Examen de Admisión. Convocatoria 2017

Programa de Posgrado en Matemáticas

Universidad de Sonora

Primera parte: Algebra Lineal.
Duración máxima: 2 horas.

1. Sea $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$. Considere la suma en $\mathbb{R}^+$ y la multiplicación por escalares reales definidas a continuación:

$$\begin{aligned} \boxplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+, \\ (a,b) &\mapsto a \boxplus b := ab, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} * : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+, \\ (r,a) &\mapsto r * a := a^r. \end{aligned}$$

   Es decir, $a \boxplus b$ es el producto usual de números reales y $r * a$ es la potencia a^r. Demuestre que $(\mathbb{R}^+, \boxplus, *)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y especifique una base para este espacio. Justifique sus razonamientos.

2. Considere $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial real y sean $\{e_1, e_2\}$, $\{f_1, f_2\}$, $\{g_1, g_2\}$ tres bases distintas para este espacio, con

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 - e_2, \qquad & f_2 &= e_1 + e_2, \\ g_1 &= 3e_1 + e_2, \qquad & g_2 &= 5e_1 + 2e_2. \end{aligned}$$

   Encuentre la matriz de cambio de la base $\{f_1, f_2\}$ a la base $\{g_1, g_2\}$.

3. Sea $P_3[x]$ el espacio vectorial real de los polinomios con coeficientes reales, de grado menor o igual que 3. Encuentre la representación del elemento $p(x) = x^3 + x + 1 \in P_3[x]$ con respecto a la base $\{p_0(x) = 1, p_1(x) = x + a, p_2(x) = (x+a)^2, p_3(x) = (x+a)^3\}$, donde $a \in \mathbb{R}$.

4. Sea $P_3[x]$ el espacio real de los polinomios con coeficientes reales, de grado menor o igual a 3. Si $p(x), q(x) \in P_3[x]$, entonces

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$$

   define un producto interior en $P_3[x]$. Sea W el subespacio de $P_3[x]$ generado por $\{1, x^2\}$. Encontrar un base para $W^\perp$.

5. Sea $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo. Una **función afín** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de la forma $f = T + \boldsymbol{b}$, donde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, no-singular. Demuestre que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si y sólo si f es una función afín, con T ortogonal.
   (Nota: Una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice ser una isometría de $\mathbb{R}^n$ si preserva la distancia euclidiana: $\mathrm{d}\big(g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})\big) = \mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, donde

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle},$$

   con $\| \, \|$ la norma euclidiana y $\langle \, , \, \rangle$ el producto interior usual. Además, una transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es ortogonal si preserva el producto interior: $\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, $\forall \, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.)

Examen de Admisión. Convocatoria 2017

Programa de Posgrado en Matemáticas

Universidad de Sonora

Segunda parte: Cálculo.
Duración máxima: 2 horas.

1. De tres explicaciones distintas que muestren que la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, no es una función polinomial.

2. Sea f una función definida en una vecindad del 0. Demuestre que

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{|f(x)|} = \infty.$$

3. Considere la función

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0.$$

(a) Demuestre que L es una función continua estrictamente creciente;

(b) Sea $c > 0$ una constante arbitraria y defina

$$h(x) := L(cx) - L(x), \quad x > 0.$$

Pruebe que h es constante y que

$$L(ab) = L(a) + L(b) \ \ \forall a, b > 0$$

4. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **débilmente derivable** en $x_0 \in \mathbb{R}$ si el límite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)]^2 - [f(x_0)]^2}{x - x_0}$$

existe y es finito. Si éste es el caso, a dicho límite se le llama la **derivada débil** de f en x_0 y se le denota como $D_* f(x_0)$.

De una demostración o un contraejemplo, según corresponda, para cada una de las siguientes afirmaciones:

(a) La función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, es débilmente derivable en todo $x_0 \in \mathbb{R}$ y

$$D_* f(x_0) = 2 \operatorname{sen} x_0 \cos x_0.$$

(b) Si f es débilmente derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

(c) Si $D_* f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Si f es derivable en x_0, entonces f es débilmente derivable en x_0.

5. Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ es una función integrable. Pruebe que si f es continua en $c \in [a, b]$ y $f(c) > 0$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$