismos infinitesimales de Poisson Z adopta la forma*

$$L_Z \alpha_\psi - \text{div}(Z)\alpha_\psi = 0. \quad (2.55)$$

Más aún, para una función no nula $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, la ecuación (2.55) es invariante bajo la transformación

$$\psi \mapsto g\psi, \quad Z \mapsto gZ. \quad (2.56)$$

Demostración. Primero, al utilizar las identidades

$$\alpha_{\nabla\langle Z, \psi \rangle} = d(\mathbf{i}_Z \alpha_\psi),$$

$$\alpha_{Z \times \text{rot} \psi} = -\mathbf{i}_Z \Omega_{\text{rot} \psi} = -\mathbf{i}_Z d\alpha_\psi,$$

es posible reescribir la ecuación (2.54) en la forma

$$\text{div} Z \alpha_\psi - \mathbf{i}_Z d\alpha_\psi - d(\mathbf{i}_Z \alpha_\psi) = 0.$$

Por la fórmula de Cartan $L_Z = \mathbf{i}_Z \circ d + d \circ \mathbf{i}_Z$, esta última ecuación es equivalente a (2.55). La invarianza de (2.55) bajo la transformación conforme (2.56) se sigue de las identidades

$$L_{gZ} \alpha_{g\psi} = g(L_Z g) \alpha_\psi + g^2 L_Z \alpha_\psi,$$

$$\text{div}(gZ) = L_Z g + g \text{div}(Z).$$

■

De esta manera

$$\text{Ham}(\mathbb{R}^3, g\psi) = g \cdot \text{Ham}(\mathbb{R}^3, \psi),$$

$$\text{Poiss}(\mathbb{R}^3, g\psi) = g \cdot \text{Poiss}(\mathbb{R}^3, \psi).$$

Corolario 2.26 *La primera cohomología de Poisson $H_\psi^1(\mathbb{R}^3)$ del corchete de Poisson $\{, \}_\psi$ depende solamente de distribución característica $x \mapsto \mathcal{L}_x^\psi := \langle \psi(x) \rangle$.*

Campos Vectoriales que Preservan la Foliación. Un campo vectorial Z preserva la foliación \mathcal{S} del corchete de Poisson $\{, \}_\psi$ si su flujo manda hojas en hojas, o equivalentemente, la distribución característica \mathcal{D}^ψ es invariante bajo el flujo,

$$d\text{Fl}_Z^t(\mathcal{D}_x^\psi) = \mathcal{D}_{\text{Fl}_Z^t(x)}^\psi, \quad \forall x \in N^{\text{reg}}. \quad (2.57)$$

Como la distribución característica \mathcal{D}^ψ está generada por los campos Hamiltonianos V_F , la condición (2.57) significa que el corchete de Lie $[Z, V_F]$ es un vector tangente a \mathcal{D}^ψ

$$\mathbf{i}_{[Z, V_F]} \alpha_\psi = 0, \quad \forall F. \quad (2.58)$$

Al utilizar la identidad $\mathbf{i}_{[Z, V_F]} = [L_Z, \mathbf{i}_{V_F}]$, obtenemos

$$0 = \mathbf{i}_{[Z, V_F]} \alpha_\psi = L_Z(\mathbf{i}_{V_F} \alpha_\psi) - \mathbf{i}_{V_F}(L_Z \alpha_\psi) = -\mathbf{i}_{V_F}(L_Z \alpha_\psi).$$

De esta manera, tenemos el siguiente criterio.

Proposición 2.27 *Un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(N^{\text{reg}})$ preserva la foliación \mathcal{S} si y sólo si*

$$(L_Z \alpha_\psi) \wedge \alpha_\psi = 0. \quad (2.59)$$

De la ecuación (2.55), concluimos que cada campo vectorial $Z \in \text{Poiss}(\mathbb{R}^3, \psi)$ satisface (2.59), así, Z preserva la foliación \mathcal{S} .

Campos Vectoriales que Preservan el Volumen. Recordemos que una forma de volumen en \mathbb{R}^3 es una 3-forma arbitraria no degenerada en \mathbb{R}^3 la cual puede ser presentada como

$$\Upsilon_g = g\Upsilon,$$

donde $\Upsilon = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ es la forma canónica de volumen en \mathbb{R}^3 y la densidad $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ es una función que no se anula nunca. Se dice que un campo vectorial Z preserva el volumen si su flujo (local) deja invariante la forma de volumen, $(\text{Fl}_Z^t)^*\Upsilon_g = \Upsilon_g$.

En términos infinitesimales, esta condición es equivalente a $L_Z\Upsilon_g = 0$.

Proposición 2.28 *Un campo vectorial Z es un automorfismo infinitesimal de Poisson que preserva el volumen si y sólo si*

$$L_Z(g\alpha_\psi) = 0,$$

y

$$\frac{L_Z g}{g} + \text{div}(Z) = 0.$$

Demostración. La prueba se sigue de la ecuación (2.55) y la identidad

$$L_Z\Upsilon_g = (L_Z g + \text{div}(Z)g)\Upsilon_g.$$

■

En el caso particular cuando $g = 1$, un campo vectorial Z es un automorfismo infinitesimal de Poisson del corchete $\{\cdot, \cdot\}_\psi$ que preserva la forma canónica de volumen Υ si y sólo si tiene divergencia cero y su flujo preserva la 1-forma de Poisson,

$$L_Z\alpha_\psi = 0,$$

$$\text{div}(Z) = 0.$$

Campos Vectoriales Localmente Hamiltonianos. Sea ψ un vector de Poisson, N^{reg} el conjunto regular y \mathcal{D}^ψ la distribución característica de planos en N^{reg} . Consideremos la foliación simpléctica \mathcal{S} de \mathcal{D}^ψ y denotemos por

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}) = \{Z \in \mathfrak{X}(N^{\text{reg}}) \mid Z(x) \in \mathcal{D}_x^\psi \forall x \in N^{\text{reg}}\}$$

al espacio de todos los campos vectoriales en N^{reg} que son tangentes a \mathcal{S} . El conjunto de automorfismos infinitesimales de Poisson de $\{\cdot, \cdot\}_\psi$ tangentes a la foliación simpléctica se denota por

$$\text{Poiss}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}, \psi) := \text{Poiss}(N^{\text{reg}}, \psi) \cap \mathfrak{X}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}).$$

Es claro que $\text{Poiss}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}, \psi)$ es un álgebra de Lie. Además, tenemos las inclusiones

$$\text{Ham}(\mathbb{R}^3, \psi) \subseteq \text{Poiss}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}, \psi) \subseteq \text{Poiss}(\mathbb{R}^3, \psi).$$

Teorema 2.29 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $Z \in \text{Poiss}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}, \psi)$;

(b) $Z \in \mathfrak{X}(N^{\text{reg}})$ *satisface las relaciones*

$$\text{div}(Z)\|\psi\|^2 + \langle \psi \times Z, \text{rot}\psi \rangle = 0, \quad (2.60)$$

$$\langle Z, \psi \rangle = 0, \quad (2.61)$$

(c) Z *admite una representación*

$$Z = \psi \times Y, \quad (2.62)$$

donde $Y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}})$ *es un campo vectorial tal que*

$$\langle \text{rot}Y, \psi \rangle = 0. \quad (2.63)$$

Demostración. Se sigue directamente de la proposición (2.24) que $Z \in \text{Poiss}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}, \psi)$ si y sólo si Z satisface las ecuaciones

$$\text{div}(Z)\psi + Z \times \text{rot}\psi = 0, \quad (2.64)$$

$$\langle Z, \psi \rangle = 0. \quad (2.65)$$

De la condición de integrabilidad, $\text{rot}\psi$ es tangente a \mathcal{S} , por lo tanto de (2.65) obtenemos que el producto cruz $Z \times \text{rot}\psi$ coincide con ψ salvo un factor multiplicativo. Al tomar el producto interior con ψ en ambos lados de la ecuación (2.64), probamos la equivalencia de (a) y (b). Ahora, procedemos a probar la implicación (b) \Rightarrow (c). Sea Z un campo vectorial que satisface (2.60),(2.65). Entonces, al escoger

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\|\psi\|^2}\psi \times Z, \quad (2.66)$$

notamos que se satisface (2.62). Ahora, al introducir la representación (2.62) en (2.60) obtenemos

$$\|\psi\|^2 \text{div}(\psi \times Y) - \|\psi\|^2 \langle Y, \text{rot}\psi \rangle = 0.$$

Esta igualdad junto con la identidad

$$\text{div}(\psi \times Y) = \langle Y, \text{rot}\psi \rangle - \langle \psi, \text{rot}Y \rangle$$

implican (2.63). La implicación (c) \Rightarrow (b), es de manera análoga. ■

Denotemos por

$$\mathcal{P}(N^{\text{reg}}) = \{Y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}) \mid \langle Y, \text{rot}\psi \rangle = 0\}.$$

Corolario 2.30 *Existe un isomorfismo entre espacios vectoriales*

$$\mathcal{P}(N^{\text{reg}}) \approx \text{Poiss}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}, \psi) \quad (2.67)$$

definido por la correspondencia

$$Y \mapsto Z = \psi \times Y$$

cuya inversa está dada por la fórmula (2.66).

Es posible hacer una descripción alternativa del espacio de automorfismos infinitesimales de Poisson tangentes a \mathcal{S} en términos del espacio de las 1-formas $d_{\mathcal{S}}$ -cerradas en N^{reg} , el cual denotamos por

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}^1(N^{\text{reg}}) := \{\alpha \in \Lambda^1(N^{\text{reg}}) \mid \mathfrak{q}(d\alpha) = 0\}.$$

Proposición 2.31 *Para cada $Y \in \mathcal{P}(N^{\text{reg}})$ la 1-forma $\alpha_Y = \langle Y, dx \rangle$ es $d_{\mathcal{S}}$ -cerrada. La correspondencia*

$$\mathcal{P}(N^{\text{reg}}) \ni Y \mapsto \alpha_Y$$

define un isomorfismo entre los espacios $\mathcal{P}(N^{\text{reg}})$ y $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}^1(N^{\text{reg}})$.

Demostración. Por definición, α_Y es $d_{\mathcal{S}}$ -cerrada si su restricción a cada hoja de \mathcal{S} es cerrada. De esta manera, tenemos que probar que para cualesquiera campos vectoriales u_1, u_2 tangentes a \mathcal{S} , tenemos

$$(d\alpha_Y)(u_1, u_2) = 0.$$

Al utilizar $d\alpha_Y = \Omega_{\text{rot}Y}$, además de $u_1 \times u_2 = g\psi$, obtenemos

$$\begin{aligned} (d\alpha_Y)(u_1, u_2) &= \Omega_{\text{rot}Y}(u_1, u_2) = \langle \text{rot}Y, u_1 \times u_2 \rangle \\ &= g\langle \text{rot}Y, \psi \rangle = 0. \end{aligned}$$

■

Como consecuencia de (2.67), tenemos el siguiente hecho.

Teorema 2.32 *Existe un isomorfismo canónico*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}^1(N^{\text{reg}}) \approx \text{Poiss}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}, \psi).$$

Finalmente, formulamos el siguiente criterio bastante útil. Sea $\frac{1}{\|\psi\|^2}\Omega_{\psi}$ la 2-forma $d_{\mathcal{S}}$ -cerrada en N^{reg} , donde Ω_{ψ} está dada por (2.46).

Proposición 2.33 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $Z \in \text{Poiss}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}, \psi)$;

(b) $Z \in \mathfrak{X}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}})$ y la 1-forma

$$\frac{1}{\|\psi\|^2}(\mathbf{i}_Z\Omega_{\psi}), \tag{2.68}$$

es $d_{\mathcal{S}}$ -cerrada.

Demostración. Supongamos que $Z \in \text{Poiss}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}}, \psi)$. Entonces, tenemos $\psi \times Z = -\|\psi\|^2 Y$, donde $Y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{S}}(N^{\text{reg}})$ satisface (2.64). Luego,

$$d\left(\frac{1}{\|\psi\|^2}(\mathbf{i}_Z\Omega_{\psi})\right) = d\left(\frac{1}{\|\psi\|^2}\alpha_{\psi \times Z}\right) = -d\alpha_Y = -\Omega_{\text{rot}Y}. \tag{2.69}$$

Así, $\Omega_{\text{rot}Y} \wedge \alpha_\psi = \langle \text{rot}Y, \psi \rangle \Upsilon = 0$, de esta manera la condición (2.68) se satisface. Por el contrario, si se cumple (2.68), entonces por (2.69) deducimos que el campo vectorial Y en (2.66) satisface (2.64). Esto prueba la implicación $(b) \Rightarrow (a)$. ■

Corolario 2.34 *Un automorfismo infinitesimal de Poisson $Z \in \text{Poiss}_S(N^{\text{reg}}, \psi)$ tangente a \mathcal{S} es un campo vectorial Hamiltoniano en (N^{reg}, ψ) si y sólo si la clase de cohomología foliada de la 1-forma en (2.68) es trivial,*

$$\frac{1}{\|\psi\|^2}(\mathbf{i}_Z \Omega_\psi) \quad (2.70)$$

es d_S -exacta.

Demostración. La condición (2.70) significa que

$$\frac{1}{\|\psi\|^2}(\mathbf{i}_Z \Omega_\psi) = -dF + c\alpha_\psi$$

para algunas $c, F \in C^\infty(N^{\text{reg}})$. Por otro lado, $\mathbf{i}_Z \Omega_\psi = \alpha_{\psi \times Z}$, de esta manera

$$\frac{1}{\|\psi\|^2} \psi \times Z = -\nabla F + c\psi.$$

Al tomar producto cruz con ψ en ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos $Z = V_F$. ■

Proposición 2.35 *Cada $Z \in \text{Poiss}_S(N^{\text{reg}}, \psi)$ es un campo localmente Hamiltoniano, esto es, para cada $p \in N^{\text{reg}}$ existen un entorno abierto $U \ni p$ en N^{reg} y una función $F \in C^\infty(U)$ tales que*

$$Z = \psi \times \nabla F$$

en U .

La prueba de este resultado se sigue del corolario (2.34) y la forma parametrizada del lema de Poincare: cada forma d_S -cerrada es localmente d_S -exacta.

2.5 Problema de Hamiltonización

En esta sección estudiamos el problema de Hamiltonización, cuya formulación es como sigue. Supongamos que empezamos con un sistema dinámico tres dimensional

$$\dot{x} = V(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.71)$$

Definición 2.4 Decimos que este sistema admite una estructura Hamiltoniana en un subconjunto abierto N en \mathbb{R}^3 si existe un par (ψ, F) que consiste de un vector de Poisson en N ,

$$\langle \psi, \text{rot} \psi \rangle = 0 \quad (2.72)$$

y una función $F \in C^\infty(N)$, tal que V es Hamiltoniano con respecto al corchete de Poisson $\{, \}_\psi$ y F ,

$$V = \psi \times \nabla F. \quad (2.73)$$

En el caso cuando un dominio abierto N es denso en \mathbb{R}^3 , $\bar{N} = \mathbb{R}^3$, nos referiremos a (ψ, F) como una *estructura Hamiltoniana global* para V . Por lo tanto, el problema de Hamiltonización es encontrar una estructura Hamiltoniana (global) (ψ, F) para un sistema dinámico dado.

Mostraremos que este problema se puede resolver si

- existe una distribución integrable de planos (foliación) que es invariante bajo el flujo del sistema;
- el sistema admite una integral primera que no es constante a lo largo de foliación invariante.

Teorema 2.36 Sea V un campo vectorial en \mathbb{R}^3 . Supongamos que existe un conjunto abierto $N \subset \mathbb{R}^3$, una función $F \in C^\infty(N)$ y un campo vectorial $W \in \mathfrak{X}(N)$ tales que las siguientes condiciones se satisfacen en N :

(a) los campos vectoriales V y W son linealmente independientes,

$$V \times W \neq 0$$

y compatibles,

$$[V, W] = aV + bW;$$

(b) F es integral primera de V y

$$\langle W, \nabla F \rangle \neq 0.$$

Entonces,

$$\psi = -\frac{1}{\langle W, \nabla F \rangle} V \times W, \quad (2.74)$$

es un vector de Poisson que junto con F definen una estructura Hamiltoniana para V en N .

Demostración. Es claro que ψ satisface la ecuación de integrabilidad. Esto se sigue del hecho de que V y W son compatibles, y de la identidad

$$\text{rot}(V \times W) = \text{div}(W)V - \text{div}(V)W - [V, W].$$

De esta manera, sólo resta verificar la igualdad (2.73). Para cada $x \in N$, los vectores $V(x), W(x), V(x) \times W(x)$ forman una base para \mathbb{R}^3 , así, tenemos la siguiente descomposición

$$\nabla F = c_1 V + c_2 W + c_3 V \times W. \quad (2.75)$$

Por hipótesis, F es integral primera de V , $\langle V, \nabla F \rangle = 0$. Luego, se sigue de (2.75) que

$$c_1 \|V\|^2 + c_2 \langle W, V \rangle = 0 \quad (2.76)$$

$$\langle \nabla F, W \rangle = c_1 \langle V, W \rangle + c_2 \|W\|^2. \quad (2.77)$$

De las relaciones (2.75)-(2.77), obtenemos

$$\begin{aligned} (V \times W) \times \nabla F &= -c_1 V \times (V \times W) + c_2 W \times (W \times V) \\ &= (c_1 \|V\|^2 + c_2 \langle W, V \rangle) W - (c_1 \langle W, V \rangle + c_2 \|W\|^2) V \\ &= -\langle \nabla F, W \rangle V \end{aligned}$$

■

El caso Homogéneo. Sea V un campo vectorial homogéneo de orden k , $[V, E] = -(k-1)V$. Consideremos el campo vectorial de divergencia cero

$$V^0 = V - \frac{\operatorname{div}(V)}{k+2} E. \quad (2.78)$$

Luego, tenemos el siguiente criterio

Proposición 2.37 *Si V admite una integral primera F , entonces en el dominio*

$$N := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \times V^0(x) \neq 0 \text{ y } \langle x, \nabla F \rangle \neq 0\},$$

el campo vectorial V es Hamiltoniano con respecto al vector de Poisson

$$\psi = -\frac{1}{\langle x, \nabla F \rangle} V^0 \times x \quad (2.79)$$

y la función F . En particular, en el caso cuando la integral primera F es una función homogénea de orden $s > 0$, la fórmula (psiv0) es equivalente a

$$\psi = -\frac{1}{sF} V^0 \times x.$$

Sistemas Completamente Integrables. En este apartado, procedemos a estudiar una clase de sistemas, más precisamente, sistemas completamente integrables. Para ello, recordamos la siguiente

Definición 2.5 *El sistema (2.71) se dice ser completamente integrable si admite dos integrales primeras $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que el dominio*

$$N = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \operatorname{rank} \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x} = 2\}, \quad \mathbb{F} = \mathbb{F}(F_1, F_2),$$

es denso en \mathbb{R}^3 y los gradientes $\nabla F_1, \nabla F_2$ son linealmente independientes.

Es claro que el dominio N es invariante bajo el flujo de un sistema completamente integrable y sus trayectorias en N están definidas como las componentes conexas de los conjuntos de nivel comunes de las integrales primeras F_1 y F_2 .

Proposición 2.38 *Cada sistema completamente integrable (2.71) en N es un sistema bi-Hamiltoniano en el sentido*

$$V = m\nabla F_1 \times \nabla F_2, \quad (2.80)$$

para una cierta $m \in C^\infty(N)$.

Demostración. La representación (2.80) es consecuencia de las igualdades $\langle V, \nabla F_1 \rangle = \langle V, \nabla F_2 \rangle = 0$ y la hipótesis de que $\nabla F_1, \nabla F_2$ son linealmente independientes en N . ■

Por lo tanto, un sistema completamente integrable admite dos estructuras Hamiltonianas: $(\psi = m\nabla F_1, F = F_2)$ y $(\tilde{\psi} = m\nabla F_2, \tilde{F} = -F_1)$. De hecho, tenemos una familia de estructuras Hamiltonianas. En efecto, sean

$$K = c_{11}F_1 + c_{12}F_2, \quad (2.81)$$

$$H = c_{21}F_1 + c_{22}F_2, \quad (2.82)$$

para algunas constantes $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Si

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0,$$

entonces

$$V = m\nabla K \times \nabla H. \quad (2.83)$$

Aquí, la función K juega el papel de función de Casimir y H es el Hamiltoniano. De manera más general, es posible tomar $K = k(F_1, F_2)$ y $H = h(F_1, F_2)$, donde $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones suaves tales que $\det \frac{\partial(k,h)}{\partial x} \neq 0$ en $\mathbb{F}^{-1}(N)$. Entonces, es posible tomar $m \mapsto \det \frac{\partial(k,h)}{\partial x} m$ en la representación (2.83). Se escogen distintas K y H en (2.81) y (2.82) surgen distintas maneras de organizar las trayectorias del sistema en una familia de superficies invariantes (hojas simplécticas).

Ejemplo 2.5 *Consideremos el sistema de Euler*

$$\dot{x} = x \times Ax,$$

donde $A \in \text{Sym}_3(\mathbb{R})$. La elección estándar para H y K están dadas por

$$K = \frac{1}{2}\|x\|^2,$$

$$H = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle.$$

Teorema 2.39 *Sea V el campo vectorial del sistema dinámico (2.71). Supongamos que existen un dominio denso abierto N en \mathbb{R}^3 y una distribución de planos \mathcal{D} orientable e integrable en N tales que*

(a) V es tangente a \mathcal{D} ,

$$V(x) \in \mathcal{D}_x, \quad (2.84)$$

(b) V admite una integral primera $F \in C^\infty(N)$ que satisface

$$(V \times \nabla F)^\perp \neq 0, \text{ en } N, \quad (2.85)$$

donde $(V \times \nabla F)^\perp$ es la componente normal de $V \times \nabla F$ con respecto a la descomposición ortogonal

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{D}_x \oplus \mathcal{D}_x^\perp, \quad x \in N \quad (2.86)$$

(c) La clase de primera característica $c_{\mathcal{D}}^1$ de la distribución de planos \mathcal{D} es trivial,

$$c_{\mathcal{D}}^1 = 0, \quad (2.87)$$

(d) N es simplemente conexo.

Entonces, el sistema (2.71) es completamente integrable en N .

Demostración. Por el teorema de Frobenius, la distribución de planos está generada por un vector de Poisson. Escogemos una función vectorial suave $\tilde{\psi} : N \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{D}_x = \langle \tilde{\psi} \rangle^\perp$. La condición (2.85) implica que V no se anula en N y podemos definir el campo vectorial

$$W = -\frac{1}{\|V\|^2} V \times \tilde{\psi}. \quad (2.88)$$

Es claro que W es tangente a \mathcal{D} , de esta manera los campos V y W son compatibles. Más aún, tenemos

$$\begin{aligned} \langle W, \nabla F \rangle &= -\frac{1}{\|V\|^2} \langle V \times \tilde{\psi}, \nabla F \rangle \\ &= \frac{1}{\|V\|^2} \langle \tilde{\psi}, V \times \nabla F \rangle \neq 0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Luego, por el teorema (2.36), el campo vectorial V es Hamiltoniano con respecto al vector de Poisson

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{\langle W, \nabla F \rangle} V \times W \\ &= \frac{\|V\|^2}{\langle \tilde{\psi}, V \times \nabla F \rangle} \tilde{\psi}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

y la función F ,

$$V = \psi \times \nabla F.$$

Luego, la condición (2.87) significa que el vector de Poisson admite un factor integrante m , esto es, $\frac{1}{m}\alpha_\psi$ es cerrada en N . Pero, por la condición (d), esta 1-forma es exacta, $\frac{1}{m}\alpha_\psi = dK$ para cierta $K \in C^\infty(N)$. La condición (2.85) garantiza que ∇F y ∇K son linealmente independientes en N , así, el campo vectorial V admite dos integrales primeras funcionalmente independientes F y K en N . ■

Es importante notar que la condición (c) se puede relajar a la condición (d). Una consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente

Corolario 2.40 *Supongamos que se cumplen las condiciones (a) y (c) de (2.39). Entonces, existe factor integrante m para \mathcal{D} , por tanto la 1-forma $\frac{1}{m}\alpha_\psi$ es cerrada en N^{reg} . Además, si $\frac{1}{m}\alpha_\psi$ es exacta, esto es, $\mathfrak{c}_{\mathcal{D}}^1 = 0$, entonces el sistema es completamente integrable.*

Capítulo 3

Espacios de Poisson Afines

En esta sección estudiaremos los corchetes de Poisson afines en \mathbb{R}^3 .

3.1 Parametrización

Un corchete de Poisson $\{, \}_\psi$ en \mathbb{R}^3 se dice *afín*, si preserva el subespacio de funciones afines $C_{af}^\infty(\mathbb{R}^3)$. En este caso, el vector de Poisson correspondiente ψ es una función vectorial afín

$$\psi(x) = \Psi x + n, \quad (3.1)$$

donde $\Psi \in gl(3; \mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{R}^3$.

Proposición 3.1 (*Parametrización*) *Cada vector de Poisson afín ψ en \mathbb{R}^3 es de la forma*

$$\psi(x) = Ax + l \times x + n, \quad (3.2)$$

donde A , una matriz de 3×3 , $l, n \in \mathbb{R}^3$ satisfacen las condiciones

$$A = A^T, \quad (3.3)$$

$$Al = 0, \quad (3.4)$$

$$\langle n, l \rangle = 0. \quad (3.5)$$

La estructura de Poisson afín correspondiente está dada por las relaciones del corchete

$$\{x_i, x_j\} = \epsilon_{ijk} A_{ks} x_s + (l_i x_j - l_j x_i) + \epsilon_{ijk} n_k \quad (3.6)$$

Demostración. Primero, $\psi(x) = \Psi x + n$. Luego,

$$\text{rot}\psi = (\Psi_{32} - \Psi_{23}, \Psi_{13} - \Psi_{31}, \Psi_{21} - \Psi_{12}).$$

Sea $l = \text{rot}\psi$. Notemos que

$$\Lambda \circ \text{rot}\psi = \Psi - \Psi^T.$$

Además, recordemos que

$$\Psi = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T) + \frac{1}{2}(\Psi - \Psi^T).$$

Denotemos por $A = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T)$. Ahora, como ψ es un vector de Poisson, satisface

$$\langle \psi, \text{rot}\psi \rangle = 0,$$

esto es equivalente a

$$\langle Ax, l \rangle + \frac{1}{2} \langle (\Lambda \circ l)x, l \rangle + \langle n, l \rangle = 0.$$

Observemos que A satisface (3.3), así

$$\langle x, Al \rangle + \langle n, l \rangle = 0,$$

lo cual se cumple cuando se satisfacen las condiciones (3.4) y (3.5). \blacksquare

Por lo tanto, la matriz Ψ en (3.1) tiene la descomposición

$$\Psi = A + \Lambda \circ l,$$

en parte simétrica y antisimétrica respectivamente. A cada corchete de Poisson afín dado por los parámetros (A, l, n) podemos asociarle el álgebra de Lie tres dimensional $\mathfrak{g}_{A,l}$ con corchete de Lie

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} \Psi_{ks} e_s.$$

Proposición 3.2 (*Equivalencia*) *Dos corchetes de Poisson afines asociados a los triples (A, l, n) y $(\tilde{A}, \tilde{l}, \tilde{n})$ son isomorfos bajo una transformación afín*

$$x \mapsto Lx + b,$$

para alguna $L \in GL(3; \mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^3$ si y sólo si

$$\tilde{A} = (\det L)L^{-T}AL^{-1}, \quad (3.7)$$

$$\tilde{l} = Ll, \quad (3.8)$$

$$\tilde{n} = (\det L)L^{-T}n - (\tilde{A} + \Lambda \circ \tilde{l})b. \quad (3.9)$$

Demostración. Sean $\phi(x) = Lx + b$, $\psi(x) = Ax + (\Lambda \circ l)x + n$ y $\tilde{\psi}(x) = \tilde{A}x + (\Lambda \circ \tilde{l})x + \tilde{n}$. Luego, al utilizar el lema (??) obtenemos

$$\frac{1}{\det L} \left[L^T \tilde{A}Lx + L^T \tilde{l} \times Lx + L^T (\tilde{A}b + \tilde{l} \times b + \tilde{n}) \right] = Ax + l \times x + n,$$

de donde obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{\det L} L^T \tilde{A}L = A, \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\det L} L^T (\Lambda \circ \tilde{l})L = \Lambda \circ l, \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{\det L} L^T (\tilde{A}b + \tilde{l} \times b + \tilde{n}) = n, \quad (3.12)$$

nótese que la ecuación (3.10) es precisamente la condición (3.7). Luego, obtenemos la relación

$$l = L^{-1}\tilde{l},$$

es decir, la condición (3.8). Además se tiene que la ecuación (3.11) es equivalente a

$$\frac{1}{\det L}L^T(\Lambda \circ \tilde{l})L = \Lambda \circ (L^{-T}\tilde{l}).$$

Al realizar un análisis más detallado en la ecuación (3.12) obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det L}(L^T\tilde{A}L)L^{-1}b &= AL^{-1}b, \\ \frac{1}{\det L}L^T\tilde{l} \times b &= \frac{1}{\det L}L^T(\Lambda \circ \tilde{l})b = l \times (L^{-1}b), \end{aligned}$$

y con estas concluimos que la ecuación (3.12) es equivalente a

$$AL^{-1}b + l \times (L^{-1}b) + \frac{1}{\det L}L^T\tilde{n} = n,$$

o, de otra manera

$$(A + \Lambda \circ l)L^{-1}b = n - \frac{1}{\det L}L^T\tilde{n}.$$

de donde es posible concluir la condición (3.9). ■

Es importante notar que las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{A,l}$ y $\mathfrak{g}_{\tilde{A},\tilde{l}}$ de las estructuras de Poisson afines isomorfas ψ y $\tilde{\psi}$ son también isomorfas, pero el recíproco no es verdadero.

Denotemos por \mathcal{P} al subconjunto en el espacio vectorial 12-dimensional $\text{Sym}_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^{12}$ de todos los triples (A, l, n) que satisfacen (3.3)-(3.5). Este subconjunto de parámetros está definido como el conjunto de ceros

$$\mathcal{P} = \{F(A, l, n) = 0\}$$

de una aplicación $C^\infty F : \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ dada por

$$F(A, l, n) := (Al, \langle n, l \rangle).$$

Lema 3.3 *Para cualquier (L, b) la transformación*

$$T_{L,b} : (A, l, n) \mapsto (\tilde{A}, \tilde{l}, \tilde{n}) \tag{3.13}$$

dada por (3.7)-(3.9) preserva el subconjunto de parámetros $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{12}$.

Demostración. Sea $(A, l, n) \in \mathcal{P}$. Es claro que \tilde{A} en (3.7) es también simétrica y $\tilde{A}\tilde{l} = 0$. Más aún,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{l}, \tilde{n} \rangle &= (\det L)\langle Ll, L^{-T}n \rangle - \langle \tilde{l}, (\tilde{A} + \Lambda \circ \tilde{l})b \rangle \\ &= -\langle \tilde{A}\tilde{l}, b \rangle - \langle \tilde{l}, (\Lambda \circ \tilde{l})b \rangle = 0. \end{aligned}$$

■

Denotemos el grupo de transformaciones (3.13) por

$$\mathfrak{T} = \{T_{L,b} \mid L \in \text{GL}(3; \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^3\}.$$

Decimos que dos elementos $(A, l, n), (\tilde{A}, \tilde{l}, \tilde{n}) \in \mathcal{P}$ son equivalentes (o, *conjugados*) y escribimos $(A, l, n) \sim (\tilde{A}, \tilde{l}, \tilde{n})$, si están relacionados por una transformación $T_{L,b}$. Por lo tanto, el problema de clasificación de estructuras de Poisson afines se reduce al estudio de las órbitas (clases de equivalencia) de la acción \mathfrak{T} sobre \mathcal{P} .

3.2 Teorema de Clasificación

Aquí probamos el siguiente resultado sobre la clasificación de estructuras de Poisson afines el cual generaliza la clasificación de Bianchi [33].

Teorema 3.4 *Cada corchete de Poisson afín en \mathbb{R}^3 es isomorfo a uno de los corchetes de Poisson*

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \psi_3(x), \\ \{x_2, x_3\} &= \psi_1(x), \\ \{x_3, x_1\} &= \psi_2(x), \end{aligned}$$

donde el vector de Poisson $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ está dado por

Tipo	ψ_1	ψ_2	ψ_3
(I)	x_1	x_2	x_3
(II)	x_1	x_2	$-x_3$
(III)($\alpha \geq 0$)	0	$x_2 - \alpha x_3$	$\alpha x_2 + x_3$
(IV)	1	x_2	$\pm x_3$
(V)($\alpha \geq 0$)	0	$x_2 - \alpha x_3$	$\alpha x_2 - x_3$
(VI)	0	$x_2 - x_3 \pm 1$	$x_2 - x_3 \pm 1$
(VII)	0	0	x_3
(VIII)	1	0	x_3
(IX)	0	$-x_3$	$x_2 + x_3$
(X)	0	$-x_3$	x_2
(XI)	1	0	0

Tabla 3.1: Clasificación de vectores de Poisson

Observaciones 3.1 *Las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{A,l}$ asociadas a las estructuras de Poisson lineales (I), (II), (III), (V), (VII), (IX), (X) corresponden, respectivamente, a las álgebras (V), (VI), (III), (IV), (II), (VIII), (VII) en la clasificación de Bianchi. Otra observación importante es la siguiente. La estructura de Poisson del tipo (III) en la tabla (3.1) tiene asociadas otras dos álgebras de Lie en la clasificación de Bianchi. Más precisamente, cuando $\alpha > 0$, es equivalente al álgebra numerada como (IX) en dicha clasificación, y cuando $\alpha = 0$ es equivalente también al tipo*

(X) en tal clasificación. De manera análoga, la estructura de Poisson del tipo (V) en la tabla (3.1) tiene asociadas otras tres álgebras más. Concretamente, si $\alpha = 0$ es equivalente al álgebra numerada como tipo (XIII) en la clasificación de Bianchi. Cuando $\alpha = 1$ es equivalente al tipo (XI) y finalmente cuando $\alpha > 0$ es equivalente al tipo (XII) en dicha clasificación.

La verificación de este resultado se basa en algunos hechos algebraicos. Asociemos a cada matriz simétrica $A \in \text{Sym}_3(\mathbb{R})$ el número

$$s(A) := |s_+(A) - s_-(A)|$$

donde $s_+(A)$ y $s_-(A)$ son los índices de inercia positivo y negativo, respectivamente, de la forma cuadrática $Q_A(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle$. Es claro que $s(A)$ toma cualquier valor entre 0, 1, 2, 3.

Lema 3.5 *Dos matrices simétricas A y \tilde{A} están relacionadas mediante (3.7) si y sólo si*

$$\text{rank}A = \text{rank}\tilde{A}, \quad (3.14)$$

y,

$$s(A) = s(\tilde{A}). \quad (3.15)$$

Demostración. Recordemos, de la teoría de álgebra lineal, que dos formas cuadráticas q y \tilde{q} son equivalente si y sólo si $\text{rank}q = \text{rank}\tilde{q}$ y $s_+(q) = s_+(\tilde{q})$. Al sustituir $L = \sqrt{|\det L|}G$ en (3.7), obtenemos

$$\tilde{A} = \text{sgn}(\det L)G^{-T}AG^{-1}. \quad (3.16)$$

De aquí concluimos que la forma cuadrática $Q_{\tilde{A}}$ es equivalente a Q_A o $-Q_A$. Esto pasa si se satisface la condición (3.14) y $s_+(\tilde{A}) = s_+(A)$ o $s_+(\tilde{A}) = s_-(A)$. Pero la última propiedad es equivalente a (3.15). ■

Es posible concluir de (3.16) lo siguiente. Al tomar $L = \frac{G}{|\det G|}$ y teniendo en cuenta la igualdad $\det L = \frac{\det G}{|\det G|^3}$, es fácil ver que la relación (3.7) se puede reescribir en la forma

$$A = \text{sgn}(\det G)G^T\tilde{A}G, \quad (3.17)$$

para una cierta $G \in \text{GL}(3; \mathbb{R})$. Más aún, en términos de G , las relaciones (3.8), (3.9) se representan como sigue

$$l = |\det G|G^{-1}\tilde{l}, \quad (3.18)$$

y

$$(A + \Lambda \circ l)c = n - (\det G)G^T\tilde{n}, \quad (3.19)$$

donde $c = \frac{1}{|\det G|}Gb$.

Como consecuencia, derivamos el siguiente criterio necesario para la equivalencia entre elementos de \mathcal{P} .

Corolario 3.6 Sean $(A, l, n), (\tilde{A}, \tilde{l}, \tilde{n}) \in \mathcal{P}$. Si $(A, l, n) \sim (\tilde{A}, \tilde{l}, \tilde{n})$, entonces las condiciones (3.14), (3.15) se satisfacen y

$$l \neq 0 \text{ y } \tilde{l} \neq 0,$$

o

$$l = 0 \text{ y } \tilde{l} = 0.$$

Sean $(A, l, n) \in \mathcal{P}$ y $\Psi = A + \Lambda \circ l$. De las condiciones (3.3), (3.4) tenemos que $Al = 0$, $\Psi l = 0$ e $\text{Im } A \subset \langle l \rangle^\perp$. Denotemos por $A_0 = A|_{\langle l \rangle^\perp}$ y $\Psi_0 = \Psi|_{\langle l \rangle^\perp}$ las restricciones de A y Ψ al complemento ortogonal de la recta generada por el vector l , $\langle l \rangle^\perp$. Nótese que si $\text{rank } A = 3$, entonces $l = 0$ y $\Psi = A$.

Lema 3.7 Si $\text{rank } A \leq 2$, entonces

$$\det \Psi_0 = \det A_0 + \|l\|^2. \quad (3.20)$$

Demostración. Como A es real y simétrica, existe una base ortonormal $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ en \mathbb{R}^3 tal que

$$A\nu_i = \lambda_i\nu_i,$$

$$\nu_i \times \nu_j = \epsilon_{ijk}\nu_k,$$

$$l = \|l\|\nu_1.$$

Entonces, la identidad (3.20) se sigue de las relaciones

$$(A + \Lambda \circ l)\nu_2 = \lambda_2\nu_2 + \|l\|\nu_3,$$

$$(A + \Lambda \circ l)\nu_3 = -\|l\|\nu_2 + \lambda_2\nu_2,$$

donde

$$\det A_0 = \lambda_2\lambda_3. \quad \blacksquare$$

Corolario 3.8 Supongamos que $(A, l, n), (\tilde{A}, \tilde{l}, \tilde{n}) \in \mathcal{P}$ satisfacen (3.17) y (3.18) para cierta G . Entonces, la ecuación (3.19) es soluble para c en los siguientes casos

- $\text{rank } A = 3$ ($l = 0$),
- $\text{rank } A \leq 2$ y

$$\det A_0 + \|l\|^2 \neq 0$$

La demostración se sigue la relación (3.20) y el hecho de que el lado derecho de la ecuación $\Psi c = n - (\det G)G^T\tilde{n}$ es ortogonal a l ,

$$\langle n - (\det G)G^T\tilde{n}, l \rangle = -(\det G)\langle \tilde{n}, Gl \rangle = -(\det G)\langle \tilde{n}, \tilde{l} \rangle = 0.$$

Ahora, podemos clasificar las matrices simétricas utilizando la siguiente consecuencia del lema (3.3): cada matriz simétrica no trivial $A \in \text{Sym}_3(\mathbb{R})$ se puede reducir mediante una transformación

$$A \mapsto (\det L)L^{-T}AL^{-1} = \text{sgn}(\det G)G^{-T}AG^{-1} \quad (3.21)$$

a una de las siguientes formas:

- tipo (I), $\text{rank } A = 3$, $s(A) = 3$:

$$\mathbb{I}_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- tipo (II), $\text{rank } A = 3$, $s(A) = 1$:

$$\mathbb{I}_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- tipo (III), $\text{rank } A = 2$, $s(A) = 2$:

$$\mathbb{I}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- tipo (IV), $\text{rank } A = 2$, $s(A) = 1$:

$$\mathbb{I}_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- tipo (V), $\text{rank } A = 1$, $s(A) = 1$:

$$\mathbb{I}_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- tipo (VI), $\text{rank } A = 0$.

La siguiente cuestión es describir los grupos de matrices G para los cuales la transformación (3.21) deja invariante a las formas canónicas $\mathbb{I}_{i,j}$. Denotemos por

$$\mathfrak{M}_{i,j} = \{G \in \text{GL}(3; \mathbb{R}) \mid \text{sgn}(\det G)G^T \mathbb{I}_{i,j} G = \mathbb{I}_{i,j}\},$$

donde $(i, j) = (2, 2), (2, 1), (1, 1)$. La rotación en el plano por un ángulo φ se denota por

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Consideremos también las rotaciones hiperbólicas

$$H(\varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix},$$

y las matrices

$$\varrho_{\pm}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \varrho_{\pm}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 3.9 *Los grupos de Lie de matrices $\mathfrak{M}_{2,2}$, $\mathfrak{M}_{2,0}$ y $\mathfrak{M}_{1,1}$ son descritos como sigue*

(i) $G \in \mathfrak{M}_{2,2}$ si

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & * \\ 0 & g \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

donde

$$g = \varrho_{\pm}^{(1)} R(\varphi) \quad (\det g = \pm 1), \quad (3.23)$$

$$\operatorname{sgn} G_{11} = \operatorname{sgn}(\det g). \quad (3.24)$$

(ii) $G \in \mathfrak{M}_{2,0}$ si G es de la forma (3.22), donde

$$g = \varrho_{\pm}^{(1)} H(\varphi) \quad (\det g = \pm 1), \quad (3.25)$$

$$\operatorname{sgn} G_{11} = \operatorname{sgn}(\det g), \quad (3.26)$$

o

$$g = \varrho_{\pm}^{(2)} H(\varphi) \quad (\det g = \mp 1), \quad (3.27)$$

$$\operatorname{sgn} G_{11} = -\operatorname{sgn}(\det g), \quad (3.28)$$

(iii) $G \in \mathfrak{M}_{1,1}$ si

$$G = \begin{pmatrix} g & * \\ 0 & G_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

donde $g \in \operatorname{GL}(2; \mathbb{R})$ y

$$G_{33}^2 = 1, \quad (3.30)$$

$$\operatorname{sgn} G_{33} = \operatorname{sgn}(\det g), \quad (3.31)$$

Demostración.

(i) Al representar a G como

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & z^T \\ w & g \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$G^T \mathbb{I}_{2,2} G = \begin{pmatrix} w^T w & w^T g \\ g^T w & g^T g \end{pmatrix}.$$

Entonces, $G \in \mathfrak{M}_{2,2}$ si

$$G^T \mathbb{I}_{2,2} G = \varepsilon \mathbb{I}_{2,2}, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}(\det G),$$

de donde concluimos

$$g^T = 0, \quad g^T g = \varepsilon I.$$

Así, $\varepsilon = +$, por lo tanto $g^T g = I$ y $w = 0$. De esta manera, $\det G = G_{11} \det g > 0$, la matriz G es de la forma (3.22) y G_{11} satisface la condición (3.24).

- (ii) Utilizando los mismos argumentos que en el caso anterior, mostramos que cada matriz $G \in \mathfrak{M}_{2,0}$ es de la forma (3.22), donde $\det G = G_{11} \det g$ y g satisface la relación

$$\operatorname{sgn}(G_{11} \det g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = g^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g.$$

Si $\operatorname{sgn} G_{11} = \operatorname{sgn}(\det g)$, entonces g está determinada por (3.25) y (3.26). En el caso cuando se satisface (3.28), obtenemos la condición (3.27).

- (iii) Mediante cálculo directo derivamos que G satisface la ecuación

$$\operatorname{sgn}(\det G) G^T \mathbb{I}_{1,1} G = \mathbb{I}_{1,1}$$

si y sólo si G es de la forma (3.29), donde $g \in \operatorname{GL}(2; \mathbb{R})$ y $G_{33} \neq 0$ tal que

$$\operatorname{sgn}(\det G) G_{33}^2 = 1.$$

Así, $\det G = G_{33} \det g > 0$ y la última condición es exactamente equivalente a las condiciones (3.30), (3.31). ■

Ahora, suponemos que $A = \tilde{A} = \mathbb{I}_{i,j}$ y utilizamos la libertad en la elección de una matriz $G \in \mathfrak{M}_{i,j}$ para estudiar las relaciones (3.18), (3.19) en los casos anteriores (I) – (V). En cada caso, describimos los elementos en \mathcal{P} que definen las clases de equivalencia. En lo siguiente, denotamos por $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$ la base ortonormal positiva usual en \mathbb{R}^3 .

Demostración. Del teorema (3.4)

- (i) Caso $A = \tilde{A} = \mathbb{I}_{3,3} = I$ o $A = \tilde{A} = \mathbb{I}_{3,1}$. Entonces $l = \tilde{l} = 0$ y $n, \tilde{n} \in \mathbb{R}^3$ son arbitrarios. Tomamos $G = I$ en (3.17), de esta forma obtenemos que para cualesquiera n y \tilde{n} la ecuación (3.19) tiene solución $b = n - \tilde{n}$ o $b = \mathbb{I}_{3,1}(n - \tilde{n})$. Por lo tanto

$$(A, 0, n) \sim (I, 0, 0)$$

si $\operatorname{rank} A = 3$ y $s(A) = 3$, $n \in \mathbb{R}^3$, y

$$(A, 0, n) \sim (\mathbb{I}_{3,1}, 0, 0)$$

si $\operatorname{rank} A = 3$ y $s(A) = 1$, $n \in \mathbb{R}^3$.

- (ii) Caso $A = \tilde{A} = \mathbb{I}_{2,2}$. Sea $G \in \mathfrak{M}_{2,2}$. Supongamos

$$l \neq 0 \text{ y } \tilde{l} \neq 0. \tag{3.32}$$

Como $\text{Ker } \mathbb{I}_{2,2} = \langle e_1 \rangle$, de la propiedad (3.4) obtenemos

$$l = \alpha e_1 \text{ y } \tilde{l} = \tilde{\alpha} e_1, \quad (3.33)$$

para algunos $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ distintos de cero. Ahora, tomando en cuenta que $|\det G| = |G_{11}| |\det g|$, concluimos que la condición (3.18) se escribe como sigue

$$\tilde{\alpha} = \frac{G_{11}}{|G_{11}|} \frac{1}{|\det g|} \alpha = \text{sgn} G_{11} \alpha.$$

Esto significa que las condiciones (3.17), (3.18) se satisfacen sólo si $\tilde{\alpha} = \alpha$ o $\tilde{\alpha} = -\alpha$. En estos casos, podemos escoger

$$G = I \text{ o } G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Luego, tenemos que $A_0 = I$ y

$$\Psi_0 = \text{sgn} G_{11} = \text{sgn}(\det g).$$

Por lo tanto, $\det \Psi_0 = 1 + \alpha^2 \neq 0$ y la ecuación (3.19) es soluble para una elección arbitraria de vectores n y \tilde{n} ortogonales a e_1 .

Ahora, supongamos que

$$l = 0 \text{ y } \tilde{l} = 0. \quad (3.34)$$

Así, la ecuación (3.19) se escribe como sigue

$$\mathbb{I}_{2,2} c = n - (\det G) G^T \tilde{n},$$

donde $n, \tilde{n} \in \mathbb{R}^3$. La condición de solubilidad para esta ecuación es

$$n_1 = G_{11}^2 (\det g) \tilde{n}_1.$$

Esto significa que $n_1 = \tilde{n}_1 = 0$ o $n_1 \neq 0$ y $\tilde{n}_1 \neq 0$. Finalmente, concluimos que las clases de equivalencia son generadas por los elementos

$$(\mathbb{I}_{2,2}, \alpha e_1, 0), \quad \alpha \geq 0,$$

$$(\mathbb{I}_{2,2}, 0, e_1).$$

- (iii) Caso $A = \tilde{A} = \mathbb{I}_{2,0}$. Sea $G \in \mathfrak{M}_{2,0}$. Se sigue de (3.22) que si se satisface la condición (3.32) los vectores l y \tilde{l} son de la forma (3.33). De las relaciones (3.25)-(3.28) y utilizando los mismos argumentos que en el caso anterior, mostramos que la condición (3.18) se reduce a la relación $\tilde{\alpha} = \text{sgn} G_{11} \alpha$. Por lo tanto, si $\tilde{\alpha} = \alpha$ o $\tilde{\alpha} = -\alpha$ escogemos $G = I$, o de la forma (??), donde $G_{11} = -1$ y $g = \varrho^2$. Luego, la restricción del operador $\Psi = A + \Lambda \circ l$ al plano $\langle e_2, e_3 \rangle$ está dada por

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix},$$

de esta manera $\det \Psi_0 = -1 + \alpha^2$. Bajo la condición $\alpha^2 \neq 1$, la ecuación (3.19) tiene solución para una elección arbitraria de vectores n y \tilde{n} ortogonales a e_1 .

En el caso cuando $\alpha^2 = 1$, el problema en (3.19) se reduce a encontrar G_{11} y g tal que la ecuación

$$\Psi_0^\pm \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} - G_{11}(\det g)g^T \begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

es soluble. Aquí

$$\Psi_0^\pm = \begin{pmatrix} 1 & \pm\alpha \\ \mp\alpha & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \pm 1.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $\tilde{\alpha} = \alpha = 1$. Entonces, $G_{11} > 0$ y de las relaciones (3.25)-(3.28) se sigue que tenemos dos opciones para la elección de g :

$$g = \varrho_+^1 H(\varphi) \text{ o } g = \varrho_+^2 H(\varphi). \quad (3.36)$$

Sea $\langle w, z \rangle_{1,1} = w_1 z_1 - w_2 z_2$ la pseudométrica en el plano y $\eta^\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, tenemos

$$\Psi_0^+ \eta^- = 0, \quad \Psi_0^+ \eta^+ = 2\eta^-, \quad (3.37)$$

y

$$\langle \eta^\pm, \eta^\pm \rangle_{1,1} = 0 \quad \langle \eta^+, \eta^- \rangle_{1,1} = 2. \quad (3.38)$$

Al tomar la siguiente descomposición

$$\begin{pmatrix} n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = n_+ \eta^+ + n_- \eta^-, \quad \begin{pmatrix} \tilde{n}_2 \\ \tilde{n}_3 \end{pmatrix} = \tilde{n}_+ \eta^+ + \tilde{n}_- \eta^-,$$

de las propiedades (3.37),(3.38), deducimos que la solubilidad de la ecuación (3.35) está dada por

$$2n_+ = G_{11} \det g (\tilde{n}_+ \langle \eta^+, g\eta^- \rangle_{1,1} + \tilde{n}_- \langle \eta^-, g\eta^- \rangle_{1,1}). \quad (3.39)$$

Por otro lado, tomando en cuenta la libertad en la elección de g , (3.36), y las identidades $\varrho_+^1 \eta^\pm = \eta^\pm$ y $\varrho_+^2 \eta^\pm = \pm \eta^\pm$, obtenemos que (3.39) es equivalente a la condición $n_+ = e^{-\varphi} G_{11} \tilde{n}_+$. Para que esta relación se cumpla, tenemos las siguientes tres opciones

- $n_+ > 0$ y $\tilde{n}_+ > 0$;
- $n_+ < 0$ y $\tilde{n}_+ < 0$;
- $n = \tilde{n} = 0$.

Ahora, supongamos que $l = \tilde{l} = 0$. Entonces, la ecuación (3.19) es de la forma

$$\mathbb{I}_{2,0} c = n - (\det G) G^T \tilde{n},$$

la cual es soluble sólo si $n_1 = \tilde{n}_1 = 0$ o $n_1 \neq 0$ y $\tilde{n}_1 \neq 0$.

Finalmente, obtenemos que las clases de equivalencia están generadas por los elementos

$$\begin{aligned} &(\mathbb{I}_{2,0}, \alpha e_1, 0), \quad \alpha \geq 0, \\ &(\mathbb{I}_{2,0}, e_1, e_2 + e_3), \\ &(\mathbb{I}_{2,0}, e_1, -(e_2 + e_3)), \\ &(\mathbb{I}_{2,0}, 0, e_1). \end{aligned}$$

(iv) Caso $A = \tilde{A} = \mathbb{I}_{1,1}$. Sea $G \in \mathfrak{M}_{1,1}$. Supongamos que $l \neq 0$ y $\tilde{l} \neq 0$. Entonces, como $\ker \mathbb{I}_{1,1} = \langle e_1, e_2 \rangle$, obtenemos

$$\begin{aligned} l &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\ \tilde{l} &= \tilde{\alpha}_1 e_1 + \tilde{\alpha}_2 e_2. \end{aligned}$$

De las relaciones (3.29)-(3.31) obtenemos $|\det G| = |\det g|$, de esta manera la condición (3.18) se puede reescribir como sigue

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\det g|} g \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

por lo tanto, bajo una elección apropiada de una matriz no singular $g \in \text{GL}(2; \mathbb{R})$, siempre es posible resolver (3.40). Supongamos ahora, que $l = \tilde{l} = e_1$. Así,

$$\Psi = \mathbb{I}_{1,1} + \Lambda \circ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de esta forma, la ecuación (3.19) es soluble cuando $G = I$ y los vectores n y \tilde{n} son ortogonales a e_1 . Consideremos el caso cuando $l = \tilde{l} = 0$. Luego, la ecuación (3.19) es equivalente a

$$\mathbb{I}_{1,1}c = n - (\det G)G^T \tilde{n}.$$

La condición de solubilidad de esta ecuación es como sigue

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = (G_{33} \det g) g^T \begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \end{pmatrix}.$$

Es claro que esta ecuación es soluble para cierta elección de $g \in \text{GL}(2; \mathbb{R})$ cuando $n \neq 0$ y $\tilde{n} \neq 0$, o cuando $n = \tilde{n} = 0$. Resumiendo, concluimos que las clases de equivalencia están determinadas por los elementos

$$\begin{aligned} &(\mathbb{I}_{1,1}, e_1, 0), \\ &(\mathbb{I}_{1,1}, 0, 0), \\ &(\mathbb{I}_{1,1}, 0, e_1). \end{aligned}$$

- (v) Caso $A = \tilde{A} = 0$. Como la condición (3.17) no impone restricción alguna sobre la elección de una matriz no singular G , es posible resolver (3.18) para vectores arbitrarios no nulos l y \tilde{l} . Supongamos $l = \tilde{l} = e_1$, así, la relación (3.19) es equivalente a la ecuación

$$e_1 \times c = n - \tilde{n},$$

la cual es soluble siempre que n y \tilde{n} sean ortogonales a e_1 . Si $l = \tilde{l} = 0$, entonces para cualesquiera $n, \tilde{n} \in \mathbb{R}^3$, distintos de cero, existe G tal que $n = (\det G)G^T \tilde{n}$. Por lo tanto, tenemos dos clases de equivalencia asociadas a los elementos

$$(0, e_1, 0),$$

$$(0, 0, e_1)$$

Finalmente, recogiendo los resultados anteriores, concluimos que las clases de equivalencia están determinadas por los siguientes elementos de \mathcal{P} :

Tipo	A	l	n
(I)	$\mathbb{I}_{3,3}$	0	0
(II)	$\mathbb{I}_{3,1}$	0	0
(III)($\alpha \geq 0$)	$\mathbb{I}_{2,2}$	αe_1	0
(IV)	$\mathbb{I}_{2,2}$	0	e_1
	$\mathbb{I}_{2,0}$	0	e_1
(V)($\alpha \geq 0$)	$\mathbb{I}_{2,0}$	αe_1	0
(VI)	$\mathbb{I}_{2,0}$	e_1	$\pm(e_2 + e_3)$
(VII)	$\mathbb{I}_{1,1}$	0	0
(VIII)	$\mathbb{I}_{1,1}$	0	e_1
(IX)	$\mathbb{I}_{1,1}$	e_1	0
(X)	0	e_1	0
(XI)	0	0	e_1

Tabla 3.2: Clases de equivalencia de elementos de \mathcal{P}

Con esto terminamos la demostración del teorema (3.4) ■

3.3 Funciones de Casimir y Foliaciones Simpléticas

Sea $\psi(x) = Ax + l \times x + n$ un vector de Poisson afín asociado a un elemento $(A, l, n) \in \mathcal{P}$. Consideremos el subconjunto de puntos regulares $N_{reg} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \psi(x) \neq 0\}$. Nuestra meta es estudiar la foliación de N_{reg} mediante superficies simpléticas (hojas), $(\mathcal{S}, \omega_{\mathcal{S}})$, las cuales son variedades integrales de la distribución característica $x \mapsto \mathcal{D}_x = \langle \psi(x) \rangle^\perp$, esto es, \mathcal{S} es una subvariedad conexa (inmersa) en \mathbb{R}^3 , la cual es tangente a \mathcal{D}_x , $T_x \mathcal{S} = \mathcal{D}_x$. Por el teorema (2.20), la forma simplética $\omega_{\mathcal{S}}$ está definida por

$$\omega_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\|Ax + l \times x + n\|} \sigma_{\mathcal{S}},$$

donde

$$\sigma_{\mathcal{S}} = (\nu_1 dx_2 \wedge dx_3 + \nu_2 dx_3 \wedge dx_1 + \nu_3 dx_1 \wedge dx_2)|_{\mathcal{S}}$$

es la forma de área en \mathcal{S} asociada a la orientación dada por el campo vectorial normal

$$\nu(x) = \frac{Ax + l \times x + n}{\|Ax + l \times x + n\|}.$$

De esta manera, podemos distinguir dos situaciones, si la hoja simpléctica \mathcal{S} es una subvariedad cerrada en \mathbb{R}^3 o no. Si la estructura de Poisson afín admite una función de Casimir global, no trivial, $K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$(Ax + l \times x + n) \times \nabla K = 0, \quad (3.41)$$

entonces las componentes conexas del conjunto de nivel regular $\{K = \text{const}\} \subset N_{\text{reg}}$ de K generan las hojas simplécticas cerradas. Las hojas simplécticas que no son cerradas aparecen normalmente en los conjuntos de nivel singulares de K o en el caso cuando no hay funciones de Casimir globales.

Teorema 3.10 *Cada corchete de Poisson afín admite un factor integrante en $N^{\text{reg}}(\mathfrak{c}_{\mathcal{D}}^1 = 0)$. Más aún, se cumplen las siguientes afirmaciones*

- (i) *Existe una función de Casimir global K para las estructuras de Poisson afines tipo (I), (II), (III)($\alpha = 0$), (IV), (V)($\alpha = 0, 1$), (VI), (VII), (VIII), (XI); más aún, para los tipos (I), (II), (III)($\alpha = 0$), (IV), (V)($\alpha = 0, 1$), (VII), (VIII), (XI), el vector de Poisson es*

$$\psi = \nabla K,$$

$$N^{\text{reg}} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla K(x) \neq 0\}.$$

Para los tipos (V)($\alpha = 1$), (VI), tenemos

$$\psi = m \nabla K, \quad (3.42)$$

$$N^{\text{reg}} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid m(x) \neq 0\},$$

donde el factor integrante m es una función lineal. Las hojas simplécticas no-cerradas aparecen solamente en los corchetes de Poisson lineales de los tipos (II), (V)($\alpha = 0, 1$) y (VI).

- (ii) *Los corchetes de Poisson lineales del tipo (III)($\alpha > 0$), (V)($\alpha > 0, \alpha \neq 1$), (IX) y (X) no admiten función de Casimir global. En estos casos, no es posible representar el vector de Poisson ψ en la forma (3.42).*

Para probar este resultado, separamos las estructuras de Poisson afines en tres clases, y de acuerdo con el teorema de clasificación, estudiamos cada una por separado.

Primero, empezamos con el caso cuando

$$\text{rot}\psi = 0. \quad (3.43)$$

Como, en general, $\text{rot}\psi = l$, esta condición significa $l = 0$ y el vector de Poisson es de la forma $\psi(x) = Ax + n$, el cual define el corchete de Poisson afín

$$\{f, g\} = \langle Ax + n, \nabla f \times \nabla g \rangle,$$

para arbitrarios $A \in \text{Sym}_3(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{R}^3$. Es claro que este corchete admite una función de Casimir global de la forma

$$K = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle n, x \rangle,$$

así $\psi = \nabla K$. Por lo tanto, la 1-forma es exacta, $\alpha_\psi = dK$. El conjunto regular N_{reg} puede tener una estructura topológica distinta, la cual depende del rango de la matriz A :

- Si $\text{rank } A = 3$, entonces $N_{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{un punto}\}$ es conexo y simplemente conexo;
- Si $\text{rank } A = 2$, entonces $N_{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{una recta}\}$ es conexo pero no simplemente conexo;
- Si $\text{rank } A = 1$, entonces $N_{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{un plano}\}$ no es conexo pero si es simplemente conexo.

De acuerdo con el teorema de clasificación, tenemos los siguientes tipos de estructuras de Poisson afines no isomorfas que satisfacen (3.43).

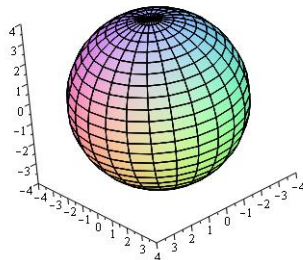
Tipo (I). ($\psi = x$) En este caso, tenemos el corchete de Poisson lineal asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$

$$\{x_1, x_2\} = x_3, \quad \{x_3, x_1\} = x_2, \quad \{x_2, x_3\} = x_1.$$

La función de Casimir correspondiente es

$$K = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

y la foliación simpléctica del conjunto regular N_{reg} está dada por las 2-esferas $\mathbb{S}_r^2 = \{\|x\| = r > 0\}$,



cuya forma simpléctica está dada por

$$\omega_S = \frac{1}{\|x\|^2} (x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2) \Big|_{\mathbb{S}_r^2}.$$

Tipo (II). ($\psi = (x_1, x_2, -x_3)$) En este caso, tenemos el corchete de Poisson lineal asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$

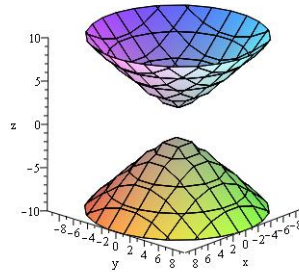
$$\{x_1, x_2\} = -x_3, \quad \{x_3, x_1\} = x_2, \quad \{x_2, x_3\} = x_1.$$

Existe una función de Casimir global $K = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$. El conjunto regular $N_{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ está foliado por las componentes conexas del conjunto de nivel

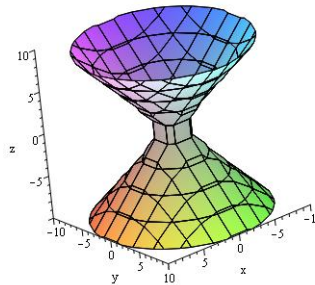
$$\mathcal{S}_{\pm r} = \{K(x) = \pm \frac{r}{2}, r > 0\}$$

de la función de Casimir. Hay tres tipos de superficies simplécticas de dimensión 2:

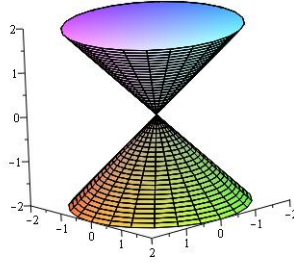
1. $\mathcal{S}_{-r} = \mathcal{S}_{-r}^+ \cup \mathcal{S}_{-r}^-$ es un hiperboloide de dos hojas;



2. \mathcal{S}_{+r} es un cilindro hiperbólico de una hoja;



3. $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0^+ \cup \mathcal{S}_0^-$ es el cono centrado en el origen.



Aquí, \mathcal{S}_{-r}^+ y \mathcal{S}_{-r}^- son las componentes conexas determinadas por la elección de $\pm = \text{sgn}x_3$. El cono \mathcal{S}_0 está en un conjunto de nivel singular de K y no es una subvariedad cerrada. La forma simpléctica es

$$\omega_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\|x\|^2} (x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 - x_3 dx_1 \wedge dx_2) \Big|_{\mathcal{S}_{\pm r}}.$$

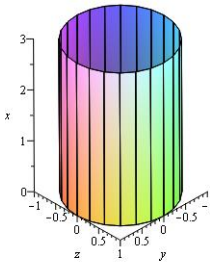
Tipo (III). ($\alpha = 0, \psi = (0, x_2, x_3)$). El corchete de Poisson lineal corresponde al álgebra de Lie exponencial $\mathfrak{e}(2)$

$$\{x_1, x_2\} = x_3, \quad \{x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_3, x_1\} = x_2,$$

el cual admite una función de Casimir global

$$K = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2).$$

El conjunto regular $N_{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = 0, x_3 = 0\}$ está foliado por los 2-cilindros $\mathcal{S} = \mathcal{C}_r = \{x_2^2 + x_3^2 = r^2, |r > 0\}$,



equipado con la forma simpléctica

$$\omega_{\mathcal{S}} = \frac{1}{(x_2^2 + x_3^2)} (x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2) \Big|_{\mathcal{C}_r}.$$

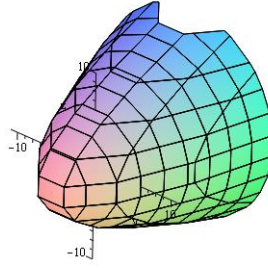
Tipo (IV). ($\psi = (1, x_2, \pm x_3)$). El corchete de Poisson afín está dado por

$$\{x_1, x_2\} = \pm x_3, \quad \{x_2, x_3\} = 1, \quad \{x_3, x_1\} = x_2,$$

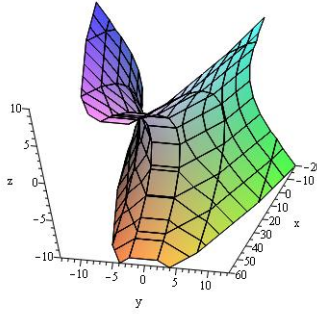
y admite una función de Casimir global

$$K = x_1 + \frac{1}{2}(x_2^2 \pm x_3^2).$$

El conjunto regular $N_{reg} = \mathbb{R}^3$ está foliado por las superficies de revolución $\mathcal{S}_c = \{x_1 = c - \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)\}$,



o por las superficies de revolución $\mathcal{S}_c = \{x_1 = c - \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2)\}$,



con forma simpléctica dada por

$$\omega_{\mathcal{S}} = \frac{1}{(1 + x_2^2 + x_3^2)} (dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 \pm x_3 dx_1 \wedge dx_2) \Big|_{\mathcal{S}_r}.$$

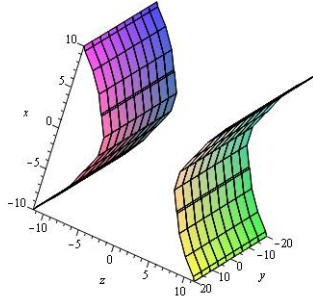
Tipo (V). ($\alpha = 0, \psi = (0, x_2, -x_3)$). El corchete de Poisson lineal está dado por

$$\{x_1, x_2\} = -x_3, \quad \{x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_3, x_1\} = x_2.$$

La función de Casimir y el conjunto regular son

$$K = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2)$$

y $N^{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = 0, x_3 = 0\}$, el cual está foliado por las superficies $\frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2) = \text{const.}$



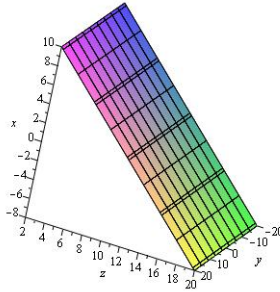
La forma simpléctica está dada por

$$\omega_{\mathcal{S}} = \frac{1}{(x_2^2 + x_3^2)} (x_2 dx_3 \wedge dx_1 - x_3 dx_1 \wedge dx_2) \Big|_{\mathcal{S}}.$$

Tipo (V). $(\alpha = 1, \psi = (0, x_2 - x_3, x_2 - x_3))$. El corchete de Poisson lineal está dado por

$$\{x_1, x_2\} = x_2 - x_3, \quad \{x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_3, x_1\} = x_2 - x_3.$$

Los conjuntos de nivel de la función de Casimir $K = x_2 + x_3$,



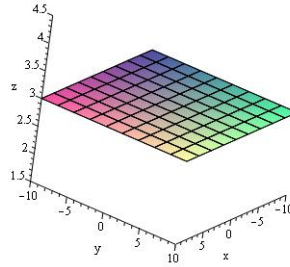
dan lugar a la foliación del conjunto regular $N_{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = x_3\}$. La forma simpléctica está dada por

$$\omega_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2(x_2 - x_3)} (dx_3 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_2) \Big|_{\mathcal{S}}.$$

Tipo (VII). $(\psi = (0, 0, x_3))$. El corchete de Poisson lineal está asociado al álgebra de Lie de Heisenberg

$$\{x_1, x_2\} = x_3, \quad \{x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_3, x_1\} = 0$$

cuya función de Casimir global es $K = \frac{1}{2}x_3^2$. El conjunto regular $N_{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_3 = 0\}$ es la unión de los planos paralelos $\mathcal{S} = \{x_3 = r \neq 0\}$,



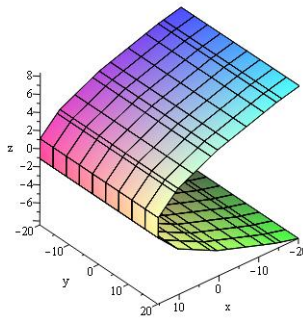
con estructura simpléctica

$$\omega_{\mathcal{S}} = \frac{1}{r}(dx_1 \wedge dx_2)|_{\mathcal{S}}.$$

Tipo (VIII). ($\psi = (1, 0, x_3)$). El corchete de Poisson afín está determinado por

$$\{x_1, x_2\} = x_3, \quad \{x_2, x_3\} = 1, \quad \{x_3, x_1\} = 0,$$

cuya función de Casimir global es $K = x_1 + \frac{1}{2}x_3^2$. El conjunto regular $N_{reg} = \mathbb{R}^3$ está foliado por las superficies de revolución $\mathcal{S}_c = \{x_1 = c - \frac{1}{2}x_3^2\}$,



dotado con la forma simpléctica

$$\omega_{\mathcal{S}_c} = \frac{1}{(1+x_3^2)}(dx_2 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2)|_{\mathcal{S}_c}.$$

Consideremos ahora el otro caso particular, cuando $A = 0$. Entonces $\psi = l \times x + n$, con $\langle l, n \rangle = 0$. Si $l \neq 0$, el conjunto de nivel

$$N_{reg} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|l \times x + n\| \neq 0\} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

no es simplemente conexo. La 1-forma de Poisson

$$\alpha_{\psi} = \langle l \times x + n, dx \rangle$$

no es cerrada,

$$d\alpha_\psi = l_1 dx_2 \wedge dx_3 + l_2 dx_3 \wedge dx_1 + l_3 dx_1 \wedge dx_2 \neq 0,$$

y la 1-forma η_ψ (2.10) es exacta

$$\eta_\psi = d \ln(\|l \times x + n\|).$$

Esto implica la trivialidad de la clase de primera característica, $c_D^1 = 0$. Luego, por el teorema (2.18), existe un factor integrante m para ψ , el cual está dado por

$$m = \|l \times x + n\|.$$

Por lo tanto, la 1-forma

$$\frac{1}{m} \alpha_\psi = \frac{1}{\|l \times x + n\|} \langle l \times x + n, dx \rangle$$

es cerrada, pero no exacta en N^{reg} . Esto significa que no existe una función de Casimir global (no trivial) en N^{reg} . Por el teorema de clasificación tenemos los siguientes dos casos no isomorfos.

Tipo (X). ($\psi = (0, -x_3, x_2)$). El corchete de Poisson lineal está dado por

$$\{x_1, x_2\} = x_2, \quad \{x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_3, x_1\} = -x_3.$$

El conjunto regular es $N_{\text{reg}} = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = 0, x_3 = 0\}$. La relación (3.41) es equivalente a

$$x_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial K}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0,$$

de donde concluimos

$$K = \kappa \left(\frac{x_2}{x_3} \right),$$

donde $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ debe ser una función de manera que K sea suave. Por lo tanto, en este caso no existe función de Casimir global. Luego, tenemos que la distribución característica es

$$N_{\text{reg}} \ni x \mapsto \mathcal{D}_x = \text{Span}\{e_1, x_2 e_2 + x_3 e_3\}$$

y la forma simpléctica

$$\omega_{\mathcal{S}} = \frac{1}{(x_2^2 + x_3^2)} (-x_3 dx_3 \wedge dx_1 + x_2 dx_1 \wedge dx_2) \Big|_{\mathcal{S}}.$$

Paramétricamente, la hoja simpléctica que pasa por $p \in N^{\text{reg}}$ está dada por

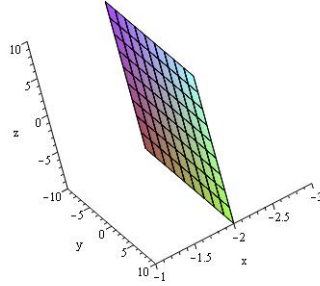
$$\mathcal{S}_p = \{(p_1 + \tau_1, p_2 e^{\tau_2}, p_3 e^{\tau_2}) \mid (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2\},$$

y es cohomológicamente trivial.

Tipo (XI). ($\psi = (1, 0, 0)$). El corchete de Poisson afín está dado por

$$\{x_1, x_2\} = 0, \quad \{x_2, x_3\} = 1, \quad \{x_3, x_1\} = 0.$$

La función de Casimir es $K = x_1$, el conjunto regular es $N_{\text{reg}} = \mathbb{R}^3$ y está foliado por los planos $\mathcal{S} = \{x_1 = c\}$,



y la forma simpléctica es

$$\omega_S = dx_2 \wedge dx_3.$$

Finalmente, consideremos el caso cuando $A \neq 0$ y $l \neq 0$. En este caso, la 1-forma de Poisson

$$\alpha_\psi = \frac{1}{2}d(\langle Ax, x \rangle) + (\langle l \times x + n, dx \rangle)$$

no es cerrada

$$d\alpha_\psi = \Omega_l \neq 0.$$

Aquí, de acuerdo nuevamente con el teorema de clasificación, tenemos 4 casos no isomorfos.

Tipo (III). ($\alpha > 0, \psi = (0, x_2 - \alpha x_3, \alpha x_2 + x_3)$). El corchete de Poisson lineal está dado por

$$\{x_1, x_2\} = \alpha x_2 + x_3, \quad \{x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_3, x_1\} = x_2 - \alpha x_3.$$

En el conjunto regular

$$N^{\text{reg}} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 \neq 0\} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

la 1-forma de Poisson tiene la representación

$$\alpha_\psi = -\alpha(x_3 dx_2 - x_2 dx_3) + \frac{1}{2}d(x_2^2 + x_3^2)$$

y no es cerrada

$$d\alpha_\psi = 2\alpha dx_2 \wedge dx_3.$$

La 1-forma asociada η_ψ es d_S -exacta,

$$\eta_\psi = d(\ln(x_2^2 + x_3^2)) - \frac{2}{(1 + \alpha^2)(x_2^2 + x_3^2)}\alpha_\psi,$$

de esta manera, el corchete de Poisson admite un factor integrante dado por

$$m = x_2^2 + x_3^2.$$

Luego, la 1-forma

$$\frac{1}{m}\alpha_\psi = \frac{-\alpha}{(x_2^2 + x_3^2)}(x_3 dx_2 - x_2 dx_3) + \frac{1}{2(x_2^2 + x_3^2)}d(x_2^2 + x_3^2)$$

es cerrada, pero no exacta en N^{reg} . Esto significa que no existe función de Casimir global (no trivial) en N^{reg} .

La función de Casimir “local” está definida por las relaciones

$$(\alpha x_2 + x_3)\frac{\partial K}{\partial x_2} - (x_2 - \alpha x_3)\frac{\partial K}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0.$$

Con esto obtenemos

$$K = \kappa \left(\alpha \arctan \frac{x_3}{x_2} + \frac{1}{2} \ln(x_2^2 + x_3^2) \right).$$

La distribución característica en el conjunto regular $N_{\text{reg}} = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = 0, x_3 = 0\}$ está generada por dos campos vectoriales que conmutan

$$W_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad W_2 = (\alpha x_2 + x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} - (x_2 - \alpha x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Al calcular los flujos de estos campos vectoriales obtenemos la representación paramétrica de la hoja simpléctica que pasa por $p \in N^{\text{reg}}$

$$S_p = \{(p_1 + \tau_1, e^{\alpha\tau_2}(p_2 \cos \tau_2 + p_3 \sen \tau_2), e^{\alpha\tau_2}(-p_2 \sen \tau_2 + p_3 \cos \tau_2)) \mid (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

La correspondiente forma simpléctica es

$$\omega_{S_p} = \frac{1}{(1 + \alpha^2)(x_2^2 + x_3^2)} ((x_2 - \alpha x_3)dx_3 \wedge dx_1 + (\alpha x_2 + x_3)dx_1 \wedge dx_2) \Big|_{S_p}.$$

Tipo (V). ($\alpha > 0, \alpha \neq 1, \psi = (0, x_2 - \alpha x_3, \alpha x_2 - x_3)$). El corchete de Poisson lineal está dado por

$$\{x_1, x_2\} = \alpha x_2 - x_3, \quad \{x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_3, x_1\} = x_2 - \alpha x_3,$$

es regular en $N^{\text{reg}} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 \neq 0\} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. La 1-forma de Poisson

$$\alpha_\psi = (x_2 - \alpha x_3)dx_2 + (\alpha x_2 - x_3)dx_3,$$

no es cerrada

$$d\alpha_\psi = 2\alpha dx_2 \wedge dx_3.$$

La 1-forma asociada η_ψ está dada por

$$\eta_\psi = \alpha \frac{(\alpha x_2 - x_3)dx_2 - (x_2 - \alpha x_3)dx_3}{((x_2 - \alpha x_3)^2 + (\alpha x_2 - x_3)^2)}$$

y es d_S -exacta, y el correspondiente factor integrante está dado por

$$m = ?.$$

La 1-forma $\frac{1}{m}\alpha_\psi$ no es exacta en N^{reg} , por lo tanto no existe función de Casimir global para $\alpha \neq 0, 1$. Ahora, la función de Casimir “local” está definida por las relaciones

$$(\alpha x_2 - x_3) \frac{\partial K}{\partial x_2} - (x_2 - \alpha x_3) \frac{\partial K}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0.$$

Con esto obtenemos

$$K = \kappa \left(\frac{|x_2 - x_3|^{\alpha-1}}{|x_2 + x_3|^{\alpha+1}} \right),$$

La distribución característica \mathcal{D}^ψ está generada por los campos vectoriales que conmutan

$$W_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \text{ y } W_2 = (\alpha x_2 - x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} - (x_2 - \alpha x_3) \frac{\partial}{\partial x_3},$$

cuyos flujos permiten dar una parametrización para la hoja simpléctica que pasa por $p \in N^{\text{reg}}$

$$S_p = \left\{ (\tau_1 + p_1, \frac{p_2}{2}(e^{\alpha\tau_2} + \text{ch}(\tau_2)) - \frac{p_3}{2}\text{sh}(\tau_2), \frac{p_3}{2}(e^{\alpha\tau_2} + \text{ch}(\tau_2)) - \frac{p_2}{2}\text{sh}(\tau_2)) \right\}.$$

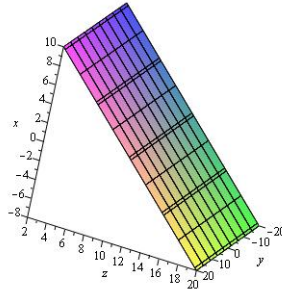
equipada con la forma simpléctica

$$\omega_{S_p} = \frac{1}{((1 + \alpha^2)(x_2^2 + x_3^2) - 4\alpha x_2 x_3)} ((x_2 - \alpha x_3) dx_3 \wedge dx_1 + (\alpha x_2 - x_3) dx_1 \wedge dx_2) \Big|_{S_p}.$$

Tipo (VI). ($\psi = (0, x_2 - x_3 \pm 1, x_2 - x_3 \pm 1)$). El corchete de Poisson afín está dado por

$$\{x_1, x_2\} = x_2 - x_3 \pm 1, \quad \{x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_3, x_1\} = x_2 - x_3 \pm 1.$$

La función de Casimir $K = x_2 + x_3$ define la foliación del conjunto regular $N_{\text{reg}} = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 - x_3 \pm 1 = 0\}$, la cual consta de planos paralelos $\mathcal{S}_c = \{x_2 + x_3 = c\}$,



con la forma simpléctica

$$\omega_{\mathcal{S}} = \frac{1}{(x_2 - x_3 \pm 1)^2} ((x_2 - x_3 \pm 1) dx_3 \wedge dx_1 + (x_2 - x_3 \pm 1) dx_1 \wedge dx_2) \Big|_{\mathcal{S}_c}.$$

Tipo (IX). ($\psi = (0, -x_3, x_2 + x_3)$). El corchete de Poisson lineal está dado por

$$\{x_1, x_2\} = x_2 + x_3, \quad \{x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_3, x_1\} = -x_3.$$

Las ecuaciones para una función de Casimir son

$$(x_2 + x_3) \frac{\partial K}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial K}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0,$$

de lo cual concluimos

$$K = \kappa \left(\frac{x_2}{x_3} - \ln(x_3) \right),$$

de esta forma, no existe función de Casimir global. El conjunto regular es $N_{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = 0, x_3 = 0\}$. Consideremos la 1-forma de Poisson correspondiente

$$\alpha_\psi = -x_3 dx_2 + (x_2 + x_3) dx_3$$

y la 1-forma

$$\eta_\psi = \frac{1}{x_3^2 + (x_2 + x_3)^2} ((x_2 + x_3) dx_2 + x_3 dx_3).$$

Observemos que la distribución característica \mathcal{D}^ψ está generada por los campos vectoriales que conmutan

$$W_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \text{y } W_2 = (x_2 + x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Estos campos vectoriales son completos y la hoja simpléctica de \mathcal{D}^ψ que pasa por $p \in N^{reg}$ está definida paramétricamente por

$$S_p = \{(p_1 + \tau_1, (p_2 + \tau_2 p_3) e^{\tau_2}, p_3 e^{\tau_2}) \mid (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

y es cohomológicamente trivial. En este caso, $\mathfrak{c}_D^1 = 0$, existe un factor integrante m , pero la 1-forma cerrada $\frac{1}{m} \alpha_\psi$ no es exacta.

3.4 Sistemas Localmente Hamiltonianos

En esta sección, estudiamos sistemas localmente Hamiltonianos en espacios de Poisson afines. Consideremos la clase de sistemas dinámicos tres dimensionales

$$\dot{x} = V(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

tal que el campo vectorial V satisface una de las siguientes condiciones en \mathbb{R}^3 :

$$\text{supp}(\text{div}V) = \mathbb{R}^3 \tag{3.44}$$

ó

$$\text{div}V \equiv 0. \tag{3.45}$$

Supongamos que $\psi(x) = Ax + l \times x + n$ es un vector de Poisson afín asociado a un elemento no trivial $(A, l, n) \in \mathcal{P}$.

Proposición 3.11 (Necesidad) *Si un campo vectorial V es localmente Hamiltoniano relativo a un corchete de Poisson afín $\{\cdot, \cdot\}_\psi$, entonces*

$$V \times l + \operatorname{div}(V)(Ax + l \times x + n) = 0. \quad (3.46)$$

Si, además, V satisface la condición (3.44), entonces

$$l \neq 0$$

y la condición (3.46) es equivalente a las relaciones

$$V_2 = \frac{\operatorname{div}V}{\|l\|}v_2, \quad V_3 = \frac{\operatorname{div}V}{\|l\|}v_3, \quad (3.47)$$

$$v_2 = \langle Ax, \mathbf{i}_3 \rangle + \|l\|x_2 + n_3, \quad (3.48)$$

$$v_3 = \langle Ax, \mathbf{i}_2 \rangle - \|l\|x_3 + n_2, \quad (3.49)$$

donde

$$V = V_1(x)\mathbf{i}_1 + V_2(x)\mathbf{i}_2 + V_3(x)\mathbf{i}_3, \quad (3.50)$$

$$n = n_2\mathbf{i}_2 + n_3\mathbf{i}_3$$

y el conjunto $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ es una base ortonormal orientada positivamente en \mathbb{R}^3 tal que

$$l = \|l\|\mathbf{i}_1. \quad (3.51)$$

Demostración. Recordemos que $\operatorname{rot}\psi = l$. Luego, por la proposición (2.24), concluimos que si V es un campo localmente Hamiltoniano con respecto a un corchete de Poisson afín ψ , entonces la condición (3.46) se satisface. Ahora, si $l = 0$ y la condición (3.44) se satisface, entonces $\operatorname{div}V = 0$, dado que se cumplen (3.46) y $\operatorname{supp}(\psi) = \mathbb{R}^3$. Pero esto contradice (3.44). Al tomar la descomposición para V y n , y al sustituirlos en (3.46), derivamos mediante cálculo directo las relaciones (3.47)-(3.49). ■

La siguiente consecuencia de la proposición (3.11) afirma que, en la clase de los campos vectoriales que satisfacen (3.44), la ecuación (3.46) es también una condición suficiente para que el campo vectorial V sea localmente Hamiltoniano.

Corolario 3.12 *Un campo vectorial V es localmente Hamiltoniano con respecto al corchete de Poisson afín $\{\cdot, \cdot\}_\psi$, si V satisface la condición (3.44) y la ecuación (3.46).*

Demostración. Al tomar el producto interior con V en ambos lados de la ecuación (3.46), concluimos que $\operatorname{div}V\langle\psi, V\rangle = 0$. Entonces, por la condición (3.44) obtenemos $\langle\psi, V\rangle = 0$ en \mathbb{R}^3 . ■

Ahora tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.13 *Sea ψ el vector de Poisson afín asociado a un elemento $(A, l, n) \in \mathcal{P}$ con $l \neq 0$. Entonces, cada campo vectorial localmente Hamiltoniano asociado al corchete de Poisson $\{, \}_\psi$ que satisface la condición (3.44) es de la forma (3.50) con*

$$V_1 = \frac{1}{\|l\|} \int \left(v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} - v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right) dx_1 - \int \rho dx_1 + \mu, \quad (3.52)$$

$$V_2 = \frac{\rho}{\|l\|} v_2, \quad (3.53)$$

$$V_3 = -\frac{\rho}{\|l\|} v_3, \quad (3.54)$$

donde $\mu = \mu(x_2, x_3)$ es una función arbitraria suave en las variables x_2, x_3 , las funciones v_2, v_3 están dadas por (3.48), (3.49) y $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ es una función arbitraria suave con

$$\text{supp}(\rho) = \mathbb{R}^3.$$

Demostración. Sea $\rho = \text{div}V$. Así, por la proposición (3.11) obtenemos las relaciones (3.53), (3.54). Continuando, como

$$\text{div}V = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3},$$

obtenemos

$$\rho = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\rho}{\|l\|} v_2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\rho}{\|l\|} v_3 \right),$$

y tomando en cuenta que

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = A_{32} + \|l\|, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = A_{23} - \|l\|,$$

además del hecho de que $A = A^T$ obtenemos

$$\rho = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\|l\|} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2} v_2 - \frac{\partial \rho}{\partial x_3} v_3 \right) + 2\rho,$$

finalmente, integrando la última expresión con respecto a x_1 obtenemos la relación (3.52). ■

Consideremos ahora, la clase de sistemas que satisfacen la condición (3.45). Luego, tenemos el siguiente

Teorema 3.14 *Sea ψ el vector de Poisson afín asociado a un elemento $(A, l, n) \in \mathcal{P}$. Entonces, cada campo vectorial localmente Hamiltoniano con respecto al corchete de Poisson $\{, \}_\psi$ que satisface (3.45) es descrito como sigue*

(a) si $l \neq 0$, entonces $V = fl$, donde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ es una función tal que

$$\langle l, \nabla f \rangle = 0;$$

(b) si $l = 0$, entonces V es un campo vectorial arbitrario con divergencia cero para el cual

$$K_{A,n} = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle n, x \rangle,$$

es una integral primera

$$L_V K_{A,n} = 0.$$

Demostración.

(a) Como V es localmente Hamiltoniano, satisface

$$V \times l + \operatorname{div}(V)(Ax + l \times x + n) = 0,$$

luego, como $\operatorname{div}(V) \equiv 0$, se tiene que $V \times l = 0$, esto es, V es proporcional a l , es decir,

$$V = fl,$$

para alguna $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

(b) Si $l = 0$, entonces $\psi(x) = Ax + n$. Además, como V es localmente Hamiltoniano, se cumple

$$\langle \psi, V \rangle = 0,$$

de esta manera

$$\langle Ax + n, V \rangle = 0,$$

pero esto es equivalente a

$$L_V \left(\frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle n, x \rangle \right) = 0.$$

■

Sistemas cuadráticos. Consideremos el caso cuadrático, esto es, un campo vectorial de la forma

$$V_i(x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 V_i^{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^3 V_i^j x_j + V_i^0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

para algunas constantes V_i^{jk}, V_i^j, V_i^0 . Entonces, $\operatorname{div}(V)$ es una función lineal en \mathbb{R}^3 , de esta manera satisface (3.44) ó (3.45).

A continuación formulamos el teorema (3.13) para el caso cuadrático.

Proposición 3.15 *Sea ψ el vector de Poisson afín asociado a un elemento $(A, l, n) \in \mathcal{P}$ con $l \neq 0$. Entonces, cada campo localmente Hamiltoniano con respecto al corchete de Poisson $\{, \}_\psi$ que satisface (3.44) está parametrizado por un par (ρ, μ) el cual consiste de una función lineal arbitraria*

$$\rho = \rho_0 + \sum_{i=1}^3 \rho_i x_i,$$

con

$$(\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \neq 0,$$

y un polinomio cuadrático

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{j,k=2}^3 \mu_{ij} x_j x_k + \sum_{j=2}^3 \mu_j x_j + \mu_0,$$

dado por

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{1}{2\|l\|} (\rho_3 A_{12} - \rho_2 A_{13} - \|l\| \rho_1) x_1^2 + \frac{1}{\|l\|} (\rho_3 A_{22} - \rho_2 A_{23} - 2\rho_2 \|l\|) x_1 x_2 + \\ & \frac{1}{\|l\|} (\rho_3 A_{23} - \rho_2 A_{33} - 2\rho_3 \|l\|) x_1 x_3 + \\ & (n_2 \rho_3 - \rho_2 n_3 - \rho_0) x_1 + \mu(x_2, x_3), \end{aligned} \tag{3.55}$$

$$V_2 = \frac{\rho}{\|l\|} (A_{13} x_1 + (A_{23} + \|l\|) x_2 + A_{33} x_3 + n_3), \tag{3.56}$$

$$V_3 = -\frac{\rho}{\|l\|} (A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + (A_{23} - \|l\|) x_3 + n_2). \tag{3.57}$$

Demostración. Por el teorema (3.13), V_2 y V_3 son inmediatos. Luego, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_3} = \rho_3, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = \rho_2,$$

además del hecho de que

$$\begin{aligned} v_2 &= A_{13} x_1 + (A_{23} + \|l\|) x_2 + A_{33} x_3 + n_3, \\ v_3 &= A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + (A_{23} - \|l\|) x_3 + n_2, \end{aligned}$$

de la relación (3.52) obtenemos (3.55). ■

Una consecuencia inmediata a este resultado es el siguiente

Corolario 3.16 *Cada estructura de Poisson afín ψ asociada a un elemento $(A, l, n) \in \mathcal{P}$ con $l \neq 0$ tiene una familia 10-paramétrica de campos vectoriales cuadráticos localmente Hamiltonianos que satisfacen (3.44).*

Ejemplo 3.1 *(Campos vectoriales lineales) De las relaciones (3.55)-(3.57), se sigue que los campos vectoriales lineales localmente Hamiltonianos forman una familia 4-paramétrica, la cual está dada por*

$$\begin{aligned} V_1 &= \mu_0 + (n_2 \rho_3 - \rho_2 n_3 - \rho_0) x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \\ V_2 &= \frac{\rho_0}{\|l\|} (A_{13} x_1 + (A_{23} + \|l\|) x_2 + A_{33} x_3 + n_3), \\ V_3 &= -\frac{\rho_0}{\|l\|} (A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + (A_{23} - \|l\|) x_3 + n_2). \end{aligned}$$

Finalmente, formulamos el siguiente resultado, el cual se basa en la proposición (3.15) y el teorema de clasificación.

Teorema 3.17 *Cada campo vectorial cuadrático*

$$V = V_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + V_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2} + V_3(x) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

localmente Hamiltoniano relativo a un corchete de Poisson afín $\{, \}_\psi$ que satisface (3.44) puede ser reducido mediante una transformación afín a una de las siguientes formas normales:

(I)

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{\rho_1}{2} x_1^2 + \frac{1}{\alpha} (\rho_3 - 2\alpha\rho_2) x_1 x_2 - \frac{1}{\alpha} (\rho_2 + 2\alpha\rho_3) x_1 x_3 - \rho_0 x_1 + \mu(x_2, x_3) \\ V_2 &= \frac{\rho}{\alpha} (\alpha x_2 + x_3) \\ V_3 &= -\frac{\rho}{\alpha} (x_2 - \alpha x_3) \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{\rho_1}{2} x_1^2 + \frac{1}{\alpha} (\rho_3 - 2\alpha\rho_2) x_1 x_2 + \frac{1}{\alpha} (\rho_2 - 2\alpha\rho_3) x_1 x_3 - \rho_0 x_1 + \mu(x_2, x_3) \\ V_2 &= \frac{\rho}{\alpha} (\alpha x_2 - x_3) \\ V_3 &= -\frac{\rho}{\alpha} (x_2 - \alpha x_3) \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{\rho_1}{2} x_1^2 + (\rho_3 - 2\rho_2) x_1 x_2 + (\rho_2 - 2\rho_3) x_1 x_3 + (\rho_3 - \rho_2 - \rho_0) x_1 + \mu(x_2, x_3) \\ V_2 &= \rho(x_2 - x_3 + 1) \\ V_3 &= -\rho(x_2 - x_3 + 1) \end{aligned}$$

(IV)

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{\rho_1}{2} x_1^2 + (\rho_3 - 2\rho_2) x_1 x_2 + (\rho_2 - 2\rho_3) x_1 x_3 + (-\rho_3 + \rho_2 - \rho_0) x_1 + \mu(x_2, x_3) \\ V_2 &= \rho(x_2 - x_3 - 1) \\ V_3 &= -\rho(x_2 - x_3 - 1) \end{aligned}$$

(V)

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{\rho_1}{2} x_1^2 - 2\rho_2 x_1 x_2 - (\rho_2 + 2\rho_3) x_1 x_3 - \rho_0 x_1 + \mu(x_2, x_3) \\ V_2 &= \rho(x_2 + x_3) \\ V_3 &= \rho x_3 \end{aligned}$$

(VI)

$$V_1 = -\frac{\rho_1}{2}x_1^2 - 2\rho_2x_1x_2 - 2\rho_3x_1x_3 - \rho_0x_1 + \mu(x_2, x_3)$$

$$V_2 = \rho x_2$$

$$V_3 = \rho x_3$$

Para verificar este resultado, por el teorema de clasificación tenemos 6 casos cuando $l \neq 0$. Al introducir A, l y n en cada uno de esos casos en las relaciones (3.55)-(3.57) se obtienen las 6 clases de campos vectoriales enunciados con anterioridad.

Apéndice 1

Sea \mathbb{R}^3 el espacio vectorial Euclidiano y sea N un dominio abierto en \mathbb{R}^3 . Denotemos por $\mathfrak{X}(N)$ y $\Lambda^k(N)$ a los espacios de campos vectoriales y k -formas en N , respectivamente. Entonces, existen isomorfismos $C^\infty(N)$ lineales

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(N) \ni w &\mapsto \alpha_w \in \Lambda^1(N) \\ \mathfrak{X}(N) \ni w &\mapsto \Omega_w \in \Lambda^2(N)\end{aligned}$$

definidos por

$$\begin{aligned}\alpha_w &= w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3, \\ \Omega_w &= w_1 dx_2 \wedge dx_3 + w_2 dx_3 \wedge dx_1.\end{aligned}$$

Denotemos por $\Upsilon = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ a la forma canónica de volumen en el espacio. En las siguientes tablas, presentamos algunas identidades importantes del cálculo diferencial y vectorial.

Formas Diferenciales
$dg = \alpha_{\nabla g}$
$d\alpha_w = \Omega_{\text{rot}w}$
$\alpha_{w \times \tilde{w}} = \mathbf{i}_{\tilde{w}} \Omega_w$
$d\Omega_w = \text{div}(w) \Upsilon$
$\mathbf{i}_w \Upsilon = \Omega_w$
$\Omega_{w \times \tilde{w}} = \alpha_w \wedge \alpha_{\tilde{w}}$
$\alpha_{\tilde{w}} \wedge \Omega_w = \langle \tilde{w}, w \rangle \Upsilon$
$\alpha_{w \times \text{rot}\tilde{w}} = -\mathbf{i}_w d\alpha_{\tilde{w}}$
$L_w(g\Upsilon) = (L_w g + \text{div}(w)g) \Upsilon$

Tabla 3.3: Identidades de formas diferenciales

Campos Vectoriales
$\text{div}(\text{rot}w) = 0$
$\text{rot}(\nabla g) = 0$
$\text{rot}(gw) = \nabla g \times w + g \text{rot}(w)$
$\text{div}(w \times \tilde{w}) = \langle \text{rot}(w), \tilde{w} \rangle - \langle \text{rot}(\tilde{w}), w \rangle$
$\text{rot}(w \times \tilde{w}) = \text{div}(\tilde{w})w - \text{div}(w)\tilde{w} - [w, \tilde{w}]$

Tabla 3.4: Identidades de campos vectoriales

aquí, $g \in C^\infty(N)$ y $w, \tilde{w} \in \mathfrak{X}(N)$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}^3$. Consideremos la matriz de producto cruz en \mathbb{R}^3

$$(\Lambda \circ a) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

de esta manera

$$(\Lambda \circ a)b = a \times b.$$

Sea $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un operador lineal. Luego, se cumplen las siguientes

$$(\Lambda \circ a)^2 b = \langle a, b \rangle a - \|a\|^2 b,$$

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2,$$

$$L \cdot (\Lambda \circ a) \cdot L^T = \Lambda \circ b,$$

donde

$$b = \det L (L^{-1})^T a.$$

Bibliografía

- [1] Abadoglu E., Gumral, H. *Bi-Hamiltonian Structure in Frenet-Serret Frame*, arXiv:0711.4849v1 [math-ph], (2007), 1-12.
- [2] Arnold V., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin,1989.
- [3] Alvarado Flores R.,Hernandez Davila J.M. and Aguero Granados. *Local Hamiltonization and Foliation: A new solution to the Hamiltonization Problem*. Electromagnetic Phenomena, V.6,2 (17),(2006), 191-201.
- [4] Ay A., Gurses M. Zheltukhin K. *Hamiltonian Equations in \mathbb{R}^3* , J. Math. Phys. 44 (2003), 5688-5705.
- [5] Boothby W. *An Introduction to Differentiable Manifolds And Riemannian Geometry*. Academic Press, Second Ed., 2003.
- [6] Chakravarty S. and Halbund R.G. *First integrals and gradient flow for a generalized Darboux-Halphen system*. Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, (2002) 1-9.
- [7] Dávila Rascón, Flores Espinoza, Vorobiev. *Álgebra Lineal: Teoría y problemas*. Editorial Unison, 2006.
- [8] Datta M. and Rabiul Islam MD. *Smooth maps of a foliated manifold in a symplectic manifold*. Proc. Indian Acad. Sci. (Math Sci.) Vol. 119, No. 3, (2009), 333-343.
- [9] Dubrovin B. A., Fomenko A. T., Novikov S. P. *Modern geometry. Methods and applications*, Graduate Texts in Mathematics, Vol.93, New York, Springer Verlag 1984.
- [10] Dufour J.-P. *Rotationnels et structures de Poisson quadratiques*. C.R.Acad.,Aci. Paris, v.312.,Ser.1 (1991), 137-140.
- [11] Gamella A. *An approach to the tangential Poisson Cohomology based on examples in duals of Lie Algebras*, Pacific Journal of Mathematics, Vol 203, No. 2, (2002),21-33.
- [12] Grabowski J., Marmo G., Perelomov A.M. *Poisson structures: towards a classification*. Vienna, Preprint ESI 17 (1993), 1-15.
- [13] Grammaticos B., Moulin-Ollagnier J., Ramani A., Strelcyn J. M. and Wojciechowski. *Integrals of quadratic ordinary differential equations in \mathbb{R}^3 : The Lotka-Volterra system*, Physica A 163 (1990), 683-722.

- [14] Gumral, H. *Existence of Hamiltonian Structure in 3D*, arXiv:1003.0343v1 [math.DS], (2010),1-12.
- [15] Gumral, H., Nuktu, Y. *Poisson Structure of dynamical systems with three degrees of freedom*. J.Math.Phys. 34 (1993) 5691-5723.
- [16] Haas F. and Goedert J. *On the Generalized Hamiltonian Structure of 3D Dynamical Systems*, arXIV:math-ph/ 0211035 V. 1,(2002), 1-15.
- [17] Haas F. *Formulacões de Poisson para Sistemas Dinâmicos*, Msc. Thesis, Instituto de Física da UFRGS, Porto Alegre, 1994.
- [18] Haas F. *Jacobi structures in \mathbb{R}^3* , J.Math.Phys 46, (2005), 1-11.
- [19] Hernández-Bermejo B. *New solution family of the Jacobi equations: Characterization, invariants, and global Darboux analysis*, J. Math. Phys. 48 (2007), 22903-22914.
- [20] Hernández Bermejo B. *The Jacobi identities for finite-dimensional Poisson structures: a P.D.E. based analysis of some new constructive results and solution families*. Ph.D. Thesis, Universitat de Lleida, 2008.
- [21] Hojman S., J. Phys A: Math and Gen. V. 29,3. (1996), 667-664.
- [22] Lichnerowicz A. *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*. J. Diff Geom, (1977), 253-300.
- [23] Maciejewski, A.J., Strelcyn J.M *On The Integrability of The Halphen System*.
- [24] Marsden, Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Second Ed. Springer, New York, 1999, 512 pp.
- [25] Marsden, Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Third Edition. Springer-Verlag, 2002.
- [26] Morita, S. *Geometry of Differential Forms.*, AMS, Transl. of Math. Monographs, vol.201, 2001.
- [27] Moulin Ollagnier J. *Liouvillean First Integrals of Homogeneous Polynomial 3-Dimensional Vector Fields*. Colloquium Mathematicum, Vol. LXX, (1996), 195-217.
- [28] Moulin Ollagnier J., Strelcyn J.M. *On first integrals of linear systems, Frobenius integrability theorem and linear representations of Lie Algebras*. Bifurcations of Planar Vector Fields, Eds Lecture Notes in Mathematics 1455, Springer-Verlag, (1991), 243-271.
- [29] Nambu Y. *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Phys. Rev. D 7, (1973),2405-2412.
- [30] Nutku Y. *Bi-Hamiltonian structure of the Kermack-McKendrick model for epidemics*, J. Phys. A: Math. Gen. 23 (1990), 1145-1146.

-
- [31] Plank M. *Hamiltonian structures for the n -dimensional Lotka-Volterra equations*. J. Math. Phys. 36, (1995), 3520-3534.
- [32] Pop C., David I., Popescu Busan A.I. *A New Approach about Lü System*. Advances in Mathematical and Computational Methods.
- [33] Puta, M., Georgescu, C. *3-Dimensional Poisson Manifolds. Casimirs*. Preprint, West University of Timisoara.
- [34] Sheng, Y. *Linear Poisson Structures on \mathbb{R}^4* , arXiv:0707.2870v4 [math.DG], (2010), 1-14.
- [35] Strelcyn J.M. and Wojciechowski. *A method of finding integrals for three-dimensional dynamical systems*, Phys. Lett. A133 (1988),207-212.
- [36] Tudoran R.M. and Girban A. *On a Hamiltonian version of a 3D Lotka-Volterra system*, arXiv:1106.1377v1 [math-ph], (2011).
- [37] Vaisman I. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Mathematics, 118, 1994.
- [38] Weinstein A., *The local structure of Poisson manifolds*. J. Diff. Geom., vol. 18 (1983), 523-557.