Examen de Admisión al Programa de Posgrado

Convocatoria de Ingreso 2009

Nombre: ______________________________

Duración máxima: 3 horas.

Primera parte: **Examen de Algebra Lineal**

1. (a) Encuentre la matriz de la transformación lineal $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que proyecta el vector $\vec{u}$ sobre la recta $y = x$.

   (b) Encuentre la matriz de la transformación lineal $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que refleja el vector $\vec{u}$ sobre la recta $y = x$.

2. Encuentre una base para el rango y una para el espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule A^{13}.

4. ¿Bajo qué condiciones sobre el vector $\vec{b}$ tiene solución el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ para cada una de las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

5. Dé un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(a\vec{v}) = af(\vec{v})$ para todos $a \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ pero que f no sea lineal.

Examen de Admisión al Programa de Posgrado

Convocatoria de Ingreso 2009

Nombre: ______________________________

Segunda parte: **Examen de Cálculo**

1. Considere la función $f(x) = x \sin x$ si $x \in \mathbb{Q}$, y $f(x) = -x \sin x$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Demuestre que f es discontinua en todo punto $x \neq 0$ y derivable en $x = 0$. Diga si la derivada de f es acotada. Justifique su respuesta.

2. Sea $|| \cdot ||$ una norma en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que la función $f(x) = ||x||, x \in \mathbb{R}^2$, es continua. Esta función es derivable? Demuestre su afirmación o dé un contraejemplo.

3. Demuestre que si la serie $\sum_k a_k$ es convergente y $\sum_k b_k$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_k a_k b_k$ también es absolutamente convergente.

4. Encuentre las derivadas parciales de la función $f(x, y) := \int_0^{x^2-xy} \exp(-t^2)dt$.

5. Encuentre los máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre la región $D = [0, 1] \times [0, 1]$.