Examen de Admisión al Programa de Posgrado
Convocatoria de Ingreso 2015

Primera Parte: **Examen de Álgebra Lineal**

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular A^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea $V = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ es continua}\}$. Para f, $g \in V$ defínase

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt. \tag{P}$$

a) Muestre que (P) define un producto interior en V.
b) Dar un ejemplo de un conjunto ortonormal infinito en V. Justifique ampliamente.
c) Concluya del inciso anterior que V tiene dimensión infinita.

3. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supóngase que $\dim V = \dim W$. Muestra que se pueden encontrar bases ordenadas β y γ para V y W, respectivamente, tales que $[T]_\beta^\gamma$ sea una matriz diagonal.

4. Si A es una matriz $n \times n$ con coeficientes en el campo $\mathbb{K}$, demuestra que existe un polinomio no nulo p con coeficientes en $\mathbb{K}$ tal que $p(A) = 0$.

5. Sea V un espacio con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\{x_1, ..., x_n\}$ un subconjunto ortonormal finito de V. Si $x \in V$ prueba que

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Examen de Admisión al Programa de Posgrado
Convocatoria de Ingreso 2015

Segunda Parte: **Examen de Cálculo**

1. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que si $f(r)=0\ \forall r\in(a,b)\cap\mathbb{Q}$ entonces $f(x)=0\ \forall x\in(a,b)$.

2. Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida recursivamente como

$$a_1=\frac{3}{2},\quad a_n=\sqrt{3a_{n-1}-2}\quad n\geq 2.$$

Demostrar que $\{a_n\}$ es:
a) Estrictamente creciente.
b) Acotada.
c) Convergente.
d) Calcular su límite.

3. Calcular la derivada de la función

$$F(x)=\int_a^{\int_a^x \frac{1}{t}dt} e^t dt,\qquad a>0.$$

Justifique su respuesta.

4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en $x=a$ tal que $f(a)>0$. Demostrar:

$$\lim_{x\to a}\ln\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\dfrac{1}{\ln x-\ln a}}=\frac{f'(a)}{f(a)}a.$$

5. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una función definida como

$$f(x,y,z)=\begin{cases} xyz & si\quad 0<x<y<1,\ z>0\\ 0 & \text{otro caso.}\end{cases}$$

Calcular $\displaystyle\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz.$