Universidad de Sonora
Departamento de Matemáticas
Doctorado en Ciencias Matemáticas

Programa
Seminario de Estudiantes de Posgrado
Diciembre 2023

Título: Cohomología de variedades complejas
Expositor: Humberto Abraham Martínez Gil
Asesor: Genaro Hernández Mada

Dada una variedad diferenciable X, el complejo de formas diferenciales nos permite calcular la cohomología de De Rham $H^{\bullet}_{DR}(X)$. En este proyecto se busca estudiar las diferencias entre el caso de una variedad diferenciable (real) y una variedad compleja (con estructura holomorfa). Particularmente, en esta charla abordaremos el cómo la estructura holomorfa en una variedad compleja $\mathbf{X}$ induce la descomposición

$$\bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}_{\mathbf{X}}$$

de la complexificación $\bigwedge_k \Omega_{\mathbf{X},\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ de la k-ésima potencia exterior del haz cotangente. Esta descomposición permite introducir nuevos operadores diferenciales $\partial, \overline{\partial}$ (además de la diferencial exterior), así como nuevas cohomologías que dan información de la estructura holomorfa de la variedad que la cohomología de De Rham no detecta.

Título: Operador de Vainikko discreto en los espacios l^p_q.
Expositor: Francisco Alejandro Villegas Acuña.
Asesor: Martha Dolores Guzmán Partida.

Dada una función $\phi : (0,\infty) \to [0,\infty)$ en L^1, se define el operador integral de Vainikko V_ϕ, por

$$V_\phi(f)(x) = \int_0^\infty \phi(y) f(xy)dy.$$

En 2020, Angeloni, Appell y Reinwand, probaron bajo ciertas hipótesis, que dicho operador aplica $L^p(0,\infty)$ en sí mismo, para $1 < p < \infty$, y que V_ϕ es acotado en dicho espacio.
Actualmente, estamos estudiando el operador de Vainikko, pero en su versión discreta, es decir, dada una sucesión $\phi : \mathbb{N} \to [0,\infty)$, consideramos el operador de Vainikko discreto V^d_ϕ, definido formalmente como

$$V^d_\phi(f)(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(n) f(nk).$$

En esta charla, se probará que el operador V^d_ϕ es continuo en el espacio de Morrey discreto $l^p_q(\mathbb{Z})$, el cual es un espacio más general que el espacio de sucesiones $l^p(\mathbb{Z})$.
Además, se probará que si b es una sucesión en el espacio $\mathrm{BMO}^s(\mathbb{Z})$, donde $1 < s < \infty$ y, consideramos a b como un operador de multiplicación, entonces el conmutador $[b, V^d_\phi]$, también es un operador continuo en el espacio de Morrey discreto $l^p_q(\mathbb{Z})$.

Título: Estabilidad en juegos estocásticos suma cero bajo el criterio de pago descontado.
Expositora: Hernández Nuñez Susana.
Asesor: Jesús Adolfo Minjárez Sosa.

En esta platica estudiamos el problema de estabilidad en juegos de Markov suma cero bajo el criterio de pago descontado. Específicamente se analiza el índice de estabilidad cuando el kernel de transición es perturbado. Entonces se obtiene cuotas superiores e inferiores, dependiendo del jugador, en término de las métricas de Variacion Total y Kantorovich. Estos resultados generalizan los correspondientes a los procesos de control de Markov donde solo cotas superiores son necesarias para estudiar el índice de estabilidad.

Título: Difference-Equation Mean Field Games.
Expositor: Edgar Everardo Martinez Garcia.
Asesor: Jesús Adolfo Minjárez Sosa

We consider a discrete-time mean field game, whose estate process $\{x_t\} \subset X$ evolves according to a given stochastic difference-equation, of the form

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \mu, \xi_t), \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Here, F is a measurable function, $x_t \in X$, $a_t \in A$ are the state and the control of the game at stage t, respectively. $\mu \in \mathbb{P}(X)$ is a probability measure that depicts the collective behaviour of all agents in the game. And the perturbation process, $\{\xi_t\}$, is a collection of i.i.d. random vectors with values in a Borel space S, with distribution $\lambda \in \mathbb{P}(S)$, which in this case, is unknown to all agents. Moreover, we suppose that the realizations $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n, ...$ of the disturbance process and the states $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ are completely observable. The objective is to show the existence of an approximate ε-optimal strategy under the discounted cost criterion.

Título: Modelos de control semi-Markovianos de campo medio para sistemas estocásticos de interacción de objetos.
Expositora: María Elena Martínez Manzanares.
Asesor: Jesús Adolfo Minjárez Sosa.

El objetivo es describir un sistema de control estocástico semi-Markoviano y el correspondiente problema de control óptimo considerando costos que dependen del estado y la acción del controlador, $r(m, a)$, para un sistema de N objetos que interactúan entre sí (N del orden del infinito) para el cual se obtiene una solución de dimensionalidad alta la cual resulta computacionalmente inviable. Se presenta la teoría de campo medio como técnica de solución, obteniendo un nuevo modelo denominado “modelo de campo medio” que resulta de hacer N tender a infinito en el modelo asociado al sistema de N objetos. Debido a que los costos son de la forma $r(m, a)$, se obtiene una política ε-óptima. Se demuestra la convergencia de los índices de funcionamiento de ambos modelos y se procede a utilizar la solución encontrada en campo medio en el modelo original para medir la desviación de optimalidad.

Título: Propiedades Cualitativas de la aplicación de Energía-momento del péndulo esférico.
Expositor: Gonzalo Hisaki Moreno Hirata.
Asesor: Misael Avendaño Camacho.

El péndulo esférico es el sistema mecánico que consiste de una masa que se mueve sin fricción sobre la superficie de una esfera por la acción de acción de la fuerza de gravedad y las fuerzas de reacción de la superficie. El péndulo esférico se puede tratar como un sistema Hamiltoniano con dos grados libertad restringido al haz tangente sobre la esfera. Al encontrar las ecuaciones Hamiltonianas del sistema se puede probar que posee una simetría axial lo que lo convierte en un sistema Liouville integrable con integrales de movimiento dadas por la energía del sistema y la tercer componente del momento angular. El propósito de esta charla es utilizar herramientas geométricas para estudiar propiedades de la aplicación energía-momento. En particular, vamos a determinar su valores críticos, su rango, la topología de sus fibras y como estas fibras se encajan en el espacio fase. Una característica a resaltar de la aplicación energía-momento es que posee un valor singular que esta rodeado por valores regulares; el conjunto de nivel de ese valor regular resulta ser un toro pinchado.

Título: Campos de Jacobi para spray de Poisson.
Expositor: Jhonny Kama Mamani.
Asesor: Misael Avendaño Camacho.

El problema principal de mi proyecto de doctorado consiste en definir la noción de campos de Jacobi para sprays de Poisson que sea análoga al concepto de campos de Jacobi para sprays geodésicos en variedades Riemannianas. Las geodésicas en una variedad Riemanniana se obtienen proyectando las trayectorias de un campo en el fibrado tangente llamado spray geodésico. Los campos de Jacobi son campos vectoriales a lo largo de una curva geodésica que son soluciones de una ecuación llamada ecuación de Jacobi, la cual se obtiene al estudiar variaciones de una curva geodésica. Estos campos contienen abundante información sobre la geometría de la variedad Riemanniana, como por ejemplo sobre su curvatura, puntos críticos de la exponencial o sobre si la geodésica minimiza o no la longitud entre sus extremos. Para una variedad de Poisson, los sprays de Poisson son campos vectoriales sobre el haz contangente de la variedad que son cuadráticos por fibras. Los sprays de Poisson han probado ser una herramienta muy útil para diversas construcciones. Una vez logrado el objetivo, el siguiente paso del proyecto de investigación consiste en formular y probar algunos resultados clásicos de la geometría Riemanniana para el caso Poisson.

Referencias

[1] Ioan Bucataru. *The Jacobi fields for a spray on the tangent bundle.* Novi Sad, Octubre 8-11, 1998

[2] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifold*, Springer, New York, 1997.

[3] José F. Cariñena, Irina Gheorghiu and Eduardo Martinez. *Jacobi field for second-order differential equations on Lie algebroids.* AIMS Proceedings, 2015 pp. 213-222.

Título: Cuantización Semiclásica Adiabática sobre toros Lagrangianos casi invariantes.
Expositor: Nelson Mamani Alegria.
Asesor: Yury Vorobev

En esta charla usaremos los resultados de normalización para un sistema Hamiltoniano con variables rápidas y lentas con dos grados de libertad para construir algunas series espectrales asintóticas (cuasimodos) para el correspondiente operador de Weyl pseudodiferencial en el límite adiabático semiclásico. La aproximación se basa en el siguiente hecho: bajo algunas hipótesis apropiadas, el sistema Hamiltoniano con variables rapidas y lentas es "cercana" a un sistema Hamiltoniano completamente integrable el cual se describe en el marco del método de promedios sobre espacios fase con variables rápidas y lentas con simetría. Las fórmulas para el cálculo de los cuasimodos se deriva de la regla de cuantización de Borh-Sommerfeld sobre 2-toros de Liouville en un espacio fase modelo equipado con forma simpléctica deformada que involucra una corrección de tipo Hanny -Berry. Finalmente, se presenta cómo generalizar estos resultados para sistemas Hamiltonianos con variables rápidas y lentas de mayor dimensión, en este caso, obtendremos Subvariedades Lagrangianas casi invariantes a las que se aplicará la regla de Cuantización de Borh-Sommerfeld para la obtención de los cuasimodos.

Título: Aproximación numérica de soluciones de ecuaciones diferenciales mediante redes neuronales.
Expositor: Ojeda Aviles Eddel Eli.
Asesor: Daniel Olmos Liceaga.

El uso de redes neuronales para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales es algo que ha ido cobrando relevancia en años. Esto parte de la premisa de que es posible aproximar diferenciables en un dominio acotado mediante combinaciones de funciones sigmoides. Sin embargo, la elección apropiada de parámetros y optimizadores a utilizar, representan un desafío importante, debido al alto consumo de recursos computacionales que pueden implicar. Esta tesis busca explicar la naturaleza de las limitaciones de estos algoritmos, a la par de desarrollar estrategias que, en medida de lo posible, permitan mitigarlas. Dentro de las principales problemáticas a tratar se encuentran el efecto del vanishing gradient problem, la elección e interpretación apropiada de una función de pérdida como noción de error en dominios relativamente grandes, selección apropiada de muestras para la optimización de parámetros de la red, etc. Es importante señalar que lo anterior se busca bajo condiciones relacionadas al tipo de funciones exploradas en este trabajo, con la posibilidad de un estudio más amplio a futuro. Algunas de las ecuaciones utilizadas en este trabajo son ecuaciones de reacción difusión con soluciones del tipo de onda viajera en dominios con más de una escala. A partir de estas condiciones, presentamos algunos resultados obtenidos a partir de la comparativa de los resultados obtenidos mediante la implementación del enfoque clásico del uso de redes neuronales para la resolución de ecuaciones diferenciales, y la implementación de distintos algoritmos basados en técnicas de muestreo estratificado, partición del dominio, cambios de escalas, cambios de variable, entre otros, durante el uso de dichas redes.

Título: Análisis atmósferico de núcleos de condensación mediante ecuaciones diferenciales parciales estocásticas.
Expositor: David Peña Peralta.
Asesor: Saúl Díaz Infante Velasco.

Los modelos atmosféricos, en general suelen estar representados en sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Considerando principalmente la dinámica de la atmosféra, la que mediante consideraciones puede ser más o menos precisos a la hora de representar un fenómeno físico. Cuando consideramos las nubes, de forma directa o indirecta un aspecto a considerar es la precipitación. Varios estudios han demostrado que concentraciones más altas de contaminantes pueden inhibir, disminuir o aumentar las precipitaciones.

En este avance consideraremos una versión reducida de un modelo ya existente que representa la dinámica atmosférica considerando los núcleos de condensación (CCN) expresado en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas, exploraremos las consideraciones pertinentes para asegurar la convergencia del método númerico. Considerando dos etapas, la parte determinista y la parte estocástica. A partir de la parte determinista, revisaremos el método de 'upwind' para ajustarlo a nuestro modelo, realizando el análisis de estabilidad de von Neumann, revisaremos el criterio CFL (Courant, Friedrichs, Lewy) entre otras consideraciones para nalmente extenderlo al caso estocástico.

Título: El cambio de comportamiento en la modelación matemática.
Expositora: Pedroza Meza Irasema.
Asesor: Manuel Adrian Acuña.

Los modelos matemáticos han sido utilizados a lo largo del tiempo como herramientas para entender, mitigar y prevenir enfermedades infecciosas, como son las enfermedades respiratorias, enfermedades de transmisión sexual, enfermedades de transmisión por vectores, por mencionar algunas. Además, la modelación matemática ha sido crucial en el control de epidemias como son la Influenza H1N1 (2009) hasta pandemias como fue la del COVID-19 (2019). Cuando se modela la transmisión de estas enfermedades se suele suponer que las poblaciones son homogéneas y que la dinámica de las personas guarda un comportamiento constante a lo largo del tiempo. Sin embargo, el hecho de suponer que se mantenga este comportamiento no considera el cambio de rutina que solemos hacer las personas al conocer la información de nuevas enfermedades, epidemias, pandémicas o hasta las recomendaciones que hacen las instituciones gubernamentales de la localidad para mitigarlas. En esta plática se hablará de como el cambio de comportamiento de una población puede afectar a la dinámica de propagación de las diferentes enfermedades. Para llevar a cabo esta explicación, consideraremos a las enfermedades respiratorias como caso de estudio.

Título: Técnicas Estadísticas y Modelación en Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias.
Expositor: Caraveo Balderas Luis Alfonso.
Asesor: Jose Arturo Montoya Laos.

El cálculo de orden fraccionario es una rama de las matemáticas que tiene su origen a la par del cálculo de orden entero. A pesar de su larga historia, recién se utiliza como una herramienta para modelar fenómenos de la naturaleza. Aunque se considera una herramienta prometedora, existen problemáticas que han sido poco atendidas. Algunos ejemplos son el desarrollo de técnicas estadísticas para estimar parámetros en los modelos basados en ecuaciones diferenciales fraccionarias o en la interpretación del orden fraccionario. Los objetivos de esta platica son presentar una manera de ampliar el análisis en la estimación de parámetros en modelos basados en ecuaciones diferenciales fraccionarias y proponer un modelo con una interpretación del orden fraccionario. Iniciaremos presentando resultados relevantes sobre la estimación de parámetros en modelos basados en ecuaciones diferenciales fraccionarias. Después, abordaremos los diversos operadores fraccionarios presentes en la literatura y analizaremos las consecuencias en la estimación de parámetros mediante dichos operadores. Posteriormente, nos centraremos en el trabajo actual detallando el proceso y los avances logrados hasta el momento en el desarrollo de una interpretación del orden fraccionario. Concluiremos explorando cómo estos conceptos podrían aplicarse a modelos paleobiológicos, destacando la relevancia y la potencial utilidad de nuestra interpretación del orden fraccionario en un contexto de investigación en curso.