Examen de Admisión. Convocatoria 2018

Programa de Posgrado en Matemáticas

Universidad de Sonora

Primera parte: Algebra Lineal.
Duración máxima: 2 horas.

1. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$
encuentre una base del espacio columna $\mathbb{R}(A)$, del espacio nulo $\mathbb{N}(A)$, del espacio de los renglones $\mathbb{R}(A^T)$ y del espacio nulo izquierdo $\mathbb{N}(A^T)$. Muestre asimismo que se cumplen las relaciones de ortogonalidad entre estos subespacios.

2. Sea B una matriz de $n \times 1$, de tal manera que $B^\intercal B = 1$. Considere la matriz $n \times n$ dada por
$$H = I_n - 2BB^\intercal,$$
donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$.
   (a) Muestre que H es simétrica.
   (b) Pruebe que $H^{-1} = H^\intercal$.

3. Encuentre una transformación lineal $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuyo núcleo sea exactamente el subespacio que resulta al intersectar los subespacios
$$S_1 = \{(x, y, z, w)^\intercal \mid x + y + z - w = 0\} \qquad \text{y} \qquad S_2 = \{(x, y, z, w)^\intercal \mid x - y - z + w = 0\}.$$

4. Responda a las siguientes preguntas
   (a) Defina la base de un espacio vectorial.
   (b) De un ejemplo de una matriz de 2×2 que no sea diagonalizable.
   (c) De un ejemplo de una matriz A de 3×3 que tenga $dim(Ker(A)) \neq 1$.
   (d) De un ejemplo de una matriz de 6×6 con coeficientes reales que tenga eigenvalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = -3$, $\lambda_5 = i$ y $\lambda_6 = -i$.
   (e) De un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales: (i) Con solución única, (ii) Sin solución y (iii) Infinidad de soluciones.

5. Suponga que A es una matriz Hermitiana, i.e. A es una matriz compleja que es igual a su transpuesta conjugada ($A = A^*$). Muestre que
   (a) Para cualquier vector complejo x, se tiene que x^*Ax es real.
   (b) Todos los eigenvalores de A son reales.
   (c) El determinante de A es real.

   Problema opcional.

6. Considere $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$. Muestre que este es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Segunda parte: Cálculo diferencial e integral.
Duración máxima: 2 horas.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua. Demuestre que para cada intervalo acotado I, existe una constante C tal que
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x + y) = g(x)\, g(y)$. Demuestre que si g es continua en $x = 0$, entonces g es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$. Además si $g(0) = 0$, entonces $g(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

3. Sea a un número real en el intervalo $(0, 1)$ y k un número natural fijo. Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^n = 0.$$

4. Sea $f, M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y $M, N \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Demuestre que si el diferencial total $d[f(x, y)]$ satisface
$$d[f(x, y)] = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy,$$
entonces
$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) := \begin{cases} kx(1 - y), & \text{si } 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Determinar el valor de k tal que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = 1.$$

Problemas opcionales.

6. Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, la función definida por
$$g(x) = \sup\{f(x, y) : 0 \leq y \leq 1\}.$$
Demuestre que g es continua en $[0, 1]$.

7. Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función decreciente y positiva y $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una antiderivada de f, es decir, $g'(x) = f(x)$ para toda $x \in [1, \infty)$. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge si y solo si g es acotada.

8. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supóngase que existe $\alpha \in (0, 1)$, tal que $|f'(t)| \leq \alpha$ para toda $t \in (a, b)$. Demuestre que f tiene un único punto fijo $x_0 \in [a, b]$, es decir, $f(x_0) = x_0$.