

---

---

# Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

---

---

## La bifurcación triple cero en sistemas m-parametrizados

Tesis que para obtener el Grado de Maestro en Ciencias

presenta:

Mayra Alejandra Mazón Méndez

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1. Teorema de Sotomayor para familias $m$ -parametrizadas . . . . .	4
1.2. Bifurcación de Hopf . . . . .	6
1.3. Teorema de la variedad central . . . . .	7
1.4. Teorema de la bifurcación Takens-Bogdanov . . . . .	11
<b>2 Forma Normal de la bifurcación triple cero</b>	<b>27</b>
2.1. Forma Normal Clásica . . . . .	27
2.1.1. Términos Cuadráticos . . . . .	28
2.2. Forma Normal Simplificada . . . . .	33
<b>3 Teorema de la bifurcación triple cero</b>	<b>37</b>
3.1. Deformación Versal . . . . .	38
3.2. Teorema Principal . . . . .	43
<b>4 Análisis de bifurcaciones</b>	<b>56</b>
4.1. Bifurcaciones de codimensión uno alrededor de puntos de equilibrio . . . . .	56
4.1.1. Bifurcaciones Estacionarias . . . . .	56
4.1.2. Bifurcación de Hopf . . . . .	60
4.2. Bifurcaciones de codimensión dos en puntos de equilibrio . . . . .	70
4.2.1. Bifurcación de Takens-Bogdanov . . . . .	70
4.2.2. Bifurcación cero-Hopf . . . . .	78

4.3. Órbitas heteroclínicas . . . . .	79
4.3.1. Cálculo de la variedad central . . . . .	80
4.3.2. Simulaciones . . . . .	82
<b>5 El péndulo inercial</b>	<b>84</b>
5.1. Análisis de bifurcación . . . . .	85
<b>6 Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>91</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>92</b>
<b>Apéndice C</b>	<b>95</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>108</b>

# Introducción

La teoría de bifurcaciones estudia los cambios que ocurren en el comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos parametrizados ante la variación de parámetros. Una forma de clasificar las bifurcaciones es por codimensión, donde la codimensión es el mínimo número de parámetros que necesita un sistema parametrizado para que ocurra una bifurcación. Las bifurcaciones de codimensión uno (silla-nodo, transcritical, horquilla y Hopf) y dos (Takens-Bogdanov, Cero-Hopf y Hopf-Hopf) ya han sido ampliamente estudiadas y caracterizadas y pueden encontrarse en diversos libros de texto (ver [9],[11],[12]), mientras que las bifurcaciones de codimensión tres son bifurcaciones que hasta el momento no han sido caracterizadas, existiendo muchos problemas abiertos alrededor de ellas.

Dentro de las bifurcaciones de codimensión tres se encuentra la bifurcación triple cero, que aparece cuando en la matriz de la parte lineal de un sistema se tiene un valor propio cero con multiplicidad geométrica uno. Fue Dumortier quien comenzó trabajando esta bifurcación (ver [5],[6]) con tres parámetros, empezando con la forma normal y haciendo el análisis de dicho sistema. Encontró que las bifurcaciones Cero-Hopf y Takens-Bogdanov se encontraban en su desdoblamiento entre muchos otros resultados importantes. Un año después, Freire *et al.* (ver [3]) basándose en los trabajos de Dumortier muestran otro desdoblamiento de la bifurcación triple cero, y el análisis parcial que ellos hacen revela la complejidad de los comportamientos de las soluciones que se encuentran dentro de esta bifurcación, la cuál la vuelve interesante de estudiar.

Siguiendo en la línea de Dumortier y Freire, el propósito en esta tesis es seguir trabajando sobre la bifurcación triple cero. Mostramos un teorema que establece las condiciones que se deben satisfacer para asegurar la existencia de dicha bifurcación en un sistema  $m$ -parametrizado, con  $m \geq 3$ , en tres dimensiones, además, se hace un análisis de bifur-

cación donde se mostrará un diagrama de bifurcación parcial, dado que solo mostraremos las regiones donde ocurrirán las bifurcaciones de codimensión uno y dos.

Este trabajo se encuentra dividido en las siguientes partes: En el primer capítulo, se presentan resultados que sirvan para el análisis de las bifurcaciones estudiadas dentro de la bifurcación triple cero. Dichos resultados son el teorema de la variedad central y los teoremas que dan las condiciones que se deben cumplir para que ocurran las bifurcaciones de codimensión uno y dos, mostrando también la demostración del *Teorema de la bifurcación Takens-Bogdanov* dado que, la que se presenta en el trabajo de Carrillo (ver [4]) utiliza una deformación versal diferente a la que se estableció en este trabajo. Sin embargo, la demostración de dicho teorema se basa en la técnica de Carrillo.

En el capítulo 2, dado un sistema  $m$ -parametrizado con  $m \geq 3$ , en tres dimensiones, determinamos la forma normal truncada hasta orden dos, utilizando una técnica que se puede generalizar a sistemas  $n$ -dimensionales. Una vez encontrada dicha forma normal, reparametrizamos en el tiempo y hacemos un nuevo cambio de coordenadas para simplificar aún más el sistema, obteniendo así los mismos resultados mostrados por Freire *et al.* (ver [3]) sin utilizar su técnica.

En el capítulo 3 empezamos trabajando con la forma normal del sistema obtenida en el capítulo 2, agregándole una perturbación general compuesta de 12 parámetros, que bajo un cambio de coordenadas propuesto por Murdock (ver [10]), logramos reducirlo solamente a tres parámetros. El sistema perturbado formado por los tres parámetros anteriores resulta ser la deformación versal estudiada por Freire *et al.* (ver [3]) y que nos ayudará a “desdoblar” el sistema de tal forma que se pueda estudiar el comportamiento de sus soluciones. Ya una vez expuesta la deformación versal, se demuestra bajo ciertas condiciones de transversalidad, no-degeneración y no-hiperbolicidad, que dicha deformación es topológicamente equivalente al sistema  $m$ -parametrizado en tres dimensiones que estamos estudiando. Dicho resultado es el teorema de la bifurcación triple cero que es uno de los principales elementos de esta tesis.

En el capítulo 4 analizaremos cada una de las bifurcaciones genéricas de codimensión menor que tres para saber si ocurren dentro de la bifurcación triple cero y lo hacemos utilizando los teoremas mostrados en el capítulo uno. De las bifurcaciones que si aparecen dentro de la bifurcación triple se hace un diagrama de bifurcación parcial en el espacio de parámetros. Dentro de este capítulo, también evidenciamos mediante simulaciones, la conexión entre dos puntos de equilibrio, definida como órbita heteroclínica, las cuales fueron encontradas cuando se hacían simulaciones del comportamiento de soluciones cerca de los puntos de equilibrio. Para evidenciar la existencia de dicha órbita heteroclínica fue necesario primero calcular la variedad central (truncada hasta orden dos) sobre uno de los puntos de equilibrio, después tomar soluciones iniciales equidistantes alrededor de dicho punto(en forma de círculo) y en la cuenca de atracción del otro punto de equilibrio y ver así como la trayectoria de las soluciones formaban un tubo que conectaba a los dos equilibrios. Después reducimos el radio del círculo y se observa que los tubos formados con las trayectorias de las soluciones se cubren unos a otros, y es así como se muestra la existencia de las órbitas heteroclínicas.

Algo interesante que ocurre con las órbitas heteroclínicas que se encuentran dentro de la bifurcación triple cero es que no se rompen al perturbar un poco los parámetros, lo cual nos permite conjeturar que, en el espacio de los parámetros, existe una superficie de dimensión dos, en donde ocurren las conexiones heteroclínicas. La demostración de esta conjetura está lejos de los objetivos de esta tesis.

En el capítulo 5 aplicaremos los resultados obtenidos previamente a un sistema que modela el funcionamiento de un péndulo inercial. Finalmente en el capítulo 6 mostraremos las conclusiones obtenidas en este trabajo.

# Capítulo 1 || Preliminares

Durante el desarrollo de este trabajo, nos apoyaremos de varios teoremas y lemas que serán de utilidad en capítulos posteriores, por tal motivo los presentamos aquí. Primeramente mencionaremos el *Teorema de Sotomayor para familias  $m$ -parametrizadas* (ver [1]), continuaremos con *la bifurcación de Hopf* (ver [7]) y finalmente presentaremos el *Teorema de la bifurcación Takens-Bogdanov* con su demostración, dado que la deformación versal que se utiliza en este trabajo es diferente a la que se muestra en el trabajo de Carrillo (ver [4]).

## 1.1. Teorema de Sotomayor para familias $m$ -parametrizadas

**Teorema 1** *Considere el sistema parametrizado*

$$\dot{x} = F(x, \mu) \tag{1.1}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\mu \in \mathbb{R}^m$ . Supongamos que existe  $(x_0, \mu_0)$  tal que

$$H1) \quad F(x_0, \mu_0) = 0$$

$$H2) \quad \sigma(DF(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_1 = 0, \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0 \text{ para } j = 2, 3, \dots, n\}$$

Sean  $v_0$  y  $w_0$  los vectores propios derecho e izquierdo respectivamente de  $DF(x_0, \mu_0)$  correspondientes al valor propio  $\lambda_1 = 0$ . Entonces,

*Caso 1. Si*

$$\begin{aligned} w_0^T F_\mu(x_0, \mu_0) &\neq 0 && y \\ (w_0^T D^2 F_\mu(x_0, \mu_0))(v_0, v_0) &\neq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Entonces, el sistema (1.1) experimenta una bifurcación silla-nodo en el punto de equilibrio  $x = x_0$  cuando el parámetro  $\mu$  pasa a través del valor de bifurcación  $\mu = \mu_0$ . Además, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{y} = \beta_1 + ay^2 + \dots \quad (1.3)$$

donde

$$\begin{aligned} y &= w_0^T(x - x_0), \\ \beta_1 &= w_0^T F_\mu(x_0, \mu_0), \\ a &= \frac{1}{2}(w_0^T D^2 F(x_0, \mu_0))(v_0, v_0). \end{aligned}$$

Caso 2. Si

$$\begin{aligned} w_0^T F_\mu(x_0, \mu_0) &= 0, \\ (w_0^T D^2 F_\mu(x_0, \mu_0))(v_0, v_0) &\neq 0 \\ -(w_0^T D^2 F(x_0, \mu_0))(v_0, P_0) J_s^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) + v_0^T (w_0^T F_{\mu x}(x_0, \mu_0))^T &\neq 0. \end{aligned}$$

Entonces, el sistema (1.1) experimenta una bifurcación transcítica en el punto de equilibrio  $x = x_0$  cuando el parámetro  $\mu$  pasa a través del valor de bifurcación  $\mu = \mu_0$ . Además, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{y} = \beta_2 y + ay^2 + \dots \quad (1.4)$$

donde

$$\beta_2 = [-(w_0^T D^2 F(x_0, \mu_0))(v_0, P_0) J_s^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) + v_0^T (w_0^T F_{\mu x}(x_0, \mu_0))^T](\mu - \mu_0).$$

Caso 3. Si

$$\begin{aligned} w_0^T F_\mu(x_0, \mu_0) &= 0, \\ (w_0^T D^2 F_\mu(x_0, \mu_0))(v_0, v_0) &= 0 \\ -(w_0^T D^2 F(x_0, \mu_0))(v_0, P_0) J_s^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) + v_0^T (w_0^T F_{\mu x}(x_0, \mu_0))^T &\neq 0, \\ \frac{1}{6}(w_0^T D^3 F_\mu(x_0, \mu_0))(v_0, v_0, v_0) & \\ -\frac{1}{2}(w_0^T D^2 F(x_0, \mu_0))(v_0, P_0) J_s^{-1} (Q_0 D^2 F(x_0, \mu_0))(v_0, v_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

Entonces, el sistema (1.1) experimenta una bifurcación trinche en el punto de equilibrio  $x = x_0$  cuando el parámetro  $\mu$  pasa a través del valor de bifurcación  $\mu = \mu_0$ . Además, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{y} = \beta_2 y + by^3 + \dots \quad (1.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{6}(w_0^T D^3 F_\mu(x_0, \mu_0))(v_0, v_0, v_0) \\ &\quad - \frac{1}{2}(w_0^T D^2 F(x_0, \mu_0))(v_0, P_0) J_s^{-1}(Q_0 D^2 F(x_0, \mu_0))(v_0, v_0). \end{aligned}$$

La demostración del teorema se puede ver en [1].

## 1.2. Bifurcación de Hopf

**Teorema 2** *Considere el sistema parametrizado*

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (1.6)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\mu \in \mathbb{R}^m$  con  $m \geq 2$ . Supongamos que existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$H1) \quad F(x_0, \mu_0) = 0$$

$$H2) \quad \sigma(DF(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_{1,2} = \pm iw_0, \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, \text{ para } j = 3, \dots, n\},$$

Sea

$$d = \frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}))|_{\mu=\mu_0}$$

. Entonces, si  $d \neq 0$  el sistema (1.6) experimente una bifurcación de Hopf en  $x = x_0$ , cuando el parámetro  $\mu$  pasa a través del valor de bifurcación  $\mu = \mu_0$ .

La demostración del teorema se puede ver en [7].

El vector  $d$  nos muestra la velocidad de cruce y en el siguiente lema se expresa en términos del campo.

**Lema 1** *Consideremos el sistema (1.6) y supogamos que existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$  tal que se satisfagan las condiciones H1) y H2). Si  $v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C}^n$  y  $w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}^n$  son*

vectores propios derecho e izquierdo de  $DF(x_0, \mu_0)$ , con valor propio  $i\omega_0$ , respectivamente, la velocidad de cruce  $d$  está dada por

$$d = \frac{1}{2}((w_1 \bullet \mathcal{S})v_2 + (w_2 \bullet \mathcal{S})v_1) \quad (1.7)$$

donde

$$\mathcal{S} = F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - ((DF(x_0, \mu_0))^{-1}F_{\mu}(x_0, \mu_0))^T D^2F(x_0, \mu_0)$$

### 1.3. Teorema de la variedad central

**Teorema 3** Sea  $F \in C^r(\mathcal{U})$ , donde  $\mathcal{U}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen y  $r \geq 1$ . Supongase que  $F(0) = 0$  y que  $DF(0)$  tiene  $c$  valores propios con parte real cero y  $s$  valores propios con parte real negativa, donde  $c + s = n$ . Entonces el sistema  $\dot{\xi} = F(\xi)$  puede ser escrito en forma diagonal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + F_1(x, y), \\ \dot{y} &= By + F_2(x, y), \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde  $(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$ ,  $A \in \mathbb{R}^{c \times c}$  tiene  $c$  valores propios con parte real cero,  $B \in \mathbb{R}^{s \times s}$  tiene  $s$  valores propios con parte real negativa,  $F_i(0) = 0$  y  $DF_i(0) = 0$ , para  $i = 1, 2$ . Entonces, existe una variedad central invariante  $W_{loc}^c(0)$  tangente al eigenespacio central  $E^c$  en 0,

$$W_{loc}^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid y = h(x) \text{ para } x \in N_\delta(0), h \in C^r(N_\delta(0))\},$$

y satisface la ecuación homológica

$$Bh(x) + F_2(x, h(x)) - Dh(x)(Ax + F_1(x, h(x))) \equiv 0. \quad (1.9)$$

**Lema 2** Si  $A = J_H = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = J_s \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}$  y  $F_2(x, y) = G_2(x) + G_1(x, y)$ , donde  $G_2(x)$  está formado por los términos cuadráticos en  $x$  de la segunda ecuación y  $G_1(x, y)$  por los demás términos no lineales. Entonces la solución de la ecuación homológica, truncada hasta orden 2,

$$J_s h_2(x) + G_2(x) - Dh(x)J_H x \equiv 0 \quad (1.10)$$

esta dada por

$$h_2(x) = -(J_s^3 + 4w_0^2 J_s)^{-1} [(J_s^2 + 2w_0^2 I)G_2(x) + J_s D G_2(x) J_H x + 2G_2(J_H x)] \quad (1.11)$$

**Demostración:**

El sistema (1.8) con  $A = J_H = \begin{pmatrix} 0 & -w_0 \\ w_0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = J_s \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}$  y

$F_2(x, y) = G_2(x) + G_1(x, y)$  es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J_H x + F_1(x, y), \\ \dot{y} &= J_s y + G_2(x) + G_1(x, y). \end{aligned} \quad (1.12)$$

La separación de  $F_2(x)$  en dos funciones se hace ya que los términos cuadráticos en  $x$  de la segunda ecuación son los que impactan en la solución. Proponemos una variedad central de la forma

$$y = h_2(x) = \frac{1}{2} x^T H x, \quad (1.13)$$

donde

$$H = \begin{pmatrix} (H_1)_{2 \times 2} \\ (H_2)_{2 \times 2} \\ \vdots \\ (H_{n-2})_{2 \times 2} \end{pmatrix}.$$

Derivando la ecuación anterior

$$\dot{y} = Dh_2(x) \dot{x}$$

y sustituyendo los valores de  $\dot{y}$ ,  $\dot{x}$  y (1.13) se tiene que

$$J_s h_2(x) + G_2(x) + G_1(x, h_2(x)) = Dh(x)(J_H x + F_1(x, h_2(x))),$$

truncamos hasta orden 2, nos quedamos sólo con los términos cuadráticos

$$J_s h_2(x) + G_2(x) - Dh(x) J_H x \equiv 0. \quad (1.14)$$

Si  $h_2(x) = \frac{1}{2} x^T H x$  entonces  $Dh_2(x) = x^T H$ , y sustituimos lo anterior en (1.14)

$$J_s h_2(x) + G_2(x) - x^T H J_H x \equiv 0,$$

volvemos a derivar y multiplicamos por la derecha por  $J_H x$  y llegamos a la siguiente ecuación

$$J_s Dh_2(x) J_H x + DG_2(x) J_H x - D(x^T H J_H x) J_H x \equiv 0, \quad (1.15)$$

*Observación 1:* Sea  $M$  una matriz cuadrada, tal que  $M^T \neq M$  entonces

$$D(x^T M x) = x^T (M + M^T).$$

Utilizando la observación anterior y el hecho de que de (1.14) obtenemos la igualdad  $Dh_2(x) J_H x = J_s h_2(x) + G_2(x)$  se obtiene

$$J_s (J_s h_2(x) + G_2(x)) + DG_2(x) J_H x - (x^T H J_H^2 x + x^T J_H^T H J_H x) \equiv 0,$$

Observese que

$$J_H^2 = -w_0^2 I,$$

entonces

$$\begin{aligned} J_s^2 h_2(x) + J_s G_2(x) + DG_2(x) J_H x + w_0^2 x^T H x - x^T J_H^T H J_H x &\equiv 0, \\ J_s^2 h_2(x) + J_s G_2(x) + DG_2(x) J_H x + 2w_0^2 h_2(x) - 2h_2(J_H x) &\equiv 0, \end{aligned}$$

y agrupando términos de  $h_2(x)$

$$(J_s^2 + 2w_0^2 I) h_2(x) + [J_s G_2(x) + DG_2(x) J_H x] - 2h_2(J_H x) \equiv 0,$$

definimos  $\tilde{G}_2(x) = J_s G_2(x) + DG_2(x) J_H x$ , así

$$(J_s^2 + 2w_0^2 I) h_2(x) + \tilde{G}_2(x) - 2h_2(J_H x) \equiv 0.$$

Derivando y multiplicando nuevamente por la derecha por  $J_H x$  tenemos

$$(J_s^2 + 2w_0^2 I) Dh_2(x) J_H x + D\tilde{G}_2(x) J_H x - 2Dh_2(J_H x) J_H x \equiv 0, \quad (1.16)$$

si

$$\begin{aligned} h_2(J_H x) &= \frac{1}{2} x^T (J_H^T H J_H) x \\ Dh_2(J_H x) &= x^T (J_H^T H J_H) \\ Dh_2(J_H x) J_H x &= x^T (J_H^T H J_H) J_H x \\ &= x^T J_H^T H J_H^2 x = -w_0^2 (x^T J_H^T H x) \end{aligned}$$

y  $Dh_2(x)J_Hx = x^T H J_H x = x^T J_H H x$  entonces (1.16) se transforma en

$$\begin{aligned} (J_s^2 + 2w_0^2 I)Dh_2(x)J_Hx + D\tilde{G}_2(x)J_Hx - 2(-w_0^2 Dh_2(x)J_Hx) &\equiv 0, \\ (J_s^2 + 4w_0^2 I)Dh_2(x)J_Hx + D\tilde{G}_2(x)J_Hx &\equiv 0, \\ (J_s^2 + 4w_0^2 I)(J_s h_2(x) + G_2(x)) + D\tilde{G}_2(x)J_Hx &\equiv 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Con el fin de conocer  $D\tilde{G}_2(x)$  para llegar a la forma de  $h_2(x)$ , así que derivemos

$$D\tilde{G}_2(x) = J_s DG_2(x) + D(DG_2(x)J_Hx)$$

Observece que  $G_2(x) = \frac{1}{2}x^T E x$  entonces  $DG_2(x) = x^T E$ , sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} D\tilde{G}_2(J_Hx) &= J_s DG_2(x) + D(x^T E J_Hx) \\ &= J_s DG_2(x) + x^T (E J_H + J_H E) \end{aligned}$$

y multiplicando por  $J_Hx$

$$\begin{aligned} D\tilde{G}_2(J_Hx)J_Hx &= J_s DG_2(x)J_Hx + x^T (E J_H + J_H^T E)J_Hx \\ &= J_s DG_2(x)J_Hx + x^T E J_H^2 x + x^T J_H^T E J_Hx \\ &= J_s DG_2(x)J_Hx - w_0^2 x^T E x + x^T J_H^T E J_Hx \\ &= J_s DG_2(x)J_Hx - 2w_0^2 G_2(x) + 2G_2(J_Hx) \end{aligned}$$

sustituyendo lo anterior en (1.17)

$$\begin{aligned} (J_s^2 + 4w_0^2 I)(J_s h_2(x) + G_2(x)) + J_s DG_2(x)J_Hx - 2w_0^2 G_2(x) + 2G_2(J_Hx) &\equiv 0, \\ (J_s^2 + 4w_0^2 I)J_s h_2(x) + (J_s^2 + 2w_0^2 I)G_2(x) + J_s DG_2(x)J_Hx + 2G_2(J_Hx) &\equiv 0 \end{aligned}$$

despejando de lo anterior llegamos al resultado

$$h_2(x) = -(J_s^3 + 4w_0^2 J_s)^{-1}[(J_s^2 + 2w_0^2 I)G_2(x) + J_s DG_2(x)J_Hx + 2G_2(J_Hx)]. \quad \blacksquare$$

Es importante mencionar que el lema que se acaba de demostrar, no existe en la literatura y se puede usar para obtener la forma de la variedad central hasta orden 2 en sistemas generales donde exista una variedad central.

## 1.4. Teorema de la bifurcación Takens-Bogdanov

En el artículo de Carillo (ver [4]) podemos encontrar el teorema de la bifurcación Takens-Bogdanov, donde la deformación versal que trabaja es

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z_1 + az_1^2 + bz_1 z_2,\end{aligned}$$

teniendo como condición que  $ab \neq 0$ . Sin embargo, en esta tesis trabajamos con la deformación versal

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z_2 + az_1^2 + bz_1 z_2,\end{aligned}\tag{1.18}$$

por tal motivo, reescribimos el teorema y lo demostramos, obteniendo que para dicha deformación versal solo es necesario que  $a \neq 0$ .

La demostración se llevará a cabo de la siguiente manera: primero escribiremos el sistema con el que se va a trabajar en bloques de Jordan, después utilizando la teoría de la variedad central, encontramos la expresión que nos dá la dinámica sobre la variedad central del sistema, y finalmente, buscamos el difeomorfismo que hace topológicamente equivalentes la expresión de la dinámica de la variedad central y la deformación versal 1.18.

Para mencionar el Teorema, primeramente definiremos la siguiente operación.

### Definición:

Sea  $v \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n)^T$  con  $B_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Definimos la operación

$$v \bullet \mathcal{B} = \sum_{j=1}^n v_j B_j\tag{1.19}$$

donde  $v_j$  es la componente  $j$ -ésimas del vector  $v$ .

**Teorema 4 (Takens-Bogdanov)** *Dado un sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x, \mu),\tag{1.20}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  con  $m \geq 2$ , y supongamos que existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$H1) \quad F(x_0, \mu_0) = 0$$

$$H2) \quad \sigma(DF(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_{1,2} = 0, \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, \text{ para } j = 3, \dots, n\},$$

$$H3) \quad a \neq 0$$

$$H4) \quad d_1 \text{ y } d_2 \text{ son linealmente independientes}$$

donde

$$a = \frac{1}{2} v_1^T (w_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) v_1,$$

$$b = v_1^T (w_1 \bullet D_2 F(x_0, \mu_0)) v_1 + v_1^T (w_2 \bullet D_2 F(x_0, \mu_0)) v_2,$$

$d_1$  y  $d_2$  estan dados por (1.44) y (1.53). Entonces, la dinámica en la variedad central del sistema (1.20) en  $x = x_0$  y  $\mu \approx \mu_0$ , es topológicamente equivalente a la deformación versal

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z_2 + a z_1^2 + b z_1 z_2,$$

donde  $\varepsilon_1 = d_1^T (\mu - \mu_0)$ , y  $\varepsilon_2 = d_2^T (\mu - \mu_0)$ .

### Demostración:

Consideremos el siguiente campo vectorial  $m$ -parametrizado

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  con  $m \geq 2$ , y supongamos que existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$H1) \quad F(x_0, \mu_0) = 0$$

$$H2) \quad \sigma(DF(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_{1,2} = 0, \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, \text{ para } j = 3, \dots, n\},$$

donde

$$DF(x_0, \mu_0) \sim J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix},$$

el caso no-semisimple, con  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $J_1 \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}$  de tal forma que,

$$\sigma(J_1) = \{\operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, \text{ para } j = 3, \dots, n\}.$$

Nuestro objetivo será encontrar condiciones suficientes sobre el campo vectorial  $F$ , tal que las dinámicas del campo vectorial en una vecindad de  $x_0$ , sean topológicamente equivalentes a la deformación versal

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z_2 + f_2(z),\end{aligned}\tag{1.21}$$

donde  $f_2(z) = az_1^2 + bz_1z_2$ .

**Lema 3** Sean  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  tal que,  $v_1$  es vector propio y  $v_2$  es vector propio generalizado de  $DF(x_0, \mu_0)$  correspondientes al valor propio  $\lambda = 0$ :

$$DF(x_0, \mu_0)v_1 = 0; \quad DF(x_0, \mu_0)v_2 = v_1.$$

Definimos  $P = (v_1, v_2, P_0)$ , donde  $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n-2}$  contiene los vectores propios (inclusive generalizados) de la matriz  $J_1$ . De la teoría de formas de Jordan se sigue que

$$P^{-1}DF(x_0, \mu_0)P = J.\tag{1.22}$$

Si

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ Q_0 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad w_2^T DF(x_0, \mu_0) = 0, \quad w_1^T DF(x_0, \mu_0) = w_2^T.$$

Esto es,  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$  son tales que  $w_2$  es vector propio izquierdo y  $w_1$  es vector propio izquierdo generalizado de  $Df(x_0, \mu_0)$  correspondientes al valor propio  $\lambda = 0$ .

**Demostración:**

Multiplicamos  $P^{-1}$  por la derecha de (1.22) y obtenemos

$$\begin{aligned} P^{-1}DF(x_0, \mu_0) &= JP^{-1} \\ \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ Q_0 \end{pmatrix} DF(x_0, \mu_0) &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ Q_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} w_1^T DF(x_0, \mu_0) \\ w_2^T DF(x_0, \mu_0) \\ Q_0 DF(x_0, \mu_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} w_2^T \\ 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de lo anterior se tiene que  $w_1^T DF(x_0, \mu_0) = w_2$  y  $w_2^T DF(x_0, \mu_0) = 0$ . ■

Pondremos el sistema (1.20) en forma de Jordan y para ello consideremos el cambio de coordenadas y parámetros

$$y = P^{-1}(x - x_0), \quad y \quad \alpha = \mu - \mu_0, \quad (1.23)$$

así como la serie de Taylor alrededor de  $(x_0, \mu_0)$  de  $F(x, \mu)$

$$\begin{aligned} F(x, \mu) &= DF(x_0, \mu_0)(x - x_0) + F_\mu(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}D^2F(x_0, \mu_0)(x - x_0, x - x_0) + F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0, x - x_0) + \dots \end{aligned} \quad (1.24)$$

Derivando (1.23) y usando la serie de Taylor (1.24), el sistema (1.20) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P^{-1}\dot{x} = P^{-1}F(x_0, \mu_0) \\ &= P^{-1}DF(x_0, \mu_0)Py + P^{-1}F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha + \frac{1}{2}P^{-1}D^2F(x_0, \mu_0)(Py, Py) \\ &\quad + P^{-1}F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) + \dots \\ &= Jy + P^{-1}F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha + \frac{1}{2}P^{-1}D^2F(x_0, \mu_0)(Py, Py) \\ &\quad + P^{-1}F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) + \dots \end{aligned} \quad (1.25)$$

Lo que sigue, es tratar de expresar el sistema anterior en un sistema de dos ecuaciones diferenciales para utilizar el teorema de la variedad central. Para ello, definimos

$V_0 = (v_1, v_2)$  y  $W_0 = (w_1, w_2)^T$ , entonces

$$P = (V_0 \ P_0) \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} W_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}.$$

Reescribiremos (1.23) de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y = P^{-1}(x - x_0) = \begin{pmatrix} W_0(x - x_0) \\ Q_0(x - x_0) \end{pmatrix},$$

es decir,  $y_1 = W_0(x - x_0) \in \mathbb{R}^2$  y  $y_2 = Q_0(x - x_0) \in \mathbb{R}^{n-2}$ . También tenemos que

$$\begin{aligned} Py &= V_0 y_1 + P_0 y_2, \\ D^2 F(x_0, \mu_0)(Py, Py) &= D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0 y_1 + P_0 y_2, V_0 y_1 + P_0 y_2) \\ &= D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0 y_1, V_0 y_1) + 2D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0 y_1, P_0 y_2) \\ &\quad + D^2 F(x_0, \mu_0)(P_0 y_2, P_0 y_2), \\ F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) &= F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, V_0 y_1) + F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, P_0 y_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto transformamos al sistema (1.25) en

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= J_0 y_1 + W_0 F_\mu(x_0, \mu_0) \alpha + \frac{1}{2} W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0 y_1, V_0 y_1) \\ &\quad + W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0 y_1, P_0 y_2) + \frac{1}{2} W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(P_0 y_2, P_0 y_2) \\ &\quad + W_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, V_0 y_1) + W_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, P_0 y_2) + \dots \\ \dot{y}_2 &= J_1 y_2 + Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) \alpha + \frac{1}{2} Q_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0 y_1, V_0 y_1) \\ &\quad + Q_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0 y_1, P_0 y_2) + \frac{1}{2} Q_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(P_0 y_2, P_0 y_2) \\ &\quad + Q_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, V_0 y_1) + Q_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, P_0 y_2) + \dots \end{aligned} \quad (1.26)$$

Usando la notación (1.19) y definiendo  $w_i = (w_{i1}, \dots, w_{in})^T$  para  $i = 1, 2$ , compactaremos el sistema anterior.

$$\begin{aligned}
W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0 y_1, V_0 y_1) &= \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (V_0 y_1)^T D^2 F_1(x_0, \mu_0) V_0 y_1 \\ \vdots \\ (V_0 y_1)^T D^2 F_n(x_0, \mu_0) V_0 y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n w_{1i} (V_0 y_1)^T D^2 F_i(x_0, \mu_0) V_0 y_1 \\ \sum_{i=1}^n w_{2i} (V_0 y_1)^T D^2 F_i(x_0, \mu_0) V_0 y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (V_0 y_1)^T \sum_{i=1}^n w_{1i} D^2 F_i(x_0, \mu_0) V_0 y_1 \\ (V_0 y_1)^T \sum_{i=1}^n w_{2i} D^2 F_i(x_0, \mu_0) V_0 y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (V_0 y_1)^T (w_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) V_0 y_1 \\ (V_0 y_1)^T (w_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) V_0 y_1 \end{pmatrix} \\
&= [(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(V_0, V_0)](y_1, y_1).
\end{aligned}$$

Analogamente, tenemos que

$$\begin{aligned}
W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0 y_1, P_0 y_2) &= [(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(V_0, P_0)](y_1, y_2), \\
W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(P_0 y_2, P_0 y_2) &= [(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(P_0, P_0)](y_2, y_2), \\
W_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, V_0 y_1) &= [(W_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))V_0](\alpha, y_1), \\
W_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, P_0 y_2) &= [(W_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))P_0](\alpha, y_2).
\end{aligned}$$

De manera similar, reemplazamos  $W_0$  por  $Q_0$  y tenemos las expresiones simplificadas. Con esto, el sistema (1.26) puede ser escrito en su forma extendida

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & W_0 F_\mu(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(y_1, \alpha, y_2) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(y_1, \alpha, y_2) \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(y_1, \alpha, y_2) &= \frac{1}{2}[(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(V_0, V_0)](y_1, y_1) \\
&\quad + [(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(V_0, P_0)](y_1, y_2) \\
&\quad + [(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(P_0, P_0)](y_2, y_2) \\
&\quad + [(W_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))V_0](\alpha, y_1) \\
&\quad + [(W_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))P_0](\alpha, y_2) + \dots, \\
\mathcal{F}_2(y_1, \alpha, y_2) &= \frac{1}{2}[(Q_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(V_0, V_0)](y_1, y_1) \\
&\quad + [(Q_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(V_0, P_0)](y_1, y_2) \\
&\quad + [(Q_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(P_0, P_0)](y_2, y_2) \\
&\quad + [(Q_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))V_0](\alpha, y_1) \\
&\quad + [(Q_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))P_0](\alpha, y_2) + \dots.
\end{aligned}$$

Para calcular la variedad central local  $m$ -parametrizada en el equilibrio  $y = 0$ , primero tenemos que considerar el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

donde

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -K_2 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & K_2 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

donde  $K_2 = J_1^{-1}Q_0F_\mu(x_0, \mu_0)$ . Entonces, con el cambio de coordenadas (1.28) el sistema (1.27) se transforma en

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(z_1, \alpha, z_2) \\ 0 \\ f_2(z_1, \alpha, z_2) \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

donde  $R_0 = w_0 F_\mu(x_0, \mu_0)$ , y

$$f_1(z_1, \alpha, z_2) = \mathcal{F}_1(z_1, \alpha, z_2 - K_2 \alpha),$$

$$f_2(z_1, \alpha, z_2) = \mathcal{F}_2(z_1, \alpha, z_2 - K_2 \alpha).$$

Ahora sí, de la teoría de la variedad central, el sistema (1.29) tiene una variedad central  $z_2 = h(z_1, \alpha) = \mathcal{O}(|z_1, \alpha|^2)$ , donde  $h(0, 0) = Dh(0, 0) = 0$ , y la dinámica sobre la variedad central esta dada por

$$\dot{z}_1 = J_0 z_1 + R_0 \alpha + f_1(z_1, \alpha, h(z_1, \alpha))$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(z_1, \alpha, h(z_1, \alpha)) &= \mathcal{F}_1(z_1, \alpha, h(z_1, \alpha)) - J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) \alpha \\ &= [(W_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) V_0](\alpha, z_1) \\ &\quad + [(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) P_0 J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0), V_0](\alpha, z_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(V_0, V_0)](z_1, z_1) + \mathcal{O}(|\alpha|^2) \\ &\quad + \mathcal{O}(|z_1, \alpha|^3) \end{aligned}$$

Obsérvese que no es necesario calcular la variedad central  $h(z_1, \alpha)$  porque no afecta a los términos cuadráticos de  $f_1$ .

Con lo anterior queda demostrado el siguiente lema.

**Lema 4** *Sea el sistema no lineal (1.20) que satisface las condiciones H1) y H2) en el punto  $(x_0, \mu_0)$ . Entonces, la dinámica sobre la variedad central de dimensión dos m-parametrizada en el punto de equilibrio  $x = x_0$  para  $\mu \approx \mu_0$ , esta dada por*

$$\dot{y} = J_0 y + R_0 \alpha + \alpha^T R_1 y + \frac{1}{2} y^T R_2 y + \mathcal{O}(|\alpha|^2) + \mathcal{O}(|y, \alpha|^3), \quad (1.30)$$

donde  $y = W_0(x - x_0)$ ,  $\alpha = \mu - \mu_0$ ,  $A_0 = P_0 J_1^{-1} Q_0$ , y

$$R_0 = W_0 F_\mu(x_0, \mu_0), \quad (1.31)$$

$$R_1 = (W_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) V_0 + (W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))(A_0 F_\mu(x_0, \mu_0), V_0), \quad (1.32)$$

$$R_2 = V_0^T (W_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) V_0. \quad (1.33)$$

Empezaremos reescribiendo el sistema (1.21) en forma vectorial

$$\dot{z} = J_0 z + S_0 \varepsilon + \varepsilon^T S_1 z + G_2(z), \quad (1.34)$$

donde  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T$ ,  $S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $S_1 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$  y  $G_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(z) \end{pmatrix}$ .

Lo que sigue, es encontrar un difeomorfismo que me mande soluciones de (1.34) a (1.30) y así los sistemas sean topológicamente localmente equivalentes. Sea

$$y = z + L_0 \alpha + \alpha^T L_1 z + h_2(z) \quad (1.35)$$

con

$$L_0 = \begin{pmatrix} L_{01}^T \\ L_{02}^T \end{pmatrix}_{2 \times m} \quad L_1 = \begin{pmatrix} (L_{11})_{m \times 2} \\ (L_{12})_{m \times 2} \end{pmatrix} \quad h_2(z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Derivando (1.35) se obtiene

$$\dot{y} = \dot{z} + \alpha^T L_1 \dot{z} + Dh_2(z) \dot{z} = (I + \alpha^T L_1 + Dh_2(z)) \dot{z}$$

lo que implica

$$\dot{z} = (I + \alpha^T L_1 + Dh_2(z))^{-1} \dot{y}. \quad (1.36)$$

Para  $|z| \approx 0$  tenemos que

$$(I + \alpha^T L_1 + Dh_2(z))^{-1} = I - \alpha^T L_1 - Dh_2(z) + \dots \quad (1.37)$$

Además, sustituyendo (1.35) en (1.30) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= J_0(z + L_0 \alpha + \alpha^T L_1 z + h_2(z)) + R_0 \alpha + \alpha^T R_1(z + \dots) \\ &\quad + \frac{1}{2}(z + L_0 \alpha + \dots)^T R_2(z + L_0 \alpha + \dots) \\ &= J_0 z + (J_0 L_0 + R_0) \alpha + (J_0 \alpha^T L_1 z + \alpha^T R_1 z + \alpha^T L_0^T R_2 z) \\ &\quad + (J_0 h_2(z) + \frac{1}{2} z^T R_2 z) + \dots, \end{aligned} \quad (1.38)$$

sustituyendo (1.37) y (1.38) en (1.36) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (I - \alpha^T L_1 - Dh_2(z) + \dots)(J_0 z + (J_0 L_0 + R_0) \alpha + (J_0 \alpha^T L_1 z + \alpha^T R_1 z \\ &\quad + \alpha^T L_0^T R_2 z) + (J_0 h_2(z) + \frac{1}{2} z^T R_2 z) + \dots) \\ &= J_0 z + (J_0 L_0 + R_0) \alpha + (J_0 \alpha^T L_1 z + \alpha^T R_1 z + \alpha^T L_0^T R_2 z - \alpha^T L_1 J_0 z \\ &\quad - Dh_2(z)(J_0 L_0 + R_0) \alpha) + (J_0 h_2(z) + \frac{1}{2} z^T R_2 z - Dh_2(z) J_0 z) + \dots \end{aligned}$$

Hagamos

$$\tilde{R}_0 = J_0 L_0 + R_0. \quad (1.39)$$

**Lema 5** *Si*

$$J_0 \alpha^T L_1 z + \alpha^T R_1 z + \alpha^T L_0^T R_2 z - \alpha^T L_1 J_0 z - Dh_2(z)(J_0 L_0 + R_0) \alpha = \alpha^T \tilde{R}_1 z$$

$$\text{entonces } \tilde{R}_1 = J_0 L_1 + R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J_0 - \tilde{R}_0^T L_2.$$

**Demostración:**

Desarrollamos  $J_0 \alpha^T L_1 z$

$$J_0 \alpha^T L_1 z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^T L_{11} z \\ \alpha^T L_{12} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^T L_{12} z \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha^T \begin{pmatrix} L_{12} \\ 0 \end{pmatrix} z = \alpha^T J_0 L_1 z.$$

Como los términos  $\alpha^T L_0^T R_2 z$  y  $\alpha^T L_1 J_0 z$  ya están escritos de tal forma que se pueden agrupar, entonces solo nos falta reescribir  $Dh_2(z)(J_0 L_0 + R_0) \alpha$ . Para ello, como  $h_2(z)$  es bilineal, lo expresaremos como  $\frac{1}{2} z^T L_2 z$  con

$$L_2 = \begin{pmatrix} (L_{21})_{m \times 2} \\ (L_{22})_{m \times 2} \end{pmatrix},$$

así

$$Dh_2(z) \tilde{R}_0 \alpha = z^T L_2 \tilde{R}_0 \alpha = \begin{pmatrix} z^T L_{21} \tilde{R}_0 \alpha \\ z^T L_{22} \tilde{R}_0 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^T \tilde{R}_0^T L_{21} z \\ \alpha^T \tilde{R}_0^T L_{22} z \end{pmatrix} = \alpha^T \tilde{R}_0^T L_2 z.$$

De lo anterior tenemos que  $J_0 \alpha^T L_1 z + \alpha^T R_1 z + \alpha^T L_0^T R_2 z - \alpha^T L_1 J_0 z - Dh_2(z)(J_0 L_0 + R_0) \alpha$  se reescribe como

$$\alpha^T (J_0 L_1 + R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J_0 - \tilde{R}_0^T L_2) z = \alpha^T \tilde{R}_1 z.$$

Por lo tanto,  $\tilde{R}_1 = J_0 L_1 + R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J_0 - \tilde{R}_0^T L_2$  ■

Con lo anterior queda demostrado el siguiente lema.

**Lema 6** *El sistema (1.30) bajo el cambio de coordenadas (1.35) es*

$$\dot{z} = J_0 z + \tilde{R}_0 \alpha + \alpha^T \tilde{R}_1 z + \tilde{G}_2(z). \quad (1.40)$$

con

$$\tilde{R}_0 = J_0 L_0 + R_0, \quad (1.41)$$

$$\tilde{R}_1 = J_0 L_1 + R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J_0 - \tilde{R}_0^T L_2, \quad (1.42)$$

$$\tilde{G}_2(z) = \frac{1}{2} z^T R_2 z + J_0 h_2(z) - D h_2(z) J_0 z. \quad (1.43)$$

Nos interesa la equivalencia topológica local entre (1.34) y (1.40). Así que, encontraremos las condiciones para que dicha equivalencia exista.

**Lema 7** *Existe  $L_{02}$  tal que*

$$\tilde{R}_0 \alpha = S_0 \varepsilon$$

**Demostración:**

Observe que

$$\tilde{R}_0 = J_0 L_0 + R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{01}^T \\ L_{02}^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{01}^T \\ R_{02}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{02}^T + R_{01}^T \\ R_{02}^T \end{pmatrix}$$

entonces si definimos  $L_{02} = -R_{01}$  y  $\varepsilon_1 = R_{02}^T \alpha$  obtenemos

$$\tilde{R}_0 \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} = S_0 \varepsilon.$$

■

Para tener a  $L_{02}$  y  $\varepsilon_1$  en términos del campo  $F$ , utilizaremos (1.31)

$$R_0 = W_0 F_\mu(x_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} w_1^T F_\mu(x_0, \mu_0) \\ w_2^T F_\mu(x_0, \mu_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{01}^T \\ R_{02}^T \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$L_{02} = (F_\mu(x_0, \mu_0))^T w_1$$

y

$$\varepsilon_1 = w_2^T F_\mu(x_0, \mu_0) \alpha = \alpha^T (F_\mu(x_0, \mu_0))^T w_2 = \alpha^T d_1,$$

con

$$d_1 = (F_\mu(x_0, \mu_0))^T w_2. \quad (1.44)$$

**Lema 8** *Existen  $L_{01}$  y  $L_{12}$  tal que*

$$\alpha^T \tilde{R}_1 = \varepsilon^T S_1,$$

**Demostración:**

Recordemos que

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= J_0 L_1 + R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J_0 - \tilde{R}_0^T L_2 \\ &= \begin{pmatrix} L_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_0^T R_{21} \\ L_0^T R_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_{11} J_0 \\ L_{12} J_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{R}_0^T L_{21} \\ \tilde{R}_0^T L_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{12} + R_{11} + L_0^T R_{21} - L_{11} J_0 - \tilde{R}_0^T L_{21} \\ R_{12} + L_0^T R_{22} - L_{12} J_0 - \tilde{R}_0^T L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} \\ \tilde{R}_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Si definimos

$$L_{12} = L_{11} J_0 + \tilde{R}_0^T L_{21} - R_{11} - L_0^T R_{21}$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{11} &= 0, \\ \tilde{R}_{12} &= R_{12} + L_0^T R_{22} - L_{12} J_0 - \tilde{R}_0^T L_{22}. \end{aligned}$$

Expresemos ahora  $\tilde{R}_{12}$  por columnas. Definamos  $\tilde{R}_{12}^i$  con  $i = 1, 2$ , como la columna  $i$ -ésima de  $\tilde{R}_{12}$  y  $R_{2i} = \begin{pmatrix} r_{11}^i & r_{12}^i \\ r_{12}^i & r_{22}^i \end{pmatrix}$  con  $i = 1, 2$ . Con lo anterior

$$\begin{aligned} L_0^T R_{22} &= (L_{01}, L_{02}) \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{12}^2 \\ r_{12}^2 & r_{22}^2 \end{pmatrix} \\ &= (r_{11}^2 L_{01} + r_{12}^2 L_{02}, r_{12}^2 L_{01} + r_{22}^2 L_{02}), \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$L_{12} J_0 = (L_{11} J_0 + \tilde{R}_0^T L_{21} - R_{11} - L_0^T R_{21}) J_0 = (\tilde{R}_0^T L_{21} - R_{11} - L_0^T R_{21}) J_0,$$

dado que  $J_0^2 = 0$  por ser matriz nilpotente. Además, cualquier matriz  $A_{2 \times 2}$  cumple que

$A J_0 = (A^1, A^2) J_0 = (0, A^1)$ , donde  $A^i$  es la  $i$ -ésima columna de  $A$ .

Sea  $L_{2i} = \begin{pmatrix} l_{11}^i & l_{12}^i \\ l_{12}^i & l_{22}^i \end{pmatrix}$ , entonces

$$\tilde{R}_0^T L_{21} = (0, R_{02}) \begin{pmatrix} l_{11}^1 & l_{12}^1 \\ l_{12}^1 & l_{22}^1 \end{pmatrix} = (l_{12}^1 R_{02}, l_{22}^1 R_{02}),$$

$$L_0^T R_{21} = (L_{01}, L_{02}) \begin{pmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 \\ r_{12}^1 & r_{22}^1 \end{pmatrix} \\ (r_{11}^1 L_{01} + r_{12}^1 L_{02}, r_{12}^1 L_{01} + r_{22}^1 L_{02}),$$

por lo tanto

$$L_{12} J_0 = (0, l_{12}^1 R_{02} - R_{11}^1 - r_{11}^1 L_{01} + r_{12}^1 L_{02}), \quad (1.47)$$

$$\tilde{R}_0^T L_{22} = (0, R_{02}) \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{12}^2 \\ l_{12}^2 & l_{22}^2 \end{pmatrix} = (l_{12}^2 R_{02}, l_{22}^2 R_{02}) \quad (1.48)$$

Así pues, utilizando (1.46), (1.47) y (1.48) obtenemos que las columnas de  $\tilde{R}_{12}$  que definimos como  $\tilde{R}_{12}^1$  y  $\tilde{R}_{12}^2$  son

$$\tilde{R}_{12}^1 = R_{12}^1 + r_{11}^2 L_{01} + r_{12}^2 L_{02} - l_{12}^2 R_{02}, \\ \tilde{R}_{12}^2 = R_{12}^2 + r_{12}^2 L_{01} + r_{22}^2 L_{02} - (l_{12}^1 R_{02} - R_{11}^1 - r_{11}^1 L_{01} + r_{12}^1 L_{02}) - l_{22}^2 R_{02} \\ = (R_{11}^1 + R_{12}^2) + L_{01}(r_{11}^1 + r_{12}^2) + L_{02}(r_{12}^1 + r_{22}^2) - R_{02}(l_{12}^1 + l_{22}^2).$$

Si hacemos

$$L_{01} = \frac{1}{r_{11}^2} (l_{12}^2 R_{02} - R_{12}^1 - r_{12}^2 L_{02}) = \frac{1}{r_{11}^2} (l_{12}^2 R_{02} - R_{12}^1 + r_{12}^2 R_{01}), \\ \varepsilon_2 = \alpha^T \tilde{R}_{12}^2$$

obtenemos

$$\alpha^T \tilde{R}_1 = \begin{pmatrix} \alpha^T \tilde{R}_{11} \\ \alpha^T \tilde{R}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (0, \varepsilon_2) \end{pmatrix} = \varepsilon^T S_1$$

■

La expresión de  $\tilde{R}_{12}^2$ , sustituyendo los valores de  $L_{01}$  y  $L_{02}$  es

$$\tilde{R}_{12}^2 = (R_{11}^1 + R_{12}^2) + \frac{r_{11}^1 + r_{12}^2}{r_{11}^2} (l_{12}^2 R_{02} - R_{12}^1 + r_{12}^2 R_{01}) - (r_{12}^1 + r_{22}^2) R_{01} \\ - R_{02}(l_{12}^1 + l_{22}^2) \\ = (R_{11}^1 + R_{12}^2 - \frac{b}{2a} R_{12}^1) - R_{01}(r_{12}^1 + r_{22}^2 - \frac{b}{2a} r_{12}^2) - R_{02}(l_{12}^1 + l_{22}^2 - \frac{b}{2a} l_{11}^2),$$

con  $a = \frac{1}{2} r_{11}^2 \neq 0$  y  $b = r_{11}^1 + r_{12}^2$  de la teoría de formas normales. Con esto,

$$\varepsilon_2 = \alpha^T [(R_{11}^1 + R_{12}^2 + \frac{b}{2a} R_{12}^1) - R_{01}(r_{12}^1 + r_{22}^2 - \frac{b}{2a} r_{12}^2) - R_{02}(l_{12}^1 + l_{22}^2 - \frac{b}{2a} l_{11}^2)]^T = \alpha^T d_2.$$

Para expresar a  $d_2$  en términos del campo original, vamos analizar primero la forma de  $h_2(x)$  utilizando (1.43). Desarrollando

$$\begin{aligned}\tilde{G}_2(z) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z^T R_{21}z \\ \frac{1}{2}z^T R_{22}z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z^T L_{21}z \\ \frac{1}{2}z^T L_{22}z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z^T L_{21}J_0z \\ z^T L_{22}J_0z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}z^T \begin{pmatrix} R_{21} + L_{22} - 2L_{21}J_0 \\ R_{22} - 2L_{22}J_0 \end{pmatrix} z\end{aligned}$$

sabemos por la teoría de formas normales que existe  $h_2(x)$  tal que

$$\tilde{G}_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ az_1^2 + bz_1z_2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto se debe satisfacer que

$$z^T(R_{21} + L_{22} - 2L_{21}J_0)z = 0, \quad (1.49)$$

$$\frac{1}{2}z^T(R_{22} - 2L_{22}J_0)z = az_1^2 + bz_1z_2. \quad (1.50)$$

Ahora bien, (1.49) se cumple si  $R_{21} + L_{22} - 2L_{21}J_0$  es antisimétrica, es decir,

$$(R_{21} + L_{22} - 2L_{21}J_0) + (R_{21} + L_{22} - 2L_{21}J_0)^T = 0,$$

desarrollando y dividiendo por 2 toda la ecuacion obtenemos

$$R_{21} + L_{22} - L_{21}J_0 - J_0^T L_{21} = 0,$$

con lo anterior llegamos a que

$$L_{22} = L_{21}J_0 + J_0^T L_{21} - R_{21}. \quad (1.51)$$

Desarrollando la parte izquierda de la ecuación (1.50) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}z^T(R_{22} - 2L_{22}J_0)z &= \frac{1}{2}z^T(R_{22} - 2(L_{21}J_0 + (J_0)^T L_{21} - R_{21})J_0)z \\
&= \frac{1}{2}z^T(R_{22} - 2(J_0^T L_{21}J_0 - R_{21}J_0))z \\
&= \frac{1}{2}z^T \left( \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{12}^2 \\ r_{12}^2 & r_{22}^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11}^1 & l_{12}^1 \\ l_{12}^1 & l_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + 2 \begin{pmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 \\ r_{12}^1 & r_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) z \\
&= \frac{1}{2}z^T \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{12}^2 + 2r_{11}^1 \\ r_{12}^2 & r_{22}^2 - l_{12}^1 + r_{12}^1 \end{pmatrix} z \\
&= \frac{1}{2}(r_{11}^2 z_1^2 + 2(r_{12}^2 + r_{11}^1)z_1 z_2 + (r_{22}^2 - l_{11}^1 + r_{12}^1)z_2^2)
\end{aligned}$$

entonces para lograr la igualdad de la ecuación (1.50) solo hacemos

$l_{11}^1 = r_{22}^2 + r_{12}^1$  y por lo tanto  $L_{21}$  tiene la siguiente forma

$$L_{21} = \begin{pmatrix} r_{22}^2 + r_{12}^1 & l_{12}^1 \\ l_{12}^1 & l_{22}^1 \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Ahora sustituyamos (1.52) en (1.51)

$$\begin{aligned}
L_{22} &= \begin{pmatrix} r_{22}^2 + r_{12}^1 & l_{12}^1 \\ l_{12}^1 & l_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{22}^2 + r_{12}^1 & l_{12}^1 \\ l_{12}^1 & l_{22}^1 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 \\ r_{12}^1 & r_{22}^1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -r_{11}^1 & r_{22}^2 + r_{12}^1 - r_{12}^1 \\ r_{22}^2 + r_{12}^1 - r_{12}^1 & 2l_{12}^1 - r_{22}^1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Recordemos que el desarrollo anterior lo hicimos para conocer los valores de  $l_{12}^1$ ,  $l_{11}^1$  y  $l_{22}^1$  para sustituir en la expresión para  $m_2$ . Entonces sustituyendo dichos valores obtenemos

$$d_2 = (R_{11}^1 + R_{12}^2 + \frac{b}{2a}R_{12}^1) - R_{01}(r_{12}^1 + r_{22}^2 - \frac{b}{2a}r_{12}^2) - R_{02}(l_{12}^1 + 2l_{12}^1 - r_{22}^1 + \frac{b}{2a}r_{11}^1)^T,$$

si además tomamos  $l_{12}^1 = \frac{1}{3}(r_{22}^1 - \frac{b}{2a}r_{11}^1)$  entonces la expresión para  $l_2$  resulta ser

$$d_2 = (R_{11}^1 + R_{12}^2 + \frac{b}{2a}R_{12}^1) - R_{01}(r_{12}^1 + r_{22}^2 - \frac{b}{2a}r_{12}^2),$$

Finalmente, utilizando (1.31), (1.32) y (1.33) obtenemos

$$\begin{aligned}
d_2 &= (w_1 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_1 + (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T (w_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))v_1 \\
&\quad + (w_2 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_2 + (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T (w_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))v_2 \\
&\quad + \frac{b}{2a} ((w_2 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_1 + (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T (w_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))v_1) \\
&\quad - (F_\mu^T(x_0, \mu_0)w_2)(v_1^T (w_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))v_2) \\
&\quad + v_2^T (w_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))v_2 - \frac{b}{2a} (v_1^T (w_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0))v_2)
\end{aligned}$$

Simplificando lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
d_2 &= \sum_{i=1}^2 (w_i \bullet (F_{\mu x}(x_0, \mu_0) + (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0)))v_i \\
&\quad + \frac{b}{2a} ((w_2 \bullet (F_{\mu x}(x_0, \mu_0) + (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0)))v_1) \\
&\quad - [(v_1^T (w_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) + v_2^T (w_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) \\
&\quad - \frac{b}{2a} (v_1^T (w_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)))v_2] F_\mu^T(x_0, \mu_0)w_2. \quad \blacksquare
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Utilizado el Lema 6, Lema 7 y el hecho que existe  $h_2(x)$  de la teoría de formas normales, tal que transforma  $G_2(z)$  en su forma normal hasta orden dos que es  $\tilde{G}_2(z)$ , demostramos que (1.34) y (1.40) son topológicamente localmente equivalentes.

# Capítulo 2

## Forma Normal de la bifurcación triple cero

En este capítulo se aborda la forma normal clásica desarrollada por Poincaré y la forma simplificada desarrollada por Freire *et.al.*.

La sección 2.1 muestra la forma normal clásica de Poincaré hasta orden dos. Partimos de un sistema no lineal en dos dimensiones, que cumple con la característica de tener un valor propio cero con multiplicidad geométrica uno. Después, aplicamos un cambio de coordenadas al sistema no lineal y encontramos la forma del cambio de coordenadas de tal manera que logramos quedarnos con cuatro términos cuadráticos en el nuevo sistema, que es topológicamente localmente equivalente al sistema original. Además, exhibimos el cálculo de los coeficientes de la forma normal del sistema en términos del campo original. En la sección 2.2 mostramos una forma simplificada del sistema no lineal, obtenida por Freire *et al.* (ver [3]) haciendo uso de la teoría de formas normales clásica para llegar al mismo resultado. En esta sección, partimos de la forma normal del sistema, se hace una reparametrización en el tiempo y un cambio de coordenadas. Después al sistema en las nuevas coordenadas aplicamos la teoría de formas normales visto en la sección anterior obteniendo un sistema topológicamente localmente equivalente al sistema original, pero que solamente tiene tres términos cuadráticos y dos cúbicos.

Todo lo anterior se hace con la finalidad de facilitar el análisis del sistema no lineal.

### 2.1. Forma Normal Clásica

Analizaremos el sistema no lineal

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \dots + F_r(x) + \dots, \quad (2.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $F_r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$  y

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El objetivo es obtener la forma normal clásica de los términos cuadráticos.

### 2.1.1. Términos Cuadráticos

Dado el sistema (2.1) empezaremos aplicando un cambio de coordenadas

$$x = y + h_2(y), \tag{2.2}$$

donde  $|y| \approx 0$  y  $h_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado 2. La idea es encontrar un  $h_2$  tal que, el sistema en las nuevas coordenadas sea el “más simple” posible. Derivando (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} + Dh_2(y)\dot{y} \\ &= (I + Dh_2(y))\dot{y}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

como el cambio de coordenadas (2.2) es cercano a la identidad, entonces  $\|Dh_2(y)\| \approx 0$ , por lo tanto

$$(I + Dh_2(y))^{-1} = I - Dh_2(y) + (Dh_2(y))^2 + \dots,$$

luego, de (2.3) se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I + Dh_2(y))^{-1}\dot{x} \\ &= (I - Dh_2(y) + (Dh_2(y))^2 + \dots)(Jx + F_2(x) + F_3(x) + \dots + F_r(x) + \dots) \\ &= (I - Dh_2(y) + (Dh_2(y))^2 + \dots)(J(y + h_2(y)) + F_2(y + h_2(y)) \\ &\quad + F_3(y + h_2(y)) + \dots), \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} F_2(y + h_2(y)) &= F_2(y) + DF_2(y)h_2(y) + \dots, \\ F_3(y + h_2(y)) &= F_3(y) + \dots, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= (I - Dh_2(y) + (Dh_2(y))^2 + \dots)(Jy + Jh_2(y) + F_2(y) + DF_2(y)h_2(y) \\
&\quad + F_3(y) + \dots) \\
&= Jy + \tilde{F}_2(y) + \tilde{F}_3(y) + \dots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

donde

$$\tilde{F}_2(y) = F_2(y) - Dh_2(y)Jy + Jh_2(y).$$

Observe que el cambio de coordenadas (2.2) tiene la propiedad de transformar (2.1) en (2.4) sin agregar términos lineales.

Veamos bajo que condiciones es posible asegurar la existencia de  $h_2$  tal que  $\tilde{F}_2(y)$  tenga la forma “más simple” posible. Para ello desarrollaremos  $\tilde{F}_2(y)$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tilde{F}_{21}(y) \\ \tilde{F}_{22}(y) \\ \tilde{F}_{23}(y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_{21}(y) \\ F_{22}(y) \\ F_{23}(y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_3} \\ \frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_3} \\ \frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{22}(y) \\ h_{23}(y) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{21}(y) - (y_2 \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_2}) + h_{22}(y) \\ F_{22}(y) - (y_2 \frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_2}) + h_{23}(y) \\ F_{23}(y) - (y_2 \frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_2}) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Es fácil ver que si hacemos

$$h_{22}(y) = y_2 \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_2} - F_{21}(y), \tag{2.6}$$

$$h_{23}(y) = y_2 \frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_2} - F_{22}(y) \tag{2.7}$$

entonces  $\tilde{F}_{21}(y) = \tilde{F}_{22}(y) = 0$ . Ahora observemos que términos podemos eliminar de  $\tilde{F}_{23}(y)$ . Para esto, primeramente pondremos a  $h_{23}(y)$  en términos de  $h_{21}(y)$  y para ello calcularemos  $\frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_1}$  y  $\frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_1} &= y_2 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} + y_3 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial F_{21}(y)}{\partial y_1} \\
\frac{\partial h_{22}(y)}{\partial y_2} &= y_2 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} + \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_2^2} - \frac{\partial F_{21}(y)}{\partial y_2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

así que sustituyendo (2.8) en (2.7) llegamos a

$$\begin{aligned} h_{23} &= y_2 \left( y_2 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} + y_3 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial F_{21}(y)}{\partial y_1} \right) \\ &\quad + y_3 \left( y_2 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} + \frac{\partial h_{21}(y)}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_2^2} - \frac{\partial F_{21}(y)}{\partial y_2} \right) - F_{22}(y). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Con lo anterior llegamos a que  $h_{22}(y)$  y  $h_{23}(y)$  dependen de  $h_{21}(y)$ , además si nos fijamos en (2.5) nos damos cuenta que si sustituimos en  $\tilde{F}_{23}(y)$  a (2.9), podemos expresarlo también en términos de  $h_{21}(y)$  y de tal forma podemos averiguar los términos que se pueden eliminar o no de  $\tilde{F}_{23}(y)$ . Para ello primeramente calcularemos  $\frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_1}$  y  $\frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_2}$ . Así

$$\frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_1} = -y_2 \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_1^2} + y_3 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} - y_3 \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial F_{22}(y)}{\partial y_1}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_2} &= y_2 \left( \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} \right) + \left( y_2 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} + y_3 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial F_{21}(y)}{\partial y_1} \right) \\ &\quad + y_3 \left( \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} + \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} - \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_2^2} \right) - \frac{\partial F_{22}(y)}{\partial y_2}, \end{aligned}$$

entonces de (2.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{23}(y) &= F_{23}(y) - \left( y_2 \frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial h_{23}(y)}{\partial y_2} \right) \\ &= F_{23}(y) - y_2 \left( -y_2 \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_1^2} + y_3 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} - y_3 \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial F_{22}(y)}{\partial y_1} \right) \\ &\quad - y_3 \left( y_2 \left( \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} \right) + y_2 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} + y_3 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1 \partial y_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial F_{21}(y)}{\partial y_1} + y_3 \left( \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} + \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} - \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_2^2} \right) - \frac{\partial F_{22}(y)}{\partial y_2} \right) \\ &= F_{23}(y) + y_2^2 \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_1^2} - y_2 y_3 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} + y_2 y_3 \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_1 \partial y_2} - y_2 \frac{\partial F_{22}(y)}{\partial y_1} \\ &\quad - y_2 y_3 \left( \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} \right) - y_2 y_3 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1^2} - y_3^2 \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_1 \partial y_2} \\ &\quad + y_3 \frac{\partial F_{21}(y)}{\partial y_1} - y_3^2 \left( \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} + \frac{\partial^2 h_{21}(y)}{\partial y_2 \partial y_1} - \frac{\partial^2 F_{21}(y)}{\partial y_2^2} \right) + y_3 \frac{\partial F_{22}(y)}{\partial y_2} \end{aligned}$$

De lo anterior podemos notar que podemos eliminar los términos  $y_2 y_3$  y  $y_3^2$  de  $\tilde{F}_{23}(y)$  dado que son los únicos que términos que dependen de  $h_{21}(y)$ .

Para ver la forma del cambio, denotaremos como  $a_i$  y  $b_i$  a los coeficientes de  $F_2(y)$  y  $h_2(y)$

respectivamente, de la siguiente forma:

$$F_2(y) = \begin{pmatrix} a_1y_1^2 + a_2y_1y_2 + a_3y_1y_3 + a_4y_2^2 + a_5y_2y_3 + a_6y_3^2 \\ a_7y_1^2 + a_8y_1y_2 + a_9y_1y_3 + a_{10}y_2^2 + a_{11}y_2y_3 + a_{12}y_3^2 \\ a_{13}y_1^2 + a_{14}y_1y_2 + a_{15}y_1y_3 + a_{16}y_2^2 + a_{17}y_2y_3 + a_{18}y_3^2 \end{pmatrix}$$

y

$$h_2(y) = \begin{pmatrix} b_1y^2 + b_2y_1y_2 + b_3y_1y_3 + b_4y_2^2 + b_5y_2y_3 + b_6y_3^2 \\ b_7y^2 + b_8y_1y_2 + b_9y_1y_3 + b_{10}y_2^2 + b_{11}y_2y_3 + b_{12}y_3^2 \\ b_{13}y^2 + b_{14}y_1y_2 + b_{15}y_1y_3 + b_{16}y_2^2 + b_{17}y_2y_3 + b_{18}y_3^2 \end{pmatrix}$$

Entonces los términos de  $\tilde{F}_{23}(y)$  se ven de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{23}(y) &= a_{13}y_1^2 + (2a_7 + a_{14})y_1y_2 + (2a_1 + a_8 + a_{15})y_1y_3 + (2a_1 + a_8 + a_{16})y_2^2 \\ &\quad + (-6b_1 + 3a_2 + a_9 + 2a_{10} + a_{17})y_2y_3 + (-3b_2 + a_3 + 2a_4 + a_{11} + a_{18})y_3^2 \end{aligned}$$

así que haciendo  $b_1 = \frac{1}{6}(2a_{10} + a_{17} + 3a_2 + a_9)$  y  $b_2 = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{18} + a_3 + 2a_4)$  podemos eliminar a dos términos de  $\tilde{F}_{23}(y)$  Además, si sustituimos lo anterior en  $h_{22}$  y  $h_{23}$  llegamos a lo siguiente:

$$h_2(y) = \begin{pmatrix} h_{21}(y) \\ h_{22}(y) \\ h_{23}(y) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

con

$$\begin{aligned} h_{21}(y) &= \frac{1}{6}(2a_{10} + a_{17} + 3a_2 + a_9)y_1^2 + \frac{1}{3}(a_{11} + a_{18} + a_3 + 2a_4)y_1y_2 + b_3y_1y_3 \\ &\quad + b_4y_2^2 + b_5y_2y_3 + b_6y_3^2, \\ h_{22}(y) &= -a_1y_1^2 + \frac{1}{3}(2a_{10} + a_{17} + a_9)y_1y_2 + \frac{1}{3}(a_{11} + a_{18} - 2a_3 + 2a_4)y_1y_3 \\ &\quad + \frac{1}{3}(a_{11} + a_{18} + a_3 - a_4)y_2^2 + (-a_5 + b_3 + 2b_4)y_2y_3 + (-a_6 + b_5)y_3^2, \\ h_{23}(y) &= -a_7y_1^2 - (2a_1 + a_8)y_1y_2 + \frac{1}{3}(2a_{10} + a_{17} - 2a_9)y_1y_3 + \frac{1}{3}(-a_{10} + a_{17} \\ &\quad + a_9)y_2^2 + a_{18}y_2y_3 + (-a_{12} - a_5 + b_3 + 2b_4)y_3^2. \end{aligned}$$

Dado que en capítulos posteriores utilizaremos a  $h_2(y)$ , la reescribimos de la siguiente manera

$$h_2(y) = \frac{1}{2}y^T L_2 y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y^T L_{21} y \\ y^T L_{22} y \\ y^T L_{23} y \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

donde

$$\begin{aligned}
 L_{21} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2a_{10} + a_{17} + 3a_2 + a_9) & \frac{1}{3}(a_{11} + a_{18} + a_3 + 2a_4) & b_3 \\ \frac{1}{3}(a_{11} + a_{18} + a_3 + 2a_4) & 2b_4 & b_5 \\ b_3 & b_5 & 2b_6 \end{pmatrix}, \\
 L_{22} &= \begin{pmatrix} -2a_1 & \frac{1}{3}(2a_{10} + a_{17} + a_9) & \frac{1}{3}(a_{11} + a_{18} - 2a_3 + 2a_4) \\ \frac{1}{3}(2a_{10} + a_{17} + a_9) & \frac{2}{3}(a_{11} + a_{18} + a_3 - a_4) & (-a_5 + b_3 + 2b_4) \\ \frac{1}{3}(a_{11} + a_{18} - 2a_3 + 2a_4) & (-a_5 + b_3 + 2b_4) & 2(-a_6 + b_5) \end{pmatrix}, \\
 L_{23} &= \begin{pmatrix} -2a_7 & -(2a_1 + a_8) & \frac{1}{3}(2a_{10} + a_{17} - 2a_9) \\ -(2a_1 + a_8) & \frac{2}{3}(-a_{10} + a_{17} + a_9) & a_{18} \\ \frac{1}{3}(2a_{10} + a_{17} - 2a_9) & a_{18} & 2(-a_{12} - a_5 + b_3 + 2b_4) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Con lo anterior queda demostrado el siguiente teorema

**Teorema 5** *Sea*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces el sistema no lineal

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + \dots,$$

donde  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado 2, puede ser reducido al sistema

$$\dot{y} = Jy + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1 y_2 + \alpha_3 y_1 y_3 + \alpha_4 y_2^2 \end{pmatrix} + \dots \quad (2.12)$$

con

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= a_{13}, \\
 \alpha_2 &= 2a_7 + a_{14}, \\
 \alpha_3 &= 2a_1 + a_8 + a_{15}, \\
 \alpha_4 &= 2a_1 + a_8 + a_{16}.
 \end{aligned}$$

bajo el cambio de coordenadas (2.2), donde  $h_2(y)$  es dada por (2.10).

*Observación:* Los términos cúbicos que quedan al aplicar la teoría de formas normales, haciendo un análisis análogo al de los cuadráticos son

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_1 y_1^3 + \beta_2 y_1^2 y_2 + \beta_3 y_1^2 y_3 + \beta_4 y_1 y_2^2 + \beta_5 y_1 y_3^2 + \beta_6 y_2^3 \end{pmatrix}.$$

## 2.2. Forma Normal Simplificada

En esta sección partiremos de la forma normal del sistema (2.1) y mostraremos que puede ser simplificada aún más, considerando una reparametrización en el tiempo y un nuevo cambio de coordenadas.

**Teorema 6** *Supongamos que el sistema (2.12) satisface que  $\alpha_1 \neq 0$ . Entonces, este sistema es  $C^\infty$  – equivalente a*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1 y_2 + \alpha_3 y_1 y_3 + B_{11} y_1^2 y_2 + B_{22} y_1 y_3^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde

$$\begin{aligned} B_{11} &= -\alpha_3 \alpha_4 - \frac{\alpha_2^2 \alpha_4}{6\alpha_1} + \frac{2\alpha_4^2}{3} + \beta_2 - \frac{8\alpha_2 \beta_1}{9\alpha_1} \\ B_{22} &= \frac{-\alpha_3^2 \alpha_2 \alpha_4}{16\alpha_1^2} + \beta_5 + \frac{\alpha_3^2 \beta_1}{3\alpha_1^2} - \frac{3\alpha_3 \alpha_4 \beta_1}{8\alpha_1^2} - \frac{5\alpha_3 \beta_3}{8\alpha_1} + \frac{\alpha_4 \beta_3}{2\alpha_1} + \frac{\alpha_3 \beta_4}{8\alpha_1} \end{aligned}$$

**Demostración:**

Reparametrizamos el tiempo

$$\frac{dt}{dT} = 1 - \frac{\beta_1}{3\alpha_1} y_1, \quad (2.14)$$

y hacemos un cambio de coordenadas de la forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\alpha_4}{2\alpha_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Posteriormente, para facilitar los cálculos hacemos  $w = (y_1, y_2, y_3)^T$  y reescribimos el sistema (2.12)

$$\dot{w} = Jw + f_2(w) + f_3(w) \quad (2.16)$$

donde  $f_2$  y  $f_3$  son los términos cuadráticos y cúbicos (respectivamente) del sistema (2.12). Además la reparametrización en el tiempo (2.14) y el cambio de coordenadas (2.15) quedan expresados de la siguiente manera:

$$\frac{dt}{dT} = 1 + L_1 w, \quad (2.17)$$

$$\tilde{w} = Nw, \quad (2.18)$$

con

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\alpha_4}{2\alpha_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \left( \frac{-\beta_1}{3\alpha_1}, 0, 0 \right)^T. \quad (2.19)$$

Aplicando la regla de la cadena y utilizando (2.16), (2.17) y (2.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{w}}{dT} &= \frac{d\tilde{w}}{dt} \frac{dt}{dT} = N\dot{w}(1 + L_1 w) \\ &= N(Jw + f_2(w) + f_3(w))(1 + L_1 w) \\ &= J\tilde{w} + [J\tilde{w}L_1^T N^{-1}\tilde{w} + Nf_2(N^{-1}\tilde{w})] + [Nf_2(N^{-1}\tilde{w})L_1^T N^{-1}\tilde{w} \\ &\quad + Nf_3(N^{-1}\tilde{w})] + \dots, \end{aligned}$$

por lo tanto el nuevo sistema es

$$\frac{d\tilde{w}}{dT} = J\tilde{w} + H_2(\tilde{w}) + H_3(\tilde{w}) + \dots, \quad (2.20)$$

con

$$\begin{aligned} H_2(\tilde{w}) &= J\tilde{w}L_1^T N^{-1}\tilde{w} + Nf_2(N^{-1}\tilde{w}), \\ H_3(\tilde{w}) &= Nf_2(N^{-1}\tilde{w})L_1^T N^{-1}\tilde{w} + Nf_3(N^{-1}\tilde{w}). \end{aligned}$$

Ahora aplicando un cambio de coordenadas de la forma

$$\tilde{w} = \hat{w} + h_2(\hat{w}) + h_3(\hat{w}) \quad (2.21)$$

llegamos a que el sistema (2.20) se transforma en

$$\frac{d\hat{w}}{dT} = J\hat{w} + \hat{F}_2(\hat{w}) + \hat{F}_3(\hat{w}) + \dots \quad (2.22)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{F}_2(\hat{w}) &= H_2(\hat{w}) - Dh_2(\hat{w})J\hat{w} + Jh_2(\hat{w}) \\ \hat{F}_3(\hat{w}) &= H_3(\hat{w}) - Dh_3(\hat{w})J\hat{w} + Jh_3(\hat{w}) - Dh_2(\hat{w})\hat{F}_2(\hat{w}) + DH_2(\hat{w})h_2(\hat{w}) \end{aligned}$$

Utilizando la teoría de formas normales visto en la sección anterior tenemos que existe  $h_2(y)$  que me reduce el sistema (2.22) a

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}_1 &= \hat{y}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 &= \hat{y}_3 \\ \dot{\hat{y}}_3 &= \hat{A}_1\hat{y}_1^2 + \hat{A}_2\hat{y}_1\hat{y}_2 + \hat{A}_3\hat{y}_1\hat{y}_3 + \hat{A}_4\hat{y}_2^2 + \hat{B}_1\hat{y}_1^3 + \hat{B}_2\hat{y}_1^2\hat{y}_2 \\ &\quad + \hat{B}_3\hat{y}_1^2\hat{y}_3 + \hat{B}_4\hat{y}_1\hat{y}_2^2 + \hat{B}_5\hat{y}_1\hat{y}_3^2 + \hat{B}_6\hat{y}_2^3 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \alpha_1, & \hat{A}_2 &= \alpha_2, & \hat{A}_3 &= \alpha_3, & \hat{A}_4 &= 0, \\ \hat{B}_1 &= 0, \\ \hat{B}_2 &= \beta_2 - \alpha_3\alpha_4 - \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{6\alpha_1} + \frac{2\alpha_4^2}{3} - \frac{8\alpha_2\beta_1}{9\alpha_1} \\ \hat{B}_3 &= \beta_3 - \frac{\alpha_3\alpha_2\alpha_4}{6\alpha_1} - \frac{3\alpha_2\alpha_4^2}{4\alpha_1} - 4\alpha_1b_3 - 6\alpha_1b_4 - \frac{5\alpha_3\beta_1}{9\alpha_1} - \frac{\alpha_4\beta_1}{\alpha_1}, \\ \hat{B}_4 &= \beta_4 - \frac{4\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{3\alpha_1} - \frac{3\alpha_2\alpha_4^2}{4\alpha_1} - 8\alpha_1b_3 - 2\alpha_1b_4 - \frac{\alpha_3\beta_1}{9\alpha_1} - \frac{10\alpha_4\beta_1}{3\alpha_1}, \\ \hat{B}_5 &= \beta_5 - \frac{3\alpha_2\alpha_3\alpha_4^2}{8\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\alpha_3b_3 - \frac{7}{2}\alpha_3b_4 - \frac{7\alpha_3\alpha_4\beta_1}{12\alpha_1^2} + \frac{\alpha_4\beta_3}{2\alpha_1}, \\ \hat{B}_6 &= \beta_6 + \frac{\alpha_3^2\alpha_4}{3\alpha_1} + \frac{\alpha_2^2\alpha_4^2}{36\alpha_1^2} - \frac{11\alpha_3\alpha_4^2}{36\alpha_1} + \frac{\alpha_4^3}{6\alpha_1} - \frac{1}{3}\alpha_2b_3 + \alpha_2b_4 + \frac{2}{3}\alpha_1b_5 \\ &\quad + \frac{7\alpha_2\alpha_4\beta_1}{54\alpha_1^2} + \frac{\beta_1^2}{81\alpha_1^2} - \frac{\alpha_4\beta_2}{3\alpha_1}, \end{aligned}$$

donde  $b_3$ ,  $b_4$  y  $b_5$  son variables libres que aparecen en  $h_2(y)$  (2.10).

Ahora bien, como  $\alpha_1 \neq 0$  podemos dar valores a  $b_3$ ,  $b_4$  y  $b_5$  de tal forma que  $\hat{B}_3 = 0$ ,

$\hat{B}_4 = 0$  y  $\hat{B}_6 = 0$ , y dichos valores son los siguientes:

$$\begin{aligned} b_3 &= -\frac{69\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 27\alpha_2\alpha_4^2 - 4\alpha_3\beta_1 + 162\alpha_4\beta_1 + 18\alpha_1\beta_3 - 54\alpha_1\beta_4}{360\alpha_1^2}, \\ b_4 &= -\frac{-12\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 9\alpha_2\alpha_4^2 + 12\alpha_3\beta_1 - 16\alpha_4\beta_1 - 24\alpha_1\beta_3 + 12\alpha_1\beta_4}{120\alpha_1^2}, \\ b_5 &= -\frac{531\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4 + 1080\alpha_1\alpha_3^2\alpha_4 - 72\alpha_2^2\alpha_4^2 - 990\alpha_1\alpha_3\alpha_4^2 + 540\alpha_1\alpha_4^3}{2160\alpha_1^3} \\ &\quad + \frac{-336\alpha_2\alpha_3\beta_1 + 1338\alpha_2\alpha_4\beta_1 + 40\beta_1^2 - 1080\alpha_1\alpha_4\beta_2 + 702\alpha_1\alpha_2\beta_3}{2160\alpha_1^3} \\ &\quad + \frac{-486\alpha_1\alpha_2\beta_4 + 3240\alpha_1^2\beta_6}{2160\alpha_1^3}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en  $\hat{B}_5$  el valor de  $b_3$  y  $b_4$  obtenemos

$$\hat{B}_5 = \frac{-\alpha_3^2\alpha_2\alpha_4}{16\alpha_1^2} + \beta_5 + \frac{\alpha_3^2\beta_1}{3\alpha_1^2} - \frac{3\alpha_3\alpha_4\beta_1}{8\alpha_1^2} - \frac{5\alpha_3\beta_3}{8\alpha_1} + \frac{\alpha_4\beta_3}{2\alpha_1} + \frac{\alpha_3\beta_4}{8\alpha_1}$$

Renombrando a  $B_{11} = \hat{B}_2$  y  $B_{22} = \hat{B}_5$  queda demostrado el teorema ■

Análogamente se demuestra el siguiente teorema

**Teorema 7** *Supongamos que el sistema (2.12) satisface que  $\alpha_1 = 0$  y los coeficientes  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  son no nulos. Entonces, este sistema es  $C^\infty$  – equivalente a*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= \alpha_2 y_1 y_2 + \alpha_3 y_1 y_3 + \alpha_4 y_2^2 + \beta_1 y_1^3 + \hat{B} y_1 y_2^2 + \dots \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde

$$\hat{B} = \beta_4 + \frac{13\alpha_2^2\alpha_4\beta_3 - 9\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_2 - 21\beta_3\alpha_2^2\alpha_3 + 13\alpha_3^2\alpha_2\beta_2 - 48\beta_1\alpha_2\beta_3 + 30\beta_1\beta_2\alpha_3}{\alpha_2^2\alpha_3}$$

# Capítulo 3

## Teorema de la bifurcación triple cero

En este capítulo abordaremos el estudio de dos problemas: uno, determinar una deformación versal del sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + f_2(x) + f_3(x), \quad (3.1)$$

donde  $f_2(x)$  y  $f_3(x)$  son los términos cuadráticos y cúbicos respectivamente, y dos, demostraremos el teorema de la bifurcación triple cero. En la sección 3.1 nos enfocamos en encontrar el mínimo número de parámetros que debemos agregar al sistema (3.1) de tal forma que se pueda estudiar el comportamiento de las soluciones. Para esto, primeramente agregamos una perturbación muy general, que consta de 12 parámetros el cual bajo un cambio de coordenadas propuesto por Murdock (ver [10]), logramos reducirlo solamente a 3 parámetros que finalmente trabaja Freire *et al.* (ver [3]). Tal sistema paramétrico reducido a su mínima expresión se le conoce como deformación versal. Además, daremos las condiciones que se deben satisfacer para que dicha deformación versal exista.

Ya que se expone la forma de la deformación versal, en la sección 3.2 se demuestra, bajo ciertas condiciones de transversalidad, no-degeneración y no-hiperbolicidad, que dicha deformación versal es topológicamente localmente equivalente a un sistema  $m$  – parametrizado. Dicho teorema es parte fundamental para desarrollar el siguiente capítulo, además de ser la parte más importante de esta tesis.

### 3.1. Deformación Versal

Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de las soluciones de un sistema no lineal, donde la parte lineal tiene un valor propio cero con multiplicidad 3. Para esto, tomamos el sistema en general y aplicando la teoría de formas normales logramos reducirlo a un sistema “más simple”. Para estudiar la dinámica de dicho sistema es necesario perturbarlo y al sistema perturbado se le conoce como *deformación*. Si además, aplicamos un cambio de coordenadas a la deformación de tal forma que podemos reducir al mínimo el número de parámetros, este sistema recibe el nombre de *deformación versal*.

Consideremos el sistema en forma normal truncado hasta orden 3

$$\dot{x} = Jx + f_2(x) + f_3(x),$$

donde  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Agregamos una perturbación de la forma

$$\varepsilon[p + Qx],$$

donde  $p \in \mathbb{R}^3$ ,  $Q \in M_{3 \times 3}$  y  $\varepsilon \approx 0$ . Así

$$\dot{x} = Jx + f_2(x) + f_3(x) + \varepsilon[p + Qx] \quad (3.2)$$

es la deformación del sistema. Nuestro objetivo es reducir el número de parámetros de 12 a 3, para tener la deformación versal, que es la que estudiaremos en la siguiente sección.

Considere el cambio de coordenadas de la forma

$$x = y + \varepsilon(k + Ly) \quad (3.3)$$

con  $k = (k_1, k_2, k_3)^T \in \mathbb{R}^3$  y  $L \in M_{3 \times 3}$ . Derivando (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} + \varepsilon L \dot{y} \\ &= (I + \varepsilon L) \dot{y}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\dot{y} = (I + \varepsilon L)^{-1} \dot{x}. \quad (3.4)$$

Como  $\varepsilon \approx 0$ , entonces

$$(I + \varepsilon L)^{-1} = I - \varepsilon L + \mathcal{O}(|\varepsilon|^2). \quad (3.5)$$

Además

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Jx + f_2(x) + f_3(x) + \varepsilon[p + Qx] \\ &= J(y + \varepsilon(k + Ly)) + f_2(y + \varepsilon(k + Ly)) + f_3(y + \varepsilon(k + Ly)) \\ &\quad + \varepsilon[p + Q(y + \varepsilon(k + Ly))], \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} f_2(y + \varepsilon(k + Ly)) &= f_2(y) + Df_2(y)(\varepsilon(k + Ly)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ f_3(y + \varepsilon(k + Ly)) &= f_3(y) + Df_3(y)(\varepsilon(k + Ly)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

entonces

$$\dot{x} = Jy + f_2(y) + f_3(y) + \varepsilon[\hat{p} + \hat{q}(y)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{p} &= p + Jk, \\ \hat{q}(y) &= Qy + JLy + Df_2(y)k. \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo (3.5) y (3.6) en (3.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Jy + f_2(y) + f_3(y) + \varepsilon[\hat{p} + (\hat{q}(y) - LJy) + \dots] \\ &= Jy + f_2(y) + f_3(y) + \varepsilon[\hat{p} + \tilde{q}(y)] + \dots, \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{q}(y) = \hat{q}(y) - LJy.$$

Obsérvese que

$$\tilde{q}(y) = Qy + JLy + Df_2(y)k - LJy, \quad (3.7)$$

ahora bien, si

$$f_2(y) = \frac{1}{2}y^T Dy,$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \end{pmatrix},$$

con  $D_3 = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & 2\alpha_4 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (ver 2.12), entonces  $Df_2(y) = y^T D$  y sustituyendo en (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{q}(y) &= Qy + JLy + y^T Dk - LJy = Qy + JLy + k^T Dy - LJy \\ &= (Q + JL + k^T D - LJ)y. \end{aligned}$$

Con lo anterior queda demostrado el siguiente lema

**Lema 9** *El sistema (3.2) bajo el cambio de coordenadas (3.3) es topológicamente equivalente a*

$$\dot{y} = Jy + f_2(y) + f_3(y) + \varepsilon[\hat{p} + \tilde{Q}y],$$

con

$$\hat{p} = p + Jk \tag{3.8}$$

$$\tilde{Q} = Q + JL + k^T D - LJ. \tag{3.9}$$

Recordemos que para reducir los parámetros del sistema, podemos utilizar las entradas de  $k$  y  $L$  para lograrlo. Si  $p = (p_1, p_2, p_3)^T$  entonces (3.8) se transcribe como

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + k_2 \\ p_2 + k_3 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, si hacemos  $k_2 = -p_1$  y  $k_3 = -p_2$  tenemos que (3.8) se simplifica

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Como  $p_3$  es un parámetro libre, definamos

$$\varepsilon_1 = \varepsilon p_3. \quad (3.10)$$

Ahora bien, para simplificar  $\tilde{Q}$ , definamos

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$JL = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Asi mismo

$$LJ = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_{11} & l_{12} \\ 0 & l_{21} & l_{22} \\ 0 & l_{31} & l_{32} \end{pmatrix},$$

además,

$$\begin{aligned} k^T D &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k^T D_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 & k_1\alpha_2 + 2k_2\alpha_4 & k_1\alpha_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con todo lo anterior y definiendo

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

tenemos que (3.9)

$$\begin{aligned}
\tilde{Q} &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & l_{11} & l_{12} \\ 0 & l_{21} & l_{22} \\ 0 & l_{31} & l_{32} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 & k_1\alpha_2 + 2k_2\alpha_4 & k_1\alpha_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{13} \\ \tilde{q}_{21} & \tilde{q}_{22} & \tilde{q}_{23} \\ \tilde{q}_{31} & \tilde{q}_{32} & \tilde{q}_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_{11} &= q_{11} + l_{21}, & \tilde{q}_{12} &= q_{12} + l_{22} - l_{11}, \\
\tilde{q}_{13} &= q_{13} + l_{23} - l_{12}, & \tilde{q}_{21} &= q_{21} + l_{31}, \\
\tilde{q}_{22} &= q_{22} + l_{32} - l_{21}, & \tilde{q}_{23} &= q_{23} + l_{33} - l_{22}, \\
\tilde{q}_{31} &= q_{31} + 2k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, & \tilde{q}_{32} &= q_{32} - l_{31} + k_1\alpha_2 + 2k_2\alpha_4, \\
\tilde{q}_{33} &= q_{33} - l_{32} + k_1\alpha_3.
\end{aligned}$$

Entonces haciendo

$$\begin{aligned}
l_{21} &= -q_{11}, & l_{31} &= -q_{21}, \\
k_1 &= -\frac{q_{31} + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3}{2\alpha_1}, & l_{22} &= l_{11} - q_{12}, \\
l_{32} &= l_{21} - q_{22}, & l_{23} &= l_{12} - q_{13}, \\
l_{33} &= l_{22} - q_{23},
\end{aligned}$$

con  $\alpha_1 \neq 0$ , tenemos que

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{32} + q_{21} + k_1\alpha_2 + 2k_2\alpha_4 & q_{11} + q_{22} + q_{33} + k_1\alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Como los  $q_{i,j}$  son parámetros libres, entonces definimos

$$\varepsilon_2 = \varepsilon(q_{32} + q_{21} + k_1\alpha_2 + 2k_2\alpha_4) \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon(q_{11} + q_{22} + q_{33} + k_1\alpha_3). \quad (3.12)$$

Con lo anterior tenemos demostrado el siguiente teorema

**Teorema 8** *Sea*

$$\dot{x} = Jx + f_2(y) + f_3(y) + \varepsilon[p + Qx] \quad (3.13)$$

un deformación de la forma normal del sistema truncado hasta orden 3 con  $p \in \mathbb{R}^3$ ,  $Q \in M_{3 \times 3}$  y  $\varepsilon \approx 0$ . Entonces, si  $\alpha_1 \neq 0$  existe un cambio de coordenadas de la forma

$$x = y + \varepsilon(k + Ly)$$

tal que una deformación versal del sistema (3.13) es

$$\dot{x} = Jx + f_2(y) + f_3(y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} y$$

con  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  dados en (3.10) (3.11) y (3.12) respectivamente.

## 3.2. Teorema Principal

**Teorema 9** *(Teorema de la bifurcación triple cero.)* Sea el campo vectorial

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (3.14)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$  y  $f$  un campo suave. Supongamos que existe  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  y  $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$H1) \quad f(x_0, \mu_0) = 0,$$

$$H2) \quad \sigma(Df(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_{1,2,3} = 0\} \quad (\text{no-hiperbolicidad}),$$

$$H3) \quad a \neq 0 \quad (\text{no-degeneración}),$$

$$H4) \quad d_1, d_2 \text{ y } d_3 \text{ sean linealmente independientes} \quad (\text{transversalidad}),$$

donde el valor propio  $\lambda = 0$  tiene multiplicidad geométrica uno,  $a$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  son dadas en (3.26), (3.34), (3.39) y (3.40) respectivamente. Entonces la dinámica del sistema (3.14) en una vecindad de  $x_0$  y  $\mu \approx \mu_0$ , la cual es dada por (3.22) es topológicamente equivalente a la deformación versal (3.15) de la bifurcación triple cero

$$\dot{z} = Jz + S_0\varepsilon + \varepsilon^T S_1 z + \widehat{G}_2(z) + \widehat{G}_3(z) \quad (3.15)$$

donde  $\varepsilon_1 = (\mu - \mu_0)^T d_1$ ,  $\varepsilon_2 = (\mu - \mu_0)^T d_2$ ,  $\varepsilon_3 = (\mu - \mu_0)^T d_3$ .

**Demostración:** Consideremos el siguiente campo vectorial  $m$ -parametrizado

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (3.16)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  y  $m \geq 3$  y supongamos que existe  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  y  $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$H1) \quad f(x_0, \mu_0) = 0,$$

$$H2) \quad \sigma(Df(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_{1,2,3} = 0\}.$$

Si el valor propio 0 tiene multiplicidad geométrica uno, entonces aseguramos que

$$Df(x_0, \mu_0) \sim J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, que la parte lineal del sistema es similar a una matriz no semi-simple.

Nuestro objetivo será encontrar condiciones suficientes sobre el campo vectorial  $f$ , tal que la dinámica del campo vectorial en una vecindad de  $x_0$  sean topológicamente localmente equivalente a la deformación versal (3.15).

**Lema 10** Sean  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  tal que,  $v_1$  es vector propio y  $v = v_2 + v_3 i$  es vector propio generalizado de  $Df(x_0, \mu_0)$  correspondiente al valor propio  $\lambda = 0$ . Definimos  $P = (v_1, v_2, v_3)$  y de la teoría de formas de Jordan se sigue que

$$P^{-1} Df(x_0, \mu_0) P = J. \quad (3.17)$$

Si

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ w_3^T \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad w_3^T Df(x_0, \mu_0) = 0, \quad w_2^T Df(x_0, \mu_0) = w_3^T, \quad w_1^T Df(x_0, \mu_0) = w_2^T.$$

Esto es,  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$  son tales que  $w_3$  es vector propio izquierdo y  $w = w_2 + w_1 i$  es vector propio izquierdo generalizado de  $Df(x_0, \mu_0)$  correspondientes al valor propio  $\lambda = 0$ .

Demostración:

Multiplicamos  $P^{-1}$  por la derecha de (3.17) y obtenemos

$$\begin{aligned} P^{-1}Df(x_0, \mu_0)P &= J \\ \Leftrightarrow P^{-1}Df(x_0, \mu_0) &= JP^{-1} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1^T Df(x_0, \mu_0) \\ w_2^T Df(x_0, \mu_0) \\ w_3^T Df(x_0, \mu_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ w_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2^T \\ w_3^T \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} w_1^T Df(x_0, \mu_0) &= w_2^T \\ w_2^T Df(x_0, \mu_0) &= w_3^T \\ w_3^T Df(x_0, \mu_0) &= 0 \end{aligned}$$

■

Pondremos el sistema (3.14) en forma de Jordan y para ello consideremos el cambio de coordenadas y parámetros

$$\begin{aligned} y &= P^{-1}(x - x_0) \\ \beta &= \mu - \mu_0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

así como la serie de Taylor alrededor de  $(x_0, \mu_0)$  de  $f(x, \mu)$

$$\begin{aligned} f(x, \mu) &= Df(x_0, \mu_0)(x - x_0) + f_\mu(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0) + f_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0, x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}D^2f(x_0, \mu_0)(x - x_0, x - x_0) + \frac{1}{6}D^3f(x_0, \mu_0)(x - x_0, x - x_0, x - x_0) + \dots, \end{aligned} \tag{3.19}$$

Derivando (3.18) y usando la serie de Taylor (3.19), el sistema (3.14) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P^{-1}\dot{x} = P^{-1}f(x, \mu) \\ &= P^{-1} \left[ Df(x_0, \mu_0)Py + f_\mu(x_0, \mu_0)\beta + f_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\beta, Py) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}D^2f(x_0, \mu_0)(Py, Py) + \frac{1}{6}D^3f(x_0, \mu_0)(Py, Py, Py) + \dots \right] \\ &= P^{-1}Df(x_0, \mu_0)Py + P^{-1}f_\mu(x_0, \mu_0)\beta + P^{-1}f_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\beta, Py) \\ &\quad + \frac{1}{2}P^{-1}D^2f(x_0, \mu_0)(Py, Py) + \frac{1}{6}P^{-1}D^3f(x_0, \mu_0)(Py, Py, Py) + \dots \end{aligned} \tag{3.20}$$

Hagamos

$$R_0 = P^{-1} f_{\mu}(x_0, \mu_0).$$

**Lema 11** Si

$$P^{-1} f_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\beta, Py) = \beta^T R_1 y$$

entonces  $R_1 = (P^{-1} \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0)) P$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} P^{-1} f_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\beta, Py) &= P^{-1}(\beta^T f_{\mu x}(x_0, \mu_0) Py) \\ &= \begin{pmatrix} w_1^T \beta^T f_{\mu x}(x_0, \mu_0) Py \\ w_2^T \beta^T f_{\mu x}(x_0, \mu_0) Py \\ w_3^T \beta^T f_{\mu x}(x_0, \mu_0) Py \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 w_{1j} \beta^T f_{j\mu x}(x_0, \mu_0) Py \\ \sum_{j=1}^3 w_{2j} \beta^T f_{j\mu x}(x_0, \mu_0) Py \\ \sum_{j=1}^3 w_{3j} \beta^T f_{j\mu x}(x_0, \mu_0) Py \end{pmatrix} \\ &= \beta^T \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 w_{1j} f_{j\mu x}(x_0, \mu_0) P \\ \sum_{j=1}^3 w_{2j} f_{j\mu x}(x_0, \mu_0) P \\ \sum_{j=1}^3 w_{3j} f_{j\mu x}(x_0, \mu_0) P \end{pmatrix} y \\ &= \beta^T \begin{pmatrix} (w_1 \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0)) P \\ (w_2 \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0)) P \\ (w_3 \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0)) P \end{pmatrix} y \\ &= \beta^T (P^{-1} \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0)) Py. \end{aligned}$$

■

**Lema 12** Si

$$P^{-1} D^2 f(x_0, \mu_0)(Py, Py) = y^T R_2 y$$

entonces  $R_2 = (P^{-1} \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(P, P)$

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
 P^{-1}D^2 f(x_0, \mu_0)(Py, Py) &= \begin{pmatrix} w_1^T D^2 f(x_0, \mu_0)(Py, Py) \\ w_2^T D^2 f(x_0, \mu_0)(Py, Py) \\ w_3^T D^2 f(x_0, \mu_0)(Py, Py) \end{pmatrix} \\
 &= y^T P^T \begin{pmatrix} w_1 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) \\ w_2 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) \\ w_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0) \end{pmatrix} Py \\
 &= y^T P^T (P^{-1} \bullet D^2 f(x_0, \mu_0)) Py \\
 &= y^T (P^{-1} \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(P, P) y
 \end{aligned}$$

■

Como los coeficientes de los términos cuadráticos se utilizarán posteriormente, los denotaremos de la siguiente forma

$$a_{ijk} = (w_i \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(v_j, v_k) \quad (3.21)$$

con  $i, j, k = 1, 2, 3$  donde  $a_{ijk}$  están acomodados de la siguiente forma

$$R_{2i} = \begin{pmatrix} a_{i11} & a_{i12} & a_{i13} \\ a_{i21} & a_{i22} & a_{i23} \\ a_{i31} & a_{i32} & a_{i33} \end{pmatrix}.$$

Con los lemas 10 y 11 queda demostrado el siguiente lema

**Lema 13** *El sistema (3.16) bajo el cambio de coordenadas (3.18) se transforma en*

$$\dot{y} = Jy + R_0 \beta + \beta^T R_1 y + F_2(y) + F_3(y) + \dots \quad (3.22)$$

con  $F_2(y) = \frac{1}{2} y^T R_2 y$ ,  $F_3(y) = \frac{1}{6} R_3(y, y, y)$ ,

$$R_0 = P^{-1} f_\mu(x_0, \mu_0) \quad (3.23)$$

$$R_1 = (P^{-1} \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0)) P \quad (3.24)$$

$$R_2 = (P^{-1} \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(P, P). \quad (3.25)$$

Posteriormente, vamos a necesitar conocer el coeficiente del término cuadrático  $y_1^2$  de la tercera componente de  $F_2(y)$ , así que vamos a obtenerlo.

Recordando que

$$F_2(y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ w_3^T \end{pmatrix} D^2 f(x_0, \mu_0)(Py, Py) = \begin{pmatrix} F_{21}(y) \\ F_{22}(y) \\ F_{23}(y) \end{pmatrix},$$

luego,

$$F_{23}(y) = \frac{1}{2} w_3^T D^2 f(x_0, \mu_0)(Py, Py).$$

Sea  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , entonces  $Py = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3$ , luego,

$$\begin{aligned} F_{23}(y) &= \frac{1}{2} w_3^T D^2 f(x_0, \mu_0)(y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3, y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3) \\ &= \frac{1}{2} w_3^T D^2 f(x_0, \mu_0)(v_1, v_1) y_1^2 + \frac{1}{2} w_3^T D^2 f(x_0, \mu_0)(v_2, v_2) y_2^2 + \dots \end{aligned}$$

por lo tanto, el coeficiente que nos interesa es

$$a = \frac{1}{2} \langle w_3, D^2 f(x_0, \mu_0)(v_1, v_1) \rangle. \quad (3.26)$$

Veamos, si podemos encontrar condiciones suficientes en el campo vectorial  $f$ , tal que la dinámica en una vecindad de  $x_0$ , sea topológicamente equivalente a la deformación versal

$$\dot{z} = Jz + S_0 \varepsilon + \varepsilon^T S_1 z + \widehat{G}_2(z) + \widehat{G}_3(z) \quad (3.27)$$

donde  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ ,

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \\ S_{13} \end{pmatrix}, \quad \text{con } S_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y  $\widehat{G}_2(z), \widehat{G}_3(z)$  son la forma normal de  $F_2(x)$  y  $F_3(x)$  respectivamente.

Lo que sigue, es encontrar un difeomorfismo que me mande soluciones de (3.27) a (3.22)

y así los sistemas sean topológicamente localmente equivalentes. Sea

$$y = z + L_0 \beta + \beta^T L_1 z + h_2(z) + h_3(z) \quad (3.28)$$

con

$$L_0 = \begin{pmatrix} L_{01} \\ L_{02} \\ L_{03} \end{pmatrix}_{3 \times m} \quad L_1 = \begin{pmatrix} (L_{11})_{m \times 3} \\ (L_{12})_{m \times 3} \\ (L_{13})_{m \times 3} \end{pmatrix} \quad h_{2,3}(z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Derivando (3.28), tenemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{z} + \beta^T L_1 \dot{z} + Dh_2(z) \dot{z} + Dh_3(z) \dot{z} \\ &= (I + \beta^T L_1 + Dh_2(z) + Dh_3(z)) \dot{z} \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\dot{z} = (I + \beta^T L_1 + Dh_2(z) + Dh_3(z))^{-1} \dot{y} \quad (3.29)$$

pero, para  $|z| \approx 0$  tenemos

$$(I + \beta^T L_1 + Dh_2(z) + Dh_3(z))^{-1} = I - \beta^T L_1 - Dh_2(z) - Dh_3(z) + (Dh_2(z))^2 + \dots \quad (3.30)$$

Además, sustituyendo (3.28) en (3.22) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= J(z + L_0 \beta + \beta^T L_1 z + h_2(z) + h_3(z)) + R_0 \beta \\ &\quad + \beta^T R_1(z + L_0 \beta + \beta^T L_1 z + h_2(z) + h_3(z)) \\ &\quad + F_2(z + L_0 \beta + \beta^T L_1 z + h_2(z) + h_3(z)) \\ &\quad + F_3(z + L_0 \beta + \beta^T L_1 z + h_2(z) + h_3(z)) \end{aligned}$$

si

$$\begin{aligned} F_2(z + L_0 \beta + \beta^T L_1 z + h_2(z) + h_3(z)) &= F_2(z) + z^T R_2 L_0 \beta + z^T R_2 h_2(z) + \dots \\ &= \frac{1}{2} z^T R_2 z + (L_0 \beta)^T R_2 z + z R_2 h_2(z) + \dots \\ F_3(z + L_0 \beta + \beta^T L_1 z + h_2(z) + h_3(z)) &= F_3(z) + \dots \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Jz + JL_0 \beta + R_0 \beta + [J\beta^T L_1 z + \beta^T R_1 z + \beta^T L_0^T R_2 z] + [Jh_2(z) + F_2(z)] \\ &\quad + [Jh_3(z) + F_3(z) + z^T R_2 h_2(z)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por lo tanto si sustituimos (3.31) y (3.30) en (3.29) llegamos a lo siguiente

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= (I - \beta^T L_1 - Dh_2(z) - Dh_3(z) + (Dh_2(z))^2 + \dots)(Jz + JL_0\beta + R_0\beta \\
&\quad + [J\beta^T L_1 z + \beta^T R_1 z + \beta^T L_0^T R_2 z] + [Jh_2(z) + F_2(z)] + [Jh_3(z) + F_3(z) \\
&\quad + z^T R_2 h_2(z)] + \dots) \\
&= Jz + (JL_0 + R_0)\beta + [J\beta^T L_1 z + \beta^T R_1 z + \beta^T L_0^T R_2 z - \beta^T L_1 Jz \\
&\quad - Dh_2(z)(JL_0 + R_0)\beta] + [F_2(z) + Jh_2(z) - Dh_2(z)Jz] + [F_3(z) \\
&\quad + Jh_3(z) + z^T R_2 h_2(z) - Dh_3(z)Jz - Dh_2(z)(Jh_2(z) + F_2(z))] \\
&\quad + (Dh_2(z))^2 + \dots,
\end{aligned}$$

Hagamos

$$\tilde{R}_0 = JL_0 + R_0.$$

**Lema 14** Si

$$J\beta^T L_1 z + \beta^T R_1 z + \beta^T L_0^T R_2 z - \beta^T L_1 Jz - Dh_2(z)(JL_0 + R_0)\beta = \beta^T \tilde{R}_1 z \quad (3.32)$$

entonces  $\tilde{R}_1 = R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J + JL_1 - \tilde{R}_0^T L_2$ .

**Demostración:**

$$J\beta^T L_1 z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^T L_{11} z \\ \beta^T L_{12} z \\ \beta^T L_{13} z \end{pmatrix} = \beta^T \begin{pmatrix} L_{12} \\ L_{13} \\ 0 \end{pmatrix} z = \beta^T JL_1 z,$$

tenemos además que  $h_2(z) = \frac{1}{2} z^T L_2 z$  por ser bilineal, entonces

$$Dh_2(z)\tilde{R}_0\beta = z^T L_2 \tilde{R}_0\beta = \begin{pmatrix} z^T L_{21} \tilde{R}_0\beta \\ z^T L_{22} \tilde{R}_0\beta \\ z^T L_{23} \tilde{R}_0\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^T \tilde{R}_0^T L_{21} z \\ \beta^T \tilde{R}_0^T L_{22} z \\ \beta^T \tilde{R}_0^T L_{23} z \end{pmatrix} = \beta^T \tilde{R}_0^T L_2 z$$

por lo tanto

$$\tilde{R}_1 = R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J + JL_1 - \tilde{R}_0^T L_2.$$

■

Con lo anterior queda demostrado el siguiente lema

**Lema 15** *El sistema (3.22) bajo el cambio de coordenadas (3.28) se transforma en*

$$\dot{z} = Jz + \tilde{R}_0\beta + \beta^T \tilde{R}_1 z + \tilde{F}_2(z) + \tilde{F}_3(z) + \dots, \quad (3.33)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{R}_0 &= JL_0 + R_0 \\ \tilde{R}_1 &= R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J + JL_1 - \tilde{R}_0^T L_2 \\ \tilde{F}_2(z) &= F_2(z) + Jh_2(z) - Dh_2(z)Jz \\ \tilde{F}_3(z) &= F_3(z) + Jh_3(z) - Dh_3(z)Jz + z^T R_2 h_2(z) - Dh_2(z)\tilde{F}_2(z). \end{aligned}$$

Nos interesa la equivalencia topológica local entre (3.27) y (3.33). Así que, encontraremos las condiciones para que dicha equivalencia exista,

**Lema 16** *Existen  $L_{02}$  y  $L_{03}$  tal que*

$$\tilde{R}_0\beta = S_0\varepsilon.$$

**Demostración:** Observe que

$$R_0 = P^{-1}f_\mu(x_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} w_1^T f_\mu(x_0, \mu_0) \\ w_2^T f_\mu(x_0, \mu_0) \\ w_3^T f_\mu(x_0, \mu_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{01}^T \\ R_{02}^T \\ R_{03}^T \end{pmatrix},$$

y

$$JL_0 = \begin{pmatrix} L_{02}^T \\ L_{03}^T \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces dado que  $\tilde{R}_0 = R_0 + JL_0$  tenemos que

$$\tilde{R}_0 = \begin{pmatrix} (R_{01}^T + L_{02}^T)\beta \\ (R_{02}^T + L_{03}^T)\beta \\ R_{03}^T\beta \end{pmatrix},$$

entonces, si definimos

$$\begin{aligned} L_{02} &= -R_{01} = -w_1^T f_\mu(x_0, \mu_0), \\ L_{03} &= -R_{02} = -w_2^T f_\mu(x_0, \mu_0), \\ \varepsilon_1 &= w_3^T f_\mu(x_0, \mu_0)\beta \end{aligned}$$

obtenemos

$$\tilde{R}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} = S_0 \varepsilon.$$

■

Tenemos entonces que

$$\varepsilon_1 = w_3^T f_\mu(x_0, \mu_0) \beta = \beta^T f_\mu^T(x_0, \mu_0) w_3 = \beta^T d_1,$$

donde

$$d_1 = f_\mu^T(x_0, \mu_0) w_3. \quad (3.34)$$

**Lema 17** Si  $a \neq 0$ , entonces existen  $L_{01}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{13}$  y  $\varepsilon_{2,3}$  tal que

$$\beta^T \tilde{R}_1 = \varepsilon^T S_1. \quad (3.35)$$

**Demostración:** Observemos que  $\tilde{R}_1 = R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J + J L_1 - \tilde{R}_0^T L_2$

$$L_0^T R_2 = \begin{pmatrix} L_0^T R_{21} \\ L_0^T R_{22} \\ L_0^T R_{23} \end{pmatrix}, \quad L_1 J = \begin{pmatrix} L_{11} J \\ L_{12} J \\ L_{13} J \end{pmatrix}, \quad J L_1 = \begin{pmatrix} L_{12} \\ L_{13} \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\tilde{R}_0^T L_2 = \begin{pmatrix} \tilde{R}_0^T L_{21} \\ \tilde{R}_0^T L_{22} \\ \tilde{R}_0^T L_{23} \end{pmatrix}$$

entonces dado que  $\tilde{R}_1 = R_1 + L_0^T R_2 - L_1 J + J L_1 - \tilde{R}_0^T L_2$  tenemos que

$$\beta^T \tilde{R}_1 z = \begin{pmatrix} \beta^T \tilde{R}_{11} z \\ \beta^T \tilde{R}_{13} z \\ \beta^T \tilde{R}_{13} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^T (R_{11} + L_0^T R_{21} - L_{11} J + L_{12} - \tilde{R}_0^T L_{21}) z \\ \beta^T (R_{12} + L_0^T R_{22} - L_{12} J + L_{13} - \tilde{R}_0^T L_{22}) z \\ \beta^T (R_{13} + L_0^T R_{23} - L_{13} J - \tilde{R}_0^T L_{23}) z \end{pmatrix}.$$

Si definimos

$$\begin{aligned} L_{12} &= \tilde{R}_0^T L_{21} + L_{11} J - R_{11} - L_0^T R_{21} \\ L_{13} &= \tilde{R}_0^T L_{22} + L_{12} J - R_{12} - L_0^T R_{22} \\ &= \tilde{R}_0^T L_{22} + (\tilde{R}_0^T L_{21} + L_{11} J - R_{11} - L_0^T R_{21}) J - R_{12} - L_0^T R_{22} \\ &= \tilde{R}_0^T L_{22} + \tilde{R}_0^T L_{21} J + L_{11} J^2 - R_{11} J - L_0^T R_{21} J - R_{12} - L_0^T R_{22} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{11} &= 0, \\ \tilde{R}_{12} &= 0, \\ \tilde{R}_{13} &= R_{13} + L_0^T R_{23} - L_{13} J - \tilde{R}_0^T L_{23}.\end{aligned}$$

Si sustituimos  $L_{12}$  y  $L_{13}$  en  $\tilde{R}_{13}$  obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{13} &= R_{13} + L_0^T R_{23} - (\tilde{R}_0^T L_{22} + \tilde{R}_0^T L_{21} J + L_{11} J^2 - R_{11} J - L_0^T R_{21} J - R_{12} \\ &\quad - L_0^T R_{22}) J - \tilde{R}_0^T L_{23} \\ &= R_{13} + L_0^T R_{23} - \tilde{R}_0^T L_{22} J - \tilde{R}_0^T L_{21} J^2 + R_{11} J^2 + L_0^T R_{21} J^2 + R_{12} J \\ &\quad + L_0^T R_{22} J - \tilde{R}_0^T L_{23} \\ &= R_{13} + L_0^T R_{23} - \tilde{R}_0^T L_{23} + \left( R_{12} + L_0^T R_{22} - \tilde{R}_0^T L_{22} \right) J \\ &\quad + \left( R_{11} + L_0^T R_{21} - \tilde{R}_0^T L_{21} \right) J^2.\end{aligned}$$

entonces, vamos a expresar a  $\tilde{R}_{13}$  en columnas. Definimos  $\tilde{R}_{13}^i$  con  $i = 1, 2, 3$  como la columna  $i$ -ésima de  $\tilde{R}_{13}$ , las cuales están dadas por

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{13}^1 &= R_{13}^1 + L_0^T R_{23}^1 - \tilde{R}_0^T L_{23}^1, \\ \tilde{R}_{13}^2 &= \sum_{j=1}^2 R_{1,j+1}^j + L_0^T \left( \sum_{j=1}^2 R_{2,j+1}^j \right) - \tilde{R}_0^T \left( \sum_{j=1}^2 L_{2,j+1}^j \right), \\ \tilde{R}_{13}^3 &= \sum_{j=1}^3 R_{1,j}^j + L_0^T \left( \sum_{j=1}^3 R_{2,j}^j \right) - \tilde{R}_0^T \left( \sum_{j=1}^3 L_{2,j}^j \right).\end{aligned}$$

Observando que

$$L_0^T R_{23}^1 = (L_{01} L_{02} L_{03}) \begin{pmatrix} a_{311} \\ a_{321} \\ a_{331} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_{3i1} L_{0i}$$

entonces como  $a_{311} = 2a$  y  $a \neq 0$

$$\tilde{R}_{13}^1 = 0 \Leftrightarrow L_{01} = -\frac{1}{2a} \left( R_{13}^1 - \tilde{R}_0^T L_{23}^1 + a_{321} L_{02} + a_{331} L_{03} \right).$$

Por lo tanto, si definimos

$$L_{01} = -\frac{1}{2a} \left( R_{13}^1 - \tilde{R}_0^T L_{23}^1 + a_{321} L_{02} + a_{331} L_{03} \right) \tilde{R}_{13}^1, \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_2 = \beta^T \tilde{R}_{13}^2, \quad (3.37)$$

$$\varepsilon_3 = \beta^T \tilde{R}_{13}^3. \quad (3.38)$$

llegamos a que

$$\beta^T \tilde{R}_1 = \begin{pmatrix} 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} \\ 0 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \varepsilon^T S_1.$$

■

De las ecuaciones (3.37) y (3.38) obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \beta^T \tilde{R}_{13}^2 = \beta^T d_2, \\ \varepsilon_3 &= \beta^T \tilde{R}_{13}^3 = \beta^T d_3. \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es expresar a  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  en términos del campo original, que es lo que a continuación de desarrollará. Tenemos por (3.24) que

$$\begin{aligned} R_{1i} &= (w_i \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))P \\ &= (w_i \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))(v_1, v_2, v_3) \\ &= ((w_i \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_1, (w_i \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_2, (w_i \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_3) \end{aligned}$$

analogamente, por (3.25) tenemos que

$$\begin{aligned} R_{2i} &= P(w_i \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))P \\ &= P^T(w_i \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))(v_1, v_2, v_3) \\ &= (P^T(w_i \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))v_1, P^T(w_i \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))v_2, P^T(w_i \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))v_3) \end{aligned}$$

con lo anterior y por (3.23)  $L_{01}$  en términos del campo original es

$$\begin{aligned} L_{01} &= -\frac{1}{2a} ((w_3 \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_1 - (L_{23}^1)_3 w_3 f_\mu(x_0, \mu_0) \\ &\quad + (w_1^T f_\mu(x_0, \mu_0))(v_2^T (w_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))v_1) \\ &\quad + (w_2^T f_\mu(x_0, \mu_0))(v_3^T (w_3 \bullet D^2 f(x_0, \mu_0))v_1)), \end{aligned}$$

donde  $(L_{23}^1)_3 = \frac{1}{3}(2a_{10} + a_{17} - 2a_9) = \frac{1}{3}(a_{222} + a_{323} - 2a_{231})$  (ver 2.11).

Finalmente las expresiones para  $d_1$  y  $d_2$  en términos del campo original son:

$$\begin{aligned} d_2 = & (a_{312} + a_{211})L_{01} - (a_{322} + a_{221})(w_1^T f_\mu(x_0, \mu_0)) - (w_2^T f_\mu(x_0, \mu_0))(a_{332} + a_{231}) \\ & + (w_3 \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_2 + (w_2 \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_1 - c_1 w_3 f_\mu(x_0, \mu_0), \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} d_3 = & (a_{313} + a_{212} + a_{111})L_{01} - (a_{323} + a_{222} + a_{121})(w_1^T f_\mu(x_0, \mu_0)) \\ & - (a_{333} + a_{232} + a_{131})(w_2^T f_\mu(x_0, \mu_0)) + (w_3 \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_3 \\ & + (w_2 \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_2 + (w_1 \bullet f_{\mu x}(x_0, \mu_0))v_1 + c_2 w_3 f_\mu(x_0, \mu_0). \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde

$$c_1 = (L_{23}^2 + L_{22}^1)_3 = \frac{1}{3}(4a_{18} + a_{11} + a_8 - 2a_3 + 2a_4) = \frac{1}{3}(2a_{333} + a_{223} + a_{212} - 2a_{113} + a_{122}),$$

$$c_2 = (L_{23}^3 + L_{22}^2 + L_{21}^1)_3 = 2a_{12} + 3a_5 - 4(b_3 + b_4) = a_{233} + 3a_{123} - 4(b_3 + b_4),$$

con  $b_3$  y  $b_4$  variables libres.

Por último tenemos que de la teoría de formas normales, existen  $h_2(z)$  que transforman a

$$F_2(z) + Jh_2(z) - Dh_2(z)Jz$$

en  $\widehat{G}_2(z)$ , y  $h_3(z)$  que transforma a

$$F_3(z) + Jh_3(z) + z^T R_2 h_2(z) - Dh_3(z)Jz - Dh_2(z)(Jh_2(z) + F_2(z))$$

en  $\widehat{G}_3(z)$ . ■

# Capítulo 4

## Análisis de bifurcaciones

En este capítulo, analizamos bifurcaciones alrededor de puntos de equilibrio de codimensión menor que tres que puedan estar dentro de la bifurcación triple cero y lo hacemos utilizando los teoremas mostrados en preliminares o mediante la exploración. La bifurcación triple cero es actualmente un problema abierto y cabe aclarar que el análisis que se realizó en este trabajo es parcial y todos los resultados que se obtuvieron fueron de gran interés, dado que aún no hay mucha investigación alrededor del tema y cualquier aportación resulta de gran importancia.

En resumen, lo que se muestra a continuación son las regiones, en el espacio de parámetros, donde ocurren las bifurcaciones silla-nodo, Hopf, Takens-Bogdanov y cero-Hopf alrededor de puntos de equilibrio, las cuales fueron encontradas utilizando resultados previos. Además, se presenta mediante simulaciones, la existencia de órbitas que conectan dos puntos de equilibrio, donde dichas órbitas no se rompen al perturbar el sistema, lo cual las vuelve muy interesantes y abre camino a un nuevo problema que resultaría interesante investigar.

### 4.1. Bifurcaciones de codimensión uno alrededor de puntos de equilibrio

#### 4.1.1. Bifurcaciones Estacionarias

Las bifurcaciones estacionarias fueron previamente estudiadas por Sotomayor ([9]) y para esta sección utilizaremos el teorema 1 para ver si es posible que ocurra la bifurcación silla-nodo, transcítica o trinche.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y_2 + \varepsilon_3 y_3 + \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1 y_2 + \alpha_3 y_1 y_3 + \alpha_4 y_2^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

con  $\alpha_1 \neq 0$ , que es la deformación versal de la triple cero y comencemos buscando sus puntos de equilibrio haciendo  $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dot{y}_3 = 0$ , así

$$\begin{aligned} y_2 &= 0, \\ y_3 &= 0, \\ \varepsilon_1 + \alpha_1 y_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Entonces,

si  $\varepsilon_1 \alpha_1 > 0$  no tenemos puntos de equilibrio,

si  $\varepsilon_1 \alpha_1 = 0$  tenemos un punto de equilibrio que es el origen  $P_0$ ,

si  $\varepsilon_1 \alpha_1 < 0$  tenemos dos puntos de equilibrio los cuales son

$$P_1 = \left( \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}, 0, 0 \right) \quad \text{y} \quad P_2 = \left( -\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}, 0, 0 \right).$$

Comenzaremos analizando el caso donde  $\varepsilon_1 \alpha_1 < 0$ , para ello veamos bajo que condiciones  $P_1$  y  $P_2$  tienen asociados un valor propio cero y otros dos con parte real distinta de cero. Para hacer lo anterior cambiaremos la notación, reescribiendo el sistema (4.1) como

$$\dot{y} = F(y, \varepsilon),$$

así la Jacobiana evaluada en  $(P_{1,2}, \varepsilon)$  es

$$DF(P_{1,2}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pm 2\alpha_1 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} & \varepsilon_2 \pm \alpha_2 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} & \varepsilon_3 \pm \alpha_3 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \end{pmatrix},$$

que tiene como polinomio característico a

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \left( \varepsilon_3 \pm \alpha_3 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \right) \lambda^2 - \left( \varepsilon_2 \pm \alpha_2 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \right) \lambda - \left( \pm 2\alpha_1 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \right),$$

por lo tanto, si queremos tener un valor propio igual a cero, se debe de cumplir la siguiente igualdad

$$\pm 2\alpha_1 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} = 0$$

y dado que  $\alpha_1$  y  $\varepsilon_1$  son distintos de cero, no se cumple la igualdad anterior, entonces si  $\varepsilon_1 \alpha_1 < 0$  no ocurren bifurcaciones estacionarias.

Ahora analizaremos el caso donde  $\varepsilon_1 = 0$ . Comenzaremos calculando los valores propios, evaluando en la jacobiana del sistema el punto de equilibrio  $P_0$

$$DF(P_0, \varepsilon^0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

donde  $\varepsilon^0 = (0, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ . Así pues, el polinomio característico es

$$P(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \varepsilon_3\lambda - \varepsilon_2).$$

Es fácil ver que sí tenemos un valor propio igual a cero. Ahora hay que analizar para que valores de  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  se obtienen dos valores propios con parte real distinta de cero que andamos buscando.

Como tenemos una ecuación cuadrática usaremos la fórmula general para saber la forma de los valores propios, entonces:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon_3 \pm \sqrt{\varepsilon_3^2 + 4\varepsilon_2}}{2}$$

de lo anterior tenemos que: Si  $\varepsilon_3 = 0$  entonces  $\varepsilon_2 > 0$  para lograr tener dos valores propios distintos de cero. Si  $\varepsilon_3 \neq 0$  entonces  $\varepsilon_2 \neq 0$  para poder tener dos valores propios con parte real distinta de cero, dado que si  $\varepsilon_2 = 0$  tendríamos otro valor propio cero y no es lo que andamos buscando.

Entonces, para tener dos valores propios con parte real distinta de cero se tiene que cumplir

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = 0 \text{ y } \varepsilon_2 > 0, \\ \varepsilon_3 \neq 0 \text{ y } \varepsilon_2 \neq 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Calcularemos ahora el vector propio derecho  $v_0$  e izquierdo  $w_0$  asociados al valor propio cero, para considerar las otras condiciones del teorema 1.

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_0 = \begin{pmatrix} -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

entonces, el teorema 1 tiene también como condición para que ocurra una bifurcación silla-nodo los siguientes criterios:

$$w_0^T F_\varepsilon(y^0, \varepsilon^0) \neq 0$$

y

$$(w_0^T \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))(v_0, v_0) \neq 0.$$

Y calculando lo anterior tenemos

$$w_0^T F_\varepsilon(y^0, \varepsilon^0) = \begin{pmatrix} -\varepsilon_3 & -\varepsilon_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (4.3)$$

$$(w_0^T \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))(v_0, v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & 2\alpha_4 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\alpha_1 \neq 0 \quad (4.4)$$

Por lo tanto concluimos que si se cumplen las condiciones (4.2),(4.3) y (4.4) el sistema va a sufrir una bifurcación silla-nodo. En la Figura 4.1 se muestra la gráfica donde aparecen las regiones, en el espacio de parametros, donde ocurre la bifurcación silla-nodo, donde la línea punteada indica la región donde no ocurre la bifurcación y el color gris indica la región donde si ocurre la bifurcación.

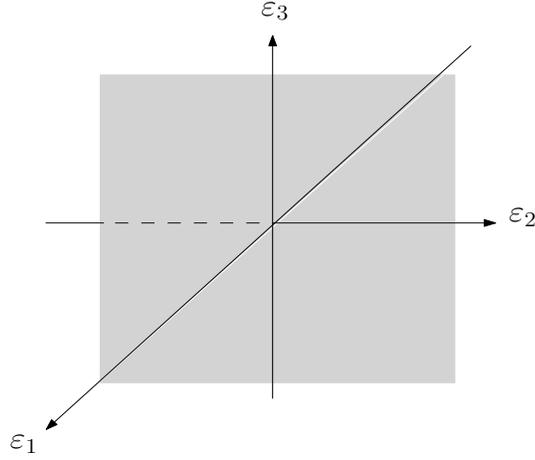


Figura 4.1: Puntos en el espacio de parámetros donde ocurre la bifurcación silla-nodo.

Las bifurcaciones transcricas y trinche no pueden ocurrir dado que (4.3).

### 4.1.2. Bifurcación de Hopf

Para analizar cuando ocurre la bifurcación de Hopf, primeramente encontraremos los puntos de equilibrio que cumplen con las condiciones de no-hiperbolicidad, es decir, aquellos que tienen un par de valores propios imaginarios (que denotaremos por  $\pm iw_0$ ) y un valor propio distinto de cero (que denotaremos como  $\lambda_0$ ).

Los puntos de equilibrio del sistema (4.1) con  $\alpha_1\varepsilon_1 < 0$  son:

$$P_1 = \left( \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}, 0, 0 \right) \quad \text{y} \quad P_2 = \left( -\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}, 0, 0 \right).$$

Primero analizamos el punto  $P_1$ , el cual evaluado en la Jacobiana del sistema (4.1) resulta ser

$$DF(P_1, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} & \varepsilon_2 + \alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} & \varepsilon_3 + \alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \end{pmatrix}$$

que tiene como polinomio característico a

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 \left( \alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} + \varepsilon_3 \right) - \lambda \left( \alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} + \varepsilon_2 \right) - 2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}},$$

#### 4.1. Bifurcaciones de codimensión uno alrededor de puntos de equilibrio 61

por lo tanto, para tener dos valores propios imaginarios y uno real se deben satisfacer las siguientes condiciones (ver Apéndice A)

$$\begin{aligned} \left(\alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} + \varepsilon_3\right) \left(\alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} + \varepsilon_2\right) &= -2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \\ \left(\alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} + \varepsilon_3\right) \left(2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}\right) &> 0, \\ -\left(\alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} + \varepsilon_2\right) &> 0, \end{aligned}$$

así pues, para que ocurra la bifurcación de Hopf se deben de cumplir las siguientes restricciones:

$$\left(\alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} + \varepsilon_3\right) \left(\alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} + \varepsilon_2\right) + 2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} = 0 \quad (4.5)$$

$$\left(\alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} + \varepsilon_3\right) \left(2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}\right) > 0, \quad (4.6)$$

$$\alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} + \varepsilon_2 < 0, \quad (4.7)$$

además, si sabemos que el polinomio característico es de la forma

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + w_0^2)(\lambda - \lambda_0)$$

entonces  $\lambda_0 = \varepsilon_3 + \alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}$  y  $w_0^2 = -\left(\varepsilon_2 + \alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}\right)$ . Además,

si  $\varepsilon_1 < 0$  entonces  $\alpha_1 > 0$  y por (4.6) tenemos que  $\lambda_0 > 0$ ,

si  $\varepsilon_1 > 0$  entonces  $\alpha_1 < 0$  y por (4.6) tenemos que  $\lambda_0 < 0$ .

Es decir, si  $\varepsilon_1 < 0$  el sistema (4.1) tiene localmente una variedad inestable en  $P_1$  y si

$\varepsilon_1 > 0$  el sistema (4.1) tiene localmente una variedad estable en  $P_1$ .

Ahora calcularemos la velocidad de cruce de los valores propios utilizando la expresión dada en el Lema 1 la cual es

$$d = \frac{1}{2}((w_1 \bullet \mathcal{S})v_2 + (w_2 \bullet \mathcal{S})v_1) \quad (4.8)$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son la parte real e imaginaria (respectivamente) del vector propio asociado al valor propio imaginario, mientras que  $w_1$  y  $w_2$  son la parte real e imaginaria (respectivamente) del vector propio asociados al valor propio imaginario, y  $\mathcal{S} = (S_1, S_2, S_3)^T$

con

$$S_i = F_{i\varepsilon y}(P_1, \varepsilon) - ((DF(P_1, \varepsilon))^{-1}F_\varepsilon(P_1, \varepsilon))^T D^2 F_i(P_1, \varepsilon).$$

#### 4.1. Bifurcaciones de codimensión uno alrededor de puntos de equilibrio 62

Por lo tanto, haciendo los cálculos pertinentes y tomando en cuenta que

$$-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6 > 0$$

dado que  $\alpha_1\varepsilon_1 < 0$  y  $w_0^2 > 0$  tenemos que los vectores propios  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  son

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{w_0^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{w_0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{w_0^4}{4\alpha_1\varepsilon_1} \\ \frac{w_0^2}{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

sea  $P = (v_2^T, v_1^T, v_3^T)$  la matriz de cambio de base, entonces calculando  $P^{-1}$  obtenemos

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}w_0^5}{4\alpha_1\varepsilon_1 - w_0^6} & -w_0 & -\frac{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}w_0^3}{4\alpha_1\varepsilon_1 - w_0^6} \\ -\frac{4\alpha_1\varepsilon_1w_0^2}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} & 0 & \frac{w_0^6}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} \\ \frac{4\alpha_1\varepsilon_1w_0^2}{w_0^6 - 4\alpha_1\varepsilon_1} & 0 & \frac{4\alpha_1\varepsilon_1}{w_0^6 - 4\alpha_1\varepsilon_1} \end{pmatrix},$$

como  $P^{-1} = (w_1, w_2, w_3)$  tenemos que

$$w_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}w_0^5}{4\alpha_1\varepsilon_1 - w_0^6} \\ -w_0 \\ -\frac{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}w_0^3}{4\alpha_1\varepsilon_1 - w_0^6} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4\alpha_1\varepsilon_1w_0^2}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} \\ 0 \\ \frac{w_0^6}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} \frac{4\alpha_1\varepsilon_1w_0^2}{w_0^6 - 4\alpha_1\varepsilon_1} \\ 0 \\ \frac{4\alpha_1\varepsilon_1}{w_0^6 - 4\alpha_1\varepsilon_1} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

y dado que

$$F(y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} F_1(y, \varepsilon) \\ F_2(y, \varepsilon) \\ F_3(y, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2y_2 + \varepsilon_3y_3 + \alpha_1y_1^2 + \alpha_2y_1y_2 + \alpha_3y_1y_3 + \alpha_4y_2^2, \end{pmatrix}$$

por lo tanto, calculando los valores de  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  obtenemos

$$\begin{aligned} S_1 &= 0 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= \begin{pmatrix} -\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} & -\frac{\alpha_2}{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}} & -\frac{\alpha_3}{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Entonces sustituyendo (4.9), (4.10) y (4.11) en (4.8) tenemos

$$d = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_2\varepsilon_1 w_0^2 + \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} w_0^4 (-2\alpha_1 + \alpha_3 w_0^2)}{2\varepsilon_1 (-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6)} \\ \frac{\sqrt{-\alpha_1\varepsilon_1} w_0^2}{4\alpha_1\varepsilon_1 - w_0^6} \\ \frac{\frac{1}{2}w_0^6}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} \end{pmatrix}.$$

Entonces llegamos a que el vector velocidad de cruce  $d$  es diferente al vector nulo dado que la segunda y tercera entrada de dicho vector son distintas de cero dado que  $w_0^2 > 0$ ,  $\alpha_1\varepsilon_1 < 0$  y  $-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6 > 0$ .

Concluimos entonces que para  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  que se encuentren en la superficie (4.5) y que cumplan con las condiciones (4.6), (4.7) con  $\alpha_1\varepsilon_1 < 0$  ocurre una bifurcación de Hopf en el punto  $P_1$ . En la figura 4.2 se muestra la superficie de los parámetros donde ocurre la bifurcación de Hopf para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$  y  $\alpha_4 = 0$  donde el eje X es el que corresponde al parámetro  $\varepsilon_1$ , el eje Y es el que corresponde al parámetro  $\varepsilon_2$  y el eje Z es el que corresponde al parámetro  $\varepsilon_3$ .

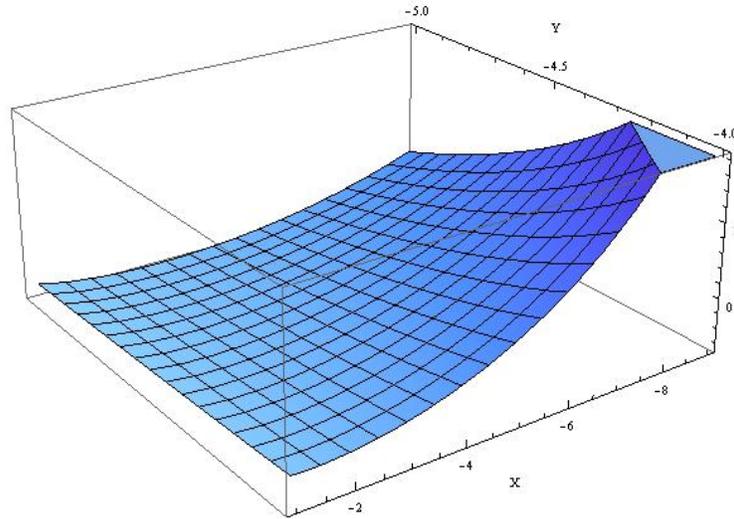


Figura 4.2: Puntos en el espacio de parámetros donde ocurre la bifurcación de Hopf en el punto  $P_1$ .

Calculando el primer coeficiente de Lyapunov utilizando la fórmula que se obtuvo en la tesis de Castillo (ver [8]) en los puntos de  $\varepsilon$  donde ocurre la bifurcación de Hopf resulta

ser

$$\begin{aligned}
 l_1 = & \frac{1}{2w_0^3(\lambda_0^2 + w_0^2)^2(\lambda_0^3 + 4\lambda_0 w_0^2)} (4\alpha_1^2(6\lambda_0^4 + 29\lambda_0^2 w_0^2 + 8w_0^4) + w_0^2(\alpha_2^2 \lambda_0^2(\lambda_0^2 + w_0^2) \\
 & + 2w_0^2(-6\alpha_4^2 \lambda_0^2(\lambda_0^2 + 6w_0^2) - \alpha_3 \alpha_4(3\lambda_0^4 + 11\lambda_0^2 w_0^2 + 8w_0^4) + \alpha_3^2(7\lambda_0^4 + 45\lambda_0^2 w_0^2 + 8w_0^4)) \\
 & + \alpha_2 \lambda_0(2\alpha_4(3\lambda_0^4 + 14\lambda_0^2 w_0^2 + 2w_0^4) - \alpha_3(5\lambda_0^4 + 33\lambda_0^2 w_0^2 + 10w_0^4))) \\
 & + \alpha_1(\alpha_2(6\lambda_0^5 + 32\lambda_0^3 w_0^2 + 8\lambda_0 w_0^4) + 2w_0^2(2\alpha_4(\lambda_0^4 + 9\lambda_0^2 w_0^2 + 8w_0^4) \\
 & - \alpha_3(19\lambda_0^4 + 103\lambda_0^2 w_0^2 + 24w_0^4))))).
 \end{aligned}$$

Para valores de  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$  y  $\alpha_4 = 0$  y tomando en cuenta que  $\varepsilon_3$  esta fijo una vez que se toman  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , en la Figura 4.3 se muestran las regiones en el plano  $\varepsilon_1$  vs  $\varepsilon_2$  donde el primer coeficiente de Lyapunov es positiva o negativa.

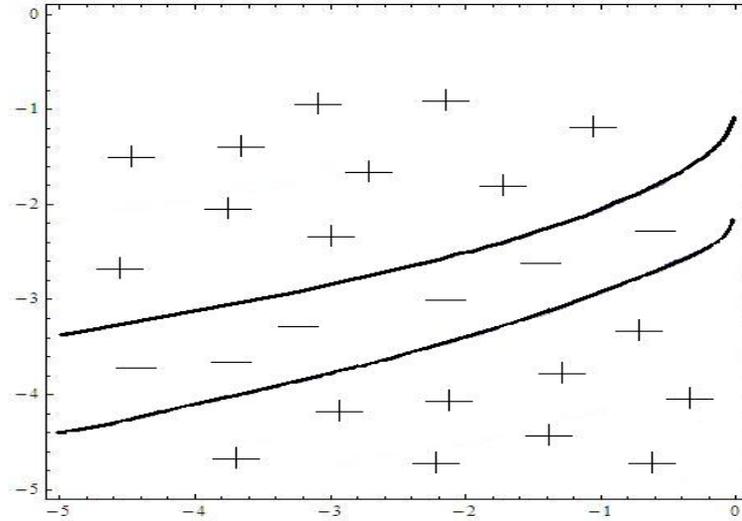


Figura 4.3: Regiones en el plano  $\varepsilon_1$  vs  $\varepsilon_2$  del primer coeficiente de Lyapunov en el punto  $P_1$ .

Una vez calculados el vector velocidad de cruce y el primer coeficiente de Lyapunov, a continuación se muestra que para  $\varepsilon_1 = -5$ ,  $\varepsilon_2 = -2,9$  y  $\varepsilon_3 = 2,940422577922921$  se tiene una órbita periódica inestable dado que el coeficiente de Lyapunov en este punto es positivo (ver Figura 4.3) y su vector velocidad de cruce

$$d = \begin{pmatrix} 0,0240913 \\ -0,0886113 \\ 0,0131265 \end{pmatrix}$$

es diferente de cero en todas las componentes. Para encontrar la órbita periódica, se toma una solución muy cerca de  $P_1$  y se retrocede en el tiempo, obteniendo como resultado la órbita periódica inestable (ver Figura 4.4).

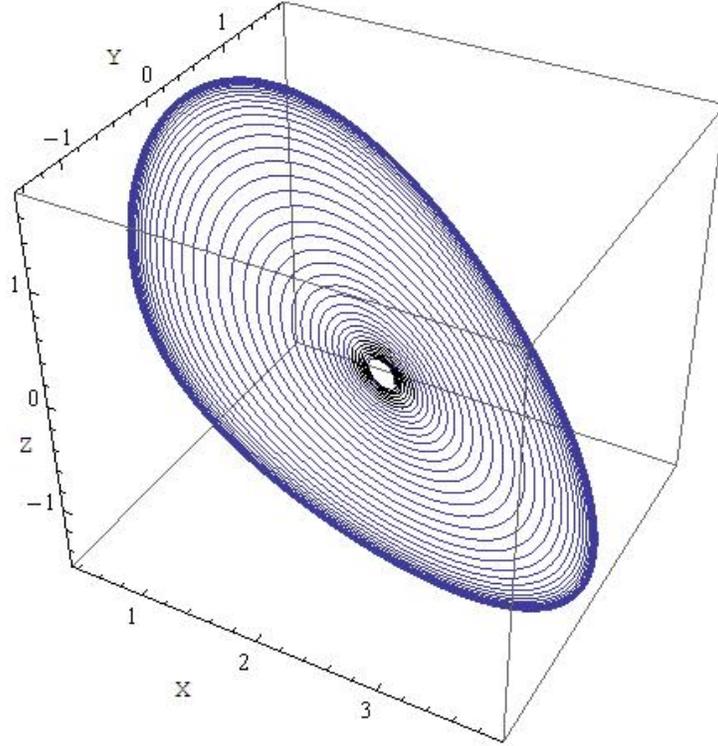


Figura 4.4: Órbita periódica cerca del punto  $P_1$  para valores de  $\varepsilon_1 = -5$ ,  $\varepsilon_2 = -2,9$  y  $\varepsilon_3 = 2,940422577922921$ .

Analogamente haremos el análisis para el punto  $P_2$ , el cual evaluado en la jacobiana del sistema (4.1) se obtiene que

$$DF(P_2, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} & \varepsilon_2 - \alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} & \varepsilon_3 - \alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \end{pmatrix}$$

que tiene como polinomio característico a

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 \left( \alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} - \varepsilon_3 \right) + \lambda \left( \alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} - \varepsilon_2 \right) + 2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}},$$

por lo tanto, para tener dos valores propios imaginarios y uno real se deben satisfacer las

siguientes condiciones (ver Apéndice A)

$$\begin{aligned} \left(\alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} - \varepsilon_3\right) \left(\alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} - \varepsilon_2\right) &= 2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \\ \left(\alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} - \varepsilon_3\right) \left(2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}\right) &> 0, \\ \alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} - \varepsilon_2 &> 0, \end{aligned}$$

así pues, para que ocurra la bifurcación de Hopf se deben de cumplir las siguientes restricciones:

$$\left(\alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} - \varepsilon_3\right) \left(\alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} - \varepsilon_2\right) = 2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \quad (4.12)$$

$$\left(\alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} - \varepsilon_3\right) \left(2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}\right) > 0, \quad (4.13)$$

$$\alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} - \varepsilon_2 > 0, \quad (4.14)$$

además, si sabemos que el polinomio característico es de la forma

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + w_0)(\lambda - \lambda_0)$$

entonces  $\lambda_0 = \varepsilon_3 - \alpha_3\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}$  y  $w_0^2 = -\varepsilon_2 + \alpha_2\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}$ . Además,

si  $\varepsilon_1 < 0$  entonces  $\alpha_1 > 0$  y por (4.13) tenemos que  $\lambda_0 < 0$ ,

si  $\varepsilon_1 > 0$  entonces  $\alpha_1 < 0$  y por (4.13) tenemos que  $\lambda_0 > 0$ .

Es decir, si  $\varepsilon_1 < 0$  el sistema (4.1) tiene localmente una variedad estable en  $P_1$  y si  $\varepsilon_1 > 0$

el sistema (4.1) tiene localmente una variedad inestable en  $P_2$ .

Ahora calcularemos la velocidad de cruce de los valores propios utilizando la expresión dada en el Lema 1 la cual es

$$d = \frac{1}{2}((w_1 \bullet \mathcal{S})v_2 + (w_2 \bullet \mathcal{S})v_1)$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son la parte real e imaginaria (respectivamente) del vector propio asociado al valor propio imaginario, mientras que  $w_1$  y  $w_2$  son la parte real e imaginaria (respectivamente) del vector propio asociados al valor propio imaginario, y  $\mathcal{S} = (S_1, S_2, S_3)^T$  con

$$S_i = F_{i\varepsilon y}(P_2, \varepsilon) - ((DF(P_2, \varepsilon))^{-1}F_\varepsilon(P_2, \varepsilon))^T D^2F_i(P_2, \varepsilon).$$

#### 4.1. Bifurcaciones de codimensión uno alrededor de puntos de equilibrio 67

Por lo tanto, haciendo los cálculos pertinentes y tomando en cuenta que  $4\alpha_1\varepsilon_1 - w_0^6 < 0$  dado que  $\alpha_1\varepsilon_1 < 0$  y  $w_0^2 > 0$  tenemos que los vectores propios  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{w_0^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{w_0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{w_0^4}{4\alpha_1\varepsilon_1} \\ -\frac{w_0^2}{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

sea  $P = (v_2^T, v_1^T, v_3^T)$  la matriz de cambio de base, entonces calculando  $P^{-1}$  obtenemos

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}w_0^5}{4\alpha_1\varepsilon_1 - w_0^6} & -w_0 & \frac{2\alpha_1\sqrt{-\varepsilon_1\alpha_1}w_0^5}{4\alpha_1\varepsilon_1 - w_0^6} \\ \frac{4\alpha_1\varepsilon_1w_0^2}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} & 0 & \frac{w_0^6}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} \\ \frac{4\alpha_1\varepsilon_1w_0^2}{w_0^6 - 4\alpha_1\varepsilon_1} & 0 & \frac{4\alpha_1\varepsilon_1}{w_0^6 - 4\alpha_1\varepsilon_1} \end{pmatrix},$$

como  $P^{-1} = (w_1, w_2, w_3)$  tenemos que

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}w_0^5}{4\alpha_1\varepsilon_1 - w_0^6} \\ -w_0 \\ \frac{2\alpha_1\sqrt{-\varepsilon_1\alpha_1}w_0^5}{4\alpha_1\varepsilon_1 - w_0^6} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} \frac{4\alpha_1\varepsilon_1w_0^2}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} \\ 0 \\ \frac{w_0^6}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} \frac{4\alpha_1\varepsilon_1w_0^2}{w_0^6 - 4\alpha_1\varepsilon_1} \\ 0 \\ \frac{4\alpha_1\varepsilon_1}{w_0^6 - 4\alpha_1\varepsilon_1} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

y dado que

$$F(y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} F_1(y, \varepsilon) \\ F_2(y, \varepsilon) \\ F_3(y, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2y_2 + \varepsilon_3y_3 + \alpha_1y_1^2 + \alpha_2y_1y_2 + \alpha_3y_1y_3 + \alpha_4y_2^2, \end{pmatrix}$$

por lo tanto, calculando los valores de  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  obtenemos

$$\begin{aligned} S_1 &= 0 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= \begin{pmatrix} \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} & \frac{\alpha_2}{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}} & \frac{\alpha_3}{2\alpha_1\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Entonces sustituyendo (4.15), (4.16) y (4.17) en (4.8) tenemos

$$d = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_2\varepsilon_1 w_0^2 + \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} w_0^4 (2\alpha_1 - \alpha_3 w_0^2)}{2\varepsilon_1(-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6)} \\ \frac{\sqrt{-\alpha_1\varepsilon_1} w_0^2}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} \\ \frac{\frac{1}{2} w_0^6}{-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6} \end{pmatrix}.$$

Entonces llegamos a que el vector velocidad de cruce  $d$  es diferente al vector nulo dado que la segunda y tercera entrada de dicho vector son distintas de cero dado que  $w_0^2 > 0$ ,  $\alpha_1\varepsilon_1 < 0$  y  $-4\alpha_1\varepsilon_1 + w_0^6 > 0$ .

Concluimos entonces que para  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  que se encuentren en la superficie (4.12) y que cumplan con las condiciones (4.13), (4.14) con  $\alpha_1\varepsilon_1 < 0$  ocurre una bifurcación de Hopf en el punto  $P_2$ . En la figura 4.5 se muestra la superficie de los parámetros donde ocurre la bifurcación de Hopf para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$  y  $\alpha_4 = 0$  donde el eje X es el que corresponde al parámetro  $\varepsilon_1$ , el eje Y es el que corresponde al parámetro  $\varepsilon_2$  y el eje Z es el que corresponde al parámetro  $\varepsilon_3$ .

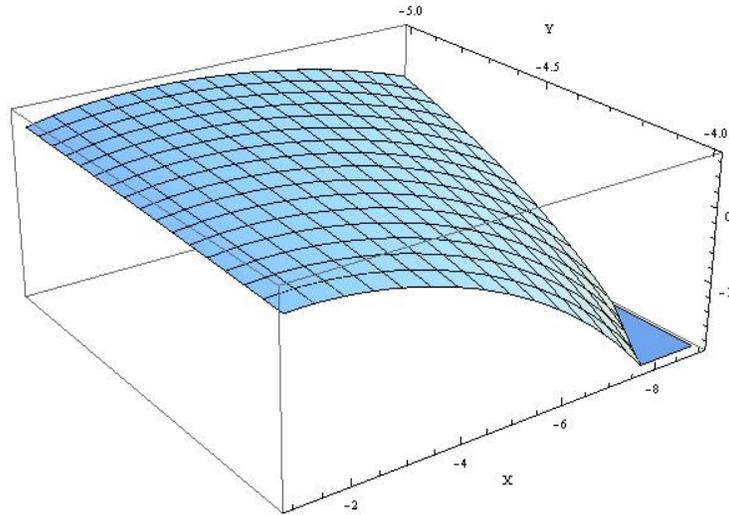


Figura 4.5: Puntos en el espacio de parámetros donde ocurre la bifurcación de Hopf en el punto  $P_2$ .

Calculando el primer coeficiente de Lyapunov utilizando la fórmula que se obtuvo en la tesis de Castillo (ver [8]) en los puntos de  $\varepsilon$  donde ocurre la bifurcación de Hopf obtenemos

que es

$$\begin{aligned}
 l_1 = & \frac{1}{2w_0^3(\lambda_0^2 + w_0^2)^2(\lambda_0^3 + 4\lambda_0 w_0^2)} (4\alpha_1^2(6\lambda_0^4 + 29\lambda_0^2 w_0^2 + 8w_0^4) + w_0^2(\alpha_2^2 \lambda_0^2(\lambda_0^2 + w_0^2) \\
 & + 2w_0^2(-6\alpha_4^2 \lambda_0^2(\lambda_0^2 + 6w_0^2) - \alpha_3 \alpha_4(3\lambda_0^4 + 11\lambda_0^2 w_0^2 + 8w_0^4) + \alpha_3^2(7\lambda_0^4 + 45\lambda_0^2 w_0^2 + 8w_0^4)) \\
 & + \alpha_2 \lambda_0(2\alpha_4(3\lambda_0^4 + 14\lambda_0^2 w_0^2 + 2w_0^4) - \alpha_3(5\lambda_0^4 + 33\lambda_0^2 w_0^2 + 10w_0^4))) \\
 & + \alpha_1(\alpha_2(6\lambda_0^5 + 32\lambda_0^3 w_0^2 + 8\lambda_0 w_0^4) + 2w_0^2(2\alpha_4(\lambda_0^4 + 9\lambda_0^2 w_0^2 + 8w_0^4) \\
 & - \alpha_3(19\lambda_0^4 + 103\lambda_0^2 w_0^2 + 24w_0^4))))).
 \end{aligned}$$

Para valores de  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$  y  $\alpha_4 = 0$  y tomando en cuenta que  $\varepsilon_3$  esta fijo una vez que se toman  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , en la Figura 4.6 se muestran las regiones en el plano  $\varepsilon_1$  vs  $\varepsilon_2$  donde el primer coeficiente de Lyapunov es positiva o negativa.

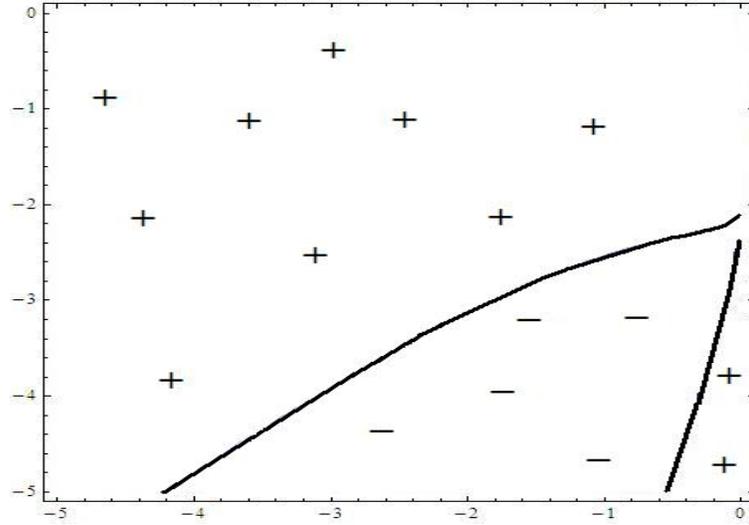


Figura 4.6: Regiones en el plano  $\varepsilon_1$  vs  $\varepsilon_2$  del primer coeficiente de Lyapunov en el punto  $P_2$ .

Si graficamos las superficies donde ocurre la bifurcación de Hopf de  $P_1$  y de  $P_2$  observamos que se intersectan (ver figura 4.7). Es decir, hay una curva en el espacio de parámetros donde en  $P_1$  y  $P_2$  ocurre, al mismo tiempo, bifurcaciones de Hopf y se pueden encontrar dinámicas interesantes.

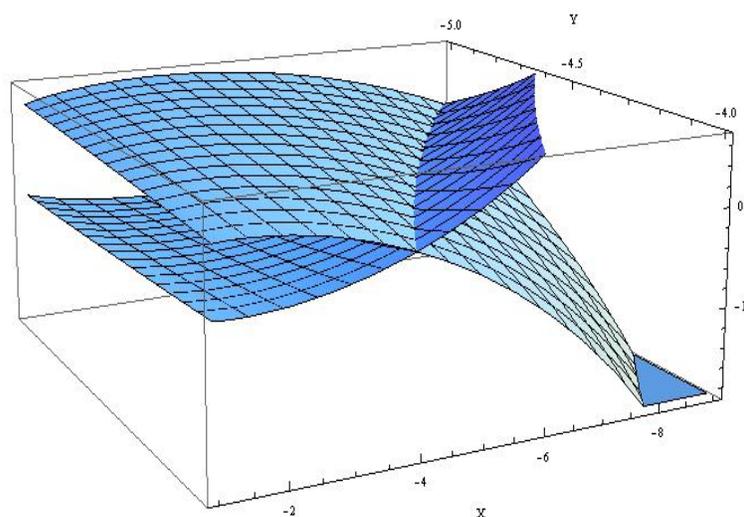


Figura 4.7: Puntos en el espacio de parámetros donde ocurre la bifurcación de Hopf en el punto  $P_2$ .

También podemos observar en la figura (4.8) que el diagrama de bifurcación resulta ser el siguiente.

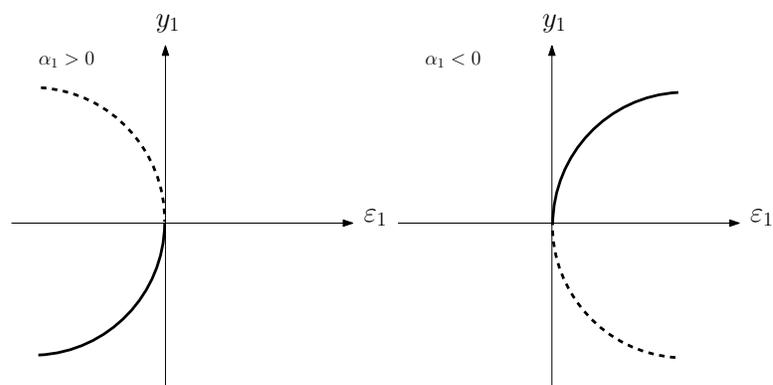


Figura 4.8: Diagrama de bifurcación.

## 4.2. Bifurcaciones de codimensión dos en puntos de equilibrio

### 4.2.1. Bifurcación de Takens-Bogdanov

Iniciamos buscando los valores de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  de la deformación versal (4.1) donde ocurre una bifurcación Takens-Bogdanov.

De análisis anteriores tenemos que los siguientes puntos de equilibrio:

si  $\varepsilon_1 = 0$  tenemos como punto de equilibrio al origen ( $P_0 = (0, 0, 0)$ ),

si  $\varepsilon_1 \alpha_1 < 0$  tenemos dos puntos de equilibrio los cuales son

$$P_1 = \left( \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}, 0, 0 \right) \quad y \quad P_2 = \left( -\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}, 0, 0 \right)$$

Comenzaremos analizando el caso donde  $\varepsilon_1 \alpha_1 < 0$ , veamos que puntos de equilibrio satisfacen las condiciones de no-hiperbolicidad del Teorema de Takens-Bogdanov, dichas condiciones son que los puntos de equilibrio deben tener dos valores propios cero y uno distinto de cero. Evaluando a  $P_1$  y  $P_2$  en la parte lineal de (4.1) obtenemos

$$DF(P_{1,2}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pm 2\alpha_1 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} & \varepsilon_2 \pm \alpha_2 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} & \varepsilon_3 \pm \alpha_3 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \end{pmatrix}$$

que tiene como polinomio característico a

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \left( \varepsilon_3 \pm \alpha_3 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \right) \lambda^2 - \left( \varepsilon_2 \pm \alpha_2 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \right) \lambda - \left( \pm 2\alpha_1 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \right),$$

por lo tanto, al querer tener un valor propio igual a cero, ocurre que tenemos que hacer  $\pm 2\alpha_1 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} = 0$  y es claro que no se puede dar la igualdad anterior dado que tanto  $\alpha_1$  como  $\varepsilon_1$  son distintos de cero. Por lo tanto, cuando tenemos el caso  $\varepsilon_1 \alpha_1 < 0$  no hay puntos de equilibrio donde ocurra una bifurcación Takens-Bogdanov.

Ahora analizaremos el caso  $\varepsilon_1 = 0$ . Determinemos si el punto de equilibrio que tenemos (el origen), satisface las condiciones de no-hiperbolicidad del Teorema 7.

Entonces la parte lineal del sistema evaluada en  $P_0$  es

$$DF(P_0, \varepsilon^0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

donde  $\varepsilon^0 = (0, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ . Así pues, el polinomio característico es

$$P(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \varepsilon_3\lambda - \varepsilon_2),$$

por lo tanto, si  $\varepsilon_2 = 0$  entonces los valores propios son  $\lambda_{1,2} = 0$  y  $\lambda_3 = \varepsilon_3 \neq 0$ . Con lo anterior concluimos que en el punto de equilibrio  $P_0$  puede ocurrir una bifurcación Takens-Bogdanov siempre y cuando  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Analicemos si  $P_0$  cumple con las condiciones

de no-degeneración del Teorema 7. Calculamos los vectores propios derechos  $(p_1, p_2, p_3)$  e izquierdos  $(q_1, q_2, q_3)$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ y } p_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_3} \\ \frac{1}{\varepsilon_3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde  $p_1$  es el vector propio asociado a  $\lambda_1 = 0$  con  $p_2$  vector propio generalizado y  $p_3$  vector propio asociado a  $\lambda_3 = \varepsilon_3$ . Calculando la matriz inversa formada por los vectores propios derechos obtenemos que es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde tenemos que

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon_3} \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\varepsilon_3} \end{pmatrix} \text{ y } q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con  $q_2$  vector propio izquierdo de  $\lambda_1 = 0$ ,  $q_1$  vector propio izquierdo generalizado y  $q_3$  vector propio izquierdo de  $\lambda_3 = \varepsilon_3$ . Calcularemos también

$$D^2F(y^0, \varepsilon^0) = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \\ \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & 2\alpha_4 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Con lo anterior podemos obtener la expresión de la condición de no-degeneración del Teorema 7  $a \neq 0$  donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} p_1^T (q_2 \bullet D^2F(y^0, \varepsilon^0) p_1) \\ &= \frac{1}{2} (1, 0, 0) \left( 0 \cdot 0_{3 \times 3} + 1 \cdot 0_{3 \times 3} - \frac{1}{\varepsilon_3} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & 2\alpha_4 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\alpha_1}{\varepsilon_3}. \end{aligned}$$

Entonces se cumple la condición de no-degeneración para la familia de puntos de equilibrio. Por último, analicemos la condición de transversalidad, es decir, que  $d_1$  y  $d_2$  sean linealmente independientes, donde

$$d_1 = F_\varepsilon^T(y^0, \varepsilon^0)q_2, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} d_2 = & (q_1 \bullet F_{\varepsilon y}(y^0, \varepsilon^0))p_1 + (A_0 F_\varepsilon(y^0, \varepsilon^0))^T (q_1 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_1 \\ & + (q_2 \bullet F_{\varepsilon y}(y^0, \varepsilon^0))p_2 + (A_0 F_\varepsilon(y^0, \varepsilon^0))^T (q_2 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_2 \\ & + \frac{b}{2a} (q_2 \bullet F_{\varepsilon y}(y^0, \varepsilon^0))p_1 + (A_0 F_\varepsilon(y^0, \varepsilon^0))^T (q_2 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_1 \\ & - (p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_2 \\ & - \frac{b}{2a} p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_2) F_\varepsilon^T(y^0, \varepsilon^0)q_2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

con  $A_0 = p_3 \frac{1}{\varepsilon_3} q_3^T$ .

Como necesitamos  $F_\varepsilon(y^0, \varepsilon^0)$ ,  $F_{\varepsilon y}(y^0, \varepsilon^0)$  y  $A_0$  los calculamos, obteniendo

$$F_\varepsilon(y^0, \varepsilon^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\varepsilon y}(y^0, \varepsilon^0) = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_3} \end{pmatrix}$$

y utilizando lo anterior tenemos que

$$A_0 F_\varepsilon(y^0, \varepsilon^0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, sustituyendo en (4.18) tenemos

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\varepsilon_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nu_1 e_1. \quad (4.20)$$

donde  $\nu_1 = -\frac{1}{\varepsilon_3}$  y  $e_1 = (1, 0, 0)^T$ . Para calcular  $d_2$  (4.19) lo que vamos a hacer es dividirlo en tres partes. Sea

$$d_2 = d_{21} + d_{22} - d_{23} \quad (4.21)$$

con

$$\begin{aligned}
d_{21} &= (q_1 \bullet F_{\varepsilon y}(y^0, \varepsilon^0))p_1 + (A_0 F_{\varepsilon}(y^0, \varepsilon^0))^T (q_1 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_1 \\
&\quad + (q_2 \bullet F_{\varepsilon y}(y^0, \varepsilon^0))p_2 + (A_0 F_{\varepsilon}(y^0, \varepsilon^0))^T (q_2 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_2, \\
d_{22} &= \frac{b}{2a} (q_2 \bullet F_{\varepsilon y}(y^0, \varepsilon^0))p_1 + (A_0 F_{\varepsilon}(y^0, \varepsilon^0))^T (q_2 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_1, \\
d_{23} &= (p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_2 \\
&\quad - \frac{b}{2a} p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(y^0, \varepsilon^0))p_2) q_2^T F_{\varepsilon}(y^0, \varepsilon^0).
\end{aligned}$$

Primeramente calcularemos

$$\begin{aligned}
d_{21} &= -\frac{1}{\varepsilon_3^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_3^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_3^3} & \frac{1}{\varepsilon_3^2} & \frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & 2\alpha_4 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_3^3} & \frac{1}{\varepsilon_3^2} & \frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & 2\alpha_4 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_3^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_3^3} & \frac{1}{\varepsilon_3^2} & \frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_3^3} & \frac{1}{\varepsilon_3^2} & \frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 2\alpha_4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_3^2} \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_1}{\varepsilon_3^3} + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_3^2} + \frac{\alpha_3}{\varepsilon_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_2}{\varepsilon_3^3} + \frac{2\alpha_4}{\varepsilon_3^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2\alpha_1}{\varepsilon_3^5} - \frac{2\alpha_2}{\varepsilon_3^4} - \frac{\alpha_3}{\varepsilon_3^3} - \frac{2\alpha_4}{\varepsilon_3^3} \\ -\frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
d_{22} &= -\frac{2a}{b\varepsilon_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_3} & \frac{1}{\varepsilon_3} & \frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & 2\alpha_4 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_3} & \frac{1}{\varepsilon_3} & \frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_1}{\varepsilon_3} + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_3} + \frac{\alpha_3}{\varepsilon_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{2\alpha_1}{\varepsilon_3^4} + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_3^3} + \frac{\alpha_3}{\varepsilon_3^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Finalmente calculamos

$$\begin{aligned}
d_{23} &= \left[ -\frac{1}{\varepsilon_3^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & 2\alpha_4 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\varepsilon_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & 2\alpha_4 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{b}{2a} \left( -\frac{1}{\varepsilon_3} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & 2\alpha_4 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\varepsilon_3} \end{pmatrix} \\
&= \left[ -\frac{\alpha_2}{\varepsilon_3^2} - \frac{2\alpha_4}{\varepsilon_3} + \frac{b\alpha_2}{2a\varepsilon_3} \right] \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo (4.22), (4.23) y (4.24) en (4.21) obtenemos

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{2\alpha_1}{\varepsilon_3^5} - \frac{2\alpha_2}{\varepsilon_3^4} - \frac{\alpha_3}{\varepsilon_3^3} - \frac{2\alpha_4}{\varepsilon_3^3} \\ -\frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2\alpha_1}{\varepsilon_3^4} + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_3^3} + \frac{\alpha_3}{\varepsilon_3^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_2}{\varepsilon_3^3} - \frac{2\alpha_4}{\varepsilon_3^2} + \frac{b\alpha_2}{2a\varepsilon_3^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{2\alpha_1}{\varepsilon_3^5} - \frac{2\alpha_4+2\alpha_1}{\varepsilon_3^4} - \frac{\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_2}{\varepsilon_3^3} - \frac{\alpha_3+2\alpha_4+\frac{b}{2a}\alpha_2}{\varepsilon_3^2} \\ -\frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \nu_2 e_1 + \nu_1 e_2
 \end{aligned}$$

donde  $\nu_2 = -\frac{2\alpha_1}{\varepsilon_3^5} - \frac{2\alpha_4+2\alpha_1}{\varepsilon_3^4} - \frac{\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_2}{\varepsilon_3^3} - \frac{\alpha_3+2\alpha_4+\frac{b}{2a}\alpha_2}{\varepsilon_3^2}$  y  $e_2 = (0, 1, 0)^T$ . Como  $\nu_1 \neq 0$  entonces  $d_1$  y  $d_2$  son linealmente independientes. Con lo anterior concluimos que para cualquier valor de  $\varepsilon_3 \neq 0$  se cumplen las condiciones de transversalidad de teorema de la bifurcación Takens-Bogdanov.

Entonces por el teorema de Takens-Bogdanov el sistema (4.1) es topológicamente equivalente a la deformación versal

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_2 + a z_1^2 + b z_1 z_2,
 \end{aligned}$$

donde  $\beta_1 = (\varepsilon - \varepsilon^0)^T d_1$ , y  $\beta_2 = (\varepsilon - \varepsilon^0)^T d_2$ . Para el caso en que  $a = 1$ ,  $b = 1$  el diagrama de bifurcación fue explorado por Guckenheimer (ver [9]) y es el que se muestra en la Figura 4.2,

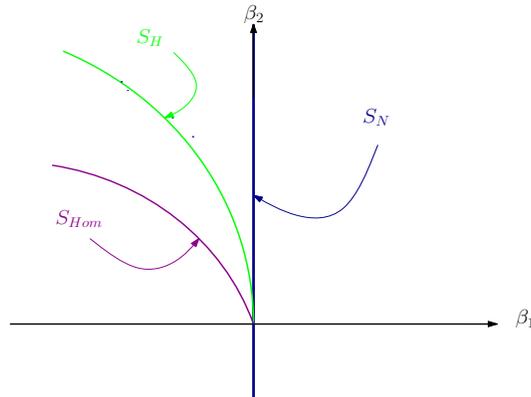


Figura 4.9: Diagrama de bifurcación hecho por Guckenheimer.

donde  $S_N$  es la curva de bifurcación silla-nodo y esta definida por los puntos

$$S_N = \{(\beta_1, \beta_2) | \beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0\},$$

$S_H$  es la curva de bifurcación de Hopf y esta definida por lo puntos

$$S_H = \{(\beta_1, \beta_2) | \beta_1 = -\beta_2^2; \beta_2 > 0\},$$

y finalmente  $S_{Hom}$  es la curva de bifurcación Homoclínica y esta definida por lo puntos

$$S_{Hom} = \{(\beta_1, \beta_2) | \beta_1 = -\frac{49}{25}\beta_2^2; \beta_2 > 0\}.$$

Pero a nosotros lo que nos interesa es ver el diagrama en el espacio de parámetros  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  para ello vamos a hacer uso de la transformación  $\beta_1 = (\varepsilon - \varepsilon^0)^T d_1$ , y  $\beta_2 = (\varepsilon - \varepsilon^0)^T d_2$ , y observaremos en que se transforma cada curva de bifurcación. Entonces, tomamos un valor de  $\varepsilon_3$  fijo que llamaremos  $\bar{\varepsilon}_3 < 0$  y así

$$\beta_1 = (\varepsilon - \varepsilon^0)^T d_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \bar{\varepsilon}_3) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nu_1 \varepsilon_1$$

y

$$\beta_2 = (\varepsilon - \varepsilon^0)^T d_2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \bar{\varepsilon}_3) \begin{pmatrix} \nu_2 \\ \nu_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \nu_2 \varepsilon_1 + \nu_1 \varepsilon_2$$

Con lo anterior, llegamos a que las superficies de bifurcación en el espacio de parámetros  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  quedan determinadas de la siguiente forma

$$S_N = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) | \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 \neq 0\},$$

$$S_H = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) | \nu_1 \varepsilon_1 = -(\nu_2 \varepsilon_1 + \nu_1 \varepsilon_2)^2; (\nu_2 \varepsilon_1 + \nu_1 \varepsilon_2) > 0\},$$

y

$$S_{Hom} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) | \nu_1 \varepsilon_1 = -\frac{49}{25}(\nu_2 \varepsilon_1 + \nu_1 \varepsilon_2)^2; (\nu_2 \varepsilon_1 + \nu_1 \varepsilon_2) > 0\}.$$

Con lo anterior podemos graficar cada una de las superficies en una vecindad del punto  $\varepsilon^0$  y el diagrama que obtenemos nos lo muestra la Figura 4.3.

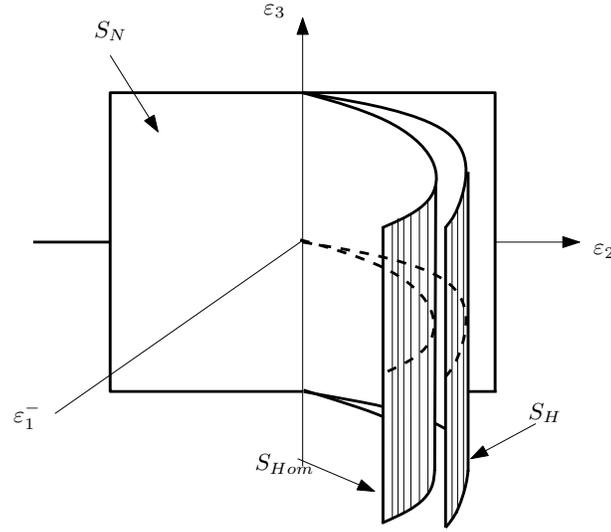


Figura 4.10: Diagrama de bifurcación: silla-nodo, homoclinicas y Hopf.

#### 4.2.2. Bifurcación cero-Hopf

Finalmente hacemos un análisis parcial de la bifurcación cero-Hopf en el sistema (4.1). De cálculos anteriores tenemos los siguientes puntos de equilibrio

$$P_{1,2} = \left( \pm \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}, 0, 0 \right).$$

Si evaluamos en la parte lineal del sistema (4.1) vemos que su polinomio característico es el siguiente:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 \left( \varepsilon_3 \pm \alpha_3 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \right) + \lambda \left( -\varepsilon_2 \pm \alpha_2 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \right) - \left( \pm 2\alpha_1 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} \right),$$

y si queremos un valor propio cero entonces tenemos que hacer que

$$\pm 2\alpha_1 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}} = 0$$

es decir,  $\varepsilon_1 = 0$  dado que desde un principio (por hipótesis) tenemos que  $\alpha_1 \neq 0$ . Por lo tanto, con lo anterior el polinomio característico nos queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^3 - \lambda^2 \varepsilon_3 - \lambda \varepsilon_2 \\ &= \lambda(\lambda^2 - \lambda \varepsilon_3 - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Entonces, si  $\varepsilon_3 = 0$  y  $\varepsilon_2 < 0$  tenemos dos valores propios imaginarios y uno igual a cero. En la Figura (4.2.2) presentamos gráficamente los puntos  $\varepsilon$  donde ocurren todas la bifurcaciones analizadas hasta este punto.

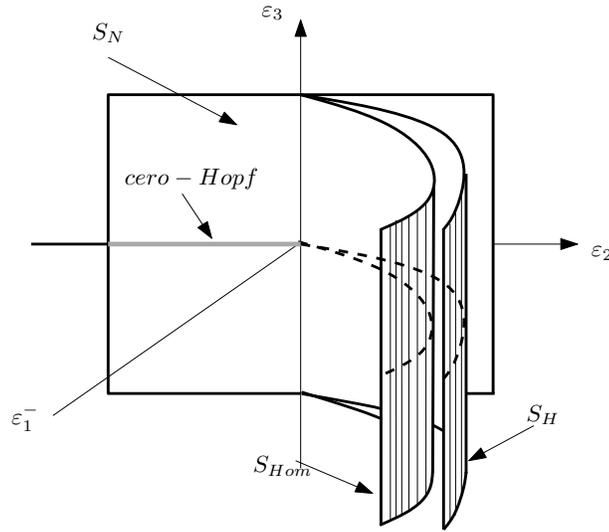


Figura 4.11: Espacio de parámetros con superficies de bifurcación.

### 4.3. Órbitas heteroclínicas

Mediante evidencia numérica, en esta sección mostramos la existencia de órbitas heteroclínicas que ocurren en la bifurcación triple cero.

Primeramente, se eligen valores en el espacio de parámetros  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  de tal forma que en el punto

$$P_1 = \left( \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}, 0, 0 \right)$$

ocurra una bifurcación de Hopf y además que tenga una variedad inestable. Segundo, calculamos el espectro de  $P_2$  para asegurarnos que sea un atractor. Después tomamos soluciones equidistantes que inician alrededor de  $P_1$  formando un círculo y sobre la cuenca de atracción de  $P_2$  y dejamos correr el tiempo para observar la evolución de las soluciones, obteniendo como resultado flujos tubulares que conectan los dos puntos de equilibrio. Finalmente, disminuimos la dimensión del radio del círculo, obteniendo con esto, flujos tubulares dentro de los flujos anteriores y mostramos así la existencia de órbitas heteroclínicas. Antes de mostrar las simulaciones, en la sección 4.2.1 se obtiene la variedad central de  $P_1$  utilizando el lema 2 demostrado en el capítulo uno.

## 4.3.1. Cálculo de la variedad central

Del teorema de la bifurcación triple cero tenemos la deformación versal con la que trabajamos es

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y_2 + \varepsilon_3 y_3 + \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1 y_2 + \alpha_3 y_1 y_3 + \alpha_4 y_2^2\end{aligned}\quad (4.25)$$

la cual se puede reescribir como

$$\dot{y} = F(y, \varepsilon) \quad (4.26)$$

donde  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$  y

$$F(y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y_2 + \varepsilon_3 y_3 + \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1 y_2 + \alpha_3 y_1 y_3 + \alpha_4 y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Cuando estudiamos la bifurcación de Hopf, obtuvimos dos puntos de equilibrio donde podemos calcular una variedad central local para cada uno. Uno de ellos es

$$P_1 = \left( \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}}, 0, 0 \right),$$

por tal motivo es posible calcular su variedad central. Para obtener la expresión de dicha variedad, primeramente hacemos un cambio de coordenadas para poner a la parte lineal del sistema en bloques de Jordan y así poder utilizar el Teorema de la Variedad Central.

Entonces sea

$$z = P^{-1}(y - P_1)$$

donde  $P = \begin{pmatrix} V_0 & v_3 \end{pmatrix}$  con  $V_0 = (v_2 \ v_1)$  formado por el conjunto de vectores propios asociados al valor propio imaginario de  $DF(P_1, \varepsilon)$ , mientras que  $v_3$  es el vector propio asociado al valor propio real  $\lambda_0$ . Por tal motivo,  $P^{-1} = \begin{pmatrix} W_0^T & w_3 \end{pmatrix}^T$  donde  $W_0 = (w_1 \ w_2)^T$  es el conjunto de vectores izquierdos (generalizados) asociados al valor propio imaginario de  $DF(P_1, \varepsilon)$ , mientras que  $w_3$  es el vector propio asociado al valor propio que es real  $\lambda_0$ . Sea  $z_1 \in \mathbb{R}^2$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}$  y  $z = (z_1, z_2)^T$  entonces el cambio de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_0(y - P_1) \\ w_3^T(y - P_1) \end{pmatrix}$$

el cual derivamos y llegamos a que el sistema (4.25) se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= J_0 z_1 + \frac{1}{2} W_0 D^2 F(P_1, \varepsilon)(V_0 z_1, V_0 z_1) + W_0 D^2 F(P_1, \varepsilon)(V_0 z_1, v_3 z_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} D^2 F(P_1, \varepsilon)(v_3 z_2, v_3 z_2) \\ \dot{z}_2 &= \lambda_0 z_1 + \frac{1}{2} w_3^T D^2 F(P_1, \varepsilon)(V_0 z_1, V_0 z_1) + w_3^T D^2 F(P_1, \varepsilon)(V_0 z_1, v_3 z_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} D^2 F(P_1, \varepsilon)(v_3 z_2, v_3 z_2)\end{aligned}$$

con

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -w_0 \\ w_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como solo usaremos los cuadráticos en  $z_1$  de la segunda ecuación, reescribiremos el sistema anterior como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= J_0 z_1 + f(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= \lambda_0 z_1 + G_2(z_1) + g(z_1, z_2)\end{aligned}$$

donde  $f(z_1, z_2)$  son todos los cuadráticos de la primera ecuación,  $g(z_1, z_2)$  los términos no lineales y

$$G_2(z_1) = \frac{1}{2} w_3^T D^2 F(P_1, \varepsilon)(V_0 z_1, V_0 z_1)$$

Con lo anterior lo que logramos fue poner al sistema en bloques de tal manera que uno de los bloques contiene los valores propios imaginarios. Ahora si, utilizando el teorema de la variedad central tenemos que existe una variedad central  $W^c$  truncada hasta orden 2 la cual esta formada por los puntos

$$W^c = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z_2 = h(z_1) \},$$

donde, utilizando el Lema 2 conocemos especificamente la forma de la función  $h(z_1)$ , la cual se muestra a continuación

$$\begin{aligned}h_2(z_1) &= -\frac{1}{\lambda_0^3 + 4w_0^2 \lambda_0} ((\lambda_0^2 + 2w_0^2) G_2(z_1) + \lambda_0 D G_{21}(z_1) J_H z_1 + 2G_2(J_H z_1)) \\ &= -\frac{\lambda_0^2 + 2w_0^2}{\lambda_0^3 + 4w_0^2 \lambda_0} G_2(z_1) - \frac{1}{\lambda_0^2 + 4w_0^2} D G_2(z_1) J_H z_1 + \frac{1}{\lambda_0^3 + 4w_0^2 \lambda_0} 2G_2(J_H z_1).\end{aligned}$$

Entonces la expresión de la variedad central truncada hasta orden dos esta dada por la siguiente ecuación

$$z_2 = h(z_1) = z_1^T H z_1$$

con

$$H = \begin{pmatrix} \frac{-2w_0^2(2\alpha_1 + \alpha_2\lambda_0 + \alpha_4\lambda_0^2 - 2\alpha_3w_0^2 + 2\alpha_4w_0^2)}{\lambda_0(\lambda_0^2 + w_0^2)(\lambda_0^2 + 4w_0^2)} & \frac{-2\alpha_1w_0 - \alpha_2\lambda_0w_0 + 2(\alpha_3 + \alpha_4)w_0^3}{(\lambda_0^2 + w_0^2)(\lambda_0^2 + 4w_0^2)} \\ \frac{-2\alpha_1w_0 - \alpha_2\lambda_0w_0 + 2(\alpha_3 + \alpha_4)w_0^3}{(\lambda_0^2 + w_0^2)(\lambda_0^2 + 4w_0^2)} & \frac{-2\alpha_1(\lambda_0^2 + 2w_0^2) + 2w_0^2(\alpha_2\lambda_0 + \alpha_3\lambda_0^2 + 2\alpha_3w_0^2 - 2\alpha_4w_0^2)}{\lambda_0^5 + 5\lambda_0^3w_0^2 + 4\lambda_0w_0^4} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el valor de  $z_1 = W_0(y - P_1)$  y  $z_2 = w_3^T(y - P_1)$  llegamos a que la variedad central en términos del campo original es

$$w_3^T(y - P_1) - (W_0(y - P_1))^T H W_0(y - P_1) = 0.$$

### 4.3.2. Simulaciones

Para las simulaciones, se toman valores de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  de tal forma que en el punto  $P_1$  ocurre la bifurcación de Hopf y el otro punto  $P_2$  es atractor, basandonos en la figura 4.6. La simulación que se muestra, tiene valores de  $\varepsilon_1 = -0,29$ ,  $\varepsilon_2 = -3$  y  $\varepsilon_3 = -0.100962$  donde los puntos de equilibrio son  $P_1 = (0.538516, 0, 0)$  y  $P_2 = (-0.538516, 0, 0)$ . Elegimos condiciones iniciales en la cuenca de atracción de  $P_2$  y alrededor del punto  $P_1$  formando un círculo de radio  $r = 0,02$  (ver construcción del círculo en Apéndice B), después observamos la trayectoria de las condiciones iniciales y se obtiene un flujo tubular que conecta a los 2 puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

Posteriormente, se toman nuevamente condiciones iniciales en la cuenca de atracción de  $P_2$  y alrededor del punto  $P_1$  formando un círculo pero ahora el radio es  $r = 0.002$  y también observamos que sus trayectorias forman un flujo tubular que conectan los 2 puntos  $P_1$  y  $P_2$ , además el flujo tubular de radio  $r = 0.02$  envuelve al flujo tubular de radio  $r = 0.002$ , ver Figura 4.12, lo cual nos evidencia la existencia de una órbita heteroclínica, dado que entre más pequeño hagamos el radio del círculo, los flujos tubulares que se forman van estando dentro de los otros flujos tubulares.

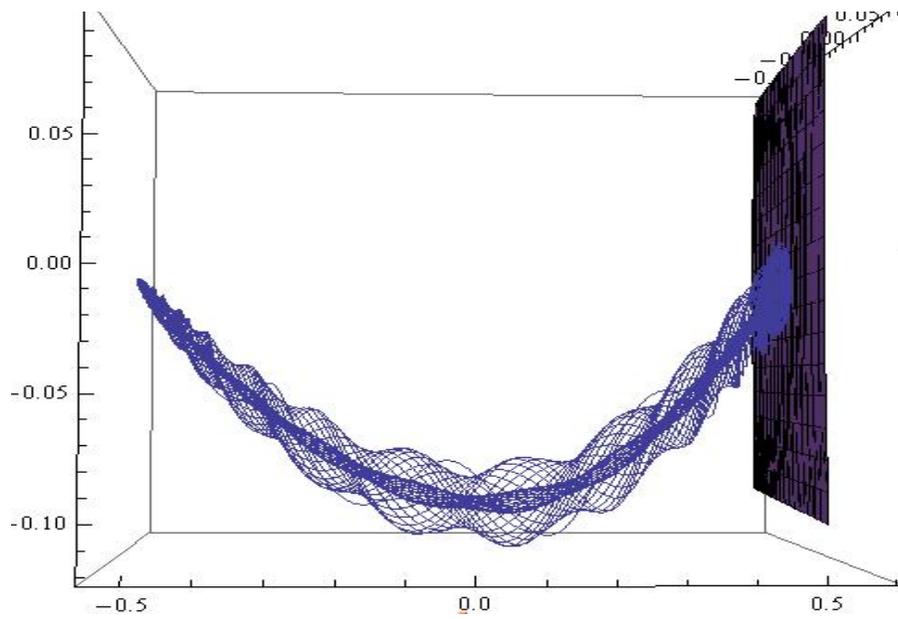


Figura 4.12: Parámetros  $\varepsilon_1 = -0.29$ ,  $\varepsilon_2 = -3$ ,  $\varepsilon_3 = -0.100962$  y con radios  $r = 0.02$  y  $r = 0.002$

# Capítulo 5 || El péndulo inercial

Un sistema mecánico simple, como el péndulo, son frecuentemente ejemplos en el diseño de controles estabilizantes para sistemas no lineales. Uno de estos aparatos es el péndulo inercial, que consiste en un péndulo simple con un disco rotatorio en el final, como se ve en la figura 5.1.

Este problema estudiado por Alonso, Paolini y Miola (ver [2]) consiste en controlar un

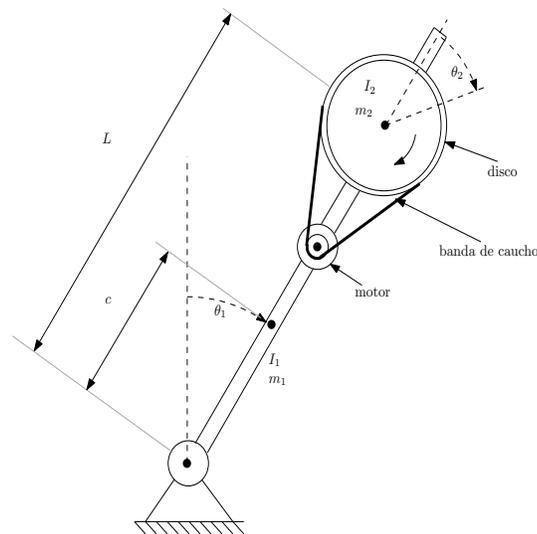


Figura 5.1: Péndulo simple con disco rotatorio

péndulo sobre un carro en la posición vertical, mediante la aplicación de una fuerza de retraso en el control horizontal. Para resolverlo se usa la ecuación de movimiento del péndulo inercial, la cual se obtiene con el formalismo de Euler-Lagrange considerando como coordenadas generalizadas las posiciones angulares del péndulo ( $\theta_1$ ) y el disco ( $\theta_2$ ), con respecto a la línea vertical y el brazo, respectivamente. La Lagrangiana que se utiliza es

$$L = \frac{1}{2}I_{1eq}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - Mg(1 + \cos(\theta_1))$$

con  $I_{1eq} = m_1c^2 + m_2L^2 + I_1$ ,  $M = (m_1c + m_2L)$  donde  $m_1, I_1$  y  $m_2, I_2$  son las masas y el momento de inercia de el brazo y el disco, respectivamente;  $L$  y  $c$  son las distancias de

el punto de giro al eje del disco y del centro de masa al brazo, respectivamente; y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

Un modelo simplificado pero preciso de la torsión aplicado a un DC-motor para el disco es

$$\tau = \frac{Nk_T}{R}V_i - \frac{N^2k_Tk_F}{R}\dot{\theta}_2,$$

donde  $N$  es el motor de relación de disco reducción,  $R$  es la resistencia de la bobina del rotor,  $k_T$  es la constante de torsión,  $k_F$  es la constante de back-emf, y  $V_i$  es el control de voltaje. La constante de tiempo electrico del motor se desprecia dado que generalmente es mucho mas pequeño que la constante de tiempo mecanico.

Así, la ecuación de movimiento es dada por

$$\begin{aligned} (I_{1eq} + I_2)\ddot{\theta}_1 + I_2\ddot{\theta}_2 - Mg \sin(\theta_1) &= 0 \\ I_2\ddot{\theta}_1 + I_2\ddot{\theta}_2 &= \tau. \end{aligned}$$

y como las ecuaciones de movimiento no dependen de la posición del disco, un modelo reducido del sistema puede ser obtenido definiendo las variables  $x_1 = \theta_1$ ,  $x_2 = \dot{\theta}_1$  y  $x_3 = \dot{\theta}_2$ , y el control  $u = \frac{V_i}{\beta}$ , donde  $\beta$  es un parámetro positivo.

Tenemos el siguiente sistema en tres dimensiones

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= p_1 \sin y_1 + p_2 y_3 - p_3 u \\ \dot{y}_3 &= -p_1 \sin y_1 - p_2(1 + \rho)y_3 + p_3(1 + \rho)u \end{aligned}$$

donde

$$u = u_{max} \tanh(k_1 \sin y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 k_4)$$

con  $p_1 = \frac{Mg}{I_{1eq}}$ ,  $p_2 = \frac{N^2k_Tk_F}{I_{1eq}R}$ ,  $p_3 = \frac{\beta Nk_T}{I_{1eq}R}$  y  $\rho = \frac{I_{1eq}}{I_2}$  constantes positivas, y  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  los parámetros de bifurcación.

## 5.1. Análisis de bifurcación

Nuestro objetivo es demostrar que en el sistema anterior ocurre la bifurcación triple cero, utilizando el teorema de la bifurcación triple cero.

Para este problema vamos a pedir que el origen sea punto de equilibrio. Para lograr que dicha condición se cumpla entonces  $k_4 = 0$ . Después, calculamos la jacobiana del sistema y la evaluamos en el origen y obtenemos

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_1 - k_1 p_3 u_{max} & -k_2 p_3 u_{max} & p_2 - k_3 p_3 u_{max} \\ -p_1 + k_1 p_3 (1 + \rho) u_{max} & k_2 p_3 (1 + \rho) u_{max} & -p_2 (1 + \rho) + k_3 p_3 (1 + \rho) u_{max} \end{pmatrix}$$

calculamos ahora el polinomio característico asociado a  $J$ ,

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & -\lambda^3 + (-p_2 - p_2 \rho - k_2 p_3 u_{max} + k_3 p_3 u_{max} + k_3 p_3 \rho u_{max}) \lambda^2 \\ & + (p_1 - k_1 p_3 u_{max}) \lambda + p_1 p_2 \rho - k_3 p_1 p_3 \rho u_{max}, \end{aligned}$$

en el cual podemos observar que para tener un valor propio cero con multiplicidad 3, se tienen que satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} -p_2 - p_2 \rho - k_2 p_3 u_{max} + k_3 p_3 u_{max} + k_3 p_3 \rho u_{max} &= 0 \\ p_1 - k_1 p_3 u_{max} &= 0 \\ p_1 p_2 \rho - k_3 p_1 p_3 \rho u_{max} &= 0. \end{aligned}$$

Así pues, haciendo

$$k_1 = \frac{p_1}{p_3 u_{max}} \quad k_2 = 0 \quad \text{y} \quad k_3 = \frac{p_2}{p_3 u_{max}}$$

logramos satisfacer las ecuaciones anteriores, es decir, que nuestro punto de equilibrio ( $y_0 = (0, 0, 0)$ ) tiene como valor propio al cero con multiplicidad 3 en  $k_0 = (\frac{p_1}{p_3 u_{max}}, 0, \frac{p_2}{p_3 u_{max}}, 0)$ .

Con esto tenemos que se cumple la condición de no-hiperbolicidad de nuestro teorema.

Lo que sigue es ver si se satisface la condición de no degeneración. Para esto es necesario calcular los valores propios izquierdos y derechos de la matriz  $J$ .

Haciendo los calculos pertinentes tenemos que los vectores propios derechos son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1 \rho} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p_1 \rho} \\ 0 \end{pmatrix},$$

y los izquierdos:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} p_1\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1\rho \\ 0 \end{pmatrix}.$$

con lo anterior y teniendo en cuenta que

$$D^2F(x_0, k_0) = \begin{pmatrix} & & 0_{3 \times 3} & & \\ & \begin{pmatrix} -2a_1p_3u_{max} & 0 & 0 \\ 0 & -2a_2p_3u_{max} & 0 \\ 0 & 0 & -2a_3p_3u_{max} \end{pmatrix} & & & \\ \begin{pmatrix} 2a_1p_3u_{max}(1+\rho) & 0 & 0 \\ 0 & 2a_2p_3u_{max}(1+\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 2a_3p_3u_{max}(1+\rho) \end{pmatrix} & & & & \end{pmatrix},$$

el coeficiente

$$a = \frac{1}{2} \langle w_3, D^2f(x_0, k_0)(v_1, v_1) \rangle = -a_3p_1p_3\rho u_{max} \neq 0$$

por lo tanto, también se cumple la condición de no-degeneración de nuestro teorema.

Por último tenemos que calcular los vectores  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$ , los cuales son:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_4p_3(1+\rho)u_{max} \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} -p_3u_{max} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3}a_4p_1p_3^2\rho(a_1 + a_1\rho - 2a_2p_1\rho)u_{max}^2 \end{pmatrix},$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_3u_{max} \\ 0 \\ 4a_4(b_3 + b_4)p_1p_3\rho u_{max} \end{pmatrix}.$$

Y como todas las constantes que aparecen son positivas, tenemos que los vectores  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  son linealmente independientes. Por lo tanto como se cumplen todas las condiciones del teorema, tenemos que en el equilibrio ocurre la bifurcación triple cero.

# Capítulo 6 || Conclusiones

Después de todo este trabajo, podemos puntualizar las siguientes conclusiones: En el capítulo uno, además de presentarse los preliminares, se obtuvo la solución de la ecuación homológica, truncada hasta orden 2,

$$Bh(x) + F_2(x, h(x)) - Dh(x)(Ax + F_1(x, h(x))) \equiv 0.$$

donde es importante mencionar que se puede aplicar a un sistema n-dimensional, cuando se quiera generalizar el teorema de la bifurcación triple cero demostrado en este trabajo. Además se presenta el teorema de Takens-Bogdanov con una deformación versal que reduce la condición de no-degeneración al cálculo de un solo valor.

Para poder trabajar con el sistema no lineal, en el capítulo dos se encontró la forma normal de la bifurcación triple cero, observándose que se puede simplificar aun más si damos más condiciones al sistema, pero como se busca generalizar estos resultados a sistemas n-dimensionales, se trabajó con la forma normal que pide como única condición que el término cuadrático de la primera variable en la tercera ecuación sea distinta de cero.

Una vez encontrada la forma normal de la bifurcación triple cero, en el capítulo tres se buscaron las condiciones que un sistema no lineal de tres dimensiones m-parametrizado debe de satisfacer para que ocurra la bifurcación triple cero, que fue la aportación más importante de esta tesis; además de obtener la deformación versal que se usó a lo largo de este trabajo.

Después de demostrarse el teorema de la bifurcación triple cero, en el capítulo cuatro se hace el análisis de bifurcación, en el cual se presentaron las regiones en el espacio de parámetros donde ocurren las diferentes bifurcaciones que se encuentran dentro de la triple cero, como la silla-nodo, Hopf, Takens-Bogdanov y cero-Hopf. Aclarando que dicho análisis

fue parcial debido a que el estudio completo es extenso y sigue siendo un problema abierto.

Finalmente en el capítulo cinco se estudio el problema del péndulo inercial, encontrando que el sistema que modela el movimiento del péndulo presenta la bifurcación triple cero cuando se tiene al origen com punto de equilibrio.

Es importante mencionar que en este trabajo solo se estudiarion las bifurcaciones que ocurren en los puntos de equilibrio, sin embargo, hay bifurcaciones que quedan pendientes estudiar y pueden servir como proximos proyectos de investigación.

# || Apéndice A

**Lema 18** *Sea*

$$P_3(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C. \quad (6.1)$$

*Si se satisface que*

$$\begin{aligned} AB &= C, \\ AC &> 0, \\ B &> 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

*entonces el polinomio de tercer grado  $P_3(x)$  tiene dos valores propios imaginarios y uno real.*

**Demostración:** Definimos  $x = \lambda_0$  al valor propio real y  $x_{1,2} = \pm w_0$  al par de valores propios imaginarios de  $P_3(x)$ . Entonces el polinomio (6.1) se puede expresar como

$$P_3(x) = (x - \lambda_0)(x^2 + w_0^2) = x^3 - \lambda_0 x^2 + w_0^2 x - \lambda_0 w_0^2 \quad (6.3)$$

Igualando (6.1) y (6.3) tenemos que

$$\begin{aligned} A &= -\lambda_0, \\ B &= w_0^2, \\ C &= -\lambda_0 w_0^2. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que  $AB = C$ ,  $AC = -\lambda_0(-\lambda_0 w_0^2) = \lambda_0 w_0^2 > 0$  y  $B > 0$ . ■

# Apéndice B

A continuación se expondrá la construcción de una circunferencia con centro en  $p_0$  y radio  $r$  sobre un plano  $P$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Sea

$$P : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\},$$

un plano en  $\mathbb{R}^3$  y

$$p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in P.$$

Primeramente, construiremos dos vectores anclados en  $p_0$ , después los hacemos unitarios y finalmente los utilizamos para obtener la expresión de la circunferencia de radio  $r$ .

Consideramos  $p_1 = (x_1, y_1, z_1) \neq p_0$  sobre  $P$ , entonces se cumple que

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0 \tag{6.4}$$

y sin pérdida de generalidad, consideramos  $z_1 = z_0$ ,  $y_1 = 0$  y sustituimos en (6.4)

$$a(x_1 - x_0) - by_0 = 0 \Leftrightarrow a(x_1 - x_0) = by_0$$

resolviendo para  $x_1$  llegamos a la siguiente expresión

$$x_1 = \frac{b}{a}y_0 + x_0 \Leftrightarrow a(x_1 - x_0) = by_0 \tag{6.5}$$

asi, nuestro primer punto es

$$p_1 = \left( \frac{b}{a}y_0, 0, z_0 \right) \tag{6.6}$$

Ahora sigue construir el segundo punto, sea  $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$  en  $P$  de tal forma que los vectores  $p_0\vec{p}_1$  y  $p_0\vec{p}_2$  sean ortogonales, es decir, que el producto punto entre ellos sea igual a cero. Entonces

$$\begin{aligned} p_0\vec{p}_1 \cdot p_0\vec{p}_2 &= \left( \frac{b}{a}y_0, -y_0, 0 \right) \cdot (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0) \\ &= \frac{b}{a}y_0(x_2 - x_0) - y_0(y_2 - y_0) = 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Si  $x_2 = 0$ , entonces de (6.7) tenemos que  $y_2 = y_0 - \frac{b}{a}x_0$ . Además  $p_2 \in P$  por lo tanto

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = d,$$

de la ecuación anterior tenemos que  $z_2 = d - by_0 + \frac{b^2}{a}x_0$  y así encontramos que

$$p_2 = \left( 0, y_0 - \frac{b}{a}x_0, d - by_0 + \frac{b^2}{a}x_0 \right). \quad (6.8)$$

Como  $p_0 \in P$  entonces  $z_0 = \frac{1}{c}(d - ax_0 - by_0)$ , que si sustituimos en (6.6) llegamos a

$$p_1 = \left( \frac{b}{a}y_0, 0, \frac{1}{c}(d - ax_0 - by_0) \right)$$

Sean  $v_1 = \frac{1}{\|p_0\vec{p}_1\|}p_0\vec{p}_1$  y  $v_2 = \frac{1}{\|p_0\vec{p}_2\|}p_0\vec{p}_2$  entonces

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\|p_0\vec{p}_1\|} \left( \frac{b}{a}y_0, 0, \frac{1}{c}(d - ax_0 - by_0) \right) \\ v_2 &= \frac{1}{\|p_0\vec{p}_2\|} \left( -x_0, -\frac{b}{a}x_0, \left(1 - \frac{1}{c}\right)(d - by_0) + \left(\frac{b^2}{a} + \frac{a}{c}\right)x_0 \right). \end{aligned}$$

Con esto, cualquier punto en el plano puede expresarse como

$$p(\alpha, \beta) = p_0 + \alpha v_1 + \beta v_2$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Ahora, los puntos que están sobre la circunferencia con centro en  $p_0$  y radio  $r$  en  $P$  cumplen

$$\|p(\alpha, \beta) - p_0\|,$$

dicha norma la calcularemos basandonos en la figura (6.1)

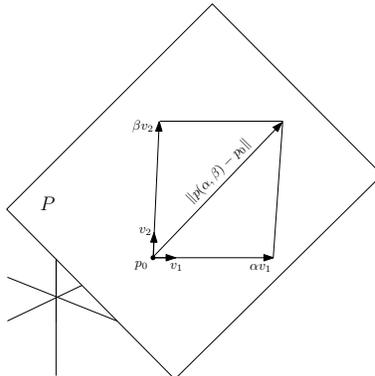


Figura 6.1: Puntos en el plano  $P$

Utilizando el hecho de que los vectores son ortogonales, entonces utilizando el teorema de Pitágoras nos queda

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2. \quad (6.9)$$

Así que con  $\alpha = r \cos \theta$  y  $\beta = r \sin \theta$  logramos satisfacer la ecuación (6.9). Por lo tanto, una representación de la circunferencia de radio  $r$  sobre el plano  $P$  es

$$P(\theta) = p_0 + r \cos \theta v_1 + r \sin \theta v_2.$$

# Apéndice C

Código en Wolfram Mathematica donde se muestra numericamente la existencia de órbitas heteroclínicas.

```
f1[y1_, y2_, y3_, e1_, e2_, e3_] = y2;  
f2[y1_, y2_, y3_, e1_, e2_, e3_] = y3;  
f3[y1_, y2_, y3_, e1_, e2_, e3_] = e1 + e2 y2 + e3 y3 + a1 y1^2 + a2 y1 y2  
+ a3 y1 y3 + a4 y2^2;  
f[y1_, y2_, y3_, e1_, e2_, e3_] = {f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3],  
f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3]};
```

```
P1 = Sqrt[-e1]/Sqrt[a1];
```

```
Df[y1_, y2_, y3_, e1_, e2_,  
e3_] = {{D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y1],  
D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2],  
D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3]}, {D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3],  
y1], D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2],  
D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3]}, {D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3],  
y1], D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2],  
D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3]}};
```

```
D2f1[y1_, y2_, y3_, e1_, e2_,  
e3_] = {{D[D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y1], y1],  
D[D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y1], y2],  
D[D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y1], y3]}, {D[  
D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2], y1],
```

```

D[D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2], y2],
D[D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2], y3]}, {D[
  D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3], y1],
D[D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3], y2],
D[D[f1[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3], y3]}};
D2f2[y1_, y2_, y3_, e1_, e2_,
e3_] = {{D[D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y1], y1],
  D[D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y1], y2],
  D[D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y1], y3]}, {D[
  D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2], y1],
  D[D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2], y2],
  D[D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2], y3]}, {D[
  D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3], y1],
  D[D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3], y2],
  D[D[f2[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3], y3]}};
D2f3[y1_, y2_, y3_, e1_, e2_,
e3_] = {{D[D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y1], y1],
  D[D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y1], y2],
  D[D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y1], y3]}, {D[
  D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2], y1],
  D[D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2], y2],
  D[D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y2], y3]}, {D[
  D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3], y1],
  D[D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3], y2],
  D[D[f3[y1, y2, y3, e1, e2, e3], y3], y3]}};

MatrixForm[Df[P1, 0, 0, e1, e2, e3]]

A = {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {lambda0 w0^2, -w0^2, lambda0}};

```

```
Clear[vc1, vc2, vc3]
```

```
vc = {vc1, vc2, vc3};
```

```
A. vc - I w0 vc
```

```
{vc2 - I vc1 w0, vc3 - I vc2 w0,
```

```
lambda0 vc3 - I vc3 w0 + lambda0 vc1 w0^2 - vc2 w0^2}
```

```
Solve[{vc2 - I vc1 w0 == 0, vc3 - I vc2 w0 == 0}, {vc2, vc3}]
```

```
{{vc2 -> I vc1 w0, vc3 -> -vc1 w0^2}}
```

```
vc3 = -vc1 w0^2; vc2 = I vc1 w0; vc1 = 1;
```

```
vc
```

```
{1, I w0, -w0^2}
```

```
v1 = {1, 0, -w0^2}; v2 = {0, w0, 0};
```

```
Clear[v3, v31, v32, v33]
```

```
v3 = {v31, v32, v33};
```

```
A.v3 - lambda0 v3
```

```
{-lambda0 v31 + v32, -lambda0 v32 + v33, lambda0 v31 w0^2 - v32 w0^2}
```

```
Solve[{-lambda0 v31 + v32 == 0, -lambda0 v32 + v33 == 0}, {v32, v33}]
```

```
{{v32 -> lambda0 v31, v33 -> lambda0^2 v31}}
```

```
v33 = lambda0^2 v31; v32 = lambda0 v31; v31 = 1;
```

```
v1
```

```
v2
```

```
v3
```

```
MatrixForm[P = {{0, 1, 1}, {w0, 0, lambda0}, {0, -w0^2, lambda0^2}}]
```

```
MatrixForm[Simplify[Inverse[P]]]
```

```
MatrixForm[Simplify[Inverse[P].A. P]]
```

```
W0 = {{-((lambda0 w0)/(lambda0^2 + w0^2)), 1/  
      w0, -(lambda0/(lambda0^2 w0 + w0^3))}, {lambda0^2/(  
      lambda0^2 + w0^2), 0, -(1/(lambda0^2 + w0^2))}};
```

```
w3 = {w0^2/(lambda0^2 + w0^2), 0, 1/(lambda0^2 + w0^2)};
```

```
V0 = {{0, 1}, {w0, 0}, {0, -w0^2}};
```

```
JH = {{0, -w0}, {w0, 0}};
```

```
z1 = {z11, z12};
```

```
G2 = (1/2) w3.{z1.Transpose[V0].D2f1[P1, 0, 0, e1, e2, e3].V0.z1,  
      z1.Transpose[V0].D2f2[P1, 0, 0, e1, e2, e3].V0.z1,  
      z1.Transpose[V0].D2f3[P1, 0, 0, e1, e2, e3].V0.z1}
```

```
G[x_, y_] = (  
      w0 x (2 a4 w0 x + a2 y) + y (a2 w0 x + 2 a1 y - 2 a3 w0^2 y))/(  
      2 (lambda0^2 + w0^2));
```

```
DG[x_, y_] = {D[G[x, y], x], D[G[x, y], y]}
```

```
G[JH.z1.{1, 0}, JH.z1.{0, 1}];
```

```
h = -((lambda0^2 + 2 w0^2) G[z11, z12] + lambda0 DG[z11, z12].JH.z1 +  
      2 G[JH.z1.{1, 0}, JH.z1.{0, 1}])/(lambda0^3 + 4 w0^2 lambda0);
```

```
a = Simplify[(-2 a1 w0^2 - a2 lambda0 w0^2 - a4 lambda0^2 w0^2 +  
      2 a3 w0^4 - 2 a4 w0^4)/(  
      lambda0 (lambda0^2 + w0^2) (lambda0^2 + 4 w0^2))];
```

```
b = Simplify[(-2 a1 lambda0 w0 - a2 lambda0^2 w0 +  
      2 a3 lambda0 w0^3 + 2 a4 lambda0 w0^3)/(  
      lambda0 (lambda0^2 + w0^2) (lambda0^2 + 4 w0^2))];
```

```
c = Simplify[(-a1 lambda0^2 - 2 a1 w0^2 + a2 lambda0 w0^2 +
```

```

      a3 lambda0^2 w0^2 + 2 a3 w0^4 - 2 a4 w0^4) / (
      lambda0 (lambda0^2 + w0^2) (lambda0^2 + 4 w0^2));
H = {{2 a, b}, {b, 2 c}};
yp = {yp1 - P1, yp2, yp3};
VarGen[yp1_, yp2_, yp3_] = w3.yp - yp.(Transpose[W0].H.W0).yp;
Plano[yp1_, yp2_, yp3_] = w0^2 (yp1 - P1) + yp3;
a1 = a2 = a3 = 1; a4 = 0;
lambda0 = e3 + a3 Sqrt[-e1/a1];
w0 = Sqrt[-e2 - a2 Sqrt[-e1/a1]];
e1 = -.3;
e2 = -3.3;
e3 = -((2 a1 Sqrt[-e1/a1])/(a2 Sqrt[-e1/a1] + e2)) - a3 Sqrt[-e1/a1]
P1
ContourPlot3D[
  VarGen[yp1, yp2, yp3] == 0, {yp1, -3, 3}, {yp2, -3, 3}, {yp3, -5,
  5}];
ContourPlot3D[
  Plano[yp1, yp2, yp3] == 0, {yp1, -3, 3}, {yp2, -3, 3}, {yp3, -5, 5}];
Show[%, %]

Es[t_] = {P1, 0, 0} + t v3;
p0Es = Es[-0.002];
p0 = {P1, 0.001, 0};
x0 = p0.{1, 0, 0};
y0 = p0.{0, 1, 0};
z0 = p0.{0, 0, 1};
ap = D[Plano[yp1, yp2, yp3], yp1];
bp = D[Plano[yp1, yp2, yp3], yp2];
cp = D[Plano[yp1, yp2, yp3], yp3];
dp = -Plano[0, 0, 0];

```

```

p0p1 = {(bp/ap) y0, -y0, 0};
p0p2 = {-x0, -(bp/ap) x0, dp - bp y0 + (bp^2/ap) x0 - z0};
vn1 = (1/(Sqrt[((bp/ap) y0)^2 + (-y0)^2])) p0p1;
vn2 = (1/(Sqrt[(-x0)^2 + ((bp/ap) x0)^2 + (dp - bp y0 + (bp^2/ap) x0 -
              z0)^2])) p0p2;

r = .005;
Circu[teta_] = p0Es + r Cos[teta] vn1 + r Sin[teta] vn2;
cx[t_] = Circu[t].{1, 0, 0};
cy[t_] = Circu[t].{0, 1, 0};
cz[t_] = Circu[t].{0, 0, 1};
ParametricPlot3D[Circu[teta] == 0, {teta, 0, 2. Pi}];
ContourPlot3D[
  VarGen[x, y, z] == 0, {x, 0, 1.05}, {y, -.3, .3}, {z, -.3, .3}];
Show[%, %%]
Clear[w0, lambda0, ap2, bp2, cp2, yps, yps1, yps2, yps3, P2]
P2 = -P1;
ap2 = Simplify[(-2 a1 w0^2 - a2 lambda0 w0^2 - a4 lambda0^2 w0^2 +
              2 a3 w0^4 - 2 a4 w0^4)/(
              lambda0 (lambda0^2 + w0^2) (lambda0^2 + 4 w0^2))];
bp2 = Simplify[(-2 a1 lambda0 w0 - a2 lambda0^2 w0 +
              2 a3 lambda0 w0^3 + 2 a4 lambda0 w0^3)/(
              lambda0 (lambda0^2 + w0^2) (lambda0^2 + 4 w0^2))];
cp2 = Simplify[(-a1 lambda0^2 - 2 a1 w0^2 + a2 lambda0 w0^2 +
              a3 lambda0^2 w0^2 + 2 a3 w0^4 - 2 a4 w0^4) / (
              lambda0 (lambda0^2 + w0^2) (lambda0^2 + 4 w0^2))];
H2 = {{2 ap2, bp2}, {bp2, 2 cp2}};
yps = {yps1 - P2, yps2, yps3};
VarGen2[yps1_, yps2_, yps3_] = w3.yps - yps.(Transpose[W0].H2.W0).yps;
lambda0 = e3 - a3 Sqrt[-e1/a1];
w0 = Sqrt[-e2 + a2 Sqrt[-e1/a1]];

```

```

ContourPlot3D[
  VarCen2[x, y, z] == 0, {x, -1, 0}, {y, -.2, .2}, {z, -.2, .2},
  PlotRange -> All];
Show[%]
P10 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
  z'[t] ==
  e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
  a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[0], y[0] == cy[0],
  z[0] == cz[0]}, {x, y, z}, {t, 0, 200}, MaxSteps -> Infinity];
P11 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
  z'[t] ==
  e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
  a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[2 Pi/20],
  y[0] == cy[2 Pi/20], z[0] == cz[2 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0, 200},
  MaxSteps -> Infinity];
P12 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
  z'[t] ==
  e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
  a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[4 Pi/20],
  y[0] == cy[4 Pi/20], z[0] == cz[4 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0, 200},
  MaxSteps -> Infinity];
P13 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
  z'[t] ==
  e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
  a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[6 Pi/20],
  y[0] == cy[6 Pi/20], z[0] == cz[6 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0, 200},
  MaxSteps -> Infinity];
P14 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
  z'[t] ==
  e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +

```

```

    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[8 Pi/20],
    y[0] == cy[8 Pi/20], z[0] == cz[8 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0, 200},
    MaxSteps -> Infinity];
P15 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[10 Pi/20],
    y[0] == cy[10 Pi/20], z[0] == cz[10 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P16 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[12 Pi/20],
    y[0] == cy[12 Pi/20], z[0] == cz[12 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P17 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[14 Pi/20],
    y[0] == cy[14 Pi/20], z[0] == cz[14 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P18 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[16 Pi/20],
    y[0] == cy[16 Pi/20], z[0] == cz[16 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P19 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +

```

```

    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[18 Pi/20],
    y[0] == cy[18 Pi/20], z[0] == cz[18 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P110 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[20 Pi/20],
    y[0] == cy[20 Pi/20], z[0] == cz[20 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P111 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[22 Pi/20],
    y[0] == cy[22 Pi/20], z[0] == cz[22 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P112 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[24 Pi/20],
    y[0] == cy[24 Pi/20], z[0] == cz[24 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P113 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[26 Pi/20],
    y[0] == cy[26 Pi/20], z[0] == cz[26 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P114 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +

```

```

    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[28 Pi/20],
    y[0] == cy[28 Pi/20], z[0] == cz[28 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P115 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] + a3 x[t] z[t] +
    a4 y[t]^2, x[0] == cx[30 Pi/20], y[0] == cy[30 Pi/20],
    z[0] == cz[30 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0, 200},
    MaxSteps -> Infinity];
P116 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[32 Pi/20],
    y[0] == cy[32 Pi/20], z[0] == cz[32 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P117 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[34 Pi/20],
    y[0] == cy[34 Pi/20], z[0] == cz[34 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P118 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
    z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
    a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == cx[36 Pi/20],
    y[0] == cy[36 Pi/20], z[0] == cz[36 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0,
    200}, MaxSteps -> Infinity];
P119 = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t], z'[t] ==
    e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] + a3 x[t] z[t] +
    a4 y[t]^2, x[0] == cx[38 Pi/20], y[0] == cy[38 Pi/20],

```

```
z[0] == cz[38 Pi/20]}, {x, y, z}, {t, 0, 200},
MaxSteps -> Infinity];
P1sol = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == z[t],
z'[t] ==
e1 + e2 y[t] + e3 z[t] + a1 x[t]^2 + a2 x[t] y[t] +
a3 x[t] z[t] + a4 y[t]^2, x[0] == 0.547, y[0] == 0,
z[0] == 0}, {x, y, z}, {t, 0, 200}, MaxSteps -> Infinity];

ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P10], {t, 0, 200},
PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P11], {t, 0, 200},
PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P12], {t, 0, 200},
PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P13], {t, 0, 200},
PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P14], {t, 0, 200},
PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P15], {t, 0, 200},
PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P16], {t, 0, 200},
PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P17], {t, 0, 200},
PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
```

```
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P18], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P19], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P110], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P111], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P112], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P113], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P114], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P115], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P116], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P117], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
```

```
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P118], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P119], {t, 0, 200},
  PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. P1sol], {t, 0, 200},
  PlotStyle -> {Black}, PlotPoints -> 10000, PlotRange -> All];
Show[%, %%];

ContourPlot3D[
  VarGen[x, y, z] == 0, {x, 0.5, 2}, {y, -.1, .1}, {z, -.1, .1},
  PlotRange -> All];
Show[%, %%]
```

# Bibliografía

- [1] D. Baca & F. Verduzco [2009]. “*Análisis y control de bifurcaciones estacionarias*”, Tesis, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.
- [2] D. Alonso, E. Paolini & J. Moiola [2005]. “*Global Bifurcation Analysis of a Controlled Mechanical System*,” *Nonlinear Dynamics* Vol 40, 205-225.
- [3] E. Freire, E. Gamero & J. Rodriguez-Luis [2002]. “*A note on the triple-zero linear degeneracy: Normal forms, Dynamical and Bifurcation Behaviors of an Unfolding*”, *J. Bif. and Chaos* Vol.12, No.12, 2799-282. *Dyn.Sist.* 16, 63-95.
- [4] F. Carrillo & F. Verduzco [2009]. “*Analysis of the Takens-Bogdanov Bifurcation on  $m$ -parametrized vector fields*”, *J. Bif. and Chaos* Vol.20, No.4, 995-1005.
- [5] F. Dumortier & S. Ibáñez. [1996]. “*Nilpotent Singularities in generic 4-parameter families of 3-dimensional vector fields*”, *J. Diff. Eqs.* 127, 590-647.
- [6] F. Dumortier, S. Ibáñez & H. Kokubu.[2001]. “*New aspects in the unfolding of the nilpotent singularity of codimension three*”, *Dyn.Sist.* 16, 63-95.
- [7] J. Castillo & F. Verduzco [2007]. “*Control de la bifurcación de Hopf*”, Tesis, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.
- [8] J. Castillo & F. Verduzco [2011]. “*Invariantes en la bifurcación de Hopf*”, Tesis, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.
- [9] J. Guckenheimer & P. Holmes [1983]. “*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*”, Springer.

- 
- [10] J. Murdock[2002]. “*Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems*”, Springer.
- [11] S. Wiggins [1997]. “*Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*”, Springer.
- [12] Y. Kuznetsov [1997]. “*Elements of Applied Bifurcation Theory*”, Springer.