UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Supervariedades, Geometría Simpléctica y Curvatura

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Doctorado en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Rosalía Gpe. Hernández Amador

Directores de tesis: Dr. José A. Vallejo Rodríguez
Dr. Yuri Vorobiev

Hermosillo, Sonora, México 22 Agosto 2019

Sinodales

Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Dr. J. Monterde
Departament de Geometria i Topologia,
Universitat de València

Dr. Yuri Vorobiev
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

Dr. Guillermo Dávila Rascón
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

Dr. Misael Avendaño Camacho
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

A mi hijo Isaac, el motor de mi vida.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mis asesores, por sus enseñanzas y por apoyarme a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

Al profesor Y. Vorobiev le agradezco sinceramente por haberme aceptado como su estudiante para el ingreso al posgrado en la Universidad de Sonora, y por haberme brindado la gran oportunidad de acercarme a su grupo de trabajo.

Agradezco de una manera muy especial al profesor J. Vallejo por permitirme trabajar bajo su tutela, y por haberme propuesto tan interesante tema de investigación. Le agradezco profundamente y con especial afecto, el compromiso y dedicación brindados a este proyecto durante todo el proceso de elaboración de esta tesis hasta su conclusión.

Finalmente, agradezco también a mi familia, de quienes recibo siempre muestras de apoyo incondicional en todos mis emprendimientos.

Índice general

Introducción

Sea M una variedad diferencial, $\mathcal{X}(M)$ el $\mathcal{C}^\infty(M)$–módulo de secciones de su fibrado tangente (esto es, los campos vectoriales sobre M), y $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ una conexión lineal (Koszul). Usando el conmutador de endomorfismos canónico de un espacio lineal y el corchete de Lie en $\mathcal{X}(M)$, la curvatura de ∇, R^∇, se define como el campo tensorial $R^\nabla \in \Omega^2(M; \operatorname{End} TM)$ dado por

$$R^\nabla(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\,.$$

Si M posee una estructura geométrica adicional, tal como una métrica Riemanniana o una forma simpléctica, es posible pasar de R^∇ a un tensor completamente covariante del tipo $(0,4)$. Así, si B es una 2-forma bilineal no degenerada sobre $\mathcal{X}(M)$, podemos definir el B-tensor de curvatura de Riemann de ∇, $\underline{R}^{\nabla^B}$, como

$$\underline{R}^{\nabla^B}(X,Y,Z,T) = B(R^\nabla(X,Y)Z,T)\,.$$

Cuando $B = g \in S_2(M)$ es una métrica pseudo-Riemanniana (tensor 2–covariante, simétrico y no degenerado), $\underline{R}^{\nabla^g}$ se llama simplemente tensor de curvatura de Riemann; si $B = \omega \in \Omega^2(M)$ es una forma simpléctica (2–forma, no degenerada y cerrada), $\underline{R}^{\nabla^\omega}$ se llama el tensor de curvatura simpléctica. Como casos particulares tenemos las variedades Riemannianas (M,g,∇) con la conexión de Levi-Civita ∇^g compatible con la métrica, $\nabla g = 0$, y las variedades de Fedosov (M,ω,∇) donde también $\nabla\omega = 0$ [10, 11].

Una buena parte de la información codificada en $\underline{R}^{\nabla^B}$ se puede recuperar de otro campo tensorial 2–covariante obtenido a partir del mismo $\underline{R}^{\nabla^B}$: el B–tensor de Ricci, definido como la contracción dada por la traza respecto a B

$$\operatorname{Ric}^{\nabla^B}(X,Y) = \operatorname{Tr}_B(Z \mapsto R^\nabla(Z,X)Y)\,.$$

Una propiedad fundamental de $\operatorname{Ric}^{\nabla^B}$ es su simetría,

$$\operatorname{Ric}^{\nabla^B}(X,Y) = \operatorname{Ric}^{\nabla^B}(Y,X)\,,$$

sin importar si B es simétrica o antisimétrica. Esta propiedad implica que al realizar una contracción adicional, la función escalar obtenida, llamada curvatura escalar, es no trivial (en general) en el caso de $B = g$ una métrica pseudo-Riemanniana

$$\operatorname{Scal}^g = \operatorname{Tr}_g(\, Z \mapsto g^\sharp(\operatorname{Ric}^{\nabla^g}(Z,\cdot))\,)\,,$$

mientras que en el caso de una forma simpléctica $B = \omega$, obtendremos siempre una curvatura escalar simpléctica nula

$$\operatorname{Scal}^\omega = \operatorname{Tr}_\omega(\, Z \mapsto \omega^\sharp(\operatorname{Ric}^{\nabla^\omega}(Z,\cdot))\,) = 0\,,$$

esto último debido a que la traza respecto a una forma bilineal antisimétrica a partir de una simétrica es cero. Así, no existen invariantes escalares asociados a la curvatura simpléctica [11].

En una serie de interesantes trabajos, I. Batalin y K. Bering han señalado que esta situación puede ser muy distinta en la categoría de supervariedades [4, 3]. En ésta, existen formas simplécticas pares e impares, y las últimas poseen las simetrías necesarias para obtener una curvatura escalar simpléctica impar no trivial.

Para explicar esto, recordemos a grandes rasgos que desde el punto de vista de Kostant-Leites-Manin, una supervariedad se puede pensar como una variedad diferencial usual donde el rol de las funciones diferenciables lo desempeña ahora la gavilla de secciones del haz exterior $\bigwedge E$ de algun fibrado vectorial $\pi : E \to M$ sobre M [16, 5, 18, 19]. Así, los supercampos vectoriales son derivaciones $\mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) = \mathrm{Der}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\bigwedge E)$, las 1−superformas son los elementos del dual $\Omega^1_{\mathsf{Gr}}(M) = \mathrm{Der}^*_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\bigwedge E)$, etc. [26]. Notemos que todas estas construcciones heredan el Z−grado of $\bigwedge E = \oplus_{k\in\mathsf{Z}} \bigwedge^k E$, y por lo tanto el Z_2−grado inducido, que nos permite hablar acerca de los sectores bosónicos (pares) y fermiónicos (impares). Una superforma simpléctica, será entonces una aplicación

$$\boldsymbol{\omega} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \Gamma(\bigwedge E)\,,$$

cuya acción sobre $D, D' \in \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$ será denotada por $\langle D, D'; \boldsymbol{\omega}\rangle$ para hacer énfasis en la estructura natural de $\Gamma(\bigwedge E)$−módulo derecho de $\Omega_{\mathsf{Gr}}(M)$ (ver Capítulo 1), tal que

$$\left\langle D', D; \boldsymbol{\omega}\right\rangle = -(-1)^{|D||D'|}\left\langle D, D'; \boldsymbol{\omega}\right\rangle\,.$$

Si $|D|, |D'|$ denotan los grados respectivos de los supercampos vectoriales D, D', decimos que $\boldsymbol{\omega}$ es una forma simpléctica par cuando

$$|\left\langle D', D; \boldsymbol{\omega}\right\rangle| = |D| + |D'|\,, \tag{1}$$

y que es impar, cuando

$$|\left\langle D', D; \boldsymbol{\omega}\right\rangle| = |D| + |D'| + 1\,, \tag{2}$$

Una conexión graduada será una aplicación $\nabla : \mathrm{Der}(\bigwedge E) \times \mathrm{Der}(\bigwedge E) \to \mathrm{Der}(\bigwedge E)$ que satisface la versión graduada de las propiedades usuales de una conexión, esto es, la linealidad en el primer argumento y la regla de Leibniz en el segundo

$$\nabla_D(\alpha D') = D(\alpha)D' + (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\nabla_D D'\,.$$

Como en el caso clásico (no graduado), la acción de ∇ se puede extender a cualquier supercampo tensorial considerando a ∇ como una superderivación. Si $(M, \Gamma(\bigwedge E))$ es una supervariedad, la terna $(\,(M, \Gamma(\bigwedge E)), \boldsymbol{\omega}, \nabla\,)$ es una supervariedad de Fedosov cuando $\nabla\boldsymbol{\omega} = 0$. Para trabajar con supercurvaturas simplécticas, como en el caso no graduado, se considerarán particularmente aquellas compatibles con la conexión, esto es, supervariedades de Fedosov [2, 22, 29].

La supercurvatura de Riemann de una conexión graduada ∇ se puede definir por analogía con el caso usual, a partir del conmutador graduado canónico de endomorfismos de superálgebras, $[\cdot,\cdot]$:

$$R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}(D, D') = [\,\nabla_D, \nabla_{D'}\,] - \nabla_{[D,D']}\,.$$

Similarmente, podemos definir el tensor graduado de Ricci asociado a una conexión graduada $\mathbb{\nabla}$, $\mathrm{Ric}^{\mathbb{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}$, pero ahora el razonamiento basado solo en las propiedades de simetría no implica que la contracción con una forma simpléctica impar (2), resulte ser cero.

Asumiendo que esta contracción es no trivial, Batalin y Bering relacionan la curvatura escalar simpléctica impar con los eigenvalores del Laplaciano impar [4, 3]. Sin embargo, en estos trabajos no se aborda el problema de la no-trivialidad, de modo que al momento no se tiene una respuesta completa a la pregunta: ¿cuándo la curvatura escalar simpléctica impar es no trivial? El objetivo de este trabajo es presentar algunos resultados en esta dirección, junto con ejemplos explícitos, en una clase particular de supervariedades geométricas, cuya gavilla estructural $\Gamma(\bigwedge E)$ es precisamente la de secciones del haz exterior del fibrado cotangente $E = T^*M$ de la variedad base; estas supervariedades, de la forma $(M, \Omega(M))$, se denominan de Koszul-Cartan.

Desde un punto de vista puramente físico, puede parecer muy restrictivo el considerar sólo supervariedades de Koszul-Cartan, porque si la dimensión de la variedad base es $m = \dim M$, el contenido fermiónico de cualquier teoría física construida a partir de ella, contiene un número limitado de campos. Pero esta pérdida de generalidad no implica que esta clase de supervariedades no sea interesante: se puede probar que hasta segundo orden de profundidad, la estructura graduada simpléctica de la supervariedad $(M, \Omega(M))$ es como sigue [20],

1. $$\boldsymbol{\omega}_{\varpi,g} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega} & \\ & g \end{pmatrix} \quad \text{si } \boldsymbol{\omega} \text{ es par,} \tag{3}$$

   donde $\tilde{\omega} \in \Omega^2(M)$ es una forma simpléctica ordinaria, y g es una métrica pseudo-Riemanniana en la variedad base M.

2. $$\boldsymbol{\omega}_H = \begin{pmatrix} & -H \\ H & \end{pmatrix} \quad \text{si } \boldsymbol{\omega} \text{ es impar,} \tag{4}$$

   donde $H : TM \to T^*M$ es un isomorfismo.

Estas expresiones locales deben entenderse en el sentido de que dadas cualesquiera bases locales de campos vectoriales $X_i \in \mathcal{X}(M)$ (con $1 \leq i \leq m = \dim M$), entonces, para cualquier conexión lineal ∇ sobre TM, $\left\{\nabla_{X_j}, i_{X_j}\right\}_{j=1}^{m}$ (donde i_X denota al operador inserción) es una base de la gavilla $\mathrm{Der}_{\mathcal{C}^\infty(M)}\Omega(M)$ (de $\mathcal{C}^\infty(M)$–módulos localmente libres y finitamente generados). Así, cualquier superforma simpléctica se puede caracterizar mediante las supermatrices

$$\begin{pmatrix} \langle \nabla_{X_j}, \nabla_{X_k}; \boldsymbol{\omega} \rangle & \langle \nabla_{X_j}, i_{X_k}; \boldsymbol{\omega} \rangle \\ \langle i_{X_j}, \nabla_{X_k}; \boldsymbol{\omega} \rangle & \langle i_{X_j}, i_{X_k}; \boldsymbol{\omega} \rangle \end{pmatrix},$$

donde los elementos de la matriz no dependen de la conexión elegida ∇ (en contraste con el caso de conexiones graduadas, cuyas expresiones locales dependen crucialmente de ∇).

Por supuesto, una clase particular de formas simplécticas impares (4) se puede obtener considerando una métrica pseudo-Riemanniana $g \in S_2(M)$ sobre M y el isomorfismo musical inducido $H = \flat$ (abusando de notación continuaremos denotandolo por g), resultando en la expresión local

$$\boldsymbol{\omega}_g = \begin{pmatrix} & -g \\ g & \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Estas recuerdan a las métricas generalizadas que aparecen en teorías de campo doble, cuando consideramos un campo de Kaalb-Ramond nulo[1] [14, 15]. Incluso más relevante es el hecho de que los tensores de Riemann generalizados en teoría de campo doble se construyen a partir de estas métricas generalizadas y un campo dilatón $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ [15]. Precisamente, uno de los principales resultados de este trabajo indica que la curvatura escalar simpléctica impar es no trivial para la clase de supervariedades de Koszul-Cartan $((M,\Omega(M)),\boldsymbol{\omega}_g)$ cuando M es una variedad de Weyl, esto es, una clase conforme de variedades pseudo-Riemannianas $(M,[g])$ junto con una conexión lineal ∇^W tal que

$$\nabla^W g = \beta \otimes g\,,$$

donde β es una 1–forma diferencial $\beta \in \Omega^1(M)$ [7, 8]. Cuando $\beta = \mathrm{d}\phi$ es exacta, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se puede interpretar como un campo dilatón. Resulta que en este caso, la curvatura escalar simpléctica impar de $(M,\Omega(M))$ es dada como una forma diferencial sobre M no homogénea (de grado $1+3$) que solo depende del par (g,ϕ). En contraste con lo que sucede en teorías de campo doble, sin embargo, el tensor de supercurvatura de Riemann aquí está completamente determinado por (g,ϕ).

Las observaciones anteriores sugieren una posible conexión entre teoría de campo doble y estructuras geométricas graduadas, pero ésto se considerará en algún otro trabajo posterior y en el presente contexto únicamente cumple el papel de motivación física para la consideración de las supervariedades de Koszul-Cartan. Lo que se hará en este trabajo es un estudio de las propiedades de la curvatura simpléctica sobre tales supervariedades, obteniendo los siguientes resultados principales:

1. Es posible construir una clase de supervariedades simplécticas impares $((M,\Omega(M)),\boldsymbol{\omega}_H)$ partiendo de una variedad usual M junto con un isomorfismo $H : TM \to T^*M$. Si además, se considera una conexión lineal simétrica ∇ sobre M, es posible definir a partir de (M,∇,H) una familia de supervariedades de Fedosov $((M,\Omega(M)),\boldsymbol{\omega}_H,\mathbb{\nabla})$ cuyos elementos están completamente determinados por un conjunto de campos tensoriales sobre la variedad base M (corrigiendo expresiones previamente dadas en la literatura).

2. Si $\nabla H = 0$, entonces la curvatura escalar simpléctica impar de cualesquier miembro de la familia anterior es cero. En cierto sentido, este teorema explica por qué es tan difícil encontrar ejemplos explícitos de supercurvaturas escalares simplécticas no triviales, ya que a la hora de buscarlas parece natural considerar estructuras compatibles con la conexión.

3. Si $H = g : TM \to T^*M$ es el isomorfismo inducido por una métrica pseudo-Riemannian, $\beta \in \Omega^1(M)$ es una 1–forma diferencial y ∇^W es una conexión de Weyl sobre M tal que $\nabla^W g = \beta \otimes g$, entonces la supervariedad de Fedosov $((M,\Omega(M)),\boldsymbol{\omega}_g,\mathbb{\nabla})$, en general, tiene curvatura escalar simpléctica impar no trivial.

[1] Las metricas generalizadas tienen la forma local $G = \mathrm{diag}(g,g)$, pero se pueden llevar a dicha forma mediante una rotacion de (5) por

$$J = \begin{pmatrix} & -I \\ I & \end{pmatrix}.$$

Notemos que esta es tambien la forma matricial de la estructura compleja canonica sobre el espacio tangente de una variedad compleja, as la relacion entre metricas generalizadas en teor as de campo doble y formas simplecticas impares ser a similar a la existente en geometr a de Kahler.

En particular, ilustramos el último punto considerando el ejemplo donde g es la métrica del espaciotiempo de Schwarzschild (en las coordenadas de Kruskal-Szekeres), en la sección 3.4. La elección de esta métrica no es arbitraria: aparte del significado físico de este ejemplo (que representa el universo alrededor de un agujero negro estático), como veremos más adelante es conveniente, para poder construir soluciones a las ecuaciones de compatibilidad entre conexiones graduadas y superformas simplécticas, recurrir a la foliación por hipersuperficies espaciales inducida en los espaciotiempos globalmente hiperbólicos. Tal foliación asegura la existencia de una 3–forma distinguida (de volumen sobre las hojas) que será crucial para poder dar soluciones en forma explícita.

El presente trabajo se encuentra organizado como sigue: En el Capítulo 1 se presenta una introducción al álgebra lineal graduada necesaria para establecer en el contexto 'super' los conceptos y resultados de la geometría Riemanniana y simpléctica para el caso de supervariedades dentro del contexto de supermatrices. En el Capítulo 2 se introduce la clase de supervariedades que analizaremos a lo largo del trabajo y las nociones y propiedades geométricas asociadas a ellas. En el Capítulo 3 se presentan los resultados principales de este trabajo: se describen las propiedades de una supervariedad de Fedosov en términos de campos vectoriales asociados a la variedad base, y en base a éstos, se propone una solución al sistema de ecuaciones tensoriales que las caracteriza, y finalmente se analiza un ejemplo explícito con curvatura escalar simpléctica impar no trivial. Se concluye este trabajo presentando dos apéndices, el Apéndice A, con una estructura análoga al Capítulo 2 conteniendo los resultados análogos en el caso clásico (no graduado), basado en las propiedades de las variedades Riemannianas y simplécticas usuales, y el Apéndice B, donde se recolectan algunos resultados básicos acerca de las variedades de Weyl, necesarias para la construcción del ejemplo con curvatura escalar no trivial.

Capítulo 1

Álgebra lineal graduada

El objetivo de este capítulo es introducir el álgebra lineal graduada necesaria para establecer en el contexto 'super', algunos conceptos y resultados de la geometría Riemanniana y simpléctica usuales. Las principales referencias de los conceptos que aquí se manejan son [16], [18], y [25].

En este trabajo todo espacio vectorial se considerará sobre el campo de los números reales R y nombraremos **lineal** a toda aplicación R-lineal. A lo largo del trabajo se considerarán espacios Z_2-graduados y Z-graduados. Los elementos homogéneos en un espacio Z_2-graduado se denominan como **pares** o **impares** si son de grado 0 o 1 (mod 2) respectivamente; en un espacio Z-graduado los elementos homogéneos se nombrarán simplemente de Z-grado $p \in \mathsf{Z}$. Notemos que toda Z-graduación induce una Z_2-graduación, de modo que un espacio puede ser visto como Z-graduado y Z_2-graduado a la vez; para hacer énfasis en el tipo de graduación que se está utilizando es que haremos la distinción al nombrar los elementos homogéneos. En cualesquiera de los dos casos, el grado de un elemento homogéneo se indicará con el símbolo $|\cdot|$.

Toda estructura Z_2-graduada se denomina **superestructura** o **s-estructura** (para abreviar), así por ejemplo un espacio vectorial que admite una Z_2-graduación $V = V_0 \oplus V_1$ resulta ser un **superespacio vectorial**, o **s-espacio vectorial** [18].

1.1. s-módulos sobre s-álgebras

1.1.1. s-álgebras y nilpotentes

Una **superálgebra con unidad** es un superespacio vectorial $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ que es además un anillo Z_2-graduado con unidad, esto es, posee un elemento par distinguido $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_0$ y un producto asociativo y distributivo $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, que en elementos homogéneos α, β satisface que $|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta|$ (mod 2), o equivalentemente que

$$\mathcal{A}_i \, \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j \, (\mathrm{mod}\, 2)}.$$

Si además para todo par α, β de elementos homogéneos se cumple que

$$\alpha\beta = (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta\alpha.$$

decimos que $\mathcal{A}$ es **conmutativa graduada** [16] .

Notemos en particular que si $\mathcal{A}$ es conmutativa graduada, todo elemento impar $a \in \mathcal{A}_1 - \{0\}$ es nilpotente con índice de nilpotencia 2, pues, en este caso $|a| = 1 \pmod 2$ y

$$aa = (-1)^{1\cdot 1} aa = -aa$$

y por lo tanto $a^2 = 0$; de hecho, en una superálgebra conmutativa graduada todos los elementos generados a partir de impares son también nilpotentes, como vemos en el siguiente resultado:

Lema 1.1.1. Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ es una superálgebra conmutativa graduada, todos los elementos del ideal por ambos lados generado por $\mathcal{A}_1$

$$\langle \mathcal{A}_1 \rangle := \mathcal{A}\,\mathcal{A}_1 \mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, a_i\, \beta_i \mid a_i \in \mathcal{A}_1,\, \alpha_i \beta_i \in \mathcal{A},\, n \in \mathsf{N} \right\} \tag{1.1}$$

son nilpotentes.

Demostración. Sea $x \in \langle \mathcal{A}_1 \rangle$ y sin pérdida de generalidad supongamos que es de la forma $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, a_i\, \beta_i$ con α_i, β_i homogéneos y $a_i \in \mathcal{A}_1$. Se probará que $x^{n+1} = 0$ mostrando que cada uno de sus términos se anula.

Notemos que cada término de x^{n+1} se compone de $n+1$ factores como

$$(\alpha_{i_1}\, a_{i_1}\, \beta_{i_1})\,(\alpha_{i_2}\, a_{i_2}\, \beta_{i_2}) \cdots (\alpha_{i_{n+1}}\, a_{i_{n+1}}\, \beta_{i_{n+1}}) \tag{1.2}$$

pero como x consta de sólo n téminos, al menos dos factores en (1.2) serán repetidos, digamos que $i_k = k = i_{k+l}$. Entonces por la conmutatividad graduada y la asociatividad del producto en $\mathcal{A}$, agrupando factores, $(\alpha_{i_1}\, a_{i_1}\, \beta_{i_1}) \cdots (\alpha_{i_{n+1}}\, a_{i_{n+1}}\, \beta_{i_{n+1}}) = \alpha\, a_k\, \beta\, a_k\, \gamma$ (donde de hecho $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ son homogéneos) por lo tanto

$$(\alpha_{i_1}\, a_{i_1}\, \beta_{i_1}) \cdots (\alpha_{i_{n+1}}\, a_{i_{n+1}}\, \beta_{i_{n+1}}) = (-1)^{\beta\cdot 1} \alpha\beta\, a_k^2\, \gamma = 0$$

por ser a_k impar. Así, cada término en x^{n+1} es cero y por lo tanto $x^{n+1} = 0$, esto es, x es nilpotente. ∎

Notemos que aunque $\langle \mathcal{A}_1 \rangle$ está generado por impares, el ideal puede contener elementos pares de $\mathcal{A}$, por ejemplo si a_1 y a_2 son ambos homogéneos impares, el producto $a_1 a_2$ es par y pertenece al ideal.

Por otro lado, si $\mathcal{A}$ es una superálgebra conmutativa graduada con unidad $1_{\mathcal{A}}$, y

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}/\langle \mathcal{A}_1 \rangle \\ a & \longmapsto & [a] \end{array}$$

denota la proyección natural, cada elemento del cociente tiene un representante par, y por lo tanto $\mathcal{A}/\langle \mathcal{A}_1 \rangle$ tiene estructura de álgebra conmutativa con unidad $[1_{\mathcal{A}}]$.

1.1.2. s-módulos sobre s-álgebras

Sea $\mathcal{A}$ una superálgebra con unidad. Un superespacio vectorial $M = M_0 \oplus M_1$ que es además un $\mathcal{A}$-módulo izquierdo, es un **$\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo** si la acción izquierda

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times M & \longrightarrow & M \\ (\alpha, m) & \longmapsto & \alpha m \end{array}$$

es compatible con la graduación, esto es, que

$$\mathcal{A}_i\, M_j \subset M_{i+j\,(\mathsf{mod}\,2)}.$$

Análogamente se puede definir la noción de **$\mathcal{A}$-supermódulo derecho**, requiriendo que la $\mathcal{A}$-acción sobre M sea por la derecha y compatible con la graduación. [25].

Notemos que en el caso de que $\mathcal{A}$ es además conmutativa graduada, todo $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo es también un $\mathcal{A}$-supermódulo derecho (y viceversa) con la acción derecha inducida

$$M \times \mathcal{A} \longrightarrow M$$

definida en elementos homogéneos por

$$m\alpha := (-1)^{|\alpha||m|}\alpha m,$$

y resulta que ambas estructuras definidas sobre M son compatibles, en el sentido de que si consideramos el $\mathcal{A}$-módulo izquierdo M y consideramos la acción derecha inducida, entonces

$$(\alpha m)\beta = \alpha(m\beta)$$

pues

$$\begin{aligned}
(\alpha m)\beta &= (-1)^{|\alpha m||\beta|}\beta(\alpha m)\\
&= (-1)^{(|\alpha|+|m|)|\beta|}(\beta\alpha)m\\
&= (-1)^{|m||\beta|}(\alpha\beta)m\\
&= (-1)^{|m||\beta|}\alpha(\beta m)\\
&= \alpha(m\beta).
\end{aligned}$$

Por otro lado, un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo $M = M_0 \oplus M_1$ se dice ser **libre** de rango (p,q), si existe una base de elementos homogéneos $\{D_1,...,D_p;\tilde{D}_{p+1},...,\tilde{D}_{p+q}\}$ de M, tal que $|D_i| = 0$ (mod 2) para todo $1 \le i \le p$, y $|\tilde{D}_l| = 1$ (mod 2) para todo $p+1 \le l \le p+q$, esto es, que todo elemento $m \in M$ se puede descomponer de manera única como $m = \sum_{i=1}^{p} v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l \tilde{D}_l$ con $v^i, v^l \in \mathcal{A}$. Llamamos a $\{D_1,...,D_p;\tilde{D}_1,...\tilde{D}_q\}$ una **base pura** de M [25].

Por ejemplo, una superálgebra con unidad $\mathcal{A}$ vista como un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo sobre sí misma, tiene rango $(1,0)$, donde el único elemento de la base pura es precisamente la unidad.

En este trabajo nos interesa estudiar aplicaciones $\mathcal{A}$-lineales por la izquierda entre $\mathcal{A}$-supermódulos izquierdos. Como veremos, dichas aplicaciones se corresponden con supermatrices, y es por ésto que dedicamos las siguientes dos secciones para analizar por separado y en detalle cada uno de estos temas.

1.2. s-matrices sobre s-algebras y operaciones

Nota. En la literatura (e.g. [18], [25]) el término *supermatriz* en ocasiones se refiere a lo que en este trabajo se denominará como *supermatriz homogenea*. En este sentido se debe tener cuidado de no mezclar estas dos nociones.

Definición 1.2.1. Una matriz cuyas entradas son elementos de una superálgebra $\mathcal{A}$ se llama **supermatriz**. Denotaremos por $SM_{p\times m}(\mathcal{A})$ al conjunto de supermatrices de tamaño $p\times m$.

Las operaciones en $\mathcal{A}$ inducen de manera natural operaciones entre supermatrices. Estas operaciones, se definen imitando el caso usual de operaciones con matrices, como la **suma**, **multiplicación por escalares** (reales y en $\mathcal{A}$), y el **producto**. Con estas operaciones (imitaciones del caso usual) $SM_{p\times m}(\mathcal{A})$ es un espacio vectorial. De hecho, si $\mathcal{A}$ posee unidad $1_{\mathcal{A}}$, el espacio de supermatrices cuadradas forma un álgebra con unidad dada por la **supermatriz identidad**

$$\mathsf{I} := \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{A}} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1_{\mathcal{A}} \end{pmatrix}.$$

Así en particular podemos hablar de **supermatrices invertibles**, y las propiedades propias de un anillo que se cumplen para elementos invertibles se cumplen para supermatrices invertibles (como $(\mathcal{M}\mathcal{N})^{-1} = \mathcal{N}^{-1}\mathcal{M}^{-1}$,...,etc). Más adelante, en la sección 1.2.4 veremos propiedades adicionales que poseen las supermatrices invertibles, y que se derivan del hecho de tener entradas que se pueden descomponer en una parte par y una impar.

También, durante las siguientes dos subsecciones analizaremos dos subclases distinguidas del espacio de supermatrices (los bloques homogéneos y las supermatrices homogéneas) y veremos que cada una de estas clases nos proporciona una manera distinta de inducir una graduación al espacio de supermatrices. Para los objetivos de este trabajo, nos interesa en particular estudiar el comportamiento de las supermatrices homogéneas, sin embargo, debido a la manera en que éstas se definen, realizamos también un análisis de bloques homogéneos.

Por otro lado, observemos que para supermatrices, también tiene sentido definir, imitando el caso usual, los operadores **traza**

$$\mathrm{Tr} : SM_{p\times p}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$$

y **transpuesta**

$$(\cdot)^t : SM_{p\times m}(\mathcal{A}) \to SM_{m\times p}(\mathcal{A})$$

y de hecho, algunas propiedades que tenemos en el caso de matrices usuales, se siguen cumpliendo en el espacio de supermatrices, como podemos ver en el siguiente resultado, donde la comprobación de tales igualdades se realiza imitando la prueba de la correspondiente propiedad en el caso usual de matrices.

Proposición 1.2.2. Sea $\mathcal{A}$ una superálgebra. Si $\mathcal{M},\mathcal{N}$ son supermatrices de tamaño apropiado y $k \in \mathsf{R}, \alpha \in \mathcal{A}$ son escalares,

(1) $\mathrm{Tr}(k\mathcal{M} \pm \mathcal{N}) = k\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{M} \pm \mathrm{Tr}\,\mathcal{N}$

(2) $\mathrm{Tr}(\alpha\mathcal{M}) = \alpha\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}$

(3) $\mathrm{Tr}\,\mathcal{M} = \mathrm{Tr}(\mathcal{M}^t)$

($\hat{1}$) $(k\mathcal{M} \pm \mathcal{N})^t = k\,\mathcal{M}^t \pm \mathcal{N}^t$

($\hat{2}$) $(\alpha\mathcal{M})^t = \alpha\,\mathcal{M}^t$

($\hat{3}$) $\left(\mathcal{M}^t\right)^t = \mathcal{M}$

Mediante las propiedades que se analizarán en la siguiente subsección, podemos comprobar que las propiedades de la traza y la transpuesta que se cumplen en el caso usual y que envuelven productos de matrices, tienen un análogo en el caso graduado pero **sólo** si las supermatrices consideradas son bloques homogéneos.

1.2.1. Bloques homogéneos

Definición 1.2.3. Un **bloque homogéneo de grado** $\mu \in \mathsf{Z}_2$ es una supermatriz $A = \left(A_i^j\right)_{ij}$ tal que todas sus entradas son homogéneas y del mismo grado μ, es decir, que $|A_i^j| = \mu \pmod 2$ para todos i, j; en este caso denotamos $|A| = \mu \pmod 2$.

Notemos que el único bloque homogéneo que es par e impar a la vez es el formado por puros ceros. También, si $\mathcal{A}$ tiene unidad, I será un bloque homogéneo par.

Podemos observar también que el conjunto de bloques homogéneos pares (o impares) de tamaño $p \times m$, forma un subespacio vectorial de $SM_{p\times m}(\mathcal{A})$; además, si

$$\mathcal{M} = \left(M_i^j\right)_{ij}$$

es una supermatriz arbitraria de tamaño $p \times m$, la descomposición $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ induce una descomposición única de cada entrada $M_i^j = M_i^{j,0} \oplus M_i^{j,1} \in \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, y por lo tanto tenemos una descomposición natural de cada supermatriz, en bloques homogéneos

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$$

donde $\mathcal{M}_0 := \left(M_i^{j,0}\right)_{ij}$ es un bloque homogéneo par de tamaño $p\times m$, y $\mathcal{M}_1 := \left(M_i^{j,1}\right)$ es un bloque homogéneo impar también de tamaño $p \times m$. Lo anterior nos dice que $SM_{p\times m}(\mathcal{A})$ es un superespacio vectorial, con la graduación inducida por bloques homogéneos.

Por otro lado, notemos que también se cumplen las siguientes propiedades.

Lema 1.2.4. Sea $\mathcal{A}$ una superálgebra.

1. Si A es un bloque homogéneo y $\alpha \in \mathcal{A}$ también es homogéneo, $|\alpha A| = |\alpha| + |A| \pmod 2$.

2. Si A y R son bloques homogéneos de tamaño apropiado, AR es también un bloque homogéneo y $|AR| = |A| + |R| \pmod 2$.

3. Si P es un bloque homogéneo invertible, $|P| = |P^{-1}| \pmod 2$.

Demostración. La primera afirmación es clara debido a que el producto considerado es el producto usual de escalares por matrices. Para la segunda afirmación, sean $A = \left(A_i^j\right)_{ij}$ y $R = \left(R_j^k\right)_{jk}$ de tamaño $p \times q$ y $q \times r$ respectivamente, tales que

$$|A_i^j| = \mu \quad \forall i, j \qquad \text{y} \qquad |R_j^k| = \nu \quad \forall j, k.$$

Como la entrada (i, k)-ésima de la matriz AR es $\sum_j A_i^j R_j^k$ y para cada j, $|A_i^j R_j^k| = |A_i^j| + |R_j^k| = \mu + \nu$ por ser $\mathcal{A}$ una superálgebra, entonces $\sum_j A_i^j R_j^k$ resulta ser homogéneo de grado

$$|\sum_j A_i^j R_j^k| = \mu + \nu \qquad \forall i, k$$

por lo tanto AR es un bloque homogéneo de grado $\mu + \nu$.

Por otro lado, si P es un bloque homogéneo invertible, como $|\mathsf{I}| = 0$ y $PP^{-1} = \mathsf{I} = P^{-1}P$, directamente del resultado anterior se tiene que

$$0 = |PP^{-1}| = |P| + |P^{-1}| \pmod 2$$

y esta igualdad se cumple si y sólo si P y P^{-1} tienen el mismo grado. ■

De 1. en el lema anterior se sigue que el espacio $SM_{p\times m}(\mathcal{A})$ tiene estructura de $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo. Asímismo, de 2. tenemos que si nos restringimos al espacio de supermatrices cuadradas, y consideramos el bloque homogéneo par I, entonces tal espacio resulta ser una superálgebra con unidad I, la cual claramente no es conmutativa graduada (la restricción en el tamaño de las supermatrices se toma para tener los tamaños apropiados al momento de multiplicarlas). Resumimos lo anterior en el siguiente resultado.

Proposición 1.2.5. Sea $\mathcal{A}$ una superálgebra:

- El espacio de supermatrices sobre $\mathcal{A}$ de tamaño fijo, con la graduación dada por bloques homogéneos, resulta ser un superespacio vectorial, e incluso, con el producto usual de escalares por matrices, resulta ser un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo.
- Si $\mathcal{A}$ posee unidad, el espacio de supermatrices cuadradas de tamaño fijo con la graduación de bloques homogéneos y la multiplicación usual de matrices, resulta ser una superálgebra con unidad I.

Los bloques homogéneos poseen propiedades análogas a las que cumplen las matrices usuales respecto a los operadores traza y transpuesta incluso para los casos que envuelven productos de matrices, como podemos ver a continuación.

Proposición 1.2.6. Sea $\mathcal{A}$ una superálgebra. Si A, B, P son bloques homogéneos de tamaño adecuado y $k \in \mathsf{R}, \alpha \in \mathcal{A}$, entonces:

(0) $|\mathrm{Tr}\, A| = |A| \pmod 2$ $\qquad$ $(\hat{0})$ $|A^t| = |A| \pmod 2$

(1) $\mathrm{Tr}(kA \pm B) = k\,\mathrm{Tr}\, A \pm \mathrm{Tr}\, B$ $\qquad$ $(\hat{1})$ $(kA \pm B)^t = k\, A^t \pm B^t$

(2) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{Tr}\, A$ $\qquad$ $(\hat{2})$ $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$

(3) $\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}(A^t)$ $\qquad$ $(\hat{3})$ $\left(A^t\right)^t = A$

Si además $\mathcal{A}$ es conmutativa graduada

(4) $\mathrm{Tr}(AB) = (-1)^{|A||B|}\,\mathrm{Tr}(BA)$ $\qquad$ $(\hat{4})$ $(AB)^t = (-1)^{|A||B|}\, B^t A^t$

(5) $\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = (-1)^{|P|(|A|+1)}\,\mathrm{Tr}\, A$ $\qquad$ $(\hat{5})$ $(A^{-1})^t = (-1)^{|A|}\left(A^t\right)^{-1}$

(6) $\mathrm{Tr}(A^t B) = \mathrm{Tr}(AB^t)$

Demostración. Basta probar (4)-(6) y $(\hat{4})$-$(\hat{5})$, pues $(0), (\hat{0})$ son evidentes, y además, por la Proposición 1.2.2. las otras ecuaciones se cumplen para toda supermatriz.

Para probar (4), como la (i,j)-ésima entrada de la matriz AB es $\sum_k A_i^k B_k^j$ y A, B son bloques homogéneos con

$$|A_i^k| = |A| \quad \text{y} \quad |B_k^j| = |B| \qquad \forall i, j, k,$$

entonces por la conmutatividad graduada de $\mathcal{A}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AB) &= \sum_l \sum_k A_l^k B_k^l \\ &= (-1)^{|A||B|} \sum_k \sum_j B_k^l A_l^k \\ &= (-1)^{|A||B|} \mathrm{Tr}(BA). \end{aligned}$$

Para probar (5), observemos que por el Lema 1.2.4. $|PA| = |P| + |A|$ y además $|P| = |P^{-1}|$, así que por la relación (4) que acabamos de probar

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(PAP^{-1}) &= (-1)^{|P^{-1}|(|P|+|A|)} \mathrm{Tr}((P^{-1})(PA)) \\ &= (-1)^{|P|(1+|A|)} \mathrm{Tr}(\mathsf{I}A) \\ &= (-1)^{|P|(1+|A|)} \mathrm{Tr}\, A. \end{aligned}$$

Para probar $(\hat{4})$, notemos que como la (i,j)-ésima entrada de la matriz (AB) es $\sum_k A_i^k B_k^j$, entonces la (i,j)-ésima entrada de la matriz $(AB)^t$ es

$$\sum_k A_j^k B_k^i = (-1)^{|A||B|} \sum_k B_k^i A_j^k$$

donde hemos usado que A, B son bloques homogéneos y $\mathcal{A}$ es conmutativa graduada. Pero precisamente el factor del lado derecho de la igualdad anterior, $\sum_k B_k^i A_j^k$ es la (i,j)-ésima entrada de la matriz $B^t A^t$, de modo que hemos probado que se cumple la ecuación $(\hat{4})$.

Luego, directamente de $(\hat{4})$ tenemos que A es invertible si y sólo si A^t también lo es, pues

$$\mathsf{I} = \left(AA^{-1}\right)^t = (-1)^{|A|} \left(A^{-1}\right)^t A^t$$

e

$$\mathsf{I} = \left(A^{-1}A\right)^t = (-1)^{|A|} A^t \left(A^{-1}\right)^t,$$

y de hecho,

$$\left(A^t\right)^{-1} = (-1)^{|A|} \left(A^{-1}\right)^t$$

probando así la ecuación $(\hat{5})$.

Finalmente (6) se sigue de $(3), (\hat{4}), (1), (\hat{0}), (\hat{3}), 4$, pues

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A^t B) &= \mathrm{Tr}\left((A^t B)^t \right) \\ &= \mathrm{Tr}\left((-1)^{|A^t||B|} B^t A^{t^t} \right) \\ &= (-1)^{|A||B|} \mathrm{Tr}\left(B^t A\right) \\ &= (-1)^{2|A||B|} \mathrm{Tr}\left(AB^t\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(AB^t\right). \end{aligned}$$

■

Notemos que si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son supermatrices arbitrarias (de tamaños adecuados), no se cumplen relaciones del tipo (4) o ($\hat{4}$) en general, incluso si el álgebra es conmutativa graduada, pues si descomponemos las supermatrices en un bloque par y uno impar como $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_1$, por la proposición anterior, $\mathrm{Tr}(\mathcal{M}\mathcal{N})$ y $\mathrm{Tr}(\mathcal{N}\mathcal{M})$ difieren en el signo del término $\mathrm{Tr}(\mathcal{N}_1\mathcal{M}_1)$; asímismo $(\mathcal{M}\mathcal{N})^t$ y $\mathcal{N}^t\mathcal{M}^t$ difieren en el signo del término $\mathcal{N}_1^t\mathcal{M}_1^t$. Concluimos que las propiedades de la traza y la transpuesta que se cumplen en el caso usual y que involucran productos de matrices, sólo tienen un análogo graduado si las supermatrices correspondientes son bloques homogéneos.

Veremos en las siguientes dos secciones que si elegimos otra graduación en el espacio de supermatrices (inducida también por la descomposición natural de $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$), y además extendemos los operadores traza y transpuesta, entonces sí obtendremos propiedades análogas a las de la Proposición 1.2.6. para éste nuevo tipo de elementos homogéneos.

1.2.2. Supermatrices homogéneas

Estudiaremos ahora otra manera de inducir una graduación en el espacio de supermatrices, a saber, la dada por supermatrices homogéneas. Esta graduación resulta de mayor relevancia para este trabajo, debido a que las aplicaciones homogéneas entre $\mathcal{A}$-supermódulos izquierdos que deseamos estudiar (que nombramos *$\mathcal{A}$-lineales por la izquierda* homogéneas) se corresponden precisamente con supermatrices homogéneas. Como veremos, el análisis antes realizado para bloques homogéneos será fuertemente utilizado en el estudio de supermatrices homogéneas debido a como éstas se definen.

Cabe recalcar en este momento que las matrices que en esta sección se denominan como *supermatrices homogeneas*, en algunas otras referencias (e.g. [18], [25]) se denominan simplemente como *supermatrices*.

Definición 1.2.7. Una **supermatriz homogénea de grado** $\mu \in \mathsf{Z}_2$ es una supermatriz dada por bloques homogéneos

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

tales que $|A| = \mu = |D| \pmod 2$ y $|B| = \mu + 1 = |C| \pmod 2$; en este caso denotaremos $|\mathcal{M}| = \mu$. Además diremos que $\mathcal{M}$ es de **tamaño por bloques** $(p+q)\times(m+n)$, si A es de tamaño $p \times m$, B es de tamaño $p \times n$, C es de tamaño $q \times m$ y D es de tamaño $q \times n$.

Por ejemplo, una supermatriz dada por bloques homogéneos de la forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

con $|A| = 0 = |D| \pmod 2$ es homogénea par, así, en particular si $\mathcal{A}$ tiene unidad entonces la supermatriz identidad I es homogénea par; mientras tanto, una supermatriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

con $|B| = 0 = |C| \pmod 2$ será homogénea impar. También, todo bloque homogéneo de tamaño $p \times m$ se puede considerar como una supermatriz homogénea del mismo grado, de tamaño por bloques $(p+0)\times(m+0)$, y todo vector renglón $(A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_n)$ tal que $|A_i| = \mu \pmod 2$ y $|B_l| = \mu + 1 \pmod 2$ se puede considerar como una supermatriz homogénea de tamaño por bloques $(1+0)\times(m+n)$ y de grado $\mu \in \mathsf{Z}_2$.

Notemos que la única supermatriz homogénea que es par e impar a la vez es la formada por puros ceros, pues en este caso, cada bloque homogéneo debe ser par e impar a la vez, y el único bloque con esa propiedad corresponde a la matriz cero.

Por otro lado, si

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad y \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

son supermatrices homogéneas y $k \in \mathsf{R}, \alpha \in \mathcal{A}$, las operaciones usuales con matrices de suma, producto por escalares (reales y en $\mathcal{A}$) y producto, toman la forma

$$\mathcal{M} + \mathcal{N} = \begin{pmatrix} A+R & B+S \\ C+T & D+U \end{pmatrix} \ , \ k\mathcal{M} = \begin{pmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

$$\alpha\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \alpha A & \alpha B \\ \alpha C & \alpha D \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

$$\mathcal{M}\mathcal{N} = \begin{pmatrix} AR+BT & AS+BU \\ CR+DT & CS+DU \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

y la traza y la transpuesta se escriben como

$$\operatorname{Tr}\mathcal{M} = \operatorname{Tr}A + \operatorname{Tr}D \qquad \text{y} \qquad \mathcal{M}^t = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

En particular, de las expresiones (1.4) anteriores y del hecho de que la suma de bloques homogéneos del mismo grado es una operación cerrada, podemos observar que el conjunto de supermatrices homogéneas pares (o impares) de tamaño por bloques $(p+q)\times(m+n)$, forma un subespacio vectorial de $SM_{(p+q)\times(m+n)}(\mathcal{A})$. Además, si p, q, m, n son fijos, $\mathcal{M} = \left(M_i^j\right)_{ij}$ es una supermatriz arbitraria de tamaño $(p+q)\times(m+n)$, la descomposición única de cada entrada

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_1^{1,0} \oplus M_1^{1,1} & \cdots & M_1^{m+n,0} \oplus M_1^{m+n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{p+q}^{1,0} \oplus M_{p+q}^{1,1} & \cdots & M_{p+q}^{m+n,0} \oplus M_{p+q}^{m+n,1} \end{pmatrix}$$

con $M_i^{j,0} \in \mathcal{A}_0$ y $M_i^{j,1} \in \mathcal{A}_1$, para todo i, j, inducida por la graduación en $\mathcal{A}$, induce a su vez una descomposición de manera natural

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} M_1^{1,0} & \cdots & M_1^{m,0} & M_1^{m+1,1} & \cdots & M_1^{m+n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_p^{1,0} & \cdots & M_p^{m,0} & M_p^{m+1,1} & \cdots & M_p^{m+n,1} \\ M_{p+1}^{1,1} & \cdots & M_{p+1}^{m,1} & M_{p+1}^{m+1,0} & \cdots & M_{p+1}^{m+n,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{p+q}^{1,1} & \cdots & M_{p+q}^{m,1} & M_{p+q}^{m+1,0} & \cdots & M_{p+q}^{m+n,0} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} M_1^{1,1} & \cdots & M_1^{m,1} & M_1^{m+1,0} & \cdots & M_1^{m+n,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_p^{1,1} & \cdots & M_p^{m,1} & M_p^{m+1,0} & \cdots & M_p^{m+n,0} \\ M_{p+1}^{1,0} & \cdots & M_{p+1}^{m,0} & M_{p+1}^{m+1,1} & \cdots & M_{p+1}^{m+n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{p+q}^{1,0} & \cdots & M_{p+q}^{m,0} & M_{p+q}^{m+1,1} & \cdots & M_{p+q}^{m+n,1} \end{pmatrix} \\ &=: \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{M}_0$ es una supermatriz homogénea par de tamaño por bloques $(p+q)\times(m+n)$, y $\mathcal{M}_1$ es una supermatriz homogénea impar también de tamaño por bloques $(p+q)\times(m+n)$. Por lo tanto, tenemos que $SM_{(p+q)\times(m+n)}(\mathcal{A})$ es un superespacio vectorial, con la graduación inducida por supermatrices homogéneas.

Por otro lado, tenemos las siguientes propiedades, las cuales se siguen directamente de las expresiones (1.5), (1.6), y del Lema 1.2.4. que afirma que se tienen las propiedades análogas para bloques homogéneos:

Lema 1.2.8. Sea $\mathcal{A}$ una superálgebra.

1. Si $\mathcal{M}$ es una supermatriz homogénea y $\alpha \in A$ también homogéneo, $|\alpha\mathcal{M}| = |\alpha| + |\mathcal{M}|$.
2. Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son supermatrices homogéneas de tamaño por bloques apropiado, entonces $\mathcal{M}\mathcal{N}$ es también una supermatriz homogénea, y $|\mathcal{M}\mathcal{N}| = |\mathcal{M}| + |\mathcal{N}| \pmod 2$.
3. Si P es una supermatriz homogénea invertible, $|P| = |P^{-1}| \pmod 2$.

De lo anterior, se sigue que el espacio de supermatrices de un tamaño por bloques fijo tiene estructura de $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo. También, se sigue que el espacio de supermatrices cuadradas que además tienen tamaño por bloques fijo $(p+q)\times(p+q)$, es una superálgebra con unidad I, que claramente no es conmutativa graduada. Notemos que la restricción se considera no sólo en el tamaño de la supermatriz, sino también en el tamaño por bloques, para tener los tamaños apropiados al momento de multiplicar las supermatrices.

Resumimos lo anterior en el siguiente resultado:

Proposición 1.2.9. Sea $\mathcal{A}$ una superálgebra:

- El espacio de supermatrices sobre $\mathcal{A}$ de tamaño por bloques fijo, con la graduación dada por supermatrices homogéneas, resulta ser un superespacio vectorial, e incluso, con el producto usual de escalares por matrices, resulta ser un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo.
- Si $\mathcal{A}$ posee unidad, el espacio de supermatrices cuadradas de tamaño por bloques fijo de la forma $(p+q)\times(p+q)$ con la multiplicación usual de matrices, tiene estructura de superálgebra con unidad I.

Las supermatrices homogéneas cumplen las siguientes propiedades, donde claramente (0) y $(\hat{0})$ se siguen de las expresiones (1.7) y las demás se siguen de la Proposición 1.2.2.

Proposición 1.2.10. Sea $\mathcal{A}$ una superálgebra. Si $\mathcal{M},\mathcal{N}$ son supermatrices homogéneas de tamaño adecuado y $k \in \mathsf{R}, \alpha \in \mathcal{A}$, entonces:

(0) $\lvert\operatorname{Tr}\mathcal{M}\rvert = \lvert\mathcal{M}\rvert$	$(\hat{0})$ $\lvert\mathcal{M}\rvert = \lvert\mathcal{M}^t\rvert$
(1) $\operatorname{Tr}(k\mathcal{M} \pm \mathcal{N}) = k\operatorname{Tr}\mathcal{M} \pm \operatorname{Tr}\mathcal{N}$	$(\hat{1})$ $(k\mathcal{M} \pm \mathcal{N})^t = k\,\mathcal{M}^t \pm \mathcal{N}^t$
(2) $\operatorname{Tr}(\alpha\mathcal{M}) = \alpha\operatorname{Tr}\mathcal{M}$	$(\hat{2})$ $(\alpha\mathcal{M})^t = \alpha\,(\mathcal{M}^t)$
(3) $\operatorname{Tr}\mathcal{M} = \operatorname{Tr}(\mathcal{M}^t)$	$(\hat{3})$ $\left(\mathcal{M}^t\right)^t = \mathcal{M}$

A diferencia de los bloques homogéneos, las supermatrices homogéneas no poseen propiedades análogas graduadas a las que envuelven productos de matrices. Por ejemplo, si consideramos las supermatrices homogéneas pares no nulas

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & S \\ T & 0 \end{pmatrix}$$

(esto es, que $|B| = |C| = |S| = |T| = 1 \pmod 2$) entonces por la propiedad (4) de la Proposición 1.2.6.

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\mathcal{M}\mathcal{N}) &= \operatorname{Tr}(BT) + \operatorname{Tr}(CS)\\ &= (-1)^{1\cdot 1}\operatorname{Tr}(TB) + (-1)^{1\cdot 1}\operatorname{Tr}(CS)\\ &= -\operatorname{Tr}(\mathcal{N}\mathcal{M})\end{aligned}$$

y

$$(\mathcal{M}\mathcal{N})^t = \begin{pmatrix}(BT)^t & 0\\ 0 & (CS)^t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{1\cdot 1}T^tB^t & 0\\ 0 & (-1)^{1\cdot 1}S^tC^t\end{pmatrix} = -\mathcal{N}^t\mathcal{M}^t$$

de modo que

$$\operatorname{Tr}(\mathcal{M}\mathcal{N}) \neq (-1)^{|\mathcal{M}||\mathcal{N}|}\operatorname{Tr}(\mathcal{N}\mathcal{M}) \qquad \text{y} \qquad (\mathcal{M}\mathcal{N})^t \neq (-1)^{|\mathcal{M}||\mathcal{N}|}\mathcal{N}^t\mathcal{M}^t.$$

Si deseamos tener propiedades análogas a las de la Proposición 1.2.6. pero para supermatrices homogéneas, debemos extender las definiciones de traza y transpuesta, a los conceptos de supertraza y supertranspuesta, que estudiamos en la siguiente sección.

1.2.3. Mas operaciones con supermatrices

En este trabajo nos interesa analizar aplicaciones $\mathcal{A}$-lineales por la izquierda homogéneas entre $\mathcal{A}$-supermódulos, y **operadores invariantes** bajo cambios de base. Como veremos más adelante, las aplicaciones $\mathcal{A}$-lineales por la izquierda se corresponden precisamente con supermatrices homogéneas (y no sólo con bloques homogéneos). A fin de cuentas, estaremos interesados en el estudio de invariantes en el espacio de supermatrices que se preservan bajo conjugación. En particular, como podemos ver de las propiedades que cumple el operador traza en bloques homogéneos y supermatrices homogéneas, la traza no conserva más esta propiedad de invarianza sobre supermatrices homogéneas con ninguna de las dos graduaciones, sin embargo, veremos que se puede introducir una versión extendida de la traza que resulte invariante. Cabe mencionar que este operador extendido no será $\mathcal{A}$-lineal (como lo era la traza en el espacio de matrices usuales), y en otros trabajos si el propósito del autor es conservar dicha propiedad, se 'corrige' la definición de multiplicación escalar de elementos en $\mathcal{A}$ por supermatrices para lograrlo.

Consideremos el espacio de supermatrices con la graduación inducida por supermatrices homogéneas. Se define (cf. [18]) la **supertraza** de una supermatriz homogénea de grado μ como

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}^{\mathsf{STr}} := \operatorname{Tr} A - (-1)^{|\mu|}\operatorname{Tr} D;$$

por otro lado, la **supertranspuesta** de una supermatriz homogénea de grado μ, es la supermatriz homogénea dada como

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}^{\mathsf{St}} := \begin{pmatrix}A^t & (-1)^{\mu}C^t\\ -(-1)^{\mu}B^t & D^t\end{pmatrix}.$$

La supertraza y la supertranspuesta cumplen las siguientes propiedades análogas a las propiedades de la Proposición 1.2.6. para los operadores traza y transpuesta sobre bloques homogéneos, que a su vez son análogas a los que se cumplen en el caso de matrices usuales.

Proposición 1.2.11. Sea $\mathcal{A}$ una superálgebra. Si $\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}$ son supermatrices homogéneas de tamaño adecuado y grado adecuado, y además $k \in \mathsf{R}, \alpha \in \mathcal{A}$, entonces:

(0) $|\mathrm{STr}\,\mathcal{M}| = |\mathcal{M}| \pmod 2$

(1) $\mathrm{STr}(k\mathcal{M} \pm \mathcal{N}) = k\,\mathrm{STr}\,\mathcal{M} \pm \mathrm{STr}\,\mathcal{N}$

(2) $\mathrm{STr}(\alpha\mathcal{M}) = \alpha\,\mathrm{STr}\,\mathcal{M} \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{A}_0$

(3) $\mathrm{STr}\,\mathcal{M} = \mathrm{STr}(\mathcal{M}^{\mathsf{St}})$

($\hat{0}$) $|\mathcal{M}^{\mathsf{St}}| = |\mathcal{M}| \pmod 2$

($\hat{1}$) $(k\mathcal{M} \pm \mathcal{N})^{\mathsf{St}} = k\,\mathcal{M}^{\mathsf{St}} \pm \mathcal{N}^{\mathsf{St}}$

($\hat{2}$) $(\alpha\mathcal{M})^{\mathsf{St}} = \alpha\,(\mathcal{M}^{\mathsf{St}}) \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{A}_0$

($\hat{3}$) $\mathcal{M}^{\mathsf{St}^4} = \mathcal{M}$

Si además $\mathcal{A}$ es conmutativa graduada

(4) $\mathrm{STr}(\mathcal{M}\mathcal{N}) = (-1)^{|\mathcal{M}||\mathcal{N}|}\mathrm{STr}(\mathcal{N}\mathcal{M})$

(5) $\mathrm{STr}(\mathcal{P}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{P}) = (-1)^{|\mathcal{P}|(|\mathcal{M}|+1)}\mathrm{STr}\,\mathcal{M}$

($\hat{4}$) $(\mathcal{M}\mathcal{N})^{\mathsf{St}} = (-1)^{|\mathcal{M}||\mathcal{N}|}\,\mathcal{N}^{\mathsf{St}}\mathcal{M}^{\mathsf{St}}$

($\hat{5}$) $(\mathcal{M}^{-1})^{\mathsf{St}} = (-1)^{|\mathcal{M}|}\,\left(\mathcal{M}^{\mathsf{St}}\right)^{-1}$

Demostración. A lo largo de la prueba usaremos fuertemente los resultados análogos de la Proposición 1.2.6 para bloques homogéneos.

Supongamos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ tienen la forma

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad y \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}.$$

Probaremos primero las propiedades (0)-(3), ($\hat{0}$)-($\hat{3}$).

La propiedad (0) es inmediata pues si $\mathcal{M}$ tiene grado μ, entonces A y D son bloques homogéneos de grado μ, de modo que $\mathrm{Tr}A \in \mathcal{A}_\mu$ y $\mathrm{Tr}D \in \mathcal{A}_\mu$.

Para probar (1), supongamos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ tienen el mismo grado μ. Entonces como la supermatriz

$$k\mathcal{M} \pm \mathcal{N} = \begin{pmatrix} kA \pm R & kB \pm S \\ kC \pm T & kD \pm U \end{pmatrix}$$

también es homogénea de grado μ, usando la propiedad (1) de la Proposición 1.2.6. para bloques homogéneos,

$$\begin{aligned} \mathrm{STr}(k\mathcal{M} \pm \mathcal{N}) &= \mathrm{Tr}(kA \pm R) - (-1)^{\mu}\mathrm{Tr}(kD \pm U) \\ &= k\mathrm{Tr}\,A \pm \mathrm{Tr}\,R - (-1)^{\mu}\,(k\mathrm{Tr}\,D \pm \mathrm{Tr}\,U) \\ &= k\,(\mathrm{Tr}\,A - (-1)^{\mu}\mathrm{Tr}\,D) \pm (\mathrm{Tr}\,R - (-1)^{\mu}\mathrm{Tr}\,U) \\ &= k\,\mathrm{STr}\,\mathcal{M} \pm \mathrm{STr}\,\mathcal{N} \end{aligned}$$

Para probar (2), si $\alpha \in \mathcal{A}$ es homogéneo, $\alpha\mathcal{M}$ es una supermatriz homogénea de grado $|\mathcal{M}|+|\alpha|$, y por la propiedad (2) de la Proposición 1.2.6. para bloques homogéneos, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{STr}(\alpha\mathcal{M}) &= \mathrm{Tr}(\alpha A) - (-1)^{|\mathcal{M}|+|\alpha|}\mathrm{Tr}(\alpha D) \\ &= \alpha\mathrm{Tr}\,A - (-1)^{|\mathcal{M}|+|\alpha|}\alpha\mathrm{Tr}\,D \\ &= \alpha\left(\mathrm{Tr}\,A - (-1)^{|\mathcal{M}|+|\alpha|}\mathrm{Tr}\,D\right), \end{aligned}$$

luego, como

$$\alpha\,\mathrm{STr}\,\mathcal{M} = \alpha\left(\mathrm{Tr}\,A - (-1)^{|\mathcal{M}|}\mathrm{Tr}\,D\right),$$

se tiene que $\mathrm{STr}(\alpha\mathcal{M}) = \alpha\,\mathrm{STr}\,\mathcal{M}$ si y sólo si $|\alpha| = 0 \pmod 2$.

Para probar (3), notemos primero que $(\hat{0})$ es válido (lo cual es directo de la propiedad $(\hat{0})$ de la Proposición 1.2.6.) así, como $|\mathcal{M}^{\mathsf{St}}| = |\mathcal{M}| \pmod 2$

$$\begin{aligned}\mathrm{STr}(\mathcal{M}^{\mathsf{St}}) &= \mathrm{Tr}(A^t) - (-1)^{|\mathcal{M}|}\mathrm{Tr}(D^t)\\ &= \mathrm{Tr}(A) - (-1)^{|\mathcal{M}|}\mathrm{Tr}(D)\\ &= \mathrm{STr}(\mathcal{M})\end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad (3) de la Proposición 1.2.6. para bloques homogéneos.

Para probar $(\hat{1})$ supongamos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ tienen el mismo grado μ. Entonces $|k\mathcal{M}\pm\mathcal{N}| = \mu$, y usando la propiedad $(\hat{1})$ de la Proposición 1.2.6.

$$\begin{aligned}(k\mathcal{M}\pm\mathcal{N})^{\mathsf{St}} &= \begin{pmatrix} (kA\pm R)^t & (-1)^{\mu}(kC\pm T)^t\\ -(-1)^{\mu}(kB\pm S)^t & (kD\pm U)^t\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} kA^t\pm R^t & (-1)^{\mu}(kC^t\pm T^t)\\ -(-1)^{\mu}(kB^t\pm S^t) & kD^t\pm U^t\end{pmatrix}\\ &= k\begin{pmatrix} A^t & (-1)^{\mu}C^t\\ -(-1)^{\mu}B^t & D^t\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} R^t & (-1)^{\mu}T^t\\ -(-1)^{\mu}S^t & U^t\end{pmatrix}\\ &= k\,\mathcal{M}^{\mathsf{St}} \pm \mathcal{N}^{\mathsf{St}}.\end{aligned}$$

Para probar $(\hat{2})$, si $\alpha\in\mathcal{A}$ es homogéneo, $\alpha\mathcal{M}$ también lo es y tiene grado $|\mathcal{M}|+|\alpha|$. Así, de la propiedad $(\hat{2})$ de la Proposición 1.2.6. para bloques homogéneos,

$$\begin{aligned}(\alpha\mathcal{M})^{\mathsf{St}} &= \begin{pmatrix} (\alpha A)^t & (-1)^{|\mathcal{M}|+|\alpha|}(\alpha C)^t\\ -(-1)^{|\mathcal{M}|+|\alpha|}(\alpha B)^t & (\alpha D)^t\end{pmatrix}\\ &= \alpha\begin{pmatrix} A^t & (-1)^{|\mathcal{M}|+|\alpha|}C^t\\ -(-1)^{|\mathcal{M}|+|\alpha|}B^t & D^t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

y como por otro lado

$$\alpha\,\mathcal{M}^{\mathsf{St}} = \alpha\begin{pmatrix} A^t & (-1)^{|\mathcal{M}|}C^t\\ -(-1)^{|\mathcal{M}|}B^t & D^t\end{pmatrix},$$

tendremos que $(\alpha\mathcal{M})^{\mathsf{St}} = \alpha\,\mathcal{M}^{\mathsf{St}}$ si y sólo si $|\alpha| = 0 \pmod 2$.

Finalmente, la propiedad $(\hat{3})$ se sigue de observar que

$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}^{\mathsf{St}^2} = \begin{pmatrix} A^t & (-1)^{\mu}C^t\\ -(-1)^{\mu}B^t & D^t\end{pmatrix}^{\mathsf{St}} = \begin{pmatrix} A & -B\\ -C & D\end{pmatrix}$$

y así claramente $\mathcal{M}^{\mathsf{St}^4} = \mathcal{M}$.

Probaremos ahora las propiedades (4)-(5) y $(\hat{4})$-$(\hat{5})$. Para ésto, supongamos que $\mathcal{A}$ es conmutativa graduada.

Probemos primero (4). Como la supermatriz

$$\mathcal{M}\mathcal{N} = \begin{pmatrix} AR+BT & AS+BU\\ CR+DT & CS+DU\end{pmatrix}$$

es homogénea de grado $|\mathcal{M}|+|\mathcal{N}|$ (por el Lema 1.2.8.),tenemos que

$$\mathrm{STr}(\mathcal{M}\mathcal{N}) = \mathrm{Tr}(AR+BT) - (-1)^{|\mathcal{M}|+|\mathcal{N}|}\mathrm{Tr}(CS+DU).$$

Luego, usando las propiedades (1) y (4) de la Proposición 1.2.6 para bloques homogéneos, se sigue,

$$\begin{aligned}
\mathrm{STr}(\mathcal{M}\mathcal{N}) &= \mathrm{Tr}(AR)+\mathrm{Tr}(BT)-(-1)^{|\mathcal{M}|+|\mathcal{N}|}\left[\mathrm{Tr}(CS)+\mathrm{Tr}(DU)\right]\\
&= (-1)^{|\mathcal{M}||\mathcal{N}|}\mathrm{Tr}(RA)+(-1)^{(|\mathcal{M}|+1)(|\mathcal{N}|+1)}\mathrm{Tr}(TB)\\
&\quad -(-1)^{|\mathcal{M}|+|\mathcal{N}|}\left[(-1)^{(|\mathcal{M}|+1)(|\mathcal{N}|+1)}\mathrm{Tr}(SC)+(-1)^{|\mathcal{M}||\mathcal{N}|}\mathrm{Tr}(UD)\right]\\
&= (-1)^{|\mathcal{M}||\mathcal{N}|}\Big[\mathrm{Tr}(RA)+(-1)^{|\mathcal{M}|+|\mathcal{N}|+1}\mathrm{Tr}(TB)\\
&\qquad\qquad -(-1)^{1}\mathrm{Tr}(SC)-(-1)^{|\mathcal{M}|+|\mathcal{N}|}\mathrm{Tr}(UD)\Big]\\
&= (-1)^{|\mathcal{M}||\mathcal{N}|}\Big[\mathrm{Tr}(RA)+\mathrm{Tr}(SC)-(-1)^{|\mathcal{M}|+|\mathcal{N}|}\mathrm{Tr}(TB)\\
&\qquad\qquad -(-1)^{|\mathcal{M}|+|\mathcal{N}|}\mathrm{Tr}(UD)\Big]\\
&= (-1)^{|\mathcal{M}||\mathcal{N}|}\mathrm{STr}(\mathcal{N}\mathcal{M}).
\end{aligned}$$

Probaremos ahora (5). Por el Lema 1.2.8. $|\mathcal{P}\mathcal{M}| = |\mathcal{P}|+|\mathcal{M}|$ y además $|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}^{-1}|$, así que por la propiedad (4) que acabamos de probar

$$\begin{aligned}
\mathrm{STr}(\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{P}^{-1}) &= (-1)^{|\mathcal{P}^{-1}|(|\mathcal{P}|+|\mathcal{M}|)}\,\mathrm{STr}((\mathcal{P}^{-1})(\mathcal{P}\mathcal{M}))\\
&= (-1)^{|\mathcal{P}|(|\mathcal{M}|+1)}\,\mathrm{STr}(\mathsf{I}\mathcal{M})\\
&= (-1)^{|\mathcal{P}|(|\mathcal{M}|+1)}\,\mathrm{STr}\,\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Para probar $(\hat{4})$, por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}\mathcal{N})^{\mathsf{St}} &= \begin{pmatrix} AR+BT & AS+BU\\ CR+DT & CS+DU\end{pmatrix}^{\mathsf{St}}\\
&= \begin{pmatrix} (AR+BT)^t & (-1)^{(\mu+\nu)}(CR+DT)^t\\ -(-1)^{(\mu+\nu)}(AS+BU)^t & (CS+DU)^t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

luego, usando $(\hat{1})$ y $(\hat{4})$ de la Proposición 1.2.6. para bloques homogéneos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}\mathcal{N})^{\mathsf{St}} &= \begin{pmatrix} (AR)^t+(BT)^t & (-1)^{(\mu+\nu)}\left[(CR)^t+(DT)^t\right]\\ -(-1)^{(\mu+\nu)}\left[(AS)^t+(BU)^t\right] & (CS)^t+(DU)^t\end{pmatrix}\\
&= (-1)^{\mu\nu}\begin{pmatrix} R^tA^t-(-1)^{\mu+\nu}T^tB^t & (-1)^{\mu}R^tC^t+(-1)^{\nu}T^tD^t\\ -(-1)^{\nu}S^tA^t-(-1)^{\mu}U^tB^t & -(-1)^{(\mu+\nu)}S^tC^t+U^tD^t\end{pmatrix}\\
&= (-1)^{\mu\nu}\begin{pmatrix} R^t & (-1)^{\nu}T^t\\ -(-1)^{\nu} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^t & (-1)^{\mu}C^t\\ -(-1)^{\mu}B^t & D^t\end{pmatrix}\\
&= (-1)^{\mu\nu}\mathcal{N}^{\mathsf{St}}\mathcal{M}^{\mathsf{St}}.
\end{aligned}$$

Por último, $(\hat{5})$ se sigue directamente de $(\hat{4})$; en efecto, $\mathcal{M}$ es invertible si y sólo si $\mathcal{M}^{\mathsf{St}}$ también lo es, pues

$$\mathsf{I} = \left(\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}\right)^{\mathsf{St}} = (-1)^{|\mathcal{M}|}\left(\mathcal{M}^{-1}\right)^{\mathsf{St}}\mathcal{M}^{\mathsf{St}}$$

e
$$\mathsf{I} = \left(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}\right)^{\mathsf{St}} = (-1)^{|\mathcal{M}|}\mathcal{M}^{\mathsf{St}}\left(\mathcal{M}^{-1}\right)^{\mathsf{St}}$$
y así,
$$\left(\mathcal{M}^{\mathsf{St}}\right)^{-1} = (-1)^{|\mathcal{M}|}\left(\mathcal{M}^{-1}\right)^{\mathsf{St}}.$$
■

Notemos que para un bloque homogéneo A de tamaño $p \times m$ y grado $|A|$ visto como supermatriz homogénea de tamaño por bloques $(p+0)\times(m+0)$ y del mismo grado, se cumple que
$$\mathrm{STr}\, A \equiv \mathrm{Tr}\, A \qquad \text{y} \qquad A^{\mathsf{St}} \equiv A^t.$$
También, para todo vector renglón $(A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_n)$ con $|A_i| = \mu$ y $|B_l| = \mu + 1$ visto como una supermatriz homogénea de tamaño por bloques $(1+0)\times(m+n)$ y de grado μ,
$$\left(A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_n\right)^{\mathsf{St}} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ -(-1)^{\mu}B_1 \\ \vdots \\ -(-1)^{\mu}B_n \end{pmatrix}.$$

Observación. De la Proposición 1.2.11. anterior podemos ver que el operador supertranspuesta se comporta de manera muy similar al operador transpuesta en el caso de matrices usuales (no graduadas), por supuesto con los signos apropiados. Sin embargo, una diferencia que podemos notar (aparte del índice de idempotencia) es que no se corresponderá la supertranspuesta de la supermatriz asociada a un operador $\mathcal{A}$-lineal, con la supermatriz asociada a la aplicación inducida en los respectivos duales. Sin embargo, si definimos el operador $\widetilde{\mathrm{St}}$ como
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\widetilde{\mathsf{St}}} := \begin{pmatrix} A^t & -(-1)^{\mu}C^t \\ (-1)^{\mu}B^t & D^t \end{pmatrix} \tag{1.8}$$
(que es muy similar al operador supertranspuesta), este operador además de cumplir también las propiedades $(\hat{0})$-$(\hat{5})$, (con pruebas análogas a las presentadas para St) sí cumple que la supermatriz asociada al operador inducido en los duales, se relaciona mediante $\widetilde{\mathrm{St}}$ con la supermatriz de la aplicación $\mathcal{A}$-lineal original (ver la Proposición (1.3.11).). Así, $\widetilde{\mathrm{St}}$ podría haber sido llamado "el operador supertraza", sin embargo en estas notas reservamos dicho nombre para St, y denotamos al nuevo operador usando la tilde. Finalmente, podemos notar que $\widetilde{\mathrm{St}} = \mathrm{St}^3$, esto es, que
$$\left(\mathcal{M}^{\widetilde{\mathsf{St}}}\right)^{\mathsf{St}} = \mathcal{M} = \left(\mathcal{M}^{\mathsf{St}}\right)^{\widetilde{\mathsf{St}}}.$$

1.2.4. s-matrices invertibles

En esta sección veremos que debido a que toda supermatriz $\mathcal{M}$ tiene en esencia una descomposición en una parte par y una nilpotente, la existencia de una inversa para la supermatriz $\mathcal{M}$ dependerá únicamente de dicha parte par.

Para realizar tal estudio, veamos primero que algunas propiedades que tenemos para matrices usuales se cumplen también en el espacio de supermatrices.

Lema 1.2.12. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa graduada.

1. Si todas las entradas de $\mathcal{M}$ son nilpotentes, entonces $\mathcal{M}$ es nilpotente.
2. Si $\mathcal{A}$ tiene unidad, y $\mathcal{M}$ es nilpotente, entonces $\mathsf{I} - \mathcal{M}$ es invertible, con
$$(\mathsf{I} - \mathcal{M})^{-1} = \mathsf{I} + \mathcal{M} + \cdots + \mathcal{M}^{n-1},$$
donde n es el índice de nilpotencia de $\mathcal{M}$.

Demostración. Para probar la primera afirmación, sea $\mathcal{M} = (m_i^j)_{ij}$ una supermatriz cuadrada de $n \times n$ con cada entrada m_i^j nilpotente. Supongamos también que $N \in \mathsf{N}$ es tal que $\left(m_i^j\right)^N = 0$ para todos i, j (por ejemplo N puede ser el máximo de los índices de nilpotencia de cada una de las entradas de la supermatriz). Probaremos que $\mathcal{M}^p = 0$ para $p = n^2(N-1) + 1$.

La (i,j)-ésima entrada de $\mathcal{M}^p$, tiene la forma
$$\sum_{k_1,\ldots,k_{p-1}=1}^{n} m_i^{k_1} m_{k_1}^{k_2} m_{k_2}^{k_3} \cdots m_{k_{p-2}}^{k_{p-1}} m_{k_{p-1}}^{j} \tag{1.9}$$
donde cada término de la sumatoria consta de p factores; veremos que cada uno de los n^{p-1} términos de la sumatoria anterior se anula. Para ésto, fijemos $k_1, \ldots, k_{p-1}$. Si el término
$$m_i^{k_1} m_{k_1}^{k_2} m_{k_2}^{k_3} \cdots m_{k_{p-2}}^{k_{p-1}} m_{k_{p-1}}^{j} \tag{1.10}$$
contiene una potencia N-ésima de alguna de las entradas de $\mathcal{M}$, entonces se anula (donde podemos usar la conmutatividad graduada de $\mathcal{A}$ para agrupar los factores y formar dicha potencia). Si no, las potencias de todas las n^2 entradas de $\mathcal{M}$ son menores que N, y a lo más el término (1.10) tiene como factor a $\left(m_1^1\right)^{N-1}\left(m_1^2\right)^{N-1}\cdots\left(m_n^n\right)^{N-1}$, pero notemos que esos son solo $n^2(N-1)$ factores, y (1.10) tiene $n^2(N-1)+1$, de modo que debe contener alguna entrada de $\mathcal{M}$ repetida, formando así una potencia N-ésima de esa entrada (donde nuevamente podemos usar la conmutatvidad graduada de $\mathcal{A}$ para agrupar factores) y por lo tanto también se anula.

Así, todos los términos de (1.9) se anulan, y como i, j se tomaron arbitrarios, se sigue que $\mathcal{M}^p = 0$.

La comprobación de . es directa debido a la inversa propuesta. ■

Por otro lado, si $\mathcal{A}$ es un álgebra conmutativa graduada con unidad y nos restringimos al álgebra de supermatrices cuadradas de tamaño fijo $SM_{p\times p}(\mathcal{A})$ con unidad I, entonces el subconjunto formado por aquellas supermatrices con todas sus entradas en el ideal $\langle \mathcal{A}_1 \rangle$ (definido por (1.1)),
$$SM_{p\times p}\langle \mathcal{A}_1 \rangle := \left\{ \mathcal{M} = \left(m_i^j\right)_{ij} \in SM_{p\times p}(\mathcal{A}) \mid m_i^j \in \langle \mathcal{A}_1 \rangle \right\}$$
es también claramente un ideal por ambos lados del espacio $SM_{p\times p}(\mathcal{A})$; en particular del Lema 1.1.1. y . del Lema 1.2.12. anterior, todos las supermatrices en este ideal son nilpotentes.

Luego, si
$$\begin{array}{rcl} SM_{p\times p}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & SM_{p\times p}(\mathcal{A})/SM_{p\times p}\langle \mathcal{A}_1 \rangle \\ \mathcal{M} & \longmapsto & [\mathcal{M}] \end{array}$$

denota la proyección natural, el cociente $SM_{p\times p}(\mathcal{A})/SM_{p\times p}\langle\mathcal{A}_1\rangle$ corresponde a un álgebra con unidad $[\mathsf{I}]$; además como cada supermatriz con entradas en $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ se puede descomponer en un bloque homogéneo par y un bloque homogéneo impar, y éstos últimos pertenecen al ideal $SM_{p\times p}\langle\mathcal{A}_1\rangle$, concluimos que cada elemento en $SM_{p\times p}(\mathcal{A})/SM_{p\times p}\langle\mathcal{A}_1\rangle$ tiene un representante homogéneo par (notemos la analogía entre las propiedades de este cociente y el cociente $\mathcal{A}/\langle\mathcal{A}_1\rangle$).

En términos de la proyección sobre el cociente anterior, se establece el siguiente resultado.

Proposición 1.2.13. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa graduada con unidad. Una supermatriz $\mathcal{M} \in SM_{p\times p}(\mathcal{A})$ es invertible si y sólo si su correspondiente $[\mathcal{M}] \in SM_{p\times p}(\mathcal{A})/SM_{p\times p}\langle\mathcal{A}_1\rangle$ lo es.

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{M}$ es invertible. Como en este caso existe $\mathcal{M}^{-1}$ tal que $\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} = \mathsf{I} = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}$, tenemos que

$$[\mathcal{M}][\mathcal{M}^{-1}] = [\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}] = [\mathsf{I}] = [\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}] = [\mathcal{M}^{-1}][\mathcal{M}]$$

de modo que $[\mathcal{M}]$ es invertible con inversa $[\mathcal{M}^{-1}]$.

Supongamos ahora que $[\mathcal{M}] \in SM_{p\times p}(\mathcal{A})/SM_{p\times p}\langle\mathcal{A}_1\rangle$ es invertible con inversa $[\mathcal{N}]$. Por un lado, como $[\mathcal{M}\mathcal{N}] = [\mathcal{M}][\mathcal{N}] = [\mathsf{I}]$, se tiene que $\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N} \in SM\langle\mathcal{A}_1\rangle$, y por lo tanto del Lema 1.1.1. y el Lema 1.2.12. $\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N}$ es nilpotente (digamos con índice de nilpotencia p), y por lo tanto $\mathsf{I} - (\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N}) = \mathcal{M}\mathcal{N}$ es invertible, con inversa $\mathsf{I} + (\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N}) + \cdots + (\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N})^p$, esto es,

$$\mathcal{M}\mathcal{N}\left(\mathsf{I} + (\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N}) + \cdots + (\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N})^p\right) = \mathsf{I} \tag{1.11}$$

y también

$$\left(\mathsf{I} + (\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N}) + \cdots + (\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N})^p\right)\mathcal{M}\mathcal{N} = \mathsf{I}$$

así en particular de (1.11) tenemos que $\mathcal{M}$ tiene inversa por la derecha. Por otro lado, como también sucede que $[\mathcal{N}\mathcal{M}] = [\mathcal{N}][\mathcal{M}] = [\mathsf{I}]$, siguiendo el mismo argumento tenemos que $\mathcal{N}\mathcal{M}$ es invertible, y si q es el índice de nilpotencia de $\mathsf{I} - \mathcal{N}\mathcal{M}$, la inversa es precisamente $\mathsf{I} + (\mathsf{I} - \mathcal{N}\mathcal{M}) + \cdots + (\mathsf{I} - \mathcal{N}\mathcal{M})^q$, esto es,

$$\mathcal{N}\mathcal{M}\left(\mathsf{I} + (\mathsf{I} - \mathcal{N}\mathcal{M}) + \cdots + (\mathsf{I} - \mathcal{N}\mathcal{M})^q\right) = \mathsf{I}$$

y

$$\left(\mathsf{I} + (\mathsf{I} - \mathcal{N}\mathcal{M}) + \cdots + (\mathsf{I} - \mathcal{N}\mathcal{M})^q\right)\mathcal{N}\mathcal{M} = \mathsf{I} \tag{1.12}$$

y en particular de (1.12) tenemos que $\mathcal{M}$ tiene inversa por la izquierda; así como $\mathcal{M}$ tiene inversa por ambos lados, concluimos que es invertible, y aún más, explícitamente su inversa es

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{-1} &= \mathcal{N}\left(\mathsf{I} + (\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N}) + \cdots + (\mathsf{I} - \mathcal{M}\mathcal{N})^p\right) \\ &= \left(\mathsf{I} + (\mathsf{I} - \mathcal{N}\mathcal{M}) + \cdots + (\mathsf{I} - \mathcal{N}\mathcal{M})^q\right)\mathcal{N} \end{aligned}$$

donde p será igual a q. ■

1.3. Aplicaciones $\mathcal{A}$-lineales entre s-módulos

En gía con la noción de morfismo en la categoría de módulos usuales (no graduados) tenemos la definición de aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda entre $\mathcal{A}$-supermódulos.

Cabe mencionar que en este trabajo consideramos adecuado llamar 'morfismos' precisamente a la colección de dichas aplicaciones entre supermódulos izquierdos, a diferencia de otras referencias como [18], [25], pues como veremos más adelante estas aplicaciones **extienden de manera natural** la noción de $\mathcal{A}$-linealidad que se espera para 1-formas graduadas.

Definición 1.3.1. Sean M, N dos $\mathcal{A}$-supermódulos izquierdos. Diremos que

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow N \\ m &\longmapsto \langle m; f\rangle \end{aligned}$$

R-lineal es una **aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda** si

$$\langle \alpha m\,; f\rangle = \alpha\,\langle m; f\rangle \qquad \forall \alpha \in \mathcal{A},$$

y denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ al espacio de todos las aplicaciones $\mathcal{A}$-lineales por la izquierda entre M y N. Diremos además que f es una **aplicación homogénea** de grado $|f| \in \mathsf{Z}_2$ si para todo $m \in M$ homogéneo

$$|\langle m; f\rangle| = |m| + |f| \,(\mathrm{mod}\,2)$$

En adelante siempre usaremos la notación $\langle -; f\rangle$ para escribir la acción de una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda en elementos de un módulo graduado, para enfatizar que aún si f tiene grado definido, los $\mathcal{A}$-escalares salen libremente multiplicando por la izquierda sin signo alguno.

Una ventaja que consideramos de trabajar con la notación de dicha evaluación por la izquierda $\langle -; f\rangle$ (como se hace en [23]) es que la evaluación en una aplicación $\mathcal{A}$-lineal se corresponderá con la multiplicación usual de un vector por una matriz, y la composición de dicho tipo de aplicaciones $\mathcal{A}$-lineales se corresponderá con la multiplicación usual de matrices, de modo que evita introducir productos adicionales (ver [27]).

Aunque las aplicaciones $\mathcal{A}$-lineales por la izquierda son las de nuestro particular interés (pues extienden de manera natural la noción de forma graduada y en general de tensor graduado), por analogía a la definición anterior, podemos nombrar a una aplicación homogénea $\varphi : M \to N$ entre $\mathcal{A}$-supermódulos izquierdos como **$\mathcal{A}$-lineal por la derecha** si $\varphi(m\alpha) = \varphi(m)\alpha$, o equivalentemente si $\varphi(\alpha m) = (-1)^{|\alpha||\varphi|}\alpha\varphi(m)$ (remitimos a la referencia [18] para el análisis de estas aplicaciones, donde son éstas las que consideran como 'los morfismos' entre $\mathcal{A}$-módulos graduados).

Por otro lado, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ tiene una estructura natural de $\mathcal{A}$-supermódulo derecho, con acción

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$$

definida por $\langle m; f\alpha\rangle = \langle m; f\rangle\alpha$ para todo $m \in M$ y $\alpha \in \mathcal{A}$, ya que si f y α son homogéneos,

$$\begin{aligned} |\langle m; f\alpha\rangle| &= |\langle m; f\rangle\alpha| \\ &= |\langle m; f\rangle| + |\alpha| \\ &= |m| + |f| + |\alpha| \end{aligned}$$

de modo que $|f\alpha| = |f| + |\alpha|$ (mod 2).

Definición 1.3.2. Decimos que una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda $f : M \to N$ es un **isomorfismo $\mathcal{A}$-lineal** si existe otra aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda $g : N \to M$ tal que $g \circ f = id_M$ y $f \circ g = id_N$.

1.3.1. El s-dual

En particular si consideramos el espacio $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A})$ donde $\mathcal{A}$ misma es vista como un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo con único generador $1_{\mathcal{A}}$, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.3.3. Si M es un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo fijo, definimos su **$\mathcal{A}$-supermódulo dual** M^* como

$$\begin{aligned} M^* &:= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A}) \\ &= \{f : M \to A \mid \langle \alpha m; f\rangle = \alpha\langle m; f\rangle \; \forall m \in M, \alpha \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ tiene estructura natural de $\mathcal{A}$-supermódulo derecho, también M^* tiene dicha estructura

$$M^* \times \mathcal{A} \to M^*$$

dada por

$$\langle -; f\alpha\rangle = \langle -; f\rangle\alpha \tag{1.13}$$

para $\alpha \in \mathcal{A}$.

Veremos más adelante que, análogamente a lo que ocurre en el caso no graduado, M^* corresponde precisamente al espacio de las 1-formas graduadas, o más generalmente, al espacio de 1-tensores covariantes graduados; de hecho los elementos de M^* homogéneos de grado $i \in \mathsf{Z}_2$ se identificarán con las 1-formas graduadas de bigrado $(1, i)$ o con los 1-tensores covariantes graduados de bigrado $(1, i)$.

Por otro lado, si M es un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo libre con base pura $\mathbf{B}_M = \{D_1, ..., D_p; D_{p+1}, ..., D_{p+q}\}$, el $\mathcal{A}$-supermódulo dual M^* también es libre del mismo rango que M. En efecto, si definimos para cada $k = 1, ..., p + q$ la aplicación

$$D^{k*} : M \to \mathcal{A}$$

como

$$\langle D_j; D^{k*}\rangle := \delta_{kj} 1_{\mathcal{A}}$$

y extendemos la definición para $D \in M$ arbitrario por $\mathcal{A}$-linealidad por la izquierda, entonces $\mathbf{B}_{M^*} := \{D^{1*}, ..., D^{p*}; D^{p+1*}, ..., D^{p+q*}\}$ será una base pura para M^* llamada **base dual pura**. Para verificar ésto, solo falta comprobar que $\mathbf{B}_{M^*}$ es una base y que sus elementos son homogéneos tales que $|D^{i*}| = 0$ para todo $1 \le i \le p$, y que $|D^{l*}| = 1$ para todo $p + 1 \le l \le p + q$. Notemos primero que si $D = \sum_{i=1}^{p+q} v^i D_i \in M$, entonces por $\mathcal{A}$-linealidad por la izquierda, tenemos que para cada $k = 1, ..., p + q$,

$$\langle D; D^{k*}\rangle = \langle \sum_{i=1}^{p+q} v^i D_i; D^{k*}\rangle \equiv v^k \tag{1.14}$$

por lo tanto si $D = \sum_{i=1}^{p+q} v^i D_i$ es homogéneo, como la base $\mathbf{B}_M$ es pura entonces $|v^i| = |D|$ para $1 \le i \le p$ y $|v^l| = |D| + 1$ para $p + 1 \le l \le p + q$; luego por la propiedad (1.14)

$$\begin{array}{lcl} |\langle D; D^{i\,*}\rangle| = |v^i| = |D| & 1 \le i \le p & y \\ |\langle D; D^{l\,*}\rangle| = |v^l| = |D| + 1 & p + 1 \le l \le p + q & \end{array}$$

y así los D^{k*} son homogéneos del grado que se deseaba. Finalmente, que el conjunto $\mathbf{B}_{M^*}$ es una base se sigue directamente de (ii) en el siguiente resultado:

Proposición 1.3.4. Sea M un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo libre de rango (p,q) con base pura $\{D_1,...,D_p;D_{p+1},...,D_{p+q}\}$. Si M^* es su $\mathcal{A}$-supermódulo dual, y $D^{k*}\in M^*$ definido por

$$\langle D_j; D^{k*}\rangle := \delta_{kj}1_{\mathcal{A}}$$

para cada $k=1,...,p+q$, se cumple que:

(i) Para todo $D\in M$

$$D = \langle D; D^{1*}\rangle D_1 + \cdots + \langle D; D^{p+q\,*}\rangle D_{p+q}. \tag{1.15}$$

(ii) Para todo $f\in M^*$

$$f = D^{1*}\langle D_1; f\rangle + \cdots + D^{p+q\,*}\langle D_{p+q}; f\rangle. \tag{1.16}$$

Así, $\{D^{1*},...,D^{p^*};D^{p+1*},...,D^{p+q*}\}$ es una base pura de M^*, y por lo tanto es libre y tiene el mismo rango que M.

Observación. En adelante todo elemento de un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo libre, será identificado con un vector renglón. También, todo elemento de un $\mathcal{A}$-supermódulo derecho libre se identificará con un vector columna. En particular, si $D=\sum_{i=1}^{p} v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l \in M$ es homogéneo, con $\{D_i;D_l\}$ base pura, como $|v^i| = |D| \pmod 2$ y $|v^l| = |D|+1 \pmod 2$

$$\begin{aligned} D &= \textstyle\sum_{i=1}^{p} v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p}(-1)^{|v^i||D_i|} D_i\, v^i + \sum_{l=p+1}^{p+q}(-1)^{|v^l||D_l|} D_l\, v^l \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p} D_i\, v^i + \sum_{l=p+1}^{p+q}(-1)^{|D|+1} D_l\, v^l \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p} D_i\, v^i - \sum_{l=p+1}^{p+q}(-1)^{|D|} D_l\, v^l \end{aligned}$$

tenemos una identificación de $(D)_{\mathbf{B}_M}$ visto como elemento del $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo M, con su supertranspuesto $(D)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_M}$ en el $\mathcal{A}$-módulo derecho M,

$$(D)_{\mathbf{B}_M} = (v^1,...,v^p,v^{p+1},...,v^{p+q}) \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \\ -(-1)^{|D|}v^{p+1} \\ \vdots \\ -(-1)^{|D|}v^{p+q} \end{pmatrix} = (D)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_M}.$$

1.3.2. La s-matriz asociada a una aplicación $\mathcal{A}$-lineal

A continuación veremos que toda aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda entre $\mathcal{A}$-supermódulos izquierdos libres está representada por una supermatriz; de hecho si la aplicación es además homogénea, la supermatriz asociada corresponderá a una supermatriz homogénea del mismo grado.

Sean M y N dos $\mathcal{A}$-supermódulos izquierdos libres de rango (p,q) y (m,n) respectivamente, con bases $\mathbf{B}_M=\{D_1,...,D_p;D_{p+1},...,D_{p+q}\}$ y $\mathbf{B}_N=\{E_1,...,E_m;E_{m+1},...,E_{m+n}\}$.

Si $H : M \to N$ es una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda y suponemos que la imagen bajo H de los elementos de la base $\mathbf{B}_M$ se escriben como

$$\begin{array}{llr} H : D_i \mapsto & \sum_{j=1}^{m} A_i^j E_j + \sum_{k=1}^{n} B_i^k E_{m+k}, & 1 \leq i \leq p \\ H : D_l \mapsto & \sum_{j=1}^{m} C_l^j E_j + \sum_{k=1}^{n} D_l^k E_{m+k}, & p+1 \leq l \leq p+q \end{array} \tag{1.17}$$

con $A_i^j, B_i^k, C_l^j, D_l^k \in \mathcal{A}$, entonces, por la $\mathcal{A}$-linealidad por la izquierda, se tiene que para todo $D = \sum_{i=1}^{p} v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l \in M$ (con $v^i, v^l \in \mathcal{A}$)

$$\begin{aligned} \langle D;H\rangle &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^{p} v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l \ ; \ H\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p} v^i \langle D_i;H\rangle + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l \langle D_l;H\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p} v^i \left(\sum_{j=1}^{m} A_i^j E_j + \sum_{k=1}^{n} B_i^k E_{m+k}\right) \\ &\quad \textstyle+ \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l \left(\sum_{j=1}^{m} C_l^j E_j + \sum_{k=1}^{n} D_l^k E_{m+k}\right) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{p} v^i A_i^j\right) E_j + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} v^i B_i^k\right) E_{m+k} \\ &\quad \textstyle+ \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{l=p+1}^{p+q} v^l C_l^j\right) E_j + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l^k\right) E_{m+k} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{p} v^i A_i^j + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l C_l^j\right) E_j \\ &\quad \textstyle+ \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} v^i B_i^k + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l^k\right) E_{m+k}, \end{aligned}$$

luego, como los elementos de todo $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo se identifican con vectores renglón,

$$D = \sum_{i=1}^{p} v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l \quad \longleftrightarrow \quad (v^1, ..., v^p, v^{p+1}, ..., v^{p+q}) \coloneqq (D)_{\mathbf{B}_M}$$

se sigue que

$$(\,\langle D;H\rangle\,)_{\mathbf{B}_N} = (v^1, ..., v^p, v^{p+1}, ..., v^{p+q}) \begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ij} & \left(B_i^k\right)_{ik} \\ \left(C_l^j\right)_{lj} & \left(D_l^k\right)_{lk} \end{pmatrix}.$$

Así, como la supermatriz

$$(H)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_N} \coloneqq \begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ij} & \left(B_i^k\right)_{ik} \\ \left(C_l^j\right)_{lj} & \left(D_l^k\right)_{lk} \end{pmatrix}$$

satisface que

$$(\,\langle D;H\rangle\,)_{\mathbf{B}_N} = (D)_{\mathbf{B}_M}\,(H)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_N}$$

decimos que $(H)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_N}$ es la representación matricial de H o **la supermatriz asociada** a H.

Notemos que si en particular $H : M \to N$ es una aplicación homogénea de grado $|H| \in \mathbb{Z}_2$ entonces, el grado de cada coeficiente $A_i^j, B_i^k, C_l^j, D_l^k \in \mathcal{A}$ está completamente determinado, de hecho, como la base $\mathbf{B}_M$ es pura, $|D_i| = 0 \pmod 2$ para todo $1 \leq i \leq p$, y $|D_l| = 1 \pmod 2$ para todo $p+1 \leq l \leq p+q$, por lo que

$$\begin{array}{lll} |\sum_{j=1}^{m} A_i^j E_j + \sum_{k=1}^{n} B_i^k E_{m+n}| = |H| \pmod 2 & 1 \leq i \leq p, & y \\ |\sum_{j=1}^{m} C_l^j E_j + \sum_{k=1}^{n} D_l^k E_{m+n}| = |H| + 1 \pmod 2 & p+1 \leq l \leq p+q & \end{array}$$

luego, al ser también $\mathbf{B}_N$ pura, $|E_i| = 0 \pmod 2$ para todo $1 \leq i \leq m$, y $|E_l| = 1 \pmod 2$ para todo $m+1 \leq l \leq m+n$, de modo que

$$|A_i^j E_j| = |A_i^j| + |E_j| = |A_i^j| \pmod 2 \quad \text{y} \quad |B_i^k E_{m+n}| = |B_i^k| + |E_{m+n}| = |B_i^k| + 1 \pmod 2,$$

$$|C_l^j E_j| = |C_l^j| + |E_j| = |C_l^j| \pmod 2 \quad \text{y} \quad |D_l^k E_{m+n}| = |D_l^k| + |E_{m+n}| = |D_l^k| + 1 \pmod 2,$$

y concluimos que para todos i, j, k, l,

$$|A_i^j| = |H| = |D_l^k| \pmod 2 \qquad \text{y} \qquad |B_i^k| = |H| + 1 = |C_l^j| \pmod 2.$$

Así, la supermatriz asociada a una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda que además es homogénea, es también homogénea del mismo grado. Resumimos lo anterior en el siguiente resultado

Proposición 1.3.5. Sean M y N $\mathcal{A}$-supermódulos izquierdos libres, con bases puras $\mathbf{B}_M = \{D_1, ..., D_p; D_{p+1}, ..., D_{p+q}\}$ y $\mathbf{B}_N = \{E_1, ..., E_m; E_{m+1}, ..., E_{m+n}\}$ respectivamente. Considerando los elementos de todo $\mathcal{A}$-supermódulo graduado como vectores renglón, toda aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda

$$H : M \to N$$

tiene una supermatriz asociada

$$(H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N} = \begin{pmatrix} (\langle D_1; H\rangle)_{\mathbf{B}_N} \\ \vdots \\ (\langle D_{p+q}; H\rangle)_{\mathbf{B}_N} \end{pmatrix} \in SM_{(p+q)\times(m+n)}(\mathcal{A})$$

tal que

$$(\langle D; H\rangle)_{\mathbf{B}_N} = (D)_{\mathbf{B}_M}(H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N} \tag{1.18}$$

donde el producto del lado derecho de la igualdad es el producto usual de matrices.

Luego, de las ecuaciones (1.20), (1.15) y el resultado anterior se sigue:

Corolario 1.3.6. Si $H : M \to N$ es homogénea, la supermatriz asociada también es homogénea y del mismo grado que H, y toma la forma por bloques homogéneos

$$(H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

donde

$$A = \big(\langle\langle D_i; H\rangle\ ;\ E^{j*}\rangle\big)_{ij}, \qquad B = \big(\langle\langle D_i; H\rangle\ ;\ E^{m+k*}\rangle\big)_{ik},$$
$$C = \big(\langle\langle D_{p+l}; H\rangle\ ;\ E^{j*}\rangle\big)_{lj}, \qquad D = \big(\langle\langle D_{p+l}; H\rangle\ ;\ E^{m+k*}\rangle\big)_{lk}$$

para todos $i = 1, ..., p$, $j = 1, ..., m$, $k = 1, ..., n$, $l = 1, ..., q$.

1.3.2.1. Comparación con otros productos.

Para aplicaciones homogéneas $\varphi : M \to N$ tales que $\varphi(\alpha m) = (-1)^{|\alpha||\varphi|}\alpha\varphi(m)$, si $\mathbf{B}_M = \{D_1, ..., D_p; D_{p+1}, ..., D_{p+q}\}$ es una base pura de M, y $\mathbf{B}_N = \{E_1, ..., E_m; E_{m+1}, ..., D_{m+n}\}$ es una base pura de N, y la imagen bajo φ de los elementos de la base $\mathbf{B}_M$ se escriben como

$$\begin{array}{lll} \varphi : D_i \mapsto & \sum_{j=1}^m A_i^j E_j + \sum_{k=1}^n B_i^k E_{m+k}, & 1 \le i \le p \\ \varphi : D_l \mapsto & \sum_{j=1}^m C_l^j E_j + \sum_{k=1}^n D_l^k E_{m+k}, & p+1 \le l \le p+q \end{array} \tag{1.20}$$

con $|A_i^j| = |D_l^k| = |F|, |B_i^k| = |C_l^j| = |F| + 1$, y sea $D = \sum_{i=1}^p v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l \in M$. Si se desea, como en el caso usual, que la matriz asociada a la transformación φ se corresponda con la matriz

$$\begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ji} & \left(C_l^j\right)_{jl} \\ \left(B_i^k\right)_{ki} & \left(D_l^k\right)_{kl} \end{pmatrix}$$

se debe introducir un nuevo producto matricial $\star$, para que éste se corresponda con la evaluación

$$\varphi(D) = \begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ji} & \left(C_l^j\right)_{jl} \\ \left(B_i^k\right)_{ki} & \left(D_l^k\right)_{kl} \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \\ v^{p+1} \\ \vdots \\ v^{p+q} \end{pmatrix}.$$

En efecto, si $D = \sum_{i=1}^p v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l \in M$ es homogéneo de grado $|D|$, se tiene que $|v^i| = D, |v^l| = D + 1$ y así,

$$\begin{aligned} \varphi(D) &= \varphi(\textstyle\sum_{i=1}^p v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^p \varphi(v^i D_i) + \sum_{l=p+1}^{p+q} \varphi(v^l D_l) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^p (-1)^{|F||D|} v^i \varphi(D_i) + \sum_{l=p+1}^{p+q} (-1)^{|F|(|D|+1)} v^l \varphi(D_l) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^p (-1)^{|F||D|} v^i \left(\sum_{j=1}^m A_i^j E_j + \sum_{k=1}^n B_i^k E_{m+k}\right) \\ &\quad \textstyle+ \sum_{l=p+1}^{p+q} (-1)^{|F|(|D|+1)} v^l \left(\sum_{j=1}^m C_l^j E_j + \sum_{k=1}^n D_l^k E_{m+k}\right) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^p (-1)^{|F||D|} v^i A_i^j + \sum_{l=p+1}^{p+q} (-1)^{|F|(|D|+1)} v^l C_l^j\right) E_j \\ &\quad \textstyle+ \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^p (-1)^{|F||D|} v^i B_i^k + \sum_{l=p+1}^{p+q} (-1)^{|F|(|D|+1)} v^l D_l^k\right) E_{m+k}, \end{aligned}$$

y si forzamos a una multiplicación matricial por la derecha como en el caso usual (no graduado), esto es, llevando los coeficientes v_i, v^l de D a la derecha en cada término,

$$\begin{aligned} \varphi(D) &= \textstyle\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^p A_i^j v^i + \sum_{l=p+1}^{p+q} (-1)^{|D|+1} C_l^j v^l\right) E_j \\ &\quad \textstyle+ \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^p (-1)^{|D|} B_i^k v^i + \sum_{l=p+1}^{p+q} D_l^k v^l\right) E_{m+k}, \end{aligned}$$

y se sigue que

$$
\begin{aligned}
\varphi(D) &= \begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ji} & -(-1)^{|D|}\left(C_l^j\right)_{jl} \\ (-1)^{|D|}\left(B_i^k\right)_{ki} & \left(D_l^k\right)_{kl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \\ v^{p+1} \\ \vdots \\ v^{p+q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ji} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \end{pmatrix} & + & \left(C_l^j\right)_{jl} \begin{pmatrix} -(-1)^{|D|}v^{p+1} \\ \vdots \\ -(-1)^{|D|}v^{p+q} \end{pmatrix} \\ \left(B_i^k\right)_{ki} \begin{pmatrix} (-1)^{|D|}v^1 \\ \vdots \\ (-1)^{|D|}v^p \end{pmatrix} & + & \left(D_l^k\right)_{kl} \begin{pmatrix} v^{p+1} \\ \vdots \\ v^{p+q} \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

y si denotamos

$$
V_1 = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} v^{p+1} \\ \vdots \\ v^{p+q} \end{pmatrix}
$$

entonces

$$
\varphi(D) = \begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ji} V_1 & + & \left(C_l^j\right)_{jl} V_2^* \\ \left(B_i^k\right)_{ki} V_1^* & + & \left(D_l^k\right)_{kl} V_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ji} & \left(C_l^j\right)_{jl} \\ \left(B_i^k\right)_{ki} & \left(D_l^k\right)_{kl} \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \\ v^{p+1} \\ \vdots \\ v^{p+q} \end{pmatrix} \tag{1.21}
$$

(ver [27]) donde $V^* = (v^{i*})$ y se define $\alpha^* := (-1)^{|\alpha|}\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ homogéneo, y en general $\alpha^* := \alpha_0 - \alpha_1$ para la descomposición natural de $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \in \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$.

Observación. En particular en este trabajo, se considera como la matriz asociada a una transformación $\mathcal{A}$-lineal $H : M \to N$, como la supermatriz

$$
(H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N} \equiv \begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ij} & \left(B_i^k\right)_{ik} \\ \left(C_l^j\right)_{lj} & \left(D_l^k\right)_{lk} \end{pmatrix}
$$

pues en este caso se corresponden de manera natural, el producto usual de matrices, con la evaluación de la aplicación (aunque por izquierda)

$$
(\langle D; H\rangle)_{\mathbf{B}_N} = (D)_{\mathbf{B}_M}(H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N}
$$

como se establece en (1.18), y consideramos que no es necesario forzar a una multiplicación matricial por derecha como en (1.21).

1.3.3. La s-matriz asociada a una composición

Consideremos ahora dos aplicaciones $\mathcal{A}$-lineales entre $\mathcal{A}$-supermódulos izquierdos libres $H : M \to N$ y $K : N \to L$. La composición $K \circ H : M \to L$ es nuevamente un morfismo $\mathcal{A}$-lineal ya que al ser

$$
\langle D; K \circ H\rangle \equiv \langle\, \langle D; H\rangle; K\rangle
$$

por la $\mathcal{A}$-linealidad de H y K se sigue que

$$\langle \alpha D; K \circ H\rangle = \langle\, \langle \alpha D; H\rangle; K\rangle = \langle \alpha\langle D; H\rangle; K\rangle = \alpha\langle\, \langle D; H\rangle; K\rangle.$$

Además, si H y K son homogéneos, $K \circ H$ también es homogéneo de grado $|H| + |K|$, pues para todo $D \in M$ homogéneo

$$|\langle D; K \circ H\rangle| = |\langle D; H\rangle| + |K| = |D| + |H| + |K|.$$

Luego, si M tiene base pura $\mathbf{B}_M = \{D_1, ..., D_p; D_{p+1}, ..., D_{p+q}\}$, al ser $K \circ H$ una aplicación $\mathcal{A}$-lineal homogénea, tiene una supermatriz asociada

$$(K \circ H)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_L}$$

del mismo grado que $K \circ H$. Veamos como se relaciona dicha matriz con las supermatrices $(H)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_N}$ y $(K)_{\mathbf{B}_N \mathbf{B}_L}$ correspondientes a H y K respectivamente.

Por un lado, si $\mathbf{B}_N = \{E_1, ..., E_m; E_{m+1}, ..., E_{m+n}\}$ es una base pura de N y la supermatriz de grado $|H|$ asociada a H es

$$(H)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_N} = \begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ij} & \left(B_i^k\right)_{ik} \\ \left(C_l^j\right)_{lj} & \left(D_l^k\right)_{lk} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{array}{rcll} \langle D_i; H\rangle & = & \sum_{j=1}^m A_i^j E_j + \sum_{k=1}^n B_i^k E_{m+k}, & 1 \leq i \leq p \\ \langle D_l; H\rangle & = & \sum_{j=1}^m C_l^j E_j + \sum_{k=1}^n D_l^k E_{m+k}, & p+1 \leq l \leq p+q \end{array}$$

y la supermatriz de grado $|K|$ asociada a K es

$$(K)_{\mathbf{B}_N \mathbf{B}_L} = \begin{pmatrix} \left(R_j^i\right)_{ji} & \left(S_j^l\right)_{jl} \\ \left(T_k^i\right)_{ki} & \left(U_k^l\right)_{kl} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{array}{rcll} \langle E_j; K\rangle & = & \sum_{g=1}^x R_j^g F_g + \sum_{h=1}^y S_j^h F_{x+h}, & 1 \leq j \leq m \\ \langle E_k; K\rangle & = & \sum_{g=1}^x T_k^g F_g + \sum_{h=1}^y U_k^h F_{x+h}, & m+1 \leq k \leq m+n \end{array}$$

entonces, por la $\mathcal{A}$-linealidad de K y de H, para cada $1 \leq i \leq p$,

$$\begin{aligned} \langle D_i; K \circ H\rangle &= \langle\, \langle D_i; H\rangle; K\,\rangle \\ &= \langle \sum_{j=1}^n A_i^j E_j + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_i^k E_k\,;\, K\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n A_i^j \langle E_j; K\rangle + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_i^k \langle E_k\,;\, K\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n A_i^j \left(\sum_{g=1}^x R_j^g F_g + \sum_{h=1}^y S_j^h F_{x+h} \right) \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_i^k \left(\sum_{g=1}^x T_k^g F_g + \sum_{h=1}^y U_k^h F_{x+h} \right) \end{aligned}$$

y para cada $p+1 \le l \le p+q$,

$$\begin{aligned}
\langle D_l; K\circ H\rangle &= \langle\, \langle D_l; H\rangle; K\rangle \\
&= \langle \sum_{j=1}^{n} C_l^j E_j + \sum_{k=n+1}^{n+m} D_l^k E_k\,;\, K\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} C_l^j \langle E_j; K\rangle + \sum_{k=n+1}^{n+m} D_l^k \langle E_k; K\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} C_l^j \left(\sum_{g=1}^{x} R_j^g F_g + \sum_{h=1}^{y} S_j^h F_{x+h}\right) \\
&\quad + \sum_{k=n+1}^{n+m} D_l^k \left(\sum_{g=1}^{x} T_k^g F_g + \sum_{h=1}^{y} U_k^h F_{x+h}\right)
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(K\circ H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_L} = (H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N}(K)_{\mathbf{B}_N\mathbf{B}_L}.$$

Notemos que para supermatrices homogéneas, el grado del producto es la suma de los grados (Lema 1.2.8.) de modo que $(K\circ H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_L}$ es una supermatriz de grado $|H|+|K|$ como se esperaba. Resumimos lo anterior en el siguiente resultado.

Proposición 1.3.7. Sean M, N, L, $\mathcal{A}$-supermódulos izquierdos con bases puras $\mathbf{B}_M$, $\mathbf{B}_N$ y $\mathbf{B}_L$ respectivamente. Si $H : M \to N$ y $K : N \to L$ son aplicaciones $\mathcal{A}$-lineales por la izquierda con supermatrices asociadas $(H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N}$ y $(K)_{\mathbf{B}_N\mathbf{B}_L}$, entonces la aplicación $\mathcal{A}$-lineal $K\circ H$ tiene supermatriz asociada

$$(K\circ H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_M} = (H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N}(K)_{\mathbf{B}_N\mathbf{B}_M}$$

donde el producto del lado derecho es el producto usual de matrices.

Si además H y K son homogéneas, cada una de las supermatrices en la ecuación anterior es homogénea.

En particular, como la supermatriz asociada a la aplicación $\mathcal{A}$-lineal identidad $id_M : (M,\mathbf{B}_M) \to (M,\mathbf{B}_M)$, es la matriz identidad

$$\mathsf{I} = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{A}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1_{\mathcal{A}} \end{pmatrix}$$

de la proposición anterior tenemos que:

Proposición 1.3.8. Una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda $H : M \to N$ es un isomorfismo $\mathcal{A}$-lineal si y sólo si su supermatriz asociada $(H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N}$ es invertible.

En este caso, como $|H|+|H^{-1}| = |H\circ H^{-1}| = |\mathsf{I}| = 0 \pmod 2$, se tiene que $|H| = |H^{-1}| \pmod 2$.

1.3.4. La s-matriz de transición

Sean $\mathbf{B}_{M_1} = \{D_1, ..., D_p; \tilde{D}_{p+1}, ..., \tilde{D}_{p+q}\}$ y $\mathbf{B}_{M_2} = \{E_1, ..., E_p; \tilde{E}_{p+1}, ..., \tilde{E}_{p+q}\}$ dos bases puras para el $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo libre M.

Como cada $D_i, \tilde{D}_l \in \mathbf{B}_{M_1}$ tiene una representación en la base $\mathbf{B}_{M_2}$, digamos dada por

$$\begin{array}{ll} D_i = \sum_{j=1}^{p} A_i^j E_j + \sum_{k=1}^{q} B_i^k \tilde{E}_{p+k}, & 1 \leq i \leq p \\ \tilde{D}_l = \sum_{j=1}^{p} C_l^j E_j + \sum_{k=1}^{q} D_l^k \tilde{E}_{p+k}, & p+1 \leq l \leq p+q \end{array}$$

entonces, la aplicación

$$\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}} : M \longrightarrow M$$

definida como

$$\begin{array}{lll} \mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}} : D_i \mapsto & \sum_{j=1}^{p} A_i^j E_j + \sum_{k=1}^{q} B_i^k \tilde{E}_{p+k}, & 1 \leq i \leq p \\ \mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}} : \tilde{D}_l \mapsto & \sum_{j=1}^{p} C_l^j E_j + \sum_{k=1}^{q} D_l^k \tilde{E}_{p+k}, & p+1 \leq l \leq p+q \end{array}$$

es claramente par, y su supermatriz homogénea asociada,

$$\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right) = \begin{pmatrix} \left(A_i^j\right)_{ij} & \left(B_i^k\right)_{ik} \\ \left(C_l^j\right)_{lj} & \left(D_l^k\right)_{lk} \end{pmatrix}$$

que también es par, se llama **supermatriz de transición de la base $\mathbf{B}_{M_1}$ a la base $\mathbf{B}_{M_2}$**, pues es tal que si $D \in M$ tiene representación $(D)_{\mathbf{B}_{M_2}}$ en la base $\mathbf{B}_{M_2}$, como

$$\langle D; \mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}} \rangle \equiv (D)_{\mathbf{B}_{M_2}}$$

entonces

$$(D)_{\mathbf{B}_{M_2}} = (D)_{\mathbf{B}_{M_1}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right). \tag{1.22}$$

Análogamente, si escribimos cada $E_i, \tilde{E}_l \in \mathbf{B}_{M_2}$ ahora en términos de los elementos de la base $\mathbf{B}_{M_1}$, obtenemos la supermatriz homogénea (par) de transición de la base $\mathbf{B}_{M_2}$ a la base $\mathbf{B}_{M_1}$, esto es, tal que

$$(D)_{\mathbf{B}_{M_1}} = (D)_{\mathbf{B}_{M_2}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_2}}^{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_1}}\right). \tag{1.23}$$

Notemos que como $\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_2}}^{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_1}} \circ \mathrm{T}_{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_1}}^{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_2}} = \mathrm{id}_{\mathsf{M}} = \mathrm{T}_{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_1}}^{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_2}} \circ \mathrm{T}_{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_2}}^{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_1}}$, en términos supermatriciales tenemos que

$$\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_2}}^{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_1}}\right) = \mathsf{I} = \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_2}}^{\mathbf{B}_{\mathsf{M}_1}}\right)\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)$$

y concluimos que toda supermatriz de transición es invertible. Con estos cálculos tenemos probado el siguiente resultado.

Proposición 1.3.9. Sea M un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo con dos bases puras $\mathbf{B}_{M_1}$ y $\mathbf{B}_{M_2}$. La supermatriz de transición de la base $\mathbf{B}_{M_1}$ a la base $\mathbf{B}_{M_2}$ tal que

$$(D)_{\mathbf{B}_{M_2}} = (D)_{\mathbf{B}_{M_1}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right) \tag{1.24}$$

es siempre homogénea par e invertible; además su inversa está dada por la supermatriz de transición de la base $\mathbf{B}_{M_2}$ a la base $\mathbf{B}_{M_1}$, esto es,

$$(D)_{\mathbf{B}_{M_1}} = (D)_{\mathbf{B}_{M_2}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)^{-1}.$$

Por otro lado, sea $H : M \to N$ una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda y $\mathbf{B}_{M_1}$ y $\mathbf{B}_{M_2}$ bases puras de M, y $\mathbf{B}_{N_1}$ y $\mathbf{B}_{N_2}$ bases puras de N. Veamos que la supermatriz asociada a H en las bases $H : (M, \mathbf{B}_{M_1}) \to (N, \mathbf{B}_{N_1})$ y la supermatriz asociada a H en las bases $H : (M, \mathbf{B}_{M_2}) \to (N, \mathbf{B}_{N_2})$, se relacionan mediante las respectivas supermatrices pares de transición como

$$(H)_{\mathbf{B}_{M_2}\mathbf{B}_{N_2}} = \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)^{-1} (H)_{\mathbf{B}_{M_1}\mathbf{B}_{N_1}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{N_1}}^{\mathbf{B}_{N_2}}\right).$$

En efecto, de la Proposición 1.3.5. y la Proposición 1.3.9 anterior, tenemos que para todo $D \in M$

$$(\langle D; H\rangle)_{\mathbf{B}_{N_2}} = (D)_{\mathbf{B}_{M_2}} (H)_{\mathbf{B}_{M_2}\mathbf{B}_{N_2}} = (D)_{\mathbf{B}_{M_1}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right) (H)_{\mathbf{B}_{M_2}\mathbf{B}_{N_2}}$$

y también que

$$(\langle D; H\rangle)_{\mathbf{B}_{N_2}} = (\langle D; H\rangle)_{\mathbf{B}_{N_1}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{N_1}}^{\mathbf{B}_{N_2}}\right) = (D)_{\mathbf{B}_{M_1}} (H)_{\mathbf{B}_{M_1}\mathbf{B}_{N_1}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{N_1}}^{\mathbf{B}_{N_2}}\right),$$

y así, se tiene que

$$(D)_{\mathbf{B}_{M_1}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right) (H)_{\mathbf{B}_{M_2}\mathbf{B}_{N_2}} = (D)_{\mathbf{B}_{M_1}} (H)_{\mathbf{B}_{M_1}\mathbf{B}_{N_1}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{N_1}}^{\mathbf{B}_{N_2}}\right) \qquad \forall D \in M$$

esto es

$$H \circ \mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}} = \mathrm{T}_{\mathbf{B}_{N_1}}^{\mathbf{B}_{N_2}} \circ H$$

y por lo tanto, como toda supermatriz de transición es invertible, en términos supermatriciales tenemos que

$$(H)_{\mathbf{B}_{M_2}\mathbf{B}_{N_2}} = \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)^{-1} (H)_{\mathbf{B}_{M_1}\mathbf{B}_{N_1}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{N_1}}^{\mathbf{B}_{N_2}}\right)$$

y hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 1.3.10. Sean $\mathbf{B}_{M_1}, \mathbf{B}_{M_2}$ bases puras para el $\mathcal{A}$-módulo izquierdo M, y sean $\mathbf{B}_{N_1}, \mathbf{B}_{N_2}$ bases puras para el $\mathcal{A}$-módulo izquierdo N. Si $H : M \to N$ es una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda, y $\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)$, $\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{N_1}}^{\mathbf{B}_{N_2}}\right)$ son las supermatrices homogénas de transición entre las respectivas bases, se cumple que

$$(H)_{\mathbf{B}_{M_2}\mathbf{B}_{N_2}} = \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)^{-1} (H)_{\mathbf{B}_{M_1}\mathbf{B}_{N_1}} \left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_{N_1}}^{\mathbf{B}_{N_2}}\right)$$

donde las supermatrices $(H)_{\mathbf{B}_{M_1}\mathbf{B}_{N_1}}$ y $(H)_{\mathbf{B}_{M_2}\mathbf{B}_{N_2}}$ corresponden a la representación matricial de H en las respectivas bases puras.

Finalmente, veamos que toda aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda induce una aplicación también $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda entre los respectivos duales, donde éstos son considerados con su estructura de $\mathcal{A}$-módulo izquierdo inducida por su estructura natural derecha (1.13).

Sea $H : M \to N$ una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda y homogénea, y consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \tilde{H} : N^* & \longrightarrow & M^* \\ f & \longmapsto & \langle f; \tilde{H}\rangle \end{array}$$

definida como $\langle\, D\,; \langle f; \tilde{H}\rangle\,\rangle := (-1)^{|H||f|} \langle\, \langle D; H\rangle\,; f\rangle$ para $D \in M$. Notemos que como H es homogénea, si f es homogéna,

$$|\langle\, D\,; \langle f; \tilde{H}\rangle\,\rangle| = |\langle D; H\rangle| + |f| = |D| + |H| + |f|$$

de modo que $|\langle f;\tilde{H}\rangle| = |H| + |f|$ y por lo tanto $\tilde{H}$ es homogénea con $|\tilde{H}| = |H|$. Además, $\tilde{H}$ es $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda, pues como para todo $\lambda \in M^*$ se cumple que

$$\langle D\,;\alpha\lambda\rangle = (-1)^{|\alpha||\lambda|}\langle D\,;\lambda\rangle\alpha = (-1)^{|\alpha||D|}\,\alpha\langle D\,;\lambda\rangle \tag{1.25}$$

entonces, si $D \in M$

$$\begin{aligned}
\langle\, D\,;\langle \alpha f;\tilde{H}\rangle\,\rangle &= (-1)^{|H|(|\alpha|+|f|)}\langle\,\langle D;H\rangle\,;\alpha f\rangle \\
&= (-1)^{|H||f|}(-1)^{|\alpha||D|}\alpha\langle\,\langle D;H\rangle\,;f\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\langle\, D\,;\langle f;\tilde{H}\rangle\,\rangle \\
&= \langle\, D\,;\alpha\langle f;\tilde{H}\rangle\,\rangle
\end{aligned}$$

y como D se tomó arbitrario, se sigue que $\langle\alpha f;\tilde{H}\rangle = \alpha\langle f;\tilde{H}\rangle$, esto es $\tilde{H}$ es $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda. Veamos cómo es la supermatriz asociada a $\tilde{H}$.

Sean $\mathbf{B}_M = \{D_1,...,D_p;D_{p+1},...,D_{p+q}\}$ y $\mathbf{B}_N = \{E_1,...E_m;E_{m+1},...,E_{m+n}\}$ bases puras de M y N respectivamente. Si $\mathbf{B}_{M^*} = \{D^{1*},...,D^{p*};D^{p+1*},...,D^{p+q*}\}$, $\mathbf{B}_{N^*} = \{E^{1*},...E^{m*};E^{m+1*},...,E^{m+n*}\}$ son las respectivas bases duales puras, entonces, por (1.16) en la Proposición 1.3.4. para cada $i \in \{1,...,m\}$

$$\begin{aligned}
\langle E^{i*};\tilde{H}\rangle &= \sum_{j=1}^{p} D^{j*}\langle\, D_j;\langle E^{i*};\tilde{H}\rangle\,\rangle + \sum_{k=1}^{q} D^{p+k*}\langle\, D_{p+k};\langle E^{i*};\tilde{H}\rangle\,\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{p}\langle\, D_j;\langle E^{i*};\tilde{H}\rangle\,\rangle D^{j*} + \sum_{k=1}^{q} -(-1)^{|H|}\langle\, D_{p+k};\langle E^{i*};\tilde{H}\rangle\,\rangle D^{p+k*} \\
&= \sum_{j=1}^{p}\langle\,\langle D_j;H\rangle;E^{i*}\,\rangle D^{j*} + \sum_{k=1}^{q} -(-1)^{|H|}\langle\,\langle D_{p+k};H\rangle;E^{i*}\,\rangle D^{j*}
\end{aligned}$$

y para cada $l \in \{m+1,...,m+n\}$

$$\begin{aligned}
\langle E^{l*};\tilde{H}\rangle &= \sum_{j=1}^{p} D^{j*}\langle\, D_j;\langle E^{l*};\tilde{H}\rangle\,\rangle + \sum_{k=1}^{q} D^{p+k*}\langle\, D_{p+k};\langle E^{l*};\tilde{H}\rangle\,\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{p}\langle\, D_j;\langle E^{l*};\tilde{H}\rangle\,\rangle D^{j*} + \sum_{k=1}^{q}(-1)^{|H|}\langle\, D_{p+k};\langle E^{l*};\tilde{H}\rangle\,\rangle D^{p+k*} \\
&= \sum_{j=1}^{p}(-1)^{|H|}\langle\,\langle D_j;H\rangle;E^{l*}\,\rangle D^{j*} + \sum_{k=1}^{q}\langle\,\langle D_{p+k};H\rangle;E^{l*}\,\rangle D^{j*}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, la supermatriz asociada a $\tilde{H}$ es

$(\tilde{H})_{\mathbf{B}_{N^*}\mathbf{B}_{M^*}}$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \left(\langle\,\langle D_j;H\rangle;E^{i*}\,\rangle\right)_{ij} & -(-1)^{|H|}\left(\langle\,\langle D_{p+k};H\rangle;E^{i*}\right)_{ik} \\ (-1)^{|H|}\left(\langle\,\langle D_j;H\rangle;E^{l*}\,\rangle D^{j*}\right)_{lj} & \rangle D^{j*}\sum_{k=1}^{q}\langle\,\langle D_{p+k};H\rangle;E^{l*}\,\rangle D^{j*} \end{pmatrix} \\
&= (H)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N}
\end{aligned}$$

donde hemos usado el Corolario (1.3.6) para la última igualdad. Así, tenemos probado el siguiente resultado.

Proposición 1.3.11. La aplicación $\tilde{H} : N^* \to M^*$ inducida a partir de una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda homogénea $H : M \to N$, es también $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda y tal que $|\tilde{H}| = |H|$. Además su supermatriz asociada es

$$(\tilde{H})_{\mathbf{B}_{N^*}\mathbf{B}_{M^*}} = (H)^{\widetilde{\mathsf{St}}}_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N}$$

donde $(H)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_N}$ es la supermatriz asociada a H.

1.3.5. La s-traza de una aplicación $\mathcal{A}$-lineal

Definición 1.3.12. Sea M un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo libre con base pura $\{D_1, ..., D_p; D_{p+1}, ..., D_{p+q}\}$. Si $H : M \to M$ es una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda y homogénea, se define la **supertraza de** H como

$$\begin{aligned} \mathrm{STr}\, H &:= \sum_i (-1)^{|D^{i*}|(|H|+|D_i|)} \langle\, \langle D_i; H\rangle\, ;\, D^{i*}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p} \langle\, \langle D_i; H\rangle\, ;\, D^{i*}\rangle - (-1)^{|H|} \sum_{i=p+1}^{p+q} \langle\, \langle D_i; H\rangle\, ;\, D^{i*}\rangle. \end{aligned}$$

Veamos que la supertraza de una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda y la supertraza de su supermatriz asociada coinciden.

Lema 1.3.13. Sea $H : M \to M$ una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda y homogénea, y sea $\mathbf{B}$ una base pura para M. Si la supermatriz asociada a H es $(H)_{\mathbf{BB}}$, entonces

$$\mathrm{STr}\, H = \mathrm{STr}\,(H)_{\mathbf{BB}}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{B}^* = \{D^{1*}, ..., D^{p*}; D^{p+1*}, ..., D^{p+q*}\}$ la base dual pura de $\mathbf{B}$. Del Corolario 1.3.6. tenemos que la supermatriz homogénea asociada a H es

$$(H)_{\mathbf{BB}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde cada bloque homogéneo está dado por

$$\begin{aligned} A &= \left(\langle\, \langle D_i; H\rangle\, ;\, D^{j*}\rangle\right)_{ij}, & B &= \left(\langle\, \langle D_i; H\rangle\, ;\, D^{p+k*}\rangle\right)_{ik}, \\ C &= \left(\langle\, \langle D_{p+l}; H\rangle\, ;\, D^{j*}\rangle\right)_{lj}, & D &= \left(\langle\, \langle D_{p+l}; H\rangle\, ;\, D^{p+k*}\rangle\right)_{lk}. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{STr}(H)_{\mathbf{BB}} &= \mathrm{Tr}\, A - (-1)^{|H|} \mathrm{Tr}\, D \\ &= \sum_{i=1}^{p} \langle\, \langle D_i; H\rangle\, ;\, D^{i*}\rangle - (-1)^{|H|} \sum_{i=1}^{q} \langle\, \langle D_{p+i}; H\rangle\, ;\, D^{p+i*}\rangle \\ &\equiv \mathrm{STr}\, H. \end{aligned}$$

■

Corolario 1.3.14. El operador supertraza

$$\mathrm{STr} : SM(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$$

es invariante bajo cambio de base.

Demostración. Sea $H : M \to M$ una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda homogénea y $\left(T_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)$ la supermatriz de transición de la base $\mathbf{B}_{M_1}$ a la base $\mathbf{B}_{M_2}$ de M. De la Proposición 1.3.10. tenemos que

$$(H)_{\mathbf{B}_{M_2}\mathbf{B}_{M_2}} = \left(T_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)^{-1} (H)_{\mathbf{B}_{M_1}\mathbf{B}_{M_1}} \left(T_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)$$

y de la Proposición 1.3.9. tenemos que la supermatriz $\left(T_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)$ es homogénea par, de modo que aplicando la propiedad (5) en la Proposición 1.2.11

$$\mathrm{STr}\,(H)_{\mathbf{B}_{M_2}\mathbf{B}_{M_2}} = \mathrm{STr}\left[\left(T_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)^{-1} (H)_{\mathbf{B}_{M_1}\mathbf{B}_{M_1}} \left(T_{\mathbf{B}_{M_1}}^{\mathbf{B}_{M_2}}\right)\right] = \mathrm{STr}\,(H)_{\mathbf{B}_{M_1}\mathbf{B}_{M_1}}.$$

■

Notemos que las propiedades (2) y $(\hat{2})$ de la Proposición 1.2.11. nos dicen que STr, St y $\widetilde{\mathrm{St}}$ no son operadores $\mathcal{A}$-lineales por la izquierda, a diferencia de lo que sucede en el caso no graduado donde la traza y la transpuesta lo son. Si necesitamos que STr, St y $\widetilde{\mathrm{St}}$ sean $\mathcal{A}$-lineales por la izquierda, debemos definir un nuevo producto por $\mathcal{A}$-escalares distinto al usual, de hecho, el dado como

$$\alpha \star \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha A & \alpha B \\ (-1)^{|\alpha|}\alpha C & (-1)^{|\alpha|}\alpha D \end{pmatrix}$$

hace que STr, St y $\widetilde{\mathrm{St}}$ sean $\mathcal{A}$-lineales por la izquierda. Sin embargo, en este trabajo, usamos siempre el producto por escalar (en R y en $\mathcal{A}$) usual.

1.4. Formas $\mathcal{A}$-bilineales graduadas

Extendiendo la noción de $\mathcal{A}$-linealidad por la izquierda que determina a los elementos del s-dual $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A}) = M^*$, tenemos una noción de $\mathcal{A}$-bilinealidad. Cabe mencionar que esta noción puede diferir de la propuesta en algunos textos (e.g. [18]).

Definición 1.4.1. Sea M un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo. Diremos que una aplicación R-bilineal

$$\begin{array}{rcl} \tau : M \times M & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (D_1, D_2) & \longmapsto & \langle D_1, D_2; \tau\rangle \end{array}$$

es una **forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada** si cumple que para todo $\alpha \in \mathcal{A}$:

(i) $\langle \alpha D_1, D_2; \tau\rangle = \alpha\langle D_1, D_2; \tau\rangle$

(ii) $\langle D_1, \alpha D_2; \tau\rangle = (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1, D_2; \tau\rangle$.

Diremos además que τ es **homogénea** de grado $|\tau| \in \mathsf{Z}_2$ (o que τ tiene bigrado $(2, |\tau|)$) si para todo par D_1, D_2 de elementos homogéneos,

$$|\langle D_1, D_2; \tau\rangle| = |D_1| + |D_2| + |\tau| \pmod 2.$$

Denotaremos al espacio de formas $\mathcal{A}$-bilineales graduadas por $\mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M)$.

Más adelante veremos que por analogía con el caso no graduado, el espacio de formas bilineales graduadas se puede identificar con el espacio de 2-tensores covariantes graduados; en particular las formas $\mathcal{A}$-bilineales graduadas homogéneas de grado $i \in \mathbb{Z}_2$ se corresponden con los 2-tensores covariantes graduados de bigrado $(2, i)$.

El espacio de formas $\mathcal{A}$-bilineales graduadas tiene estructura natural de $\mathcal{A}$-supermódulo derecho, con acción

$$\mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{A} \to \mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M) \tag{1.26}$$

definida como $\langle D_1, D_2; \tau\alpha\rangle := \langle D_1, D_2; \tau\rangle\,\alpha$ para todos $D_1, D_2 \in M$, pues si τ y α son homogénas

$$\begin{aligned} |\langle D_1, D_2; \tau\alpha\rangle| &= |\langle D_1, D_2; \tau\rangle\,\alpha| \\ &= |\langle D_1, D_2; \tau\rangle| + |\alpha| \\ &= |D_1| + |D_2| + |\tau| + |\alpha| \end{aligned}$$

de modo que $|\tau\alpha| = |\tau| + |\alpha|$.

Si M es un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo libre de rango (p, q), $\mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M)$ también es libre con una base de $(p+q)^2$ elementos, y de hecho de rango $(p^2 + q^2, 2pq)$. En efecto, sea $\mathbf{B}_M = \{D_1, ..., D_p; D_{p+1}, ..., D_{p+q}\}$ una base pura de M, $\mathbf{B}_{M^*} = \{D_1^*, ..., D_p^*; D_{p+1}^*, ..., D_{p+q}^*\}$ la base dual pura, y definamos para cada par $i, j \in \{1, ..., p+q\}$ las aplicaciones

$$\begin{aligned} \tau_{ij} : M \times M &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (D, \tilde{D}) &\longmapsto \langle D, \tilde{D}; \tau_{ij}\rangle \end{aligned}$$

como $\langle D, \tilde{D}; \tau_{ij}\rangle := (-1)^{|\tilde{D}||D^{i*}|}\langle D; D^{i*}\rangle\langle \tilde{D}; D^{j*}\rangle$. Notemos en primer lugar que τ_{ij} es una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada pues, en el primer argumento, directamente de la $\mathcal{A}$-linealidad por la izquierda que satisface D^{i*},

$$\begin{aligned} \langle \alpha D, \tilde{D}; \tau_{ij}\rangle &= (-1)^{|\tilde{D}||D^{i*}|}\langle \alpha D; D^{i*}\rangle\langle \tilde{D}; D^{j*}\rangle \\ &= (-1)^{|\tilde{D}||D^{i*}|}\alpha\langle D; D^{i*}\rangle\langle \tilde{D}; D^{j*}\rangle \\ &= \alpha\langle D, \tilde{D}; \tau_{ij}\rangle \end{aligned}$$

y en el segundo argumento, por la $\mathcal{A}$-linealidad de D^{j*} y la conmutatividad graduada en $\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \langle D, \alpha\tilde{D}; \tau_{ij}\rangle &= (-1)^{|\alpha\tilde{D}||D^{i*}|}\langle D; D^{i*}\rangle\langle \alpha\tilde{D}; D^{j*}\rangle \\ &= (-1)^{(|\alpha|+|\tilde{D}|)|D^{i*}|}\langle D; D^{i*}\rangle\alpha\langle \tilde{D}; D^{j*}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha||D|+|\tilde{D}||D^{i*}|}\alpha\langle D; D^{i*}\rangle\langle \tilde{D}; D^{j*}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\langle D; \tilde{D}; \tau_{ij}\rangle. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que cada τ_{ij} es homogéna de grado $|\tau_{ij}| = |D^{i*}| + |D^{j*}|$ pues si $D, \tilde{D}$ son homogéneos

$$\begin{aligned} |\langle D, \tilde{D}; \tau_{ij}\rangle| &= |\langle D; D^{i*}\rangle\langle \tilde{D}; D^{j*}\rangle| \\ &= |\langle D; D^{i*}\rangle| + |\langle \tilde{D}; D^{j*}\rangle| \\ &= |D| + |D^{i*}| + |\tilde{D}| + |D^{j*}| \end{aligned}$$

así que $|\tau_{ij}| = |D^{i*}| + |D^{j*}|$, por lo que $|\tau_{ij}| = 0 \pmod 2$ si y sólo si $|D^{i*}| + |D^{j*}| = 0$ (mod 2), esto es si D^{i*} y D^{j*} son ambos pares o ambos impares, de modo que hay $p^2 + q^2$ posibilidades; luego $|\tau_{ij}| = 1 \pmod 2$ si y sólo si $|D^{i*}| + |D^{j*}| = 1 \pmod 2$, esto es si D^{i*} y D^{j*} son de grados distintos, habiendo $2pq$ posibilidades.

Ahora, veamos que el conjunto $\{\tau_{ij}\}_{i,j}$ es efectivamente una base de $\mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M)$. Por un lado, notemos que si $\sum_{ij}\tau_{ij}\alpha_{ij} \in \mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M)$, para todos $r, s \in \{1, ..., p+q\}$

$$\begin{aligned} \langle D_r, D_s; \sum_{ij}\tau_{ij}\alpha_{ij}\rangle &= \sum_{ij}\langle D_r, D_s; \tau_{ij}\rangle\,\alpha_{ij} \\ &= \sum_{ij}(-1)^{|D_s||D^{i*}|}\langle D_r; D^{i*}\rangle\langle D_s; D^{j*}\rangle\,\alpha_{ij} \\ &= \sum_{ij}(-1)^{|D_s||D^{i*}|}\delta_{ri}\delta_{sj}\,\alpha_{ij} \\ &= (-1)^{|D_s||D^{r*}|}\alpha_{rs}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Por lo tanto, si $\sum_{ij}\tau_{ij}\alpha_{ij} = 0$ para algunos α_{ij}, la ecuación (1.27) anterior nos dice que a_{ij} deben ser cero, y se sigue que el conjunto $\{\tau_{ij}\}_{i,j}$ es linealmente independiente; luego, si $\tau \in \mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M)$ es arbitraria, definiendo $\alpha_{ij} := (-1)^{|D_j||D^{i*}|}\langle D_i, D_j; \tau\rangle$, de (1.27) tendremos que $\tau \equiv \sum_{ij}\tau_{ij}\alpha_{ij}$ pues, en elementos homogéneos D_r, D_s,

$$\langle D_r, D_s; \sum_{ij}\tau_{ij}\alpha_{ij}\rangle = (-1)^{|D_s||D^{r*}|}\alpha_{rs} = \langle D_r, D_s; \tau\rangle.$$

Por lo tanto, el conjunto $\{\tau_{ij}\}_{i,j}$ es un conjunto generador y concluimos finalmente que $\mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M)$ es un $\mathcal{A}$-supermódulo derecho libre.

Finalmente, si denotamos $D^{i*} \otimes_{\mathsf{Gr}} D^{j^*} := \tau_{ij}$, con el cálculo anterior, hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 1.4.2. Sea M un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo. El espacio de formas $\mathcal{A}$-bilineales graduadas $\mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M)$ tiene estructura natural de $\mathcal{A}$-supermódulo derecho.

Si además M es libre con base pura $\mathbf{B}_M = \{D_1, ..., D_p; D_{p+1}, ..., D_{p+q}\}$ y base dual pura $\mathbf{B}_{M^*} = \{D^{1*}, ..., D^{p*}; D^{p+1*}, ..., D^{p+q*}\}$, entonces $\mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M)$ también es libre de rango $(p^2+q^2, 2pq)$, cuya base pura está formada por los elementos $D^{i*} \otimes_{\mathsf{Gr}} D^{j*}$, $1 \le i, j \le p+q$.

1.4.0.1. Formas $\mathcal{A}$ bilineales simétricas/antisimétricas graduadas

Definición 1.4.3. Sea $\tau : M \times M \to \mathcal{A}$ una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada. Decimos que

- τ es **simétrica graduada** si para todos D_1, D_2 homogéneos

$$\langle D_1, D_2; \tau\rangle = (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; \tau\rangle.$$

- τ es **antisimétrica graduada** si para todos D_1, D_2 homogéneos

$$\langle D_1, D_2; \tau\rangle = -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; \tau\rangle.$$

1.4.1. La s-matriz asociada a una forma bilineal graduada

Sea M un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo libre y $\tau : M \times M \to \mathcal{A}$ una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada. Si $\mathbf{B} = \{D_1, ..., D_p; D_{p+1}, ..., D_{p+q}\}$ es una base pura para M y $D, \tilde{D} \in M$ con

$D = \sum_{i=1}^{p} v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l$ y $\tilde{D} = \sum_{i=1}^{p} \tilde{v}^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} \tilde{v}^l D_l$, entonces por la $\mathcal{A}$-linealidad por la izquierda de τ en el primer argumento,

$$\begin{aligned}
\langle D, \tilde{D}; \tau\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{p} v^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l D_l, \tilde{D}; \tau\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} v^i \langle D_i; \tilde{D}; \tau\rangle + \sum_{l=p+1}^{p+q} v^l \langle D_l, \tilde{D}; \tau\rangle \\
&= (v^1, ..., v^{p+q}) \begin{pmatrix} \langle D_1, \tilde{D}\,;\, \tau\rangle \\ \vdots \\ \langle D_{p+q}, \tilde{D}; \tau\rangle \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Luego, para cada $k \in \{1, ..., p+q\}$

$$\begin{aligned}
\langle D_k, \tilde{D}; \tau\rangle &= \langle D_k, \sum_{i=1}^{p} \tilde{v}^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} \tilde{v}^l D_l; \tau\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} \langle D_k, \tilde{v}^i D_i; \tau\rangle + \sum_{l=p+1}^{p+q} \langle D_k, \tilde{v}^l D_l; \tau\rangle
\end{aligned}$$

pero observemos que por la $\mathcal{A}$-bilinealidad graduada de τ y la anticonmutatividad graduada en $\mathcal{A}$, se tiene que para todos $X, Y \in M$

$$\langle X, \alpha Y; \tau\rangle = (-1)^{|\alpha|(|X|)} \alpha \langle X, Y; \tau\rangle = (-1)^{|\alpha|(|Y|+|\tau|)} \langle X, Y; \tau\rangle \alpha$$

por lo tanto, si τ y $\tilde{D}$ son homogéneos

$$\begin{aligned}
\langle D_k, \tilde{D}; \tau\rangle &= \sum_{i=1}^{p} \langle D_k, D_i; \tau\rangle \tilde{v}^i (-1)^{|\tilde{v}^i|(|D_i|+|\tau|)} + \sum_{l=p+1}^{p+q} \langle D_k, D_l; \tau\rangle \tilde{v}^l (-1)^{|\tilde{v}^l|(|D_l|+|\tau|)} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \langle D_k, D_i; \tau\rangle \tilde{v}^i (-1)^{|\tilde{D}||\tau|} + \sum_{l=p+1}^{p+q} \langle D_k, D_l; \tau\rangle \tilde{v}^l (-1)^{(|\tilde{D}|+1)(|\tau|+1)}
\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
&\langle D, \tilde{D}; \tau\rangle \\
&= (D)_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \langle D_1, \tilde{D}\,;\, \tau\rangle \\ \vdots \\ \langle D_{p+q}, \tilde{D}; \tau\rangle \end{pmatrix} \\
&= (v^1, ..., v^{p+q}) \begin{pmatrix} \langle D_1, D_1; \tau\rangle & \cdots & \langle D_1, D_{p+q}; \tau\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle D_{p+q}, D_1; \tau\rangle & \cdots & \langle D_{p+q}, D_{p+q}; \tau\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{|\tilde{D}||\tau|} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ (-1)^{(|\tilde{D}|+1)(|\tau|+1)} \tilde{v}^{p+q} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{|\tilde{D}||\tau|} (v^1, ..., v^{p+q}) \begin{pmatrix} \langle D_1, D_1; \tau\rangle & \cdots & \langle D_1, D_{p+q}; \tau\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle D_{p+q}, D_1; \tau\rangle & \cdots & \langle D_{p+q}, D_{p+q}; \tau\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ -(-1)^{(|\tilde{D}|+|\tau|)} \tilde{v}^{p+q} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La supermatriz

$$\boldsymbol{\tau} := \begin{pmatrix} \langle D_1, D_1; \tau\rangle & \cdots & \langle D_1, D_{p+q}; \tau\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle D_{p+q}, D_1; \tau\rangle & \cdots & \langle D_{p+q}, D_{p+q}; \tau\rangle \end{pmatrix}$$

se llama **la supermatriz asociada a la forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada τ en la base B**. Notemos que en particular al ser τ homogénea, también $\boldsymbol{\tau}$ es una supermatriz homogénea y $|\boldsymbol{\tau}| = |\tau|$.

Establecemos el cálculo anterior en el siguiente resultado:

Proposición 1.4.4. Sea M un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo libre con base pura $\mathbf{B} = \{D_1, ..., D_p; D_{p+1}, ..., D_{p+q}\}$. Toda forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada

$$\tau : M \times M \to \mathcal{A}$$

tiene una supermatriz asociada en la base $\mathbf{B}$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \langle D_1, D_1; \tau\rangle & \cdots & \langle D_1, D_{p+q}; \tau\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle D_{p+q}, D_1; \tau\rangle & \cdots & \langle D_{p+q}, D_{p+q}; \tau\rangle \end{pmatrix}$$

tal que si τ es homogénea, su supermatriz asociada $\boldsymbol{\tau}$ es homogénea y del mismo grado. Además cumple que si $D, \tilde{D} \in M$ con $\tilde{D} = \sum_{i=1}^{p} \tilde{v}^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} \tilde{v}^l D_l$ homogéneo,

$$\begin{aligned} \langle D, \tilde{D}; \tau\rangle &= (D)_{\mathbf{B}}\, \boldsymbol{\tau} \begin{pmatrix} (-1)^{|D||\tau|}\tilde{v}^1 \\ \vdots \\ (-1)^{(|D|+1)(|\tau|+1)}\tilde{v}^{p+q} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{|D||\tau|}\, (D)_{\mathbf{B}}\, \boldsymbol{\tau} \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ -(-1)^{(|D|+|\tau|)}\tilde{v}^{p+q} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{|D||\tau|}\, (D)_{\mathbf{B}}\, \boldsymbol{\tau} \left(\tilde{v}^1, \cdots, \tilde{v}^p, (-1)^{\tau}\tilde{v}^{p+1}, ..., (-1)^{\tau}\tilde{v}^{p+q}\right)^{St}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Aquí, todos los productos corresponden al producto usual de matrices.

En particular, de (1.28) se tiene:

Corolario 1.4.5. Si la supermatriz asociada a τ homogénea tiene la forma

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

entonces

$$\langle D, \tilde{D}; \tau\rangle = (-1)^{|D||\tau|}\, (D)_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} R & (-1)^{\tau}S \\ T & (-1)^{\tau}U \end{pmatrix} (\tilde{D})^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}}.$$

Observación. Notemos que aunque hemos llamado a $\boldsymbol{\tau}$ "la supermatriz asociada a la forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada τ" por analogía a la matriz asociada a una forma bilineal (del caso usual no graduado), la supermatriz

$$\begin{pmatrix} R & (-1)^{\tau}S \\ T & (-1)^{\tau}U \end{pmatrix}$$

podría haber sido la elegida para llevar ese nombre, debido a la propiedad que cumple descrita en el corolario anterior o a la que aparece en el Corolario 1.30, y que son análogas a la que se cumplen en el caso no graduado. Como veremos en la sección siguiente, esta supermatriz es especial, pues corresponde a la supermatriz de cierta aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda inducida por τ, (1.29).

1.4.1.1. Caso simétrico/antisimétrico graduado

Lema 1.4.6. Si

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

es la supermatriz asociada a una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada τ:

- τ es simétrica graduada si y sólo si $\boldsymbol{\tau}$ es una supermatriz s-simétrica, esto es, $R = R^t$, $S = T^t$ y $U = -U^t$.
- τ es antisimétrica graduada si y sólo si $\boldsymbol{\tau}$ es una supermatriz s-antisimétrica, esto es, $R = -R^t$, $S = -T^t$ y $U = U^t$.

Demostración. Sea M un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo libre con base pura fija $\mathbf{B} = \{D_1, ..., D_p; \tilde{D}_{p+1}, ..., \tilde{D}_{p+q}\}$. Como la supermatriz asocida a τ es

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} (\langle D_i, D_j; \tau\rangle)_{ij} & \left(\langle D_i, \tilde{D}_{p+k}; \tau\rangle\right)_{ik} \\ \left(\langle \tilde{D}_{p+l}, D_j; \tau\rangle\right)_{lj} & \left(\langle \tilde{D}_{p+l}, \tilde{D}_{p+k}; \tau\rangle\right)_{lk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

de acuerdo a la Definición (1.4.3) se cumple que

1. τ es simétrica graduada si y sólo si

$$\begin{aligned} \langle D_i, D_j; \tau\rangle &= \langle D_j, D_i; \tau\rangle, & \langle D_i, \tilde{D}_{p+k}; \tau\rangle &= \langle \tilde{D}_{p+k}, D_i; \tau\rangle, \\ \langle \tilde{D}_{p+l}, D_j; \tau\rangle &= \langle D_j, \tilde{D}_{p+l}; \tau\rangle, & \langle \tilde{D}_{p+l}, \tilde{D}_{p+k}; \tau\rangle &= -\langle \tilde{D}_{p+k}, \tilde{D}_{p+l}; \tau\rangle \end{aligned}$$

   esto es, $R = R^t$, $S = T^t$ y $U = -U^t$.

2. τ es antisimétrica graduada si y sólo si

$$\begin{aligned} \langle D_i, D_j; \tau\rangle &= -\langle D_j, D_i; \tau\rangle, & \langle D_i, \tilde{D}_{p+k}; \tau\rangle &= -\langle \tilde{D}_{p+k}, D_i; \tau\rangle, \\ \langle \tilde{D}_{p+l}, D_j; \tau\rangle &= -\langle D_j, \tilde{D}_{p+l}; \tau\rangle, & \langle \tilde{D}_{p+l}, \tilde{D}_{p+k}; \tau\rangle &= \langle \tilde{D}_{p+k}, \tilde{D}_{p+l}; \tau\rangle \end{aligned}$$

   o bien, $R = -R^t$, $S = -T^t$ y $U = U^t$.

■

1.4.2. La aplicación $\mathcal{A}$-lineal bemol

Toda forma bilineal graduada $\tau : M \times M \to \mathcal{A}$ induce una aplicación

$$\begin{array}{rccl} \tau^\flat : & M & \longrightarrow & M^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A}) \\ & D & \longmapsto & i_D\tau \end{array}$$

dada por $\langle D_1 ; i_D\tau\rangle := \langle D_1, D; \tau\rangle$ llamada **inserción en** τ. Notemos que $\tau^\flat$ está bien definida, pues, por la $\mathcal{A}$-linealidad de τ en el primer argumento,

$$\langle \alpha D_1 ; i_D\tau\rangle = \langle \alpha D_1, D; \tau\rangle = \alpha\langle D_1, D; \tau\rangle = \alpha\langle D_1 ; i_D\tau\rangle$$

de modo que efectivamente $i_D\tau \in M^*$.

De hecho, si consideramos M^* con la acción izquierda inducida a partir de su estructura natural de $\mathcal{A}$-módulo derecho (1.13) se cumple que $\tau^\flat$ es una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda y tal que si τ es homogéneo, $\tau^\flat$ también es un operador homogéneo del mismo grado $|\tau|$. En efecto, si τ es un operador homogéneo de grado $|\tau|$, esto es, que

$$|\langle D_1, D_2; \tau\rangle| = |D_1| + |D_2| + |\tau|,$$

entonces la aplicación $\mathcal{A}$-lineal $\tau^\flat : M \to M^*$ es también homogénea de grado $|\tau|$, ya que si $D \in M$ es un elemento homogéneo fijo, para todo D_1 $|\langle D_1; i_D\tau\rangle| = |\langle D_1, D; \tau\rangle| = |D_1|+|D|+|\tau|$ así que $i_D\tau$ es un operador homogéneo de grado

$$|i_D\tau| = |D| + |\tau|,$$

por lo que $\tau^\flat : D \mapsto i_D\tau$ resulta ser de grado $|\tau|$. Por otro lado, veamos que $\tau^\flat$ es una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda entre los super módulos M y M^*, esto es, que

$$i_{\alpha D}\tau = \alpha\, i_D\tau \in M^*.$$

Notemos que para todo $f \in M^*$ homogénea $\alpha f = (-1)^{|\alpha||f|} f\alpha \in M^*$ y por lo tanto para todo $D_1 \in M$

$$\langle D_1; \alpha f\rangle = (-1)^{|\alpha||f|}\langle D_1, f\alpha\rangle = (-1)^{|\alpha||f|}\langle D_1, f\rangle\alpha = (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1; f\rangle$$

así, si $D_1 \in M$ es arbitrario,

$$\begin{aligned}
\langle D_1\,;\, i_{\alpha D}\tau\rangle &= \langle D_1, \alpha D; \tau\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1, D; \tau\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1\,;\, i_D\tau\rangle \\
&= \langle D_1\,;\, \alpha\, i_D\tau\rangle
\end{aligned}$$

por lo tanto $i_{\alpha D}\tau = \alpha\, i_D\tau$.

Resumimos lo anterior en el siguiente resultado:

Proposición 1.4.7. Toda forma bilineal graduada $\tau : M \times M \longrightarrow \mathcal{A}$ induce una aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda

$$\tau^\flat : M \longrightarrow M^*$$

dada por la inserción, donde la estructura de $\mathcal{A}$-módulo izquierdo en M^* es la inducida por la acción natural derecha (1.13). Si τ es homogénea también $\tau^\flat$ lo es y $|\tau^\flat| = |\tau|$.

Analizaremos a continuación el caso en el que M es libre y τ homogénea. La Proposición 1.4.7. anterior nos dice que la aplicación $\tau^\flat : M \to M^*$ inducida por una τ homogénea es $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda, por lo tanto, de la Proposición 1.3.5, tiene asociada una supermatriz $(\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_{M^*}}$ homogénea de grado $|\tau|$. Por otro lado, τ tiene asociada también su supermatriz $\boldsymbol{\tau}$ que es también homogénea de grado $|\tau|$. Veamos cómo se relacionan estas dos supermatrices.

Sea $\mathbf{B} = \{D_1, ..., D_p; D_{p+1}, ..., D_{p+q}\}$ una base pura para el $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo M. Si en M^* consideramos la estructura de $\mathcal{A}$-módulo izquierdo inducida por la acción derecha natural (1.13), de la Proposición 1.3.5. sabemos que la matriz asociada a $(\tau^\flat)_{\mathbf{B}}$ es

$$(\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_{M^*}} = \begin{pmatrix} (\, i_{D_1}\tau\,)_{\mathbf{B}_{M^*}} \\ \vdots \\ (\, i_{D_{p+q}}\tau\,)_{\mathbf{B}_{M^*}} \end{pmatrix}$$

luego, de (1.16) en la Proposición 1.3.4. para cada $k \in \{1, ..., p+q\}$

$$\begin{aligned} i_{D_k}\tau &= \sum_{i=1}^{p} D^{i*}\langle D_i; i_{D_k}\tau\rangle + \sum_{l=p+1}^{p+q} D^{l*}\langle D_l; i_{D_k}\tau\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p}\langle D_i; i_{D_k}\tau\rangle D^{i*} + \sum_{l=p+1}^{p+q}(-1)^{|D_k|+|\tau|+1}\langle D_l; i_{D_k}\tau\rangle D^{l*} \\ &= \sum_{i=1}^{p}\langle D_i, D_k; \tau\rangle D^{i*} + \sum_{l=p+1}^{p+q}(-1)^{|D_k|+|\tau|+1}\langle D_l, D_k; \tau\rangle D^{l*} \end{aligned}$$

ya que $|i_{D_k}\tau| = |D_k| + |\tau|$. Por lo tanto, si $1 \leq k \leq p$

$$i_{D_k}\tau = \sum_{i=1}^{p}\langle D_i, D_k; \tau\rangle D^{i*} + \sum_{l=p+1}^{p+q}(-1)^{|\tau|+1}\langle D_l, D_k; \tau\rangle D^{p+q*}$$

y si $p+1 \leq k \leq p+q$

$$i_{D_k}\tau = \sum_{i=1}^{p}\langle D_i, D_k; \tau\rangle D^{i*} + \sum_{l=p+1}^{p+q}(-1)^{|\tau|}\langle D_l, D_k; \tau\rangle D^{p+q*}$$

de modo que

$$(\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_{M^*}} = \begin{pmatrix} \langle D_1, D_1; \tau\rangle & \cdots & (-1)^{|\tau|+1}\langle D_{p+q}, D_1; \tau\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle D_1, D_p; \tau\rangle & \cdots & (-1)^{|\tau|+1}\langle D_{p+q}, D_p; \tau\rangle \\ \langle D_1, D_{p+1}; \tau\rangle & \cdots & (-1)^{|\tau|}\langle D_{p+q}, D_{p+1}; \tau\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle D_1, D_{p+q}; \tau\rangle & \cdots & (-1)^{|\tau|}\langle D_{p+q}, D_{p+q}; \tau\rangle \end{pmatrix},$$

por lo tanto, si la supermatriz asociada a la forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada $\boldsymbol{\tau}$ tiene la forma

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

concluimos que la supermatriz asociada a la aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda $\tau^\flat$ se puede escribir en términos de $\boldsymbol{\tau}$ como

$$(\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_{M^*}} = \begin{pmatrix} R^t & -(-1)^{|\tau|}T^t \\ S^t & (-1)^{|\tau|}U^t \end{pmatrix}$$

y así, hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 1.4.8. Sea M un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo libre con base $\mathbf{B}_M$. Si M^* es considerado como un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo, y τ es una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada homogénea con supermatriz homogénea asociada

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

entonces, la supermatriz asociada a la aplicación $\mathcal{A}$-lineal por la izquierda

$$\tau^\flat : M \to M^*$$

tiene el mismo grado que τ y es precisamente

$$(\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M\mathbf{B}_{M^*}} = \begin{pmatrix} R^t & -(-1)^{|\tau|}T^t \\ S^t & (-1)^{|\tau|}U^t \end{pmatrix}.$$

Notemos que en particular como la representación matricial de $\langle \tilde{D}; \tau^\flat \rangle$ considerado como elemento del $\mathcal{A}$-módulo derecho M^* es precisamente $\langle \tilde{D}; \tau^\flat \rangle^{\mathsf{St}}$, entonces, como

$$(\langle \tilde{D}; \tau^\flat \rangle)_{\mathbf{B}_{M^*}} = (\tilde{D})_{\mathbf{B}_M} (\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_{M^*}},$$

usando la propiedad $(\hat{4})$ de la Proposición 1.2.11. tenemos que tal representación está dada por

$$(\langle \tilde{D}; \tau^\flat \rangle)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_{M^*}} = (-1)^{|\mathcal{D}||\tau|} (\tau^\flat)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_{M^*}} (\tilde{D})^{St}_{\mathbf{B}_M},$$

luego, como

$$(\tau^\flat)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_{M^*}} = \begin{pmatrix} R & (-1)^{|\tau|} S \\ T & (-1)^{|\tau|} U \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

tenemos que si $\tilde{D} = \sum_{i=1}^{p} \tilde{v}^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} \tilde{v}^l D_l$ es homogéneo

$$\begin{aligned}
(\langle \tilde{D}; \tau^\flat \rangle)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_{M^*}} &= (-1)^{|\mathcal{D}||\tau|} \begin{pmatrix} R & (-1)^{|\tau|} S \\ T & (-1)^{|\tau|} U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ -(-1)^{|\mathcal{D}|} \tilde{v}^{p+q} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{|\mathcal{D}||\tau|} \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ -(-1)^{(|\mathcal{D}|+|\tau|} \tilde{v}^{p+q} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{|\mathcal{D}||\tau|} \boldsymbol{\tau} \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ -(-1)^{(|\mathcal{D}|+|\tau|)} \tilde{v}^{p+q} \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\tau} \begin{pmatrix} (-1)^{|\mathcal{D}||\tau|} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ (-1)^{(|\mathcal{D}|+1)(|\tau|+1)} \tilde{v}^{p+q} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.4.9. La representación de cada $\langle \tilde{D}; \tau^\flat \rangle$ visto como elemento de M^* con su estructura natural de $\mathcal{A}$-módulo derecho es

$$\begin{aligned}
(\langle \tilde{D}; \tau^\flat \rangle)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_{M^*}} &= (-1)^{|\mathcal{D}||\tau|} (\tau^\flat)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_{M^*}} (\tilde{D})^{St}_{\mathbf{B}_M} \\
&= (-1)^{|\mathcal{D}||\tau|} \boldsymbol{\tau} \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ -(-1)^{(|\mathcal{D}|+|\tau|)} \tilde{v}^{p+q} \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\tau} \begin{pmatrix} (-1)^{|\mathcal{D}||\tau|} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ (-1)^{(|\mathcal{D}|+1)(|\tau|+1)} \tilde{v}^{p+q} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

para cada $\tilde{D} = \sum_{i=1}^{p} \tilde{v}^i D_i + \sum_{l=p+1}^{p+q} \tilde{v}^l D_l$ homogéneo.

En particular, del corolario anterior, podemos reescribir el Corolario 1.4.5. como sigue:

Proposición 1.4.10. Para todo $D \in M$ y $\tilde{D}, \tau$ homogéneos,

$$\langle D, \tilde{D}; \tau \rangle = (-1)^{|\mathcal{D}||\tau|} (D)_{\mathbf{B}} (\tau^\flat)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_{M^*}} (\tilde{D})^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_M}.$$

1.4.2.1. Caso simétrico/antisimétrico graduado

Por otro lado, si τ es simétrica graduada y homogénea con supermatriz asociada

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

entonces, la supermatriz asociada a la aplicación $\mathcal{A}$-lineal inducida $\tau^\flat : M \to M^*$ es

$$(\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_{M^*}} = \begin{pmatrix} R^t & -(-1)^{|\tau|} T^t \\ S^t & (-1)^{|\tau|} U^t \end{pmatrix}$$

luego, por la simetría graduada de τ, tenemos que $R = R^t$, $S = T^t$ y $U = -U^t$, por lo que

$$(\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_{M^*}} = \begin{pmatrix} R^t & -(-1)^{|\tau|} T^t \\ S^t & (-1)^{|\tau|} U^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -(-1)^{|\tau|} S \\ T & -(-1)^{|\tau|} U \end{pmatrix}.$$

De manera similar, si suponemos que τ es antisimétrica graduada y homogénea con supermatriz asociada

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

entonces $R = -R^t$, $S = -T^t$ y $U = U^t$, por lo que

$$(\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_{M^*}} = \begin{pmatrix} -R^t & (-1)^{|\tau|} S \\ -T^t & (-1)^{|\tau|} U \end{pmatrix}.$$

Resumimos las propiedades anteriores en el siguiente resultado:

Proposición 1.4.11. Sea $\tau : M \times M \to \mathcal{A}$ una forma bilineal graduada, y homogénea con supermatriz asociada

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

y aplicación $\tau^\flat M \to M^*$ inducida.

- Si τ es simétrica graduada, entonces

$$(\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_{M^*}} = \begin{pmatrix} R & -(-1)^{|\tau|} S \\ T & -(-1)^{|\tau|} U \end{pmatrix}.$$

  En este caso $\tau^\flat$ será s-simétrica si y sólo si $|\tau| = 1 \pmod 2$.

- Si τ es antisimétrica graduada, entonces

$$(\tau^\flat)_{\mathbf{B}_M \mathbf{B}_{M^*}} = \begin{pmatrix} -R^t & (-1)^{|\tau|} S \\ -T^t & (-1)^{|\tau|} U \end{pmatrix}.$$

  En este caso $\tau^\flat$ será s-antisimétrica si y sólo si $|\tau| = 1 \pmod 2$.

1.4.3. Formas $\mathcal{A}$-bilineales graduadas no degeneradas

En esta sección se presenta la noción de no degeneración de una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada, que es análoga a la que tenemos en el caso no graduado. El objetivo es comprobar que en el caso 'super', como en el caso usual, existe un resultado que caracteriza la no-degeneración de una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada en términos de su aplicación bemol inducida.

Definición 1.4.12. Decimos que $\tau : M \times M \to \mathcal{A}$ es **una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada no degenerada** si su supermatriz asociada $\boldsymbol{\tau}$ es invertible.

Veamos que la definición anterior no depende de la base elegida. Probaremos ésto a través de las aplicaciones $\mathcal{A}$-lineales bemoles respectivas, usando el siguiente resultado.

Lema 1.4.13. La supermatriz $\boldsymbol{\tau}$ asociada a una forma $\mathcal{A}$-bilineal por la izquierda y homogénea τ es invertible si y sólo si la supermatriz $\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}$ es invertible.

Demostración. Notemos que como la inversa de una supermatriz homogénea es también homogénea, podemos suponer que está dada en forma de bloques. Así, de la expresión (1.29) el resultado se sigue directamente de observar que

$$\boldsymbol{\tau}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left[\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ (-1)^{|\tau|}C & (-1)^{|\tau|}D \end{pmatrix}.$$

■

Proposición 1.4.14. Sean $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ bases para el $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo M, y sea τ una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada homogénea. Se cumple que la supermatriz $\boldsymbol{\tau}_1$ asociada a τ en la base $\mathbf{B}_1$ será invertible si y sólo si la supermatriz $\boldsymbol{\tau}_2$ asociada a τ en la base $\mathbf{B}_2$ lo es.

Demostración. Si $\left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)$ es la supermatriz de transición de la base $\mathbf{B}_2$ a la base $\mathbf{B}_1$, tenemos que para todo $D \in M$,

$$(D)_{\mathbf{B}_1} = (D)_{\mathbf{B}_2}\left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)$$

y al ser $\left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)$ homogénea par, de la propiedad $(\hat{4})$ en la Proposición 1.2.11., para todo $\tilde{D} \in M$ homogéneo,

$$(\tilde{D})^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_1} = \left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)^{\mathsf{St}}(\tilde{D})^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_2}$$

de modo que, por la Proposición 1.4.10.

$$\begin{aligned} \langle D, \tilde{D}\,;\tau\rangle &= (-1)^{|D||\tau|}\,(D)_{\mathbf{B}_1}\,(\tau^\flat)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*}\,(\tilde{D})^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_1} \\ &= (-1)^{|D||\tau|}\,(D)_{\mathbf{B}_2}\left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)(\tau^\flat)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*}\left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)^{\mathsf{St}}(\tilde{D})^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_2} \end{aligned}$$

y por lo tanto, de nuevo aplicando la Proposición 1.4.10. tenemos que

$$\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*} = \left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*}\left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)^{\mathsf{St}}.$$

Así, como toda supermatriz de transición es invertible, de la igualdad anterior concluimos que $\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*}$ es invertible si y sólo si $\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*}$ lo es, o equivalentemente por el lema anterior, que $\boldsymbol{\tau}_1$ es invertible si y sólo si $\boldsymbol{\tau}_2$ es invertible. ■

También, directamente de la propiedad $(\hat{5})$ en la Proposición 1.2.11. se tiene el siguiente criterio:

Corolario 1.4.15. La aplicación $\tau^\flat$ inducida por una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada homogénea τ es invertible si y sólo si $\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}$ es una supermatriz invertible.

Notemos que en este caso,

$$\left(\tau^\flat\right)^{-1} = (-1)^{|\tau|}\left[\left[\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}\right]^{-1}\right]^{\widetilde{\mathsf{St}}}.$$

Resumimos los resultados referentes a la no degeneración de una forma graduada en la siguiente proposición.

Proposición 1.4.16. Sea τ una forma $\mathcal{A}$-bilineal graduada homogénea. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. τ es no degenerada.
2. La supermatriz asociada $\boldsymbol{\tau}$ en cualquier base pura es invertible.
3. La supermatriz $(\tau^\flat)^{\mathsf{St}}$ es invertible.
4. La aplicación inducida $\tau^\flat : M \to M^*$ es un isomorfismo $\mathcal{A}$-lineal.
5. La clase $[\boldsymbol{\tau}] \in SM(\mathcal{A})/SM\langle\mathcal{A}_1\rangle$ es invertible.

Notemos que aunque no tenemos una relación explícita que afirme que la supermatriz asociada a τ en la base $\mathbf{B}_2$ se relacione con la asociada a τ en la base $\mathbf{B}_1$ a través una supermatriz de transición y su supertranspuesta (como sucede en el caso usual), sí lo podemos hacer para las supermatrices $\tau^\flat$ correspondientes, gracias a los cálculos realizados en la prueba de la Proposición 1.4.14., lo cual establecemos en el siguiente resultado:

Corolario 1.4.17. Si $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ son bases para M, y τ es homogénea,

$$\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*} = \left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*}\left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)^{\mathsf{St}}. \tag{1.30}$$

Notemos que también esta propiedad nos muestra que $\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}$ es una buena candidata para ser nombrada “la supermatriz asociada a la forma bilineal graduada τ”.

Por otro lado, del resultado anterior, podemos ver que en el caso graduado se cumple el resultado análogo al que tenemos en el caso usual, que afirma que las matrices de transición entre las bases y sus duales respectivas se relacionan mediante una transpuesta inversa.

En efecto, por la Proposición 1.3.10 sabemos que la supermatriz asociada a $\tau^\flat$ en la base $\mathbf{B}_2$ está dada por

$$\left(\tau^\flat\right)_{\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*} = \left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_2}_{\mathbf{B}_1}\right)^{-1}\left(\tau^\flat\right)_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*}\left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_2^*}_{\mathbf{B}_1^*}\right),$$

así, de la propiedad $(\hat{4})$ de la Proposición 1.2.11. tenemos que

$$\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*} = \left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_2^*}_{\mathbf{B}_1^*}\right)^{\mathsf{St}}\left(\tau^\flat\right)^{\mathsf{St}}_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*}\left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)^{\mathsf{St}}$$

ya que las supermatrices de transición son pares, y entonces, del corolario anterior concluimos que

$$\left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_2^*}_{\mathbf{B}_1^*}\right)^{\mathsf{St}} = \left(\mathrm{T}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}_2}\right)$$

o equivalentemente que

$$\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_1^*}^{\mathbf{B}_2^*}\right) = \left[\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{B}_2}\right)^{-1}\right]^{\widetilde{\mathsf{St}}}.$$

Resumimos lo anterior en el siguiente resultado.

Corolario 1.4.18. Si $\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{B}_2}\right)$ es la supermatriz de transición de la base $\mathbf{B}_1$ a la base $\mathbf{B}_2$ de M, entonces la supermatriz de transición de la base $\mathbf{B}_1^*$ a la base $\mathbf{B}_2^*$ de M^* es

$$\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_2^*}^{\mathbf{B}_1^*}\right) = \left[\left(\mathrm{T}_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{B}_2}\right)^{-1}\right]^{\widetilde{\mathsf{St}}}.$$

1.5. Algebra multilineal graduada

Extendiendo la noción de $\mathcal{A}$-linealidad por la izquierda, tenemos la siguiente noción de $\mathcal{A}$-multilinealidad:

Definición 1.5.1. Sean M y N dos $\mathcal{A}$-supermódulos izquierdos. Una aplicación

$$\begin{array}{rcl} T \quad : M\times \overset{(r)}{\cdots} \times M & \longrightarrow & N \\ (D_1, ..., D_r) & \longmapsto & \langle D_1, ..., D_r; T\rangle \end{array}$$

es **$\mathcal{A}$-multilineal graduada** si para cada $i = 1, ..., r$ y todo $\alpha \in \mathcal{A}$, satisface:

(*i*) $\langle D_1, ..., D_i + D_i', ..., D_r; T\rangle = \langle D_1, ..., D_i, ..., D_r; T\rangle + \langle D_1, ..., D_i', ..., D_r; T\rangle$

(*ii*) $\langle D_1, ..., \alpha D_i, ..., D_r; T\rangle = (-1)^{|\alpha|(\sum_{l=1}^{i-1}|D_l|)}\alpha\langle D_1, ..., D_i, ...D_r; T\rangle$.

Decimos además que T es **homogéneo** de grado $|T| \in \mathsf{Z}_2$ si

$$|\langle D_1, ..., D_r; T\rangle| = \sum_{i=1}^{r}|D_i| + |T| \pmod 2.$$

Observación. A lo largo de este trabajo se usa exclusivamente la notación $\langle -, ..., - ; -\rangle$ para referirnos a la evaluación de aplicaciones $\mathcal{A}$-multilineales graduadas.

Analizaremos dos subclases distinguidas del espacio de aplicaciones $\mathcal{A}$-multilineales graduadas: una dada por las aplicaciones tales que $N = \mathcal{A}$ en la definición 1.5.1, y otra donde $N = M$.

Definición 1.5.2. [25] Un **r-tensor covariante graduado**, sobre el $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo M es una aplicación $\mathcal{A}$-multilineal graduada

$$T : M\times \overset{(r)}{\cdots} \times M \longrightarrow \mathcal{A}.$$

Denotaremos por $\mathcal{T}_{\mathsf{Gr}}^r(M)$ a la colección de r-tensores covariantes graduados, y en particular definimos $\mathcal{T}_{\mathsf{Gr}}^0(M) := \mathcal{A}$. Si además T es homogéneo de grado $|T| \in \mathsf{Z}_2$, diremos que T tiene bigrado $(r, |T|)$.

El espacio de r-tensores covariantes graduados, tiene una estructura natural de $\mathcal{A}$-supermódulo derecho, con acción

$$\mathcal{T}^r_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{A} \to \mathcal{T}^r_{\mathsf{Gr}}(M) \tag{1.31}$$

definida por

$$\langle D_1, ..., D_r; T\alpha \rangle := \langle D_1, ..., D_r; T \rangle\, \alpha$$

para $D_1, ..., D_r \in M$, pues si T es homogéneo, esto es, de bigrado $(r, |T|)$,

$$\begin{aligned} |\langle D_1, ..., D_r; T\alpha \rangle| &= |\langle D_1, ..., D_r; T \rangle\, \alpha| \\ &= |\langle D_1, ..., D_r; T \rangle| + |\alpha| \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^r |D_i| + |T| + |\alpha|. \end{aligned}$$

y por lo tanto $T\alpha$ es homogéneo de grado $|T| + |\alpha|$.

Luego, $\mathcal{T}^r_{\mathsf{Gr}}(M)$ tiene inducida una estructura de $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo con acción dada por $\alpha\, T := (-1)^{|\alpha||T|} T\, \alpha$, o equivalentemente, debido a la conmutatividad graduada en $\mathcal{A}$, tal que

$$\langle D_1, ..., D_r; \alpha T \rangle \equiv (-1)^{|\alpha|(\sum_{i=1}^r |D_i|)} \alpha \langle D_1, ..., D_r; T \rangle.$$

En particular tenemos que

$$\mathcal{T}^1_{\mathsf{Gr}}(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A}) = M^*$$

y que

$$\mathcal{T}^2_{\mathsf{Gr}}(M) = \mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(\mathcal{A})$$

donde la acción derecha (1.13) en M^* y la acción derecha (1.26) en $\mathrm{Bil}_{\mathsf{Gr}}(M)$ coinciden con la definida para tensores covariantes graduados (1.31).

Definición 1.5.3. Sea $T : M \times \cdots \times M \to \mathcal{A}$ un r-tensor covariante graduado.

- Decimos que T es **simétrico graduado** si

  $$\langle D_1, ..., D_i, D_{i+1}, ..., D_r; T \rangle = (-1)^{|D_i||D_{i+1}|} \langle D_1, ..., D_{i+1}, D_i, ..., D_r; T \rangle$$

  y denotamos a la colección de r-tensores simétricos graduados por $\Sigma^r_{\mathsf{Gr}}(M)$.

- Decimos que T es **antisimétrico graduado** si

  $$\langle D_1, ..., D_i, D_{i+1}, ..., D_r; T \rangle = -(-1)^{|D_i||D_{i+1}|} \langle D_1, ..., D_{i+1}, D_i, ..., D_r; T \rangle$$

  y denotamos a la colección de r-tensores antisimétricos graduados sobre M como $\bigwedge^r_{\mathsf{Gr}}(M)$.

Notemos que la restricción de la $\mathcal{A}$-acción derecha sobre estos subconjuntos es cerrada, esto es, $\Sigma^r_{\mathsf{Gr}} \times \mathcal{A} \to \Sigma^r_{\mathsf{Gr}}$ y $\bigwedge^r_{\mathsf{Gr}} \times \mathcal{A} \to \bigwedge^r_{\mathsf{Gr}}$.

Además, de manera similar a lo que sucede en el caso usual, podemos ver que todo 2-tensor covariante graduado T se puede descomponer en una parte simétrica graduada y una antisimétrica graduada,

$$T = \mathrm{Sim}(T) + \mathrm{Anti}(T)$$

con $\mathrm{Sim}(T) \in \Sigma^2_{\mathsf{Gr}}(M)$ y $\mathrm{Anti}(T) \in \bigwedge^2_{\mathsf{Gr}}(M)$, donde

$$\langle D_1, D_2; \mathrm{Sim}(T)\rangle \coloneqq \frac{1}{2}\Big(\langle D_1, D_2; T\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; T\rangle\Big)$$

y

$$\langle D_1, D_2; \mathrm{Anti}(T)\rangle \coloneqq \frac{1}{2}\Big(\langle D_1, D_2; T\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; T\rangle\Big).$$

Llamamos a $\mathrm{Sim}(T)$ **la simetrización graduada** de T, y a $\mathrm{Anti}(T)$ **la antisimetrizción graduada** de T.

Veamos que $\mathrm{Sim}(T)$ es simétrico graduado,

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2; \mathrm{Sim}(T)\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle D_1, D_2; T\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; T\rangle\Big)\\
&= (-1)^{|D_1||D_2|}\frac{1}{2}\Big((-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_1, D_2; T\rangle + \langle D_2, D_1; T\rangle\Big)\\
&= (-1)^{|D_1||D_2|}\frac{1}{2}\Big(\langle D_2, D_1; T\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_1, D_2; T\rangle\Big)\\
&= (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; \mathrm{Sim}(T)\rangle;
\end{aligned}$$

luego, para ver que $\mathrm{Sim}(T)$ es efectivamente un 2-tensor covariante, consideremos $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces como T es $\mathcal{A}$-bilineal graduado,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha D_1, D_2; \mathrm{Sim}(T)\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle \alpha D_1, D_2; T\rangle + (-1)^{|D_2|(|\alpha|+|D_1|)}\langle D_2, \alpha D_1; T\rangle\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\alpha\langle D_1, D_2; T\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\alpha\langle D_2, D_1; T\rangle\Big)\\
&= \alpha\frac{1}{2}\Big(\langle D_1, D_2; T\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; T\rangle\Big)\\
&= \alpha\langle D_1, D_2; \mathrm{Sim}(T)\rangle
\end{aligned}$$

luego, por la simetría graduada que satisface $\mathrm{Sim}(T)$,

$$\begin{aligned}
\langle D_1, \alpha D_2; \mathrm{Sim}(T)\rangle &= (-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}\langle \alpha D_2, D_1; \mathrm{Sim}(T)\rangle\\
&= (-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}\alpha\langle D_2, D_1; \mathrm{Sim}(T)\rangle\\
&= (-1)^{|D_1||\alpha|}\alpha\langle D_1, D_2; \mathrm{Sim}(T)\rangle
\end{aligned}$$

y concluimos que efectivamente $\mathrm{Sim}(T)$ es un 2-tensor covariante graduado que además es simétrico graduado.

Comprobemos que $\mathrm{Anti}(T)$ es antisimétrico graduado,

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2; \mathrm{Anti}(T)\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle D_1, D_2; T\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; T\rangle\Big)\\
&= -(-1)^{|D_1||D_2|}\frac{1}{2}\Big(-(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_1, D_2; T\rangle + \langle D_2, D_1; T\rangle\Big)\\
&= -(-1)^{|D_1||D_2|}\frac{1}{2}\Big(\langle D_2, D_1; T\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_1, D_2; T\rangle\Big)\\
&= -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; \mathrm{Anti}(T)\rangle;
\end{aligned}$$

luego, para ver que $\mathrm{Anti}(T)$ es un 2-tensor covariante, por la $\mathcal{A}$-bilinealidad graduada de T,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha D_1, D_2; \mathrm{Anti}(T)\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle \alpha D_1, D_2; T\rangle - (-1)^{|D_2|(|\alpha|+|D_1|)}\langle D_2, \alpha D_1; T\rangle\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\alpha\langle D_1, D_2; T\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\alpha\langle D_2, D_1; T\rangle\Big)\\
&= \alpha\frac{1}{2}\Big(\langle D_1, D_2; T\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; T\rangle\Big)\\
&= \alpha\langle D_1, D_2; \mathrm{Anti}(T)\rangle
\end{aligned}$$

luego, por la antisimetría graduada que satisface $\mathrm{Anti}(T)$,

$$\begin{aligned}
\langle D_1, \alpha D_2; \mathrm{Anti}(T)\rangle &= -(-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}\langle \alpha D_2, D_1; \mathrm{Anti}(T)\rangle\\
&= -(-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}\alpha\langle D_2, D_1; \mathrm{Sim}(T)\rangle\\
&= (-1)^{|D_1||\alpha|}\alpha\langle D_1, D_2; \mathrm{Anti}(T)\rangle
\end{aligned}$$

y concluimos que efectivamente $\mathrm{Anti}(T)$ es un 2-tensor covariante antisimétrico graduado.

Finalmente, si M es un $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo fijo, la subcolección distinguida de aplicaciones $\mathcal{A}$-multilineales graduadas, de la forma

$$T : M\times \overset{(r)}{\cdots} \times M \longrightarrow M$$

será denotada por $\mathcal{T}^r_{1,\mathsf{Gr}}(M)$.

Notemos que $\mathcal{T}^1_{1,G}(M) = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M, M)$. En particular, $\mathcal{T}^r_{1,\mathsf{Gr}}(M)$ tiene estructura de espacio vectorial, y las aplicaciones que son además homogéneas de grado $k \in \mathsf{Z}_2$, forman un subespacio de éste. Más adelante veremos que las conexiones graduadas sobre una supervariedad y algunas de sus subclases tienen una estructura afín modeladas sobre éste subespacio y algunos de sus subespacios.

1.6. Derivaciones graduadas

Definición 1.6.1. [18] Sea $\mathcal{A}$ una superálgebra. Una **derivación homogénea de grado** p, es un endomorfismo R-lineal $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ homogéneo de grado p, tal que para todos $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ con α homogéneo, satisface **la regla de Leibniz graduada**

$$D(\alpha\beta) = D(\alpha)\beta + (-1)^{p|\alpha|}\alpha D(\beta).$$

Denotamos por $\mathrm{Der}^p(\mathcal{A})$ a la colección de todas las derivaciones de $\mathcal{A}$ de grado p, y por $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \coloneqq \oplus_p \mathrm{Der}^p(\mathcal{A})$.

El conjunto $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ tiene una estructura natural de $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo , con acción definida en elementos homogéneos

$$\mathcal{A}_i \times \mathrm{Der}^p(\mathcal{A}) \to \mathrm{Der}^{p+i}(\mathcal{A})$$

dada por $(\alpha D)(\beta) \coloneqq \alpha\,(D(\beta))$, pues al ser $\mathcal{A}$ graduada, claramente

$$|(\alpha D)(\beta) = |\alpha\,(D(\beta))| = |\alpha| + |D| + |\beta|$$

y por lo tanto $|\alpha D| = |\alpha| + |D|$; luego, la $\mathcal{A}$-acción derecha inducida en $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ estará dada por $D\,\alpha = (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\, D$, o bien, $(D\,\alpha)(\beta) = (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\,(D(\beta))$.

Aún más, se puede dotar a $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ con una estructura de **álgebra de Lie graduada**, con corchete $[\cdot,\cdot]$ dado por el conmutador graduado de endomorfismos; esto es, si D_1, D_2 son derivaciones homogéneas, el conmutador graduado $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}D_2 \circ D_1$ cumple que

- $|[D_1, D_2]| = |D_1| + |D_2|$
- es R-bilineal,
- es antisimétrico graduado: $[D_1, D_2] = -(-1)^{|D_1||D_2|}[D_2, D_1]$,
- satisface la identidad de Jacobi graduada:
  $[D_1,[D_2,D_3]] = [[D_1,D_2],D_3] + (-1)^{|D_1||D_2|}[D_2,[D_1,D_3]]$.

En efecto, que $|[D_1, D_2]| = |D_1| + |D_2|$ se sigue directamente de la definición del corchete; la R-bilinealidad se cumple al ser D_1 y D_2 R-lineales; luego, claramente

$$\begin{aligned}
[D_2, D_1] &= D_2 \circ D_1 - (-1)^{|D_2||D_1|}D_1 \circ D_2 \\
&= -(-1)^{|D_2||D_1|}\left(-(-1)^{|D_2||D_1|}D_2 \circ D_1 + D_1 \circ D_2\right) \\
&= -(-1)^{|D_2||D_1|}[D_1, D_2],
\end{aligned}$$

y finalmente, como

$$\begin{aligned}
&[[D_1,D_2],D_3] \\
&\quad= [D_1,D_2]\circ D_3 - (-1)^{(|D_1|+|D_2|)|D_3|}D_3 \circ [D_1,D_2] \\
&\quad= \left\{D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}D_2 \circ D_1\right\} \circ D_3 \\
&\qquad -(-1)^{(|D_1|+|D_2|)|D_3|}D_3 \circ \left\{D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}D_2 \circ D_1\right\}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&(-1)^{|D_1||D_2|}[D_2,[D_1,D_3]] \\
&\quad= (-1)^{|D_1||D_2|}\left\{D_2 \circ [D_1,D_3] - (-1)^{|D_2|(|D_1|+|D_3|)}[D_1,D_3]\circ D_2\right\} \\
&\quad= (-1)^{|D_1||D_2|}D_2 \circ \left\{D_1 \circ D_3 - (-1)^{|D_1||D_3|}D_3 \circ D_1\right\} \\
&\qquad -(-1)^{|D_2||D_3|}\left\{D_1 \circ D_3 - (-1)^{|D_1||D_3|}D_3 \circ D_1\right\} \circ D_2,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&[[D_1,D_2],D_3] + (-1)^{|D_1||D_2|}[D_2,[D_1,D_3]] \\
&\quad= D_1 \circ D_2 \circ D_3 - (-1)^{(|D_1|+|D_2|)|D_3|}D_3 \circ \left\{-(-1)^{|D_1||D_2|}D_2 \circ D_1\right\} \\
&\qquad -(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}D_2 \circ D_3 \circ D_1 - (-1)^{|D_2||D_3|}D_1 \circ D_3 \circ D_2 \\
&\quad= D_1 \circ \left\{D_2 \circ D_3 - (-1)^{|D_2||D_3|}D_3 \circ D_2\right\} \\
&\qquad -(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\left\{D_2 \circ D_3 - (-1)^{|D_2||D_3|}D_3 \circ D_2\right\} \circ D_1 \\
&\quad= D_1 \circ [D_2,D_3] - (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}[D_2,D_3]\circ D_1 \\
&\quad= [D_1,[D_2,D_3]]
\end{aligned}$$

de modo que el conmutador graduado cumple la identidad de Jacobi graduada.

Notemos que en particular la identidad de Jacobi graduada nos dice que para cada D_1 fija,

$$[D_1\,,\cdot\,]:(\mathrm{Der}(\mathcal{A})\,,[\,,\,])\to(\mathrm{Der}(\mathcal{A})\,,[\,,\,])$$

es una derivación graduada de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ de grado D_1.

Finalmente, tenemos la siguiente expresión que relaciona la estructura de álgebra de Lie graduada en $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ y su estructura de $\mathcal{A}$-supermódulo izquierdo:

$$[D_1,\alpha D_2]=D_1(\alpha)D_2+(-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha[D_1,D_2].$$

Capítulo 2

Elementos geométricos asociados a una supervariedad

El objetivo de este capítulo es analizar algunos conceptos y propiedades en el contexto graduado, de algunos conceptos provenientes de la geometría Riemanniana y la geometría simpléctica clásicas, tales como la noción de conexión lineal, torsión, curvatura, tensor de Ricci y curvatura escalar.

La exposición que se hace en este trabajo está influenciada principalmente por el análisis del caso no graduado de los textos [12], [11] y [9]; para el caso graduado, la referencia principal del análisis es [23], además de [21] y [25].

2.1. s-variedades, s-funciones, s-campos, y s-formas

2.1.1. Supervariedades

Recordemos que una variedad diferencial consiste de un par $(M,\mathcal{U})$ formado por una variedad topológica M y un atlas $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ de cartas diferenciables. Luego, toda variedad diferencial tiene asociada la gavilla de funciones diferenciables $\mathcal{C}^\infty(M)$, donde para cada abierto $U \subset M$, $\mathcal{C}^\infty(U)$ corresponde al álgebra de funciones diferenciables en U, y donde las restricciones corresponden a las restricciones usuales de funciones. Si ahora, en vez de considerar el par $(M, \mathcal{C}^\infty(M))$ con la gavilla de álgebras de funciones, requerimos una gavilla de superálgebras conmutativas graduadas, tal que salvo nilpotentes, se comportan como una variedad diferencial, tenemos la noción de supervariedad (ver [25]):

Una **supervariedad de dimensión** (m,n) es una pareja $(M,\mathcal{A})$ donde M es una variedad diferencial de dimensión m, y $\mathcal{A}$ es una gavilla de superálgebras conmutativas graduadas, que cumple las siguientes condiciones:

(*i*) Existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de M tal que para cada $i \in I$

$$\mathcal{A}(U_i) \simeq C^\infty(U_i) \otimes \bigwedge(\mathsf{R}^n)$$

(*ii*) Si $\bar{N}$ es la gavilla de nilpotentes en $\mathcal{A}$, entonces $(M, \mathcal{A}/\bar{N})$ es isomorfa a $(M, \mathcal{C}^\infty(M))$, donde $\mathcal{C}^\infty(M)$ corresponde a la gavilla de funciones diferenciables en M.

Notemos que toda variedad diferencial de dimensión m es en particular una supervariedad de dimensión $(m, 0)$.

Por otro lado, consideremos M una variedad diferencial. Entonces, el espacio de secciones del haz exterior $\Gamma(\bigwedge E)$ forma una gavilla de álgebras (conmutativas) Z-graduadas, y por lo tanto Z_2-graduadas, con el producto exterior

$$\begin{array}{rcl} \wedge : \Gamma(\bigwedge^p E) \times \Gamma(\bigwedge^q E) & \to & \Gamma(\bigwedge^{p+q} E) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha \wedge \beta \end{array}$$

donde $(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x)$ para todo $x \in M$. Tenemos entonces que $(M, \Gamma(\bigwedge E))$ es una supervariedad de dimensión (m, n), pues la condición (i) se cumple al ser $\bigwedge E$ localmente trivial, y la condición (ii) se cumple por ser toda forma exterior de grado mayor o igual que 1 un elemento nilpotente.

Observación. En este trabajo se consideran solo supervariedades del tipo $(M, \Gamma(\bigwedge E))$ donde $\bigwedge E \to M$ es el haz exterior de un haz fibrado E sobre M. Además, por lo general omitiremos el símbolo de producto exterior para denotar el producto de los elementos en $\Gamma(\bigwedge E)$.

2.1.2. Superfunciones y supercampos vectoriales

Sea $(M, \Gamma(\bigwedge E))$ una supervariedad. El espacio de derivaciones del álgebra Z-graduada $\Gamma(\bigwedge E)$, $\mathrm{Der}(\Gamma(\bigwedge E)) = \bigoplus_{p \in \mathsf{Z}} \mathrm{Der}^p(\Gamma(\bigwedge E))$, tiene estructura canónica de $\Gamma(\bigwedge E)$-módulo izquierdo graduado con acción izquierda

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(\bigwedge^i E) \times \mathrm{Der}^p(\Gamma(\bigwedge E)) & \to & \mathrm{Der}^{p+i}(\Gamma(\bigwedge E)) \\ (\alpha, D) & \mapsto & \alpha D \end{array}$$

inducida por el producto exterior en $\Gamma(\bigwedge E)$ dada por

$$(\alpha\, D)(\beta) = \alpha\,(D(\beta)),$$

para todo $\beta \in \Gamma(\bigwedge E)$; luego, la $\Gamma(\bigwedge E)$-acción derecha inducida en $\mathrm{Der}(\Gamma(\bigwedge E))$ es precisamente $D\,\alpha = (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\, D$, o bien, $(D\,\alpha)(\beta) = (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\,(D(\beta))$ para todo $\beta \in \Gamma(\bigwedge E)$.

Luego, el espacio de derivaciones $\mathrm{Der}(\Gamma(\bigwedge E))$ tiene estructura de álgebra de Lie graduada dada por el corchete gradudado de endomorfismos

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2 \circ D_1$$

para D_1, D_2 derivaciones homogéneas.

Por analogía con el caso no graduado donde el espacio de campos vectoriales en M, $\mathcal{X}(M)$, se corresponde con el espacio de derivaciones del álgebra de funciones diferenciables $\mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\mathcal{X}(M) = \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$$

se define:

- El espacio de **supercampos vectoriales** en la supervariedad $(M, \Gamma(\bigwedge E))$, que denotamos por $\mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$, se define como

$$\mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) := \mathrm{Der}(\Gamma(\bigwedge E)).$$

- Los elementos del álgebra Z_2-graduada de secciones $\Gamma(\bigwedge E)$ son llamados **superfunciones** en la supervariedad $(M, \Gamma(\bigwedge E))$.

En particular, tenemos que el espacio de supercampos vectoriales es un módulo izquierdo graduado sobre el espacio de superfunciones y tiene estructura de álgebra de Lie graduada.

2.1.3. p-formas graduadas

Por analogía al caso usual, donde las p-formas diferenciales corresponden a los p-tensores covariantes alternantes, se define (ver [21]), el espacio de **p-formas graduadas** en la supervariedad $(M, \Gamma(\bigwedge E))$, que denotamos como $\Omega^p_{\mathsf{Gr}}(M)$, es el espacio de p-tensores covariantes graduados que son además antisimétricos graduados, definidos sobre el $\Gamma(\bigwedge E)$-módulo izquierdo graduado $\mathcal{X}_G(M)$. Para diferenciar entre p-formas $\tau \in \Omega^p(M)$ y p-formas graduadas $\boldsymbol{\tau} \in \Omega^p_{\mathsf{Gr}}(M)$, éstas últimas serán denotadas en negritas.

El **operador diferencial graduado**

$$\begin{array}{rcl} d^{\mathsf{Gr}} : \Omega^p_{\mathsf{Gr}} & \longleftrightarrow & \Omega^{p+1}_{\mathsf{Gr}} \\ \boldsymbol{\tau} & \longmapsto & d^{\mathsf{Gr}}\boldsymbol{\tau} \end{array}$$

se define como

$$\begin{array}{rl} \langle D_1, ..., D_{p+1}; d^{\mathsf{Gr}}\boldsymbol{\tau}\rangle & \\ := & \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1+|D_i|(|D_1|+\cdots+|D_{i-1}|)} D_i\left(\langle D_1, ..., \widehat{D_i}, ..., D_{p+1}; \boldsymbol{\tau}\rangle\right) \\ & + \sum_{k<l} (-1)^{k+l+|D_k|(|D_1|+\cdots+|D_{k-1}|)+|D_l|\left(|D_1|+\cdots+\widehat{|D_k|}\cdots+|D_{l-1}|\right)} \\ & \quad \langle [D_k, D_l], D_1, ..., D_k, ..., D_l, ...D_{p+1}; \boldsymbol{\tau}\rangle. \end{array}$$

y decimos que $\boldsymbol{\tau}$ es una **p-forma graduada cerrada** si $d^{\mathsf{Gr}}\boldsymbol{\tau} = 0$. Notemos que si $\boldsymbol{\tau} \in \Omega^p_{\mathsf{Gr}}(M)$ es homogénea de grado i, entonces también $d^{\mathsf{Gr}}\boldsymbol{\tau}$ será homogénea del mismo grado i.

En particular, se tiene que:

- Si $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^0_{\mathsf{Gr}}(M) = \Gamma(\bigwedge E)$,
$$\langle D_1; \boldsymbol{\alpha}\rangle = D_1(\boldsymbol{\alpha});$$
- Si $\boldsymbol{\lambda}$ es una 1-forma graduada,
$$\langle D_1, D_2\,; d^{\mathsf{Gr}}\boldsymbol{\lambda}\rangle = D_1\left(\langle D_2; \boldsymbol{\lambda}\rangle\right) - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2(\langle D_1; \boldsymbol{\lambda}\rangle) - \langle [D_1, D_2]; \boldsymbol{\lambda}\rangle \tag{2.1}$$
- Si $\boldsymbol{\tau}$ es una 2-forma graduada

$$\begin{array}{rl} \langle D_1, D_2, D_3; d^{\mathsf{Gr}}\boldsymbol{\tau}\rangle & \\ = & D_1\left(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{\tau}\rangle\right) - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2\left(\langle D_1, D_3; \boldsymbol{\tau}\rangle\right) \\ & +(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)} D_3\left(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\right) - \langle [D_1, D_2], D_3; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ & +(-1)^{|D_3||D_2|}\langle [D_1, D_3], D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle [D_2, D_3], D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle \end{array}$$

y por la antisimetría graduada que cumplen $\boldsymbol{\tau}$ y $[\cdot,\cdot]$, podemos reescribir esta expresión en términos de una suma cíclica graduada como

$$\begin{array}{rl} \langle D_1, D_2, D_3; d^{\mathsf{Gr}}\boldsymbol{\tau}\rangle & \\ = & D_1\left(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{\tau}\rangle\right) - \langle [D_1, D_2], D_3; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ & +(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\left\{D_3\left(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\right) - \langle [D_3, D_1], D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\right\} \\ & +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\left\{D_2\left(\langle D_3, D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle\right) - \langle [D_2, D_3], D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle\right\}. \end{array}$$

2.2. Espacios de conexiones graduadas

En esta sección se analiza la estructura del espacio de conexiones graduadas en una supervariedad, y la estructura del espacio de aquellas que son homogéneas. Posteriormente, al introducir la noción de torsión graduada y de derivada covariante en el espacio de p-tensores covariantes graduados, se definen las conexiones graduadas simétricas y las conexiones graduadas compatible con un 2-tensor graduado $\boldsymbol{\tau}$, y se estudia la estructura de estas subclases de conexiones graduadas. En particular, se analiza la estructura del espacio de conexiones graduadas que son a la vez simétricas y compatibles con $\boldsymbol{\tau}$, presentando teoremas de existencia de dichas conexiones graduadas.

2.2.1. El espacio afín de conexiones graduadas

Recordemos que una conexión lineal ∇ en un haz E, es una aplicación $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ tal que en el primer argumento es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal y satisface la regla de Leibniz en el segundo argumento. En el caso de una supervariedad $(M, \Gamma(\bigwedge E))$ tenemos el siguiente análogo de una conexión lineal en el haz tangente TM [cf. [23]]:

Una **conexión graduada** en $(M, \Gamma(\bigwedge E))$ es un operador

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{V}: & \mathcal{X}_G(M) \times \mathcal{X}_G(M) & \longrightarrow & \mathcal{X}_G(M) \\ & (D_1, D_2) & \longmapsto & \mathbb{V}_{D_1} D_2 \end{array}$$

que satisface las siguientes condiciones: para todo $\alpha \in \Gamma(\bigwedge E)$ y todos $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{X}_G(M)$,

(i) Es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal en el primer argumento:

- $\mathbb{V}_{(D_1 + D_2)} D_3 = \mathbb{V}_{D_1} D_3 + \mathbb{V}_{D_2} D_3$
- $\mathbb{V}_{(\alpha D_1)} D_2 = \alpha \mathbb{V}_{D_1} D_2$

(ii) En el segundo argumento cumple la regla de Leibniz graduada:

- $\mathbb{V}_{D_1}(D_2 + D_3) = \mathbb{V}_{D_1} D_2 + \mathbb{V}_{D_1} D_3$
- $\mathbb{V}_{D_1}(\alpha D_2) = D_1(\alpha) D_2 + (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \mathbb{V}_{D_1} D_2$

Decimos que $\mathbb{V}$ es **homogénea** de grado $|\mathbb{V}| \in \mathsf{Z}_2$ si $\mathbb{V}$ es un operador homogéneo, esto es, que $|\mathbb{V}_{D_1} D_2| = |D_1| + |D_2| + |\mathbb{V}|$ (mod 2). Denotaremos por $\mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$ a la colección de conexiones graduadas en $(M, \Gamma(\bigwedge E))$.

Observación. A lo largo de este trabajo las conexiones graduadas serán denotadas exclusivamente con el símbolo $\mathbb{V}$, para distinguirlas de las conexiones lineales ∇ en un haz sobre M.

En el caso clásico (no graduado) el espacio de conexiones lineales sobre cualesquier haz $E \to M$ es un espacio afín modelado sobre el espacio vectorial $\Omega^1(M; \mathrm{End}(E))$, esto es, aunque la suma de dos conexiones lineales no es en general una conexión, su diferencia es una 1-forma con valores en $\mathrm{End}(E)$, así, en particular esta diferencia es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en ambos argumentos. De manera análoga, en el caso graduado, la diferencia de dos conexiones graduadas es $\Gamma(\bigwedge E)$-bilineal graduada, esto es, si $\mathbb{V}, \mathbb{V}' \in \mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$, entonces

$$\mathbb{V} - \mathbb{V}' : \quad \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$$

definido como
$$\langle D_1, D_2; \nabla - \nabla' \rangle := \nabla_{D_1} D_2 - \nabla'_{D_1} D_2,$$
satisface

(i) $\langle \alpha D_1, D_2; \nabla - \nabla' \rangle = \alpha \langle D_1, D_2; \nabla - \nabla' \rangle$

(ii) $\langle D_1, \alpha D_2; \nabla - \nabla' \rangle = (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \langle D_1, D_2; \nabla - \nabla' \rangle$.

En efecto, por definición, ∇ y ∇' son $\Gamma(\bigwedge E)$-lineales en el primer argumento, entonces, para todo D_2 se tiene,
$$\begin{aligned}
\langle \alpha D_1, D_2; \nabla - \nabla' \rangle &= \nabla_{\alpha D_1} D_2 - \nabla'_{\alpha D_1} D_2 \\
&= \alpha \nabla_{D_1} D_2 - \alpha \nabla'_{D_1} D_2 \\
&= \alpha \langle D_1, D_2; \nabla - \nabla' \rangle
\end{aligned}$$
y se sigue de inmediato que $\nabla - \nabla'$ es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal en el primer argumento. Luego, por la regla de Leibniz graduada que satisfacen ∇ y ∇' en el segundo argumento,
$$\begin{aligned}
\langle D_1, \alpha D_2; \nabla - \nabla' \rangle &= \nabla_{D_1} \alpha D_2 - \nabla'_{D_1} \alpha D_2 \\
&= \left(D_1(\alpha) D_2 + (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \nabla_{D_1} D_2 \right) \\
&\quad - \left(D_1(\alpha) D_2 + (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \nabla'_{D_1} D_2 \right) \\
&= (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \left(\nabla_{D_1} D_2 - \nabla'_{D_1} D_2 \right) \\
&= (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \langle D_1, D_2; \nabla - \nabla' \rangle
\end{aligned}$$
por lo que $\nabla - \nabla'$ también es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal graduada en el segundo argumento.

Por otro lado, consideremos cualesquier aplicación $\Gamma(\bigwedge E)$-bilineal graduada
$$\begin{aligned}
S : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \\
(D_1, D_2) &\longmapsto \langle D_1, D_2; S \rangle
\end{aligned}$$
esto es, $S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}} := \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}(\mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M))$, entonces, se cumple que $\nabla + S$ es una conexión graduada, donde se define
$$(\nabla + S)_{D_1} D_2 := \nabla_{D_1} D_2 + \langle D_1, D_2; S \rangle.$$
En efecto, por un lado, por la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada de ∇ y de S en el primer argumento, tenemos que para todo D_2,
$$\begin{aligned}
(\nabla + S)_{\alpha D_1} D_2 &= \nabla_{\alpha D_1} D_2 + \langle \alpha D_1, D_2; S \rangle \\
&= \alpha \nabla_{D_1} D_2 + \alpha \langle D_1, D_2; S \rangle \\
&= \alpha (\nabla + S)_{D_1} D_2
\end{aligned}$$
de modo que $\nabla + S$ es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal en el primer argumento. Luego, por la regla de Leibniz graduada que satisface ∇ y la $\Gamma(\bigwedge E)$–linealidad graduada de S en el segundo argumento, se tiene que
$$\begin{aligned}
(\nabla + S)_{D_1} (\alpha D_2) &= \nabla_{D_1} \alpha D_2 + \langle D_1, \alpha D_2; S \rangle \\
&= \left(D_1(\alpha) D_2 + (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \nabla_{D_1} D_2 \right) \\
&\quad + (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \langle D_1, D_2; S \rangle \\
&= D_1(\alpha) D_2 + (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha (\nabla + S)_{D_1} D_2
\end{aligned}$$

de modo que se satisface la regla de Leibniz graduada en el segundo argumento de $\nabla + S$. Concluímos que efectivamente es una conexión graduada.

Lo anterior sugiere que $\mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$ tiene una estructura afín.

Proposición 2.2.1. El conjunto $\mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$ de conexiones graduadas en la supervariedad $(M, \Gamma(\wedge E))$ es un espacio afín modelado sobre el espacio

$$\mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}} = \{S : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \mid \ S \text{ es } \Gamma(\wedge E)\text{-bilineal graduada}\}.$$

En particular, dada una conexión graduada fija ∇, cualesquier otra conexión graduada es de la forma $\nabla + S$, para algún $S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$.

Notemos que si ∇ y ∇' son homogéneas del mismo grado $k \in \mathsf{Z}_2$, entonces $\nabla - \nabla \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$ será también una aplicación homogénea del mismo grado k; y de hecho, como $\nabla + S$ es homogéna si y sólo si ∇ y S son homogénas del mismo grado, entonces tenemos también una estructura afín en el espacio de conexiones graduadas homogéneas.

Proposición 2.2.2. El conjunto de conexiones graduadas homogéneas de grado $k \in \mathsf{Z}_2$ forma un espacio afín sobre el subespacio de $\mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$ consistente de las aplicaciones $\Gamma(\wedge E)$-bilineales graduadas homogéneas de grado k.

Observación. En adelante, para ahorrar notación, escribiremos solo $\mathcal{T}^r_{1,\mathsf{Gr}}$ para referirnos al conjunto de aplicaciones $\Gamma(\wedge E)$-multilineales graduadas en el espacio $\mathcal{T}^r_{1,\mathsf{Gr}}(\mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M))$.

2.2.2. El espacio afín de conexiones graduadas simétricas

Se define [cf. [23]] la **torsión de una conexión graduada** ∇,

$$\mathsf{T}^{\nabla} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$$

como

$$\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla} \rangle := \nabla_{D_1} D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|} \nabla_{D_2} D_1 - [D_1, D_2].$$

Si $\mathsf{T}^{\nabla} = 0$ decimos que la conexión graduada es **simétrica**. Denotaremos por $\mathcal{S}_{\mathsf{Gr}}(M)$ a la colección de conexiones graduadas simétricas en $(M, \Gamma(\wedge E))$.

Veremos a continuación que la notación $\langle -; \mathsf{T}^{\nabla} \rangle$ tiene sentido, pues T^{∇} resulta ser $\Gamma(\wedge E)$−bilineal graduada. Además, por analogía con el caso clásico donde se tiene que $T^{\nabla} \in \Omega^2(M; TM)$, esto es, T^{∇} es antisimérica y $\mathcal{C}^{\infty}(M)$-bilineal, en el caso graduado se tienen las siguientes propiedades:

Proposición 2.2.3. Si $\mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}}$ denota al subespacio de $\mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$ de aplicaciones $\Gamma(\wedge E)$-bilineales graduadas que son antisimétricas graduadas, entonces $\mathsf{T}^{\nabla} \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}}$. Esto es,

1. Es antisimétrica graduada: $\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla} \rangle = -(-1)^{|D_1||D_2|} \langle D_2, D_1; \mathsf{T}^{\nabla} \rangle$
2. Es $\Gamma(\wedge E)$-bilineal graduada:
   - (i) $\langle \alpha D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla} \rangle = \alpha \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla} \rangle$
   - (ii) $\langle D_1, \alpha D_2; \mathsf{T}^{\nabla} \rangle = (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla} \rangle$

Además, el operador T^{∇} será homogéneo si y sólo si ∇ es homogénea par, en cuyo caso también T^{∇} es par.

Demostración. Para verificar la antisimetría graduada usamos que el corchete de derivaciones es antisimétrico graduado, y así

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle &= \nabla_{D_1}D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}D_1 - [D_1, D_2]\\ &= \nabla_{D_1}D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}D_1 + (-1)^{|D_1||D_2|}[D_2, D_1]\\ &= -(-1)^{|D_1||D_2|}\left(\nabla_{D_2}D_1 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_1}D_2 - [D_2, D_1]\right)\\ &= -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle.\end{aligned}$$

Por otro lado, para establecer la $\Gamma(\bigwedge E)$-bilinealidad graduada de T^{∇}, usaremos que

$$[\alpha D_1, D_2] = \alpha[D_1, D_2] - (-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|}D_2(\alpha)D_1.$$

Entonces, en el primer argumento tenemos

$$\begin{aligned}\langle \alpha D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle &= \nabla_{\alpha D_1}D_2 - (-1)^{|\alpha D_1||D_2|}\nabla_{D_2}\alpha D_1 - [\alpha D_1, D_2]\\ &= \alpha\nabla_{D_1}D_2\\ &\quad -(-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|}\left(D_2(\alpha)D_1 + (-1)^{|\alpha||D_2|}\alpha\nabla_{D_2}D_1\right)\\ &\quad -\alpha[D_1, D_2] + (-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|}D_2(\alpha)D_1\\ &= \alpha\nabla_{D_1}D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}\alpha\nabla_{D_2}D_1 - \alpha[D_1, D_2]\\ &= \alpha\left(\nabla_{D_1}D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}D_1 - [D_1, D_2]\right)\\ &= \alpha\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle.\end{aligned}$$

Luego, por la antisimetría de T^{∇} y la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada en el primer argumento, se sigue directamente que T^{∇} también es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal graduada en el segundo argumento, pues

$$\begin{aligned}\langle D_1, \alpha D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle &= -(-1)^{|D_1||\alpha D_2|}\langle \alpha D_2, D_1; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle\\ &= -(-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}\alpha\langle D_2, D_1; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle\\ &= (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle.\end{aligned}$$

La última afirmación en la proposición se sigue directamente de observar que $|[D_1, D_2]| = |D_1| + |D_2|$.

■

Notemos que para cualesquier conexión graduada de la forma $\nabla + S$, donde $S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$, su torsión es

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla+S}\rangle &= (\nabla + S)_{D_1}D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}(\nabla + S)_{D_2}D_1 - [D_1, D_2]\\ &= \nabla_{D_1}D_2 + \langle D_1, D_2; S\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}D_1\\ &\quad -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle - [D_1, D_2]\\ &= \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + \langle D_1, D_2; S\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle.\end{aligned}$$

de modo que tenemos la siguiente relación entre T^{∇} y $\mathsf{T}^{\nabla+S}$:

$$\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla+S}\rangle = \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + \langle D_1, D_2; S\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle. \tag{2.2}$$

Proposición 2.2.4. De (2.2) se sigue que la correspondencia

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Tor}: & \mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M) & \longrightarrow & \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}} \\ & \nabla & \longmapsto & \mathsf{T}^{\nabla} \end{array}$$

define una aplicación afín con transformación lineal asociada

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\mathrm{Tor}}: & \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}} & \longrightarrow & \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}} \\ & S & \longmapsto & \widetilde{\mathrm{Tor}}(S) \end{array}$$

definida por $\widetilde{\mathrm{Tor}}(S)(D_1, D_2) := \langle D_1, D_2; S\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle$, esto es, $\widetilde{\mathrm{Tor}}$ es dos veces el operador antisimetrización graduada.

Por otro lado, notemos que también de la ecuación (2.2) se sigue que para una conexión graduada simétrica ∇, la conexión $\nabla + S$ será simétrica si y solo si S es $\Gamma(\bigwedge E)$-bilineal graduada y simétrica graduada, lo cual sugiere que la colección de conexiones graduadas simétricas tiene estructura de subespacio afín.

Proposición 2.2.5. El conjunto $\mathcal{S}_{\mathsf{Gr}}(M)$ de conexiones graduadas simétricas es un subespacio afín de $\mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$ modelado sobre el espacio

$$\mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Sim}} := \{S \in \mathcal{T}^2_{1,G} \mid \langle D_1, D_2; S\rangle = (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle\}$$

de las aplicaciones $\Gamma(\bigwedge E)$-bilineales graduadas que son simétricas graduadas.

Por otra parte, veremos que dada una conexión graduada fija ∇, siempre es posible encontrar un factor de corrección $S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$, que haga a $\nabla + S$ simétrica.

Proposición 2.2.6. (**Factor de corrección para conexiones graduadas simétricas**). Si ∇ es una conexión graduada, entonces $\nabla - \frac{1}{2}\mathsf{T}^{\nabla}$ resulta ser una conexión graduada simétrica.

Demostración. De la Proposición 2.2.3. se tiene que $-\frac{1}{2}\mathsf{T}^{\nabla} \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}} \hookrightarrow \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$, de modo que, de la Proposición 2.2.1. tenemos que $\nabla - \frac{1}{2}\mathsf{T}^{\nabla}$ es una conexión graduada. El hecho de que $\nabla - \frac{1}{2}\mathsf{T}^{\nabla}$ resulta ser simétrica, se sigue de la relación (2.2) haciendo $S := -\frac{1}{2}\mathsf{T}^{\nabla}$, y de la antisimetría graduada de T^{∇}, pues

$$\begin{aligned} &\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla+S}\rangle \\ &\quad= \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + \langle D_1, D_2; S\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle \\ &\quad= \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + \langle D_1, D_2; -\tfrac{1}{2}\mathsf{T}^{\nabla}\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; -\tfrac{1}{2}\mathsf{T}^{\nabla}\rangle \\ &\quad= \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle \\ &\quad= 0. \end{aligned}$$ ■

Del resultado anterior, se sigue que también en el caso graduado es posible hablar de la parte simétrica y la antisimétrica de una conexión graduada.

Proposición 2.2.7. Toda conexión graduada se puede descomponer de manera única en una parte simétrica y una antisimétrica

$$\nabla = \nabla^{\mathsf{Sim}} + A$$

donde $\nabla^{\mathsf{Sim}} := \nabla - \frac{1}{2}\mathsf{T}^{\nabla} \in \mathcal{S}_{\mathsf{Gr}}(M)$ y $A := \frac{1}{2}\mathsf{T}^{\nabla} \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}} \subset \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$.

Demostración. La existencia queda establecida por la Proposición 2.2.6. anterior. Para comprobar la unicidad de la descomposición, supongamos que existen dos expresiones para ∇,

$$\nabla = \nabla^{\mathsf{Sim}} + A \qquad \text{y} \qquad \nabla = \nabla_1^{\mathsf{Sim}} + A_1$$

con $\nabla^{\mathsf{Sim}}, \nabla_1^{\mathsf{Sim}} \in \mathcal{S}_{\mathsf{Gr}}(M)$ y $A, A_1 \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}}$. Entonces $\nabla^{\mathsf{Sim}} - \nabla_1^{\mathsf{Sim}} = A_1 - A$, pero por un lado, de la estructura afín de $\mathcal{S}_{\mathsf{Gr}}(M)$, la Proposición 2.2.5. nos dice que $\nabla^{\mathsf{Sim}} - \nabla_1^{\mathsf{Sim}} \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Sim}}$; por otro lado, $A_1 - A \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}}$, de modo que $\nabla^{\mathsf{Sim}} - \nabla_1^{\mathsf{Sim}} = A_1 - A \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Sim}} \cap \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}} = \{0\}$ y por lo tanto $\nabla_1^{\mathsf{Sim}} = \nabla^{\mathsf{Sim}}$ y $A_1 = A$ y así, la descomposición es única. ∎

Notemos que la ecuación (2.2) establece una relación entre la parte antisimétrica de una conexión graduada de la forma $\nabla + S$ y la parte antisimétrica de ∇; de hecho también de (2.2) podemos deducir una relación entre sus partes simétricas, pues

$$\begin{aligned}
(\nabla + S)^{\mathsf{Sim}}_{D_1} D_2 &= (\nabla + S)_{D_1} D_2 - \tfrac{1}{2}\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla + S}\rangle \\
&= \nabla_{D_1} D_2 + \langle D_1, D_2; S\rangle \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\left\{\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + \langle D_1, D_2; S\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle\right\} \\
&= \nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_1} D_2 + \tfrac{1}{2}\left\{\langle D_1, D_2; S\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle\right\}
\end{aligned}$$

de modo que

$$(\nabla + S)^{\mathsf{Sim}}_{D_1} D_2 = \nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_1} D_2 + \frac{1}{2}\left\{\langle D_1, D_2; S\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle\right\}. \tag{2.3}$$

Esta relación proporciona una transformación entre espacios afines:

Proposición 2.2.8. De (2.3) se tiene que la correspondencia

$$\begin{array}{rccc}
\mathrm{Sim}: & \mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M) & \longrightarrow & S_{\mathsf{Gr}}(M) \\
& \nabla & \longmapsto & \nabla^{\mathsf{Sim}}
\end{array}$$

define una aplicación afín con transformación lineal asociada

$$\begin{array}{rccc}
\widetilde{\mathrm{Sim}}: & \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}} & \longrightarrow & \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Sim}} \\
& S & \longmapsto & \widetilde{\mathrm{Sim}}(S)
\end{array}$$

dada por $\widetilde{\mathrm{Sim}}(S)(D_1, D_2) := \frac{1}{2}\left\{\langle D_1, D_2; S\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle\right\}$, esto es, $\widetilde{\mathrm{Sim}}$ es precisamente el operador simetrización graduada.

Nota 2.2.9. Debemos notar que en esta sección todas las definiciones y resultados tienen sentido para conexiones graduadas sin importar si son homogéneas o no. De hecho, si en los enunciados de los resultados presentados consideramos sólo conexiones graduadas pares, y en vez de considerar el espacio $\mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$ nos restringimos a su subespacio $\mathcal{T}^{2\,\mathsf{Par}}_{1,\mathsf{Gr}}$ de aplicaciones $\Gamma(\bigwedge E)$-bilineales homogéneas pares, cada uno de los resultados sigue siendo válido. Sin embargo, si nos restringimos al espacio de conexiones graduadas impares, los resultados no se preservarán más, pues sólo en el caso de que ∇ sea par, T^∇ será una aplicación homogénea, de modo que en adelante este espacio no será de nuestro interés.
En adelante nos restringiremos al análisis de conexiones graduadas pares.

2.2.3. El espacio afín de conexiones graduadas compatibles

Observación. En esta sección se introduce la noción de derivada covariante de tensores covariantes graduados. En la literatura general existen diferentes versiones de esta noción, por lo que no debemos confundirla con la que usamos en este trabajo y que en el caso particular de 2-tensores covariantes graduados está dada por la expresión (2.4). El motivo por la que usamos esta definición es debido a las propiedades que satisface que se comprueban en las proposiciones 2.2.10 y 2.2.11.

Análogamente al caso no graduado, se cumple que una conexión graduada par ∇ induce una "conexión graduada" ó derivada covariante en el espacio de p-tensores covariantes graduados $\mathcal{T}^p_{\mathsf{Gr}}$ sobre una supervariedad,

$$\nabla : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{T}^p_{\mathsf{Gr}} \to \mathcal{T}^p_{\mathsf{Gr}}$$

(la cual seguiremos denotando con ∇) que es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal en el primer argumento, y satisface la regla de Leibniz graduada en el segundo. Explícitamente, para 2-tensores graduados, se tiene la siguiente expresión:

Proposición 2.2.10. Sea ∇ una conexión graduada par. Si $\boldsymbol{\tau}$ es un 2-tensor covariante graduado y $D \in \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$, entonces **la derivada covariante graduada** $\nabla_D\boldsymbol{\tau}$ definida por

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle \quad := \quad & (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\,\{D(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle) - \langle \nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ & -(-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\Big\}\end{aligned} \tag{2.4}$$

para todos $D_1, D_2 \in \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$, es nuevamente un 2-tensor covariante graduado, esto es,

(i) $\langle \alpha D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle = \alpha\langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle$

(ii) $\langle D_1, \alpha D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle = (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle$.

En particular, si $\boldsymbol{\tau}$ es homogéneo, $\nabla_D\boldsymbol{\tau}$ es homogéneo de grado $|\nabla_D\boldsymbol{\tau}| = |D| + |\boldsymbol{\tau}|$.

Además, la restricción al subespacio de los 2-tensores covariantes antisimétricos graduados, y al espacio de los que son simétricos graduados, es cerrada, esto es,

$$\nabla : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \Omega^2_{\mathsf{Gr}}(M) \to \Omega^2_{\mathsf{Gr}}(M)$$

y

$$\nabla : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \Sigma^2_{\mathsf{Gr}}(M) \to \Sigma^2_{\mathsf{Gr}}(M).$$

Demostración. Sean $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}^2_{\mathsf{Gr}}$ y $D \in \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$ fijos. Probaremos primero que $\nabla_D\boldsymbol{\tau}$ es un 2-tensor covariante graduado. Para probar la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada en el primer argumento de $\nabla_D\boldsymbol{\tau}$, por un lado,

$$\begin{aligned}\langle\alpha D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle &= (-1)^{|D|(|\alpha D_1|+|D_2|)}\{D(\langle\alpha D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle)\\ &\quad -\langle\nabla_D\alpha D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle -(-1)^{|D|(|\alpha D_1|)}\langle\alpha D_1, \nabla_D D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle\}\end{aligned}$$

pero $\boldsymbol{\tau}$ es $\Gamma(\bigwedge E)$-bilineal graduado y D es una derivación de grado $|D|$, así que

$$\begin{aligned}D(\langle\alpha D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle) &= D(\alpha\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle)\\ &= D(\alpha)\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle + (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\, D(\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle),\end{aligned}$$

luego, usando la regla de Leibniz graduada que ∇ satisface, y usando la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada de $\boldsymbol{\tau}$, tenemos que

$$\begin{aligned}-\langle\nabla_D\alpha D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle &= -\langle D(\alpha)D_1 + (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\nabla_D D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle\\ &= -D(\alpha)\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\langle\nabla_D D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle.\end{aligned}$$

y también

$$-(-1)^{|D|(|\alpha D_1|)}\langle\alpha D_1, \nabla_D D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle = -(-1)^{|D|(|\alpha|+|D_1|)}\alpha\langle D_1, \nabla_D D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle$$

de modo que, sumando estas últimas tres ecuaciones,

$$\begin{aligned}&D(\langle\alpha D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle) - \langle\nabla_D\alpha D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D|(|\alpha D_1|)}\langle\alpha D_1, \nabla_D D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle\\ &= (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\left(D(\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle) - \langle\nabla_D D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle\right).\end{aligned}$$

Luego, multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(-1)^{|D|(|\alpha D_1|+|D_2|)}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\langle\alpha D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle &= (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\alpha\{D(\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle) - \langle\nabla_D D_1, D_2\boldsymbol{\tau}\rangle\\ &\quad -(-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle\}\\ &= \alpha\langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle\end{aligned}$$

de modo que $\nabla_D\boldsymbol{\tau}$ es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal graduada en el primer argumento.

Para probar la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada en el segundo argumento de $\nabla_D\boldsymbol{\tau}$, tenemos que,

$$\begin{aligned}\langle D_1, \alpha D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle &= (-1)^{|D|(|D_1|+|\alpha D_2|)}\{D(\langle D_1, \alpha D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle)\\ &\quad -\langle\nabla_D D_1, \alpha D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D\alpha D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle\}\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}&D(\langle D_1, \alpha D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle)\\ &= (-1)^{|\alpha||D_1|}D(\alpha\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle)\\ &= (-1)^{|\alpha||D_1|}\left(D(\alpha)\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle + (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\, D(\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle)\right)\\ &= (-1)^{|\alpha||D_1|}D(\alpha)\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle + (-1)^{|\alpha|(|D|+|D_1|)}\alpha\, D(\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\tau}\rangle),\end{aligned}$$

y por otro lado, como ∇ es par, de la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada en el segundo argumento de $\boldsymbol{\tau}$,

$$-\langle \nabla_D D_1, \alpha D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle \quad = \quad -(-1)^{|\alpha|(|D|+|D_1|)}\alpha\langle \nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle$$

y además, por la regla de Leibniz graduada que satisface ∇ en el segundo argumento,

$$\begin{aligned}
&-(-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D \alpha D_2\rangle \\
&\quad = \quad -(-1)^{|D||D_1|}\left(\langle D_1\,, D(\alpha)D_2 + (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\right) \\
&\quad = \quad -(-1)^{|D||D_1|}\langle D_1\,, D(\alpha)D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D|(|D_1|+|\alpha|)}\langle D_1\,, \alpha\nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle \\
&\quad = \quad -(-1)^{|\alpha||D_1|}D(\alpha)\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D||D_1|+|\alpha|(|D|+|D_1|)}\alpha\langle D_1, \nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle
\end{aligned}$$

y sumando las últimas tres ecuaciones que obtuvimos, resulta que

$$\begin{aligned}
&D\left(\langle D_1, \alpha D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\right) - \langle \nabla_D D_1, \alpha D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D \alpha D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle \\
&\quad = \quad (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D|)}\alpha\left(D\left(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\right) - \langle \nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left.-(-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\right),
\end{aligned}$$

y ahora, multiplicando ambos lados de la ecuacióna anterior por $(-1)^{|D|(|D_1|+|\alpha D_2|)}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle D_1, \alpha D_2; \nabla_D \boldsymbol{\tau}\rangle &= (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\,(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\left\{D\left(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\right)\right. \\
&\quad \left.-\langle \nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\right\} \\
&= (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1, D_2; \nabla_D \boldsymbol{\tau}\rangle
\end{aligned}$$

de modo que $\nabla_D \boldsymbol{\tau}$ es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal graduada también en el segundo argumento.

Del cálculo anterior concluimos que efectivamente $\nabla_D \boldsymbol{\tau}$ es un 2-tensor covariante graduado.

Luego, claramente de la expresión (2.4), como ∇ es par

$$\begin{aligned}
|\langle D_1, D_2; \nabla_D \boldsymbol{\tau}\rangle| &= |D(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle)| = |\langle \nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle| \\
&= |\langle D_1, \nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle| = |D| + |D_1| + |D_2| + |\boldsymbol{\tau}|
\end{aligned}$$

de modo que $|\nabla_D \boldsymbol{\tau}| = |D| + |\boldsymbol{\tau}|$.

Para comprobar la última afirmación de la proposición, supongamos que $\boldsymbol{\tau}$ es antisimétrica graduada. Entonces, como ∇ es par,

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2; \nabla_D \boldsymbol{\tau}\rangle &= (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\left\{-(-1)^{|D_1||D_2|}D(\langle D_2, D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle)\right. \\
&\quad +(-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)}\langle D_2, \nabla_D D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle \\
&\quad \left.+(-1)^{|D_1||D_2|}\langle \nabla_D D_2, D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle\right\} \\
&= -(-1)^{|D_1||D_2|}(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\left\{D(\langle D_2, D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle)\right. \\
&\quad \left.-(-1)^{|D||D_2|}\langle D_2, \nabla_D D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle - \langle \nabla_D D_2, D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle\right\} \\
&= -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; \nabla_D \boldsymbol{\tau}\rangle
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\nabla_D \boldsymbol{\tau}$ es también antisimétrica graduada.

De manera similar, si ahora suponemos que $\boldsymbol{\tau}$ es simétrica graduada, por ser ∇ par,

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2; \nabla_D \boldsymbol{\tau}\rangle &= (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\Big\{(-1)^{|D_1||D_2|}D(\langle D_2, D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle) \\
&\quad -(-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)}\langle D_2, \nabla_D D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle \nabla_D D_2, D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle\Big\} \\
&= (-1)^{|D_1||D_2|}(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\big\{D(\langle D_2, D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle) \\
&\quad -(-1)^{|D||D_2|}\langle D_2, \nabla_D D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle - \langle \nabla_D D_2, D_1; \boldsymbol{\tau}\rangle\big\} \\
&= (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; \nabla_D \boldsymbol{\tau}\rangle
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\nabla_D \boldsymbol{\tau}$ es simétrica graduada. ■

Veamos ahora que el operador ∇ definido en la proposición anterior, sobre el espacio de 2-tensores covariantes graduados, es una derivada covariante.

Proposición 2.2.11. Si ∇ es una conexión graduada par, entonces induce una derivada covariante en el espacio de 2-tensores covariantes graduados, esto es, una aplicación $\nabla : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{T}^2_{\mathsf{Gr}} \to \mathcal{T}^2_{\mathsf{Gr}}$ tal que

(i) Es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal graduada en el primer argumento:

$\nabla_{\alpha D}\boldsymbol{\tau} = \alpha\ (\nabla_D \boldsymbol{\tau})$

(ii) Satisface la regla de Leibniz graduada en el segundo argumento:

$\nabla_D(\alpha\boldsymbol{\tau}) = D(\alpha)\boldsymbol{\tau} + (-1)^{|\alpha||D|}\alpha\nabla_D\boldsymbol{\tau}$

(donde se está considerando en $\mathcal{T}^2_{\mathsf{Gr}}$ la estructura de $\Gamma(\bigwedge E)$-módulo izquierdo inducida por la estructura natural de $\Gamma(\bigwedge E)$-módulo derecho).

Demostración. Por un lado, para probar la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada en el primer argumento de ∇, debemos mostrar que se cumple la igualdad entre los 2-tensores covariantes graduados $\nabla_{\alpha D}\boldsymbol{\tau}$ y $\alpha\,(\nabla_D\boldsymbol{\tau})$. Como

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2; \nabla_{\alpha D} \boldsymbol{\tau}\rangle &= (-1)^{|\alpha D|(|D_1|+|D_2|)}\big\{\alpha D(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle) \\
&\quad -\langle \nabla_{\alpha D} D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|\alpha D||D_1|}\langle D_1, \nabla_{\alpha D} D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\big\}
\end{aligned}$$

y por la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad de ∇ en el primer argumento y la $\Gamma(\bigwedge E)$-bilinealidad graduada de $\boldsymbol{\tau}$ tenemos que

$$-\langle \nabla_{\alpha D} D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle = -\langle \alpha\nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle = -\alpha\langle \nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle$$

y

$$\begin{aligned}
-(-1)^{|\alpha D||D_1|}\langle D_1, \nabla_{\alpha D} D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle &= -(-1)^{(|\alpha|+|D|)|D_1|}\langle D_1, \alpha\nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle \\
&= -(-1)^{|D||D_1|}\alpha\langle D_1, \nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2; \nabla_{\alpha D} \boldsymbol{\tau}\rangle &= (-1)^{(|\alpha|+|D|)(|D_1|+|D_2|)}\alpha\big\{D(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle) \\
&\quad -\langle \nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\big\} \\
&= (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\alpha\langle D_1, D_2; \nabla_D \boldsymbol{\tau}\rangle \\
&= \langle D_1, D_2; \alpha\nabla_D \boldsymbol{\tau}\rangle
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la estructura inducida de módulo izquierdo en el espacio de tensores graduados. Por lo tanto, como D_1, D_2 se tomaron arbitrarios, $\nabla_{\alpha D}\boldsymbol{\tau} = \alpha\,\nabla_D\boldsymbol{\tau}$.

Solo falta verificar que ∇_D satisface la regla de Leibniz graduada. Por un lado,

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2; \nabla_D(\alpha\boldsymbol{\tau})\rangle &= (-1)^{|D|(|D_1|+D_2)}\big\{D(\langle D_1, D_2; \alpha\boldsymbol{\tau}\rangle)\\ &\quad -\langle \nabla_D D_1, D_2; \alpha\boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D D_2; \alpha\boldsymbol{\tau}\rangle\big\}\end{aligned}$$

pero, por la estructura de $\Gamma(\bigwedge E)$-módulo izquierdo inducida en el espacio de tensores, y al ser D una derivación de grado $|D|$,

$$\begin{aligned}D(\langle D_1, D_2; \alpha\boldsymbol{\tau}\rangle) &= (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}D(\alpha\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle)\\ &= (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}D(\alpha)\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\\ &\quad +(-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)+|D||\alpha|}\alpha D(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle),\end{aligned}$$

y además

$$-\langle \nabla_D D_1, D_2; \alpha\boldsymbol{\tau}\rangle = -(-1)^{|\alpha|(|D|+|D_1|+|D_2|)}\alpha\langle \nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle$$

y

$$-(-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D D_2; \alpha\boldsymbol{\tau}\rangle = -(-1)^{|D||D_1|+|\alpha|(|D|+|D_1|+|D_2|)}\alpha\langle D_1, \nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle.$$

Entonces, sumando estas tres últimas expresiones, se tiene que

$$\begin{aligned}&D(\langle D_1, D_2; \alpha\boldsymbol{\tau}\rangle) - \langle \nabla_D D_1, D_2; \alpha\boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D||D_1|}\langle D_1, \nabla_D D_2; \alpha\boldsymbol{\tau}\rangle\\ &\quad = (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\big\{D(\alpha)(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle) + (-1)^{|D||\alpha|}\alpha D(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle)\\ &\quad\ -(-1)^{|D||\alpha|}\langle \nabla_D D_1, D_2; \alpha\boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D||D_1|+|\alpha||D|}\alpha\langle D_1, \nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\big\}\end{aligned}$$

luego, multiplicando por $(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}$ la ecuación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2; \nabla_D(\alpha\boldsymbol{\tau})\rangle &= (-1)^{(|\alpha|+|D|)(|D_1|+|D_2|)}\big\{D(\alpha)\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\\ &\quad +(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_1, D_2; \nabla_D; \boldsymbol{\tau}\rangle\big\}\\ &= (-1)^{(|\alpha|+|D|)(|D_1|+|D_2|)}D(\alpha)\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau}\rangle\\ &\quad +(-1)^{|D||\alpha|+\alpha(|D_1|+|D_2|)}\langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle\\ &= \langle D_1, D_2; D(\alpha)\boldsymbol{\tau}\rangle + (-1)^{|D||\alpha|}\langle D_1, D_2; \alpha\nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle\end{aligned}$$

y como D_1, D_2 son arbitrarias, se sigue que $\nabla_D(\alpha\boldsymbol{\tau}) = D(\alpha)\boldsymbol{\tau} + (-1)^{D\alpha}\alpha\nabla_D\boldsymbol{\tau}$ como se quería mostrar. ■

Por analogía con el caso clásico, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2.12. Sea $\boldsymbol{\tau}$ un 2-tensor covariante graduado. Decimos que $\nabla \in \mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$ es **compatible** con $\boldsymbol{\tau}$ (o que ∇ preserva la estructura $\boldsymbol{\tau}$) si $\nabla\boldsymbol{\tau} = 0$. Denotaremos por $\mathcal{C}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathsf{Gr}}(M)$ a la colección de conexiones graduadas compatibles con $\boldsymbol{\tau}$.

Si consideramos una conexión graduada de la forma $\nabla + S$, con $S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$, la derivada covariante del 2-tensor graduado $\boldsymbol{\tau}$ respecto a ∇ y respecto a $\nabla + S$ se relaciona como:

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2; (\nabla + S)_D\boldsymbol{\tau}\rangle &= \langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\{\langle\,\langle D, D_1; S\rangle, D_2\,; \boldsymbol{\tau}\rangle\\ &\quad +(-1)^{|D||D_1|}\langle\, D_1, \langle D, D_2; S\rangle\,; \boldsymbol{\tau}\rangle\}\end{aligned} \tag{2.5}$$

ya que

$$\begin{aligned}
&\langle D_1, D_2; (\nabla + S)_D \boldsymbol{\tau} \rangle \\
&\quad = (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)} \{ D(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau} \rangle) - \langle (\nabla + S)_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau} \rangle \\
&\qquad -(-1)^{|D||D_1|} \langle D_1, (\nabla + S)_D D_2; \boldsymbol{\tau} \rangle \} \\
&\quad = (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)} \{ D(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\tau} \rangle) - \langle \nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\tau} \rangle - \langle \langle D, D_1; S \rangle, D_2 ; \boldsymbol{\tau} \rangle \\
&\qquad -(-1)^{|D||D_1|} \langle D_1, \nabla_D D_2; \boldsymbol{\tau} \rangle - (-1)^{|D||D_1|} \langle D_1, \langle D, D_2; S \rangle ; \boldsymbol{\tau} \rangle \} \\
&\quad = \langle D_1, D_2; \nabla_D \boldsymbol{\tau} \rangle - (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)} \{ \langle \langle D, D_1; S \rangle, D_2 ; \boldsymbol{\tau} \rangle \\
&\qquad +(-1)^{|D||D_1|} \langle D_1, \langle D, D_2; S \rangle ; \boldsymbol{\tau} \rangle \} .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para ∇ compatible con $\boldsymbol{\tau}$, se tiene que $\nabla + S$ será también compatible con $\boldsymbol{\tau}$ si y sólo si $\langle \langle D, D_1; S \rangle, D_2 ; \boldsymbol{\tau} \rangle + (-1)^{|D||D_1|} \langle D_1, \langle D, D_2; S \rangle ; \boldsymbol{\tau} \rangle = 0$, lo cual sugiere que el espacio de conexiones graduadas compatibles con un 2-tensor covariante graduado es también un espacio afín.

Proposición 2.2.13. Sea $\boldsymbol{\tau}$ un 2-tensor covariante graduado. Entonces $C^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathsf{Gr}}(M)$ es un subespacio afín de $\mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$ modelado sobre el subespacio de $\mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$ dado por

$$\{ S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}} \mid \langle \langle D, D_1; S \rangle, D_2 ; \boldsymbol{\tau} \rangle + (-1)^{|D|D_1|} \langle D_1, \langle D, D_2; S \rangle ; \boldsymbol{\tau} \rangle = 0 \}$$

Nos interesa en particular analizar los casos donde $\boldsymbol{\tau}$ tiene propiedades de (anti)simetría graduada, esto es, si $(M, \Gamma(\wedge E))$ es una supervariedad:

- Una **métrica graduada** en $(M, \Gamma(\wedge E))$ es una forma $\Gamma(\wedge E)$-bilineal graduada $\boldsymbol{g} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \Gamma(\wedge E)$ que es simétrica graduada y no degenerada. La pareja $((M, \Gamma(\wedge E)), \boldsymbol{g})$ será llamada **supervariedad Riemanniana**

- Una **forma simpléctica graduada** en $(M, \Gamma(\wedge E))$ es una 2-forma graduada $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^2_{\mathsf{Gr}}(M)$ no degenerada, que además es cerrada respecto a la diferencial exterior graduada d^{Gr}. La pareja $((M, \Gamma(\wedge E)), \boldsymbol{\omega})$ será llamada **supervariedad simpléctica**. Si además la supervariedad posee una conexión graduada ∇ simétrica y compatible con $\boldsymbol{\omega}$, decimos que la terna $((M, \Gamma(\wedge E)), \boldsymbol{\omega}, \nabla)$ es una **supervariedad de Fedosov**.

2.2.3.1. Caracterización en el caso métrico graduado y La conexión graduada de Levi-Civita

De la Proposición 2.2.4. y la Observación 2.2.9. tenemos que la torsión define una aplicación afín $\mathrm{Tor} : \mathcal{C}^{\mathsf{Par}}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{T}^{2\,\mathsf{Par}}_{1,\mathsf{GrAnti}}$. Veremos en el Teorema 2.2.15 que ésta aplicación se restringe a una biyección sobre el subespacio $\mathcal{C}^{g\,\mathsf{Par}}_{\mathsf{Gr}}(M) \subset \mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$, cuando $\boldsymbol{g}$ es una métrica graduada.

Proposición 2.2.14. Sea $((M, \Gamma(\wedge E)), \boldsymbol{g})$ una supervariedad Riemanniana.

(i) Si ∇ es una conexión graduada par y compatible con $\boldsymbol{g}$, satisface:

$$\langle 2\nabla_{D_1} D_2 \, , \, D_3; \boldsymbol{g} \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= D_1\left(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle\right) + \langle\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_1, D_2]\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\left\{D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle) - \langle\langle D_3, D_1; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_3, D_1]\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle\right\} \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\left\{D_2(\langle D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle) - \langle\langle D_2, D_3; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_2, D_3]\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle\right\}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

(ii) Recíprocamente, para cualesquier $S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}}$ homogéneo par, se cumple que ∇ definida mediante la ecuación 2.6 haciendo $\mathsf{T}^{\nabla} = S$, resulta ser una conexión graduada par compatible con $\boldsymbol{g}$, y con torsión precisamente S.

Demostración. .

(i) Supongamos que ∇ es compatible con la métrica graduada $\boldsymbol{g}$. Como $\nabla\boldsymbol{g} = 0$, obtenemos las siguientes tres ecuaciones

$$
\begin{aligned}
D_1(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle) &= \langle\nabla_{D_1} D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, \nabla_{D_1} D_3; \boldsymbol{g}\rangle \\
&= \langle\nabla_{D_1} D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|D_2||D_3|}\langle\nabla_{D_1} D_3, D_2; \boldsymbol{g}\rangle,
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&-(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)} D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\ = -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle\nabla_{D_3} D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle - (-1)^{|D_2||D_3|}\langle D_1, \nabla_{D_3} D_2; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\ = -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle\nabla_{D_3} D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle - (-1)^{|D_2||D_3|+|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle\nabla_{D_3} D_2, D_1; \boldsymbol{g}\rangle,
\end{aligned}
$$

y además

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)} D_2(\langle D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\ = \ (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle\nabla_{D_2} D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|+|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, \nabla_{D_2} D_1; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\ = \ (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle\nabla_{D_2} D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle\nabla_{D_2} D_1, D_3; \boldsymbol{g}\rangle
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que ∇ es par y $\boldsymbol{g}$ es simétrica graduada.

Luego, sumando las tres ecuaciones anteriores obtenidas,

$$
\begin{aligned}
&D_1\left(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle\right) - (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)} D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&+ (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)} D_2(\langle D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\qquad = \langle\nabla_{D_1} D_2 + (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2} D_1\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\qquad\quad +(-1)^{|D_2||D_3|}\langle\nabla_{D_1} D_3 - (-1)^{|D_1||D_3|}\nabla_{D_3} D_1\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\qquad\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle\nabla_{D_2} D_3 - (-1)^{|D_2||D_3|}\nabla_{D_3} D_2\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle
\end{aligned}
$$

y si en el primer término del lado derecho de la igualdad, sumamos y restamos $\nabla_{D_1} D_2$ en el primer argumento de $\boldsymbol{g}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&D_1\left(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle\right) - (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)} D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&+ (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)} D_2(\langle D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \langle 2\nabla_{D_1} D_2\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle - \langle \nabla_{D_1} D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2} D_1\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad +(-1)^{|D_2||D_3|}\langle \nabla_{D_1} D_3 - (-1)^{|D_1||D_3|}\nabla_{D_3} D_1\,,\, D_2;\boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle \nabla_{D_2} D_3 - (-1)^{|D_2||D_3|}\nabla_{D_3} D_2\,,\, D_1;\boldsymbol{g}\rangle \\
&= \langle 2\nabla_{D_1} D_2\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad -\langle \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_1, D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad +(-1)^{|D_2||D_3|}\langle \langle D_1, D_3; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_1, D_3]\,,\, D_2;\boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle \langle D_2, D_3; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_2, D_3]\,,\, D_1;\boldsymbol{g}\rangle \\
&= \langle 2\nabla_{D_1} D_2\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad -\langle \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_1, D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|}\langle \langle D_3, D_1; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_3, D_1]\,,\, D_2;\boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle \langle D_2, D_3; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_2, D_3]\,,\, D_1;\boldsymbol{g}\rangle.
\end{aligned}$$

Luego, despejando el término en el que aparece $2\nabla_{D_1} D_2$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\langle 2\nabla_{D_1} D_2\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle \\
&= D_1\left(\langle D_2, D_3;\boldsymbol{g}\rangle\right) + \langle \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_1, D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\left\{D_3(\langle D_1, D_2;\boldsymbol{g}\rangle) - \langle \langle D_3, D_1; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_3, D_1]\,,\, D_2;\boldsymbol{g}\rangle\right\} \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\left\{D_2(\langle D_3, D_1;\boldsymbol{g}\rangle) - \langle \langle D_2, D_3; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + [D_2, D_3]\,,\, D_1;\boldsymbol{g}\rangle\right\}
\end{aligned}$$

que es precisamente la ecuación (2.6).

(ii) Sea $S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Anti}}$ homogéneo par arbitrario, y ∇ definida por medio de la no-degeneración de $\boldsymbol{g}$ mediante la ecuación (2.6). Comprobaremos que ∇ efectivamente es una conexión graduada par, que es compatible con la métrica graduada $\boldsymbol{g}$, y que tiene torsion S.

Veamos primero que ∇ es una conexión graduada. Por un lado, si $\alpha \in \Gamma(\bigwedge E)$, para todo D_3 se tiene que

$$\begin{aligned}
&\langle 2\nabla_{\alpha D_1} D_2\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle \\
&= \alpha D_1\left(\langle D_2, D_3;\boldsymbol{g}\rangle\right) + \langle \langle \alpha D_1, D_2; S\rangle + [\alpha D_1, D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_3|(|\alpha D_1|+|D_2|)}\left\{D_3(\langle \alpha D_1, D_2;\boldsymbol{g}\rangle) - \langle \langle D_3, \alpha D_1; S\rangle + [D_3, \alpha D_1]\,,\, D_2;\boldsymbol{g}\rangle\right\} \\
&\quad +(-1)^{|\alpha D_1|(|D_2|+|D_3|)}\left\{D_2(\langle D_3, \alpha D_1;\boldsymbol{g}\rangle) - \langle \langle D_2, D_3; S\rangle + [D_2, D_3]\,,\, \alpha D_1;\boldsymbol{g}\rangle\right\},
\end{aligned}$$

pero

$$\langle [\alpha D_1, D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle = \alpha\langle [D_1, D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{g}\rangle - (-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|} D_2(\alpha)\langle D_1, D_3;\boldsymbol{g}\rangle,$$

y

$$D_3(\langle \alpha D_1, D_2;\boldsymbol{g}\rangle) - \langle \langle D_3, \alpha D_1; S\rangle + [D_3, \alpha D_1]\,,\, D_2;\boldsymbol{g}\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= D_3(\alpha)\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\quad -(-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha\langle\langle D_3, D_1; S\rangle\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle - D_3(\alpha)\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha\langle [D_3, D_1]\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha \left\{ D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle) - \langle\langle D_3, D_1; S\rangle\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle - \langle [D_3, D_1]\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle \right\},
\end{aligned}
$$

y por ser $\boldsymbol{g}$ simétrica graduada

$$
\begin{aligned}
&D_2(\langle D_3, \alpha D_1; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&= (-1)^{|\alpha||D_3|} D_2(\alpha)\langle D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|\alpha|(|D_2|+|D_3|)}\alpha D_2\langle D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle \\
&= (-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_3|} D_2(\alpha)\langle D_1, D_3; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|\alpha|(|D_2|+|D_3|)}\alpha D_2\langle D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle,
\end{aligned}
$$

y finalmente, por ser S par,

$$
\langle\langle D_2, D_3; S\rangle + [D_2, D_3]\,,\, \alpha D_1; \boldsymbol{g}\rangle = (-1)^{|\alpha|(|D_2|+|D_3|)}\alpha\langle\langle D_2, D_3; S\rangle + [D_2, D_3]\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle,
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
&\langle 2\nabla_{\alpha D_1} D_2\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle \\
&= \alpha D_1\left(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle\right) + \alpha\langle\langle D_1, D_2; S\rangle\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle + \alpha\langle [D_1, D_2]\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\alpha \left\{ D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle) - \langle\langle D_3, D_1; S\rangle\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle \right. \\
&\quad \left. -\langle [D_3, D_1]\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle \right\} \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\alpha \left\{ D_2\langle D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle - \langle\langle D_2, D_3; S\rangle + [D_2, D_3]\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle \right\} \\
&= \langle 2\alpha\nabla_{D_1} D_2\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle
\end{aligned}
$$

y como D_3 se tomó arbitrario, y $\boldsymbol{g}$ es no degenerada, se sigue que para todos D_1, D_2,

$$
\nabla_{\alpha D_1} D_2 = \alpha\nabla_{D_1} D_2
$$

de modo que ∇ es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal en el primer argumento.

Comprobaremos ahora que ∇ satisface la regla de Leibniz graduada en el segundo argumento. Para ésto, sea D_3 arbitrario, y $\alpha \in \Gamma(\bigwedge E)$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\langle 2\nabla_{D_1}\alpha D_2\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle \\
&= D_1\left(\langle \alpha D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle\right) + \langle\langle D_1, \alpha D_2; S\rangle + [D_1, \alpha D_2]\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle \\
&-(-1)^{|D_3|(|D_1|+|\alpha D_2|)}\left\{ D_3(\langle D_1, \alpha D_2; \boldsymbol{g}\rangle) - \langle\langle D_3, D_1; S\rangle + [D_3, D_1]\,,\, \alpha D_2; \boldsymbol{g}\rangle \right\} \\
&+(-1)^{|D_1|(|\alpha D_2|+|D_3|)}\left\{ \alpha D_2(\langle D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle) - \langle\langle \alpha D_2, D_3; S\rangle + [\alpha D_2, D_3]\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle \right\}
\end{aligned}
$$

pero

$$
D_1\left(\langle \alpha D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle\right) + \langle\langle D_1, \alpha D_2; S\rangle + [D_1, \alpha D_2]\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= D_1(\alpha)\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha D_1(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\quad +(-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle\langle D_1, D_2; S\rangle, D_3; \boldsymbol{g}\rangle + D_1(\alpha)\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad +(-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle [D_1, D_2]\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle \\
&= 2D_1(\alpha)\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\,\{D_1(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\quad +\langle\langle D_1, D_2; S\rangle + [D_1, D_2]\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle\}\,,
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&D_3(\langle D_1, \alpha D_2; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\quad = (-1)^{|\alpha||D_1|}D_3(\alpha)\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_3|)}\alpha D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\quad = (-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}D_3(\alpha)\langle D_2, D_1; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_3|)}\alpha D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle),
\end{aligned}
$$

y por ser S par

$$
\langle\langle D_3, D_1; S\rangle + [D_3, D_1]\,,\, \alpha D_2; \boldsymbol{g}\rangle = (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_3|)}\alpha\langle\langle D_3, D_1; S\rangle + [D_3, D_1]\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle,
$$

y además

$$
\langle [\alpha D_2, D_3]\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle = \alpha\langle [D_2, D_3]\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle - (-1)^{(|\alpha|+|D_2|)|D_3|}D_3(\alpha)\langle D_2, D_1; \boldsymbol{g}\rangle,
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\langle 2\nabla_{D_1}\alpha D_2\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle &= 2D_1(\alpha)\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\,\{D_1(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\quad +\langle\langle D_1, D_2; S\rangle + [D_1, D_2]\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle\} \\
&\quad -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}(-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\,\{D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad -\langle\langle D_3, D_1; S\rangle + [D_3, D_1]\,,\, Y; \boldsymbol{g}\rangle\} \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}(-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\,\{D_2(\langle D_3, D_1; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\quad -\langle\langle D_2, D_3; S\rangle + [D_2, D_3]\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle\} \\
&= 2D_1(\alpha)\langle D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle 2\nabla_{D_1}D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle \\
&= \langle 2\left\{D_1(\alpha)D_2 + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\nabla_{D_1}D_2\right\}\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle
\end{aligned}
$$

y como D_3 se tomó arbitrario, y $\boldsymbol{g}$ es no degenerada, concluimos que

$$
\nabla_{D_1}\alpha D_2 = D_1(\alpha)D_2 + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\nabla_{D_1}D_2
$$

para todos D_1, D_2, esto es, ∇ satisface la regla de Leibniz graduada en el segundo argumento.

Con el cálculo anterior, concluimos que efectivamente ∇ definida por la ecuación (2.6) es una conexión graduada.

Ahora, veamos que ∇ definida mediante la ecuación (2.6) es par. Para ésto, consideremos un $\boldsymbol{g}$ homogéneo arbitrario. Entonces, por un lado, $|\langle 2\nabla_{D_1}D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle| = |\nabla_{D_1}D_2| + |D_3| + |\boldsymbol{g}|$, y por otro lado, por ser S par, claramente el lado derecho de la ecuación (2.6) tiene grado $|D_1| + |D_2| + |D_3| + |\boldsymbol{g}|$, por lo que

$$
|\nabla_{D_1}D_2| + |D_3| + |\boldsymbol{g}| = |\langle 2\nabla_{D_1}D_2, D_3; \boldsymbol{g}\rangle| = |D_1| + |D_2| + |D_3| + |\boldsymbol{g}|
$$

y así, $|\nabla_{D_1} D_2| = |D_1| + |D_2|$, esto es, ∇ es par.

Probaremos ahora que ∇ definida por la ecuación (2.6) es compatible con $\boldsymbol{g}$, lo cual, debido a la simetría graduada de $\boldsymbol{g}$ y el hecho de que ∇ es par, se reduce a comprobar que para todos D, D_1, D_2,

$$\langle 2\nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle 2\nabla_D D_2, D_1; \boldsymbol{g}\rangle = 2D(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle).$$

Desarrollando cada término del lado izquierdo de la ecuación anterior, tenemos, por un lado que

$$\begin{aligned}
&\langle 2\nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad = D\left(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle\right) + \langle\langle D, D_1; S\rangle + [D, D_1]\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\qquad -(-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)}\left\{D_2(\langle D, D_1; \boldsymbol{g}\rangle) - \langle\langle D_2, D; S\rangle + [D_2, D]\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle\right\} \\
&\qquad +(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\left\{D_1(\langle D_2, D; \boldsymbol{g}\rangle) - \langle\langle D_1 D_2; S\rangle + [D_1, D_2]\,,\, D; \boldsymbol{g}\rangle\right\}
\end{aligned}$$

y por otro lado, debido a la simetría graduada de $\boldsymbol{g}$ y la antisimetría graduada de S y el corchete,

$$\begin{aligned}
&(-1)^{|D_1||D_2|}\langle 2\nabla_D D_2, D_1; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\quad = (-1)^{|D_1||D_2|}\left\{D\left(\langle D_2, D_1; \boldsymbol{g}\rangle\right) + \langle\langle D, D_2; S\rangle + [D, D_2]\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle\right\} \\
&\qquad -(-1)^{|D_1||D|}\left\{D_1(\langle D, D_2; \boldsymbol{g}\rangle) - \langle\langle D_1, D; S\rangle + [D_1, D]\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle\right\} \\
&\qquad +(-1)^{|D|(|D_2|+|D_1|)+|D_1||D_2|}\left\{D_2(\langle D_1, D; \boldsymbol{g}\rangle)\right. \\
&\qquad \left. - \langle\langle D_2, D_1; S\rangle + [D_2, D_1]\,,\, D; \boldsymbol{g}\rangle\right\} \\
&\quad = D\left(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle\right) - (-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)}\langle\langle D_2, D; S\rangle + [D_2, D]\,,\, D_1; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\qquad -(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)} D_1(\langle D_2, D; \boldsymbol{g}\rangle) - \langle\langle D, D_1; S\rangle + [D, D_1]\,,\, D_2; \boldsymbol{g}\rangle \\
&\qquad +(-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)} D_2(\langle D, D_1; \boldsymbol{g}\rangle) \\
&\qquad +(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\langle\langle D_1, D_2; S\rangle + [D_1, D_2]\,,\, D; \boldsymbol{g}\rangle
\end{aligned}$$

y por lo tanto, sumando éstas expresiones, resulta que

$$\langle 2\nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle 2\nabla_D D_2, D_1; \boldsymbol{g}\rangle = 2D\left(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{g}\rangle\right)$$

como deseabamos probar.

Finalmente, para comprobar que la torsión de la conexión graduada definida por la ecuación (2.6) tiene torsión S, notemos en primer lugar que para todo D_3

$$\langle 2(\nabla_{D_1} D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2} D_1)\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle = 2\langle\langle D_1, D_2; S\rangle + [D_1, D_2]\,,\, D_3; \boldsymbol{g}\rangle$$

de modo que

$$\nabla_{D_1} D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2} D_1 = \langle D_1, D_2; S\rangle + [D_1, D_2]$$

o bien,

$$\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle \;=\; \nabla_{D_1} D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2} D_1 - [D_1, D_2] = \langle D_1, D_2; S\rangle$$

de modo que efectivamente la torsión de la conexión graduada dada por (2.6) es S. ■

Directamente de la proposición anterior se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2.15. Sea $((M,\Gamma(\wedge E)),\boldsymbol{g})$ una supervariedad Riemanniana. La aplicación

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Tor}:\mathcal{C}^{g\,\mathsf{Par}}_{\mathsf{Gr}}(M) & \longrightarrow & \mathcal{T}^{2\,\mathsf{Par}}_{1,\mathsf{Gr\,Anti}} \\ \nabla & \longmapsto & \mathsf{T}^{\nabla}\end{array}$$

define una correspondencia afín biyectiva con inversa dada por medio de la expresión (2.6).

En particular, existe una única $\nabla\in\mathcal{C}^{g}_{\mathsf{Gr}}(M)$ par tal que $\mathsf{T}^{\nabla}=0$, que llamamos **la conexión graduada de Levi-Civita**, dada explícitamente como

$$\begin{aligned}&\langle 2\nabla_{D_1}D_2\,,\,D_3;\boldsymbol{g}\rangle\\ &\qquad= D_1\left(\langle D_2,D_3;\boldsymbol{g}\rangle\right)+\langle[D_1,D_2]\,,\,D_3;\boldsymbol{g}\rangle\\ &\qquad\quad-(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\left\{D_3(\langle D_1,D_2;\boldsymbol{g}\rangle)-\langle[D_3,D_1]\,,\,D_2;\boldsymbol{g}\rangle\right\}\\ &\qquad\quad+(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\left\{D_2(\langle D_3,D_1;\boldsymbol{g}\rangle)-\langle[D_2,D_3]\,,\,D_1;\boldsymbol{g}\rangle\right\}.\end{aligned}$$

2.2.3.2. Caso simpléctico graduado

En esta sección veremos resultados análogos a los de la sección precedente que caracterizan al espacio de conexiones graduadas compatibles ahora con una 2-forma graduada $\boldsymbol{\omega}$.

De la Proposición 2.2.8. tenemos una aplicación afín $\mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)\to\mathcal{S}_{\mathsf{Gr}}(M)$ que envía una conexión graduada a su parte simétrica. Veremos en el Teorema 2.2.17 que esta aplicación se restringe a una biyección sobre el subespacio $\mathcal{C}^{\omega\,\mathsf{Par}}_{\mathsf{Gr}}(M)\subset\mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$, cuando $\boldsymbol{\omega}$ es una 2-forma graduada.

Proposición 2.2.16. .

(i) Sea $((M,\Gamma(\wedge E)),\boldsymbol{\omega})$ una supervariedad simpléctica. Para cualesquier $\tilde{\nabla}\in\mathcal{S}_{\mathsf{Gr}}(M)$ par, la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}&\langle 2\nabla_{D_1}D_2\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle\\ &\quad= D_1\left(\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle\right)+\langle 2\tilde{\nabla}_{D_1}D_2-[D_1,D_2]\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle\\ &\quad\quad-(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\left\{D_3(\langle D_1,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle)-\langle 2\tilde{\nabla}_{D_3}D_1-[D_3,D_1]\,,\,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\}\\ &\quad\quad+(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\left\{D_2(\langle D_3,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle)-\langle 2\tilde{\nabla}_{D_2}D_3-[D_2,D_3]\,,\,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\}\end{aligned}\tag{2.7}$$

define una conexión graduada par, compatible con $\boldsymbol{\omega}$, y con parte simétrica $\tilde{\nabla}$.

(ii) Recíprocamente, si ∇ es una conexión graduada par y compatible con una 2-forma antisimétrica graduada $\boldsymbol{\omega}$, satisface la relación (2.7) con $\tilde{\nabla}=\nabla^{\mathsf{Sim}}$ su parte simétrica.

Demostración. .

(i) Sea $\tilde{\nabla}\in\mathcal{S}_{\mathsf{Gr}}(M)$ una conexión graduada y ∇ definida por medio de la no-degeneración de $\boldsymbol{\omega}$ mediante la ecuación (2.7). Comprobaremos que ∇ efectivamente es una conexión graduada compatible con $\boldsymbol{\omega}$, cuya parte simétrica es $\tilde{\nabla}$.

Veamos primero que ∇ es una conexión graduada. Por un lado, si $\alpha\in\Gamma(\wedge E)$, para todo D_3 se tiene que

$$\langle 2\nabla_{\alpha D_1}D_2\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha D_1\left(\langle D_2, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle\right) + \langle 2\tilde{\nabla}_{\alpha D_1} D_2 - [\alpha D_1, D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_3|(|\alpha D_1|+|D_2|)}\left\{D_3(\langle \alpha D_1, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle 2\tilde{\nabla}_{D_3}\alpha D_1 - [D_3, \alpha D_1]\,,\, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&\quad +(-1)^{|\alpha D_1|(|D_2|+|D_3|)}\left\{D_2(\langle D_3, \alpha D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle 2\tilde{\nabla}_{D_2} D_3 - [D_2, D_3]\,,\, \alpha D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\}
\end{aligned}$$

pero

$$\langle [\alpha D_1, D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle = \alpha\langle [D_1, D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|} D_2(\alpha)\langle D_1, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle,$$

y

$$\begin{aligned}
&D_3(\langle \alpha D_1, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle 2\tilde{\nabla}_{D_3}\alpha D_1 - [D_3, \alpha D_1]\,,\, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= D_3(\alpha)\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha D_3(\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle) \\
&\quad -2D_3(\alpha)\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha\langle \tilde{\nabla}_{D_3} D_1\,,\, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad +D_3(\alpha)\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha\langle [D_3, D_1]\,,\, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha\left\{D_3(\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle \tilde{\nabla}_{D_3} D_1, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle + \langle [D_3, D_1]\,,\, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\},
\end{aligned}$$

y por ser $\boldsymbol{\omega}$ antisimétrica graduada

$$\begin{aligned}
&D_2(\langle D_3, \alpha D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle) \\
&= (-1)^{|\alpha||D_3|} D_2(\alpha)\langle D_3, D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha|(|D_2|+|D_3|)}\alpha D_2\langle D_3, D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= -(-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_3|} D_2(\alpha)\langle D_1, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha|(|D_2|+|D_3|)}\alpha D_2\langle D_3, D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle,
\end{aligned}$$

y finalmente, por ser $\tilde{\nabla}$ par,

$$\langle 2\tilde{\nabla}_{D_2} D_3 - [D_2, D_3]\,,\, \alpha D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle = (-1)^{|\alpha|(|D_2|+|D_3|)}\alpha\langle 2\tilde{\nabla}_{D_2} D_3 - [D_2, D_3], D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
&\langle 2\nabla_{\alpha D_1} D_2\,,\, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= \alpha D_1\left(\langle D_2, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle\right) + \alpha\langle \tilde{\nabla}_{D_1} D_2\,,\, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle - \alpha\langle [D_1, D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\alpha\left\{D_3(\langle D_1, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle \tilde{\nabla}_{D_3} D_1\,,\, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle\right. \\
&\quad \left.+\langle [D_3, D_1]\,,\, D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\alpha\left\{D_2\langle D_3, D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle - \langle \tilde{\nabla}_{D_2} D_3 - [D_2, D_3]\,,\, D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&= \langle 2\alpha\nabla_{D_1} D_2\,,\, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle
\end{aligned}$$

y como D_3 se tomó arbitrario, y $\boldsymbol{\omega}$ es no degenerada, se sigue que para todos D_1, D_2,

$$\nabla_{\alpha D_1} D_2 = \alpha\nabla_{D_1} D_2$$

de modo que ∇ es $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal en el primer argumento.

Comprobaremos ahora que ∇ satisface la regla de Leibniz graduada en el segundo argumento. Para ésto, sea D_3 arbitrario, y $\alpha \in \Gamma(\bigwedge E)$, entonces

$$\langle 2\nabla_{D_1}\alpha D_2\,,\, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= D_1\left(\langle \alpha D_2, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle\right) + \langle 2\tilde{\nabla}_{D_1}\alpha D_2 - [D_1,\alpha D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&-(-1)^{|D_3|(|D_1|+|\alpha D_2|)}\left\{D_3(\langle D_1,\alpha D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle 2\tilde{\nabla}_{D_3}D_1 - [D_3,D_1]\,,\,\alpha D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&+(-1)^{|D_1|(|\alpha D_2|+|D_3|)}\left\{\alpha D_2(\langle D_3,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle 2\tilde{\nabla}_{\alpha D_2}D_3 - [\alpha D_2,D_3]\,,\,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\}
\end{aligned}
$$

pero

$$
\begin{aligned}
&D_1\left(\langle \alpha D_2, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle\right) + \langle 2\tilde{\nabla}_{D_1}\alpha D_2 - [D_1,\alpha D_2]\,,\, D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad = \quad D_1(\alpha)\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha D_1(\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle) \\
&\qquad\quad +2D_1(\alpha)\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle 2\tilde{\nabla}_{D_1}D_2, Z;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\qquad\quad -D_1(\alpha)\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle [D_1,D_2]\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad = \quad 2D_1(\alpha)\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\left\{D_1(\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle)\right. \\
&\qquad\quad \left.+\langle 2\tilde{\nabla}_{D_1}D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle - \langle [D_1,D_2]\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\},
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&D_3(\langle D_1,\alpha D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle) \\
&\quad = \quad (-1)^{|\alpha||D_1|}D_3(\alpha)\langle D_1,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_3|)}\alpha D_3(\langle D_1,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle) \\
&\quad = \quad -(-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}D_3(\alpha)\langle D_2,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_3|)}\alpha D_3(\langle D_1,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle),
\end{aligned}
$$

y por ser $\tilde{\nabla}$ par

$$
\langle 2\tilde{\nabla}_{D_3}D_1 - [D_3,D_1],\alpha D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle = (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_3|)}\alpha\langle 2\tilde{\nabla}_{D_3}D_1 - [D_3,D_1],D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle,
$$

y además

$$
\langle [\alpha D_2,D_3]\,,\,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle = \alpha\langle [D_2,D_3]\,,\,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{(|\alpha|+|D_2|)|D_3|}D_3(\alpha)\langle D_2,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle,
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\langle 2\nabla_{D_1}\alpha D_2\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \quad = \quad & 2D_1(\alpha)\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\left\{D_1(\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle)\right. \\
& \left.+\langle 2\tilde{\nabla}_{D_1}D_2 - [D_1,D_2]\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
& -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}(-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\left\{D_3(\langle D_1,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle\right. \\
& \left.-\langle 2\tilde{\nabla}_{D_3}D_1 - [D_3,D_1]\,,\,Y;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
& +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}(-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\left\{D_2(\langle D_3,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle)\right. \\
& \left.-\langle 2\tilde{\nabla}_{D_2}D_3 - [D_2,D_3]\,,\,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
= \quad & 2D_1(\alpha)\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle 2\nabla_{D_1}D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
= \quad & \langle 2\left\{D_1(\alpha)D_2 + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\nabla_{D_1}D_2\right\}\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle
\end{aligned}
$$

y como D_3 se tomó arbitrario, y $\boldsymbol{\omega}$ es no degenerada, concluimos que

$$
\nabla_{D_1}\alpha D_2 = D_1(\alpha)D_2 + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\nabla_{D_1}D_2
$$

para todos D_1, D_2, esto es, ∇ satisface la regla de Leibniz graduada en el segundo argumento.

Con el cálculo anterior, concluimos que efectivamente ∇ definida por la ecuación (2.7) es una conexión graduada.

Ahora, veamos que ∇ definida mediante la ecuación (2.7) es par. Para ésto, consideremos un $\boldsymbol{\omega}$ homogéneo arbitrario. Entonces, por un lado, $|\langle 2\nabla_{D_1}D_2, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle| = |\nabla_{D_1}D_2| + |D_3| + |\boldsymbol{\omega}|$, y por otro lado, como $\tilde{\nabla}$ es par, claramente el lado derecho de la ecuación (2.7) tiene grado $|D_1| + |D_2| + |D_3| + |\boldsymbol{\omega}|$, por lo que

$$|\nabla_{D_1}D_2| + |D_3| + |\boldsymbol{\omega}| = |\langle 2\nabla_{D_1}D_2, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle| = |D_1| + |D_2| + |D_3| + |\boldsymbol{\omega}|$$

y así, $|\nabla_{D_1}D_2| = |D_1| + |D_2|$, esto es, ∇ es par.

Probaremos ahora que ∇ definida por la ecuación (2.7) es compatible con $\boldsymbol{\omega}$, lo cual, debido a la antisimetría graduada de $\boldsymbol{\omega}$ y el hecho de que ∇ es par, se reduce a comprobar que para todos D, D_1, D_2,

$$\langle 2\nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle 2\nabla_D D_2, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle = 2D(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle).$$

Desarrollando cada término del lado izquierdo de la ecuación anterior, tenemos, por un lado que

$$\begin{aligned}
&\langle 2\nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\qquad = D\left(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle\right) + \langle 2\tilde{\nabla}_D D_1 - [D, D_1], D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\qquad\quad -(-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)}\left\{D_2(\langle D, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle 2\tilde{\nabla}_{D_2}D - [D_2, D], D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&\qquad\quad +(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\left\{D_1(\langle D_2, D; \boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle 2\tilde{\nabla}_{D_1}D_2 - [D_1, D_2], D; \boldsymbol{\omega}\rangle\right\}
\end{aligned}$$

y por otro lado, debido a la antisimetría graduada de $\boldsymbol{\omega}$ y del hecho que para toda $\tilde{\nabla}$ simétrica, $\tilde{\nabla}_A B = (-1)^{|A||B|}\left(\tilde{\nabla}_B A - [B, A]\right)$ o equivalentemente que

$$2\tilde{\nabla}_A B - [A, B] = (-1)^{|A||B|}\left(2\tilde{\nabla}_B A - [B, A]\right)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&-(-1)^{|D_1||D_2|}\langle 2\nabla_D D_2, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\qquad = -(-1)^{|D_1||D_2|}\left\{D\left(\langle D_2, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle\right) + \langle 2\tilde{\nabla}_D D_2 - [D, D_2], D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&\qquad\quad +(-1)^{|D_1||D|}\left\{D_1(\langle D, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle 2\tilde{\nabla}_{D_1}D - [D_1, D], D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&\qquad\quad -(-1)^{|D|(|D_2|+|D_1|)+|D_1||D_2|}\left\{D_2(\langle D_1, D; \boldsymbol{\omega}\rangle)\right. \\
&\qquad\quad \left. - \langle 2\tilde{\nabla}_{D_2}D_1 - [D_2, D_1], D; \boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&\qquad = D\left(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle\right) - (-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)}\langle 2\tilde{\nabla}_{D_2}D - [D_2, D], D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\qquad\quad -(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}D_1(\langle D_2, D; \boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle 2\tilde{\nabla}_D D_1 - [D, D_1], D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\qquad\quad +(-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)}D_2(\langle D, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle) \\
&\qquad\quad +(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\langle 2\tilde{\nabla}D_1, D_2 - [D_1, D_2], D; \boldsymbol{\omega}\rangle
\end{aligned}$$

y por lo tanto, sumando éstas expresiones, resulta que

$$\langle 2\nabla_D D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle 2\nabla_D D_2, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle = 2D\left(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle\right)$$

como deseabamos probar.

Finalmente, para comprobar que la parte simétrica de ∇ definida mediante la ecuación (2.7) es la conexión graduada $\tilde{\nabla}$, notemos en primer lugar que para todo D_3

$$\langle 2(\nabla_{D_1} D_2 + (-1)^{|D_1||D_2|} \nabla_{D_2} D_1)\,,\, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle = 2\langle 2\tilde{\nabla}_{D_1} D_2 - [D_1, D_2]\,,\, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle$$

de modo que

$$\nabla_{D_1} D_2 + (-1)^{|D_1||D_2|} \nabla_{D_2} D_1 = 2\tilde{\nabla}_{D_1} D_2 - [D_1, D_2]$$

o bien,

$$2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_1} D_2 \;=\; \nabla_{D_1} D_2 + (-1)^{|D_1||D_2|} \nabla_{D_2} D_1 + [D_1, D_2] = 2\tilde{\nabla}_{D_1} D_2$$

de modo que efectivamente la parte simétrica de ∇ es la conexión graduada $\tilde{\nabla}$.

(ii) Supongamos que ∇ es compatible con $\boldsymbol{\omega}$. Como $\nabla\boldsymbol{\omega} = 0$, obtenemos las siguientes tres ecuaciones

$$\begin{aligned} D_1(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle) &= \langle \nabla_{D_1} D_2, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, \nabla_{D_1} D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle \\ &= \langle \nabla_{D_1} D_2, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|D_2||D_3|}\langle \nabla_{D_1} D_3, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &-(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)} D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle) \\ &= -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle \nabla_{D_3} D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|D_2||D_3|}\langle D_1, \nabla_{D_3} D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle \\ &= -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle \nabla_{D_3} D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|D_2||D_3|+|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle \nabla_{D_3} D_2, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle, \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} &(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)} D_2(\langle D_3, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle) \\ &= \; (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle \nabla_{D_2} D_3, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|+|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, \nabla_{D_2} D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle \\ &= \; (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle \nabla_{D_2} D_3, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle \nabla_{D_2} D_1, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle \end{aligned}$$

donde hemos usado que ∇ es par y $\boldsymbol{\omega}$ es antisimétrica graduada.

Luego, sumando las tres ecuaciones anteriores obtenidas,

$$\begin{aligned} &D_1(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle) - (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)} D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle) \\ &+ (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)} D_2(\langle D_3, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle) \\ &\quad = \; \langle \nabla_{D_1} D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2} D_1\,,\, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle \\ &\qquad -(-1)^{|D_2||D_3|}\langle \nabla_{D_1} D_3 + (-1)^{|D_1||D_3|}\nabla_{D_3} D_1\,,\, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle \\ &\qquad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle \nabla_{D_2} D_3 + (-1)^{|D_2||D_3|}\nabla_{D_3} D_2\,,\, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle \end{aligned}$$

y si en el primer término del lado derecho de la igualdad, sumamos y restamos $\nabla_{D_1} D_2$ en el primer argumento de $\boldsymbol{\omega}$, tenemos que

$$\begin{aligned} &D_1(\langle D_2, D_3; \boldsymbol{\omega}\rangle) - (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)} D_3(\langle D_1, D_2; \boldsymbol{\omega}\rangle) \\ &+ (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)} D_2(\langle D_3, D_1; \boldsymbol{\omega}\rangle) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle 2\nabla_{D_1}D_2\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle - \langle \nabla_{D_1}D_2 + (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}D_1\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_2||D_3|}\langle \nabla_{D_1}D_3 + (-1)^{|D_1||D_3|}\nabla_{D_3}D_1\,,\,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle \nabla_{D_2}D_3 + (-1)^{|D_2||D_3|}\nabla_{D_3}D_2\,,\,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= \langle 2\nabla_{D_1}D_2\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad -\langle 2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_1}D_2 - [D_1,D_2]\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_2||D_3|}\langle 2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_1}D_3 - [D_1,D_3]\,,\,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle 2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_2}D_3 - [D_2,D_3]\,,\,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle,
\end{aligned}
$$

pero como ∇^{Sim} es simétrica graduada,

$$\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_1}D_3 = (-1)^{|D_1||D_3|}\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_3}D_1 + [D_1,D_3]$$

por lo que

$$2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_1}D_3 - [D_1,D_3] = (-1)^{|D_1||D_3|}(2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_3}D_1 - [D_3,D_1])$$

y entonces

$$
\begin{aligned}
&D_1(\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle) - (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}D_3(\langle D_1,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle) \\
&+ (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}D_2(\langle D_3,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle) \\
&\quad = \langle 2\nabla_{D_1}D_2\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad\quad -\langle 2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_1}D_2 - [D_1,D_2]\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad\quad -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|}\langle 2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_3}D_1 - [D_3,D_1]\,,\,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle 2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_2}D_3 - [D_2,D_3]\,,\,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle.
\end{aligned}
$$

Luego, despejando el término en el que aparece $2\nabla_{D_1}D_2$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\langle 2\nabla_{D_1}D_2\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= D_1(\langle D_2,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle) + \langle 2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_1}D_2 - [D_1,D_2]\,,\,D_3;\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\left\{D_3(\langle D_1,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle) - \langle 2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_3}D_1 - [D_3,D_1]\,,\,D_2;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&\quad +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\left\{D_2(\langle D_3,D_1;g\rangle) - \langle 2\nabla^{\mathsf{Sim}}_{D_2}D_3 - [D_2,D_3]\,,\,D_1;\boldsymbol{\omega}\rangle\right\}
\end{aligned}
$$

que es precisamente la ecuación (2.7) con $\tilde{\nabla} = \nabla^{\mathsf{Sim}}$. ■

Directamente de la proposición anterior y observando que la parte simétrica de una conexión graduada par es también par (pues T^{∇} lo es) se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2.17. Sea $((M,\Gamma(\wedge E)),\boldsymbol{\omega})$ una supervariedad (casi)-simpléctica. La aplicación

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sim}: \mathcal{C}^{\omega\,\mathsf{Par}}_{\mathsf{Gr}}(M) &\longrightarrow \mathcal{S}^{\mathsf{Par}}_{\mathsf{Gr}}(M) \\
\nabla &\longmapsto \nabla^{\mathsf{Sim}}
\end{aligned}
$$

define una correspondencia afín biyectiva con inversa dada por medio de la expresión (2.7).

2.2.4. El espacio de conexiones graduadas simplécticas

Del Teorema 2.2.15. tenemos que toda supervariedad Riemanniana tiene una conexión graduada simétrica y compatible con la métrica graduada. Veremos que en el caso simpléctico no siempre es posible definir una conexión graduada con las propiedades de la conexión de Levi Civita graduada. Las supervariedades simplécticas que tienen propiedades análogas a las supervariedades Riemannianas, en el sentido de que exista una conexión graduada análoga a la de Levi Civita, reciben un nombre especial:

Definición 2.2.18. Sea $((M, \Gamma(\bigwedge E)), \boldsymbol{\omega})$ una supervariedad simpléctica. Decimos que ∇ es una **conexión graduada simpléctica** si es simétrica y compatible con $\boldsymbol{\omega}$. En particular una terna $((M, \Gamma(\bigwedge E)), \boldsymbol{\omega}, \nabla)$ donde ∇ es una conexión graduada simpléctica se llama **supervariedad de Fedosov**.

Veremos que en una supervariedad simpléctica $((M, \Gamma(\bigwedge E)), \boldsymbol{\omega})$ el espacio de conexiones graduadas simétricas y compatibles con $\boldsymbol{\omega}$, a diferencia del caso métrico graduado forma un espacio afín.

Sea $\boldsymbol{\tau}$ un 2-tensor graduado y consideremos una conexión graduada de la forma $\nabla + S$, $S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$. Las ecuaciones (2.2) y (2.5) nos dicen que

$$\langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla + S}\rangle = \langle D_1, D_2; \mathsf{T}^{\nabla}\rangle + \langle D_1, D_2; S\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle$$

y

$$\begin{aligned}\langle D_2, D_3; (\nabla + S)_{D_1}\boldsymbol{\tau}\rangle &= \langle D_2, D_3; \nabla_{D_1}\boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\{\langle\langle D_1, D_2; S\rangle, D_3\,; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &\quad + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, \langle D_1, D_3; S\rangle\,; \boldsymbol{\tau}\rangle\}\end{aligned}$$

por lo que, si ∇ es simétrica y compatible con $\boldsymbol{\tau}$, la conexión graduada $\nabla + S$ tendrá también esas propiedades si y sólo si para todos D_1, D_2, D_3, la aplicación S satisface simultaneamente que

$$\left\{\begin{array}{c}\langle D_1, D_2; S\rangle = (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1; S\rangle \\ \langle\langle D_1, D_2; S\rangle, D_3\,; \boldsymbol{\tau}\rangle = -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, \langle D_1, D_3; S\rangle\,; \boldsymbol{\tau}\rangle\end{array}\right\} \tag{2.8}$$

en otras palabras, si S es una aplicación simétrica graduada y además satisface la relación $\langle\langle D_1, D_2; S\rangle, D_3\,; \boldsymbol{\tau}\rangle = -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, \langle D_1, D_3; S\rangle\,; \boldsymbol{\tau}\rangle$, para todos D_1, D_2, D_3. Ahora, denotando por $\underline{S}$ a la aplicación $\underline{S} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \Gamma(\bigwedge E)$ definida como

$$\langle D_1, D_2, D_3\,; \underline{S}\rangle := \langle\langle D_1, D_2; S\rangle, D_3\,; \boldsymbol{\tau}\rangle$$

veremos que $\underline{S}$ es un 3-tensor covariante graduado, y que además en el caso particular de ser $\boldsymbol{\tau}$ antisimétrica graduada (como en el caso de una forma simpléctica graduada) la condición (2.8) equivale a que $\underline{S}$ sea un tensor graduado simétrico. De este modo, si ∇ es simétrica y compatible con $\boldsymbol{\tau}$, la conexión graduada $\nabla + S$ será también simétrica y compatible con $\boldsymbol{\tau}$ si y sólo si $\underline{S}$ es simétrico graduado.

Para verificar que $\underline{S}$ es un 3-tensor graduado, por la $\Gamma(\bigwedge E)$-bilinealidad graduada de S y $\boldsymbol{\tau}$,

$$\begin{aligned}\langle \alpha D_1, D_2, D_3; \underline{S}\rangle &= \langle\langle \alpha D_1, D_2; S\rangle, D_3\,; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= \langle \alpha\langle D_1, D_2; S\rangle, D_3; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= \alpha\langle\langle D_1, D_2; S\rangle, D_3\,; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= \alpha\langle D_1, D_2, D_3; \underline{S}\rangle,\end{aligned}$$

luego, para el segundo argumento de $\underline{S}$,

$$\begin{aligned}\langle D_1, \alpha D_2, D_3; \underline{S}\rangle &= \langle\, \langle D_1, \alpha D_2; S\rangle, D_3\, ; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= \langle\, (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1, D_2; S\rangle, D_3; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle\, \langle D_1, D_2; S\rangle, D_3\, ; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1, D_2, D_3; \underline{S}\rangle.\end{aligned}$$

y ahora, como además S es homogéneo par (esto es $|\langle D_1, D_2; S\rangle| = |D_1| + |D_2|$) porque ∇ lo es, y estamos considerando sólo conexiones graduadas pares

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2, \alpha D_3; \underline{S}\rangle &= \langle\, \langle D_1, D_2; S\rangle, \alpha D_3\, ; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\alpha\langle\, \langle D_1, D_2; S\rangle, D_3\, ; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\alpha\langle D_1, D_2, D_3; \underline{S}\rangle\end{aligned}$$

y se sigue que $\underline{S}$ es un 3-tensor graduado.

Por último, si $\boldsymbol{\tau}$ es antisimétrica graduada

$$\begin{aligned}\langle\, D_2, \langle D_1, D_3; S\rangle\, ; \boldsymbol{\tau}\rangle &= -(-1)^{|D_2|(|D_1|+|D_3|)}\langle\, \langle D_1, D_3; S\rangle, D_2\, ; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= -(-1)^{|D_2|(|D_1|+|D_3|)}\langle D_1, D_3, D_2; \underline{S}\rangle\end{aligned}$$

por lo que la segunda ecuación de (2.8) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2, D_3; \underline{S}\rangle &= -(-1)^{|D_1||D_2|}\{-(-1)^{|D_2|(|D_1|+|D_3|)}\langle D_1, D_3, D_2; \underline{S}\rangle\} \\ &= (-1)^{|D_2||D_3|}\langle D_1, D_3, D_2; \underline{S}\rangle\}\end{aligned}$$

y por lo tanto, podemos reescribir (2.8) en términos de $\underline{S}$ como:

$$\left\{\begin{aligned}&\langle D_1, D_2, D_3; \underline{S}\rangle = (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1, D_3; \underline{S}\rangle \\ &\langle D_1, D_2, D_3; \underline{S}\rangle = (-1)^{|D_2||D_3|)}\langle D_1, D_3, D_2; \underline{S}\rangle\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

lo cual es claramente equivalente a decir que el 3-tensor graduado $\underline{S}$ es simétrico graduado.

Resumimos lo anterior, para una forma simpléctica graduada, como sigue:

Proposición 2.2.19. Sea $\boldsymbol{\omega}$ una forma simpléctica graduada en $(M, \Gamma(\bigwedge E))$. La colección de conexiones simplécticas graduadas, es un espacio afín modelado sobre el espacio de 3-tensores covariantes graduados simétricos.

Observemos que lo anterior nos dice que en el caso simpléctico graduado, no existe un análogo a la conexión de Levi-Civita graduada, pues pueden existir una infinidad de conexiones simplécticas asociadas a $\boldsymbol{\omega}$.

Por otro lado, sea $\boldsymbol{\omega}$ una forma simpléctica y fijemos una conexión graduada $\nabla \in \mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$. Probaremos que en este caso siempre es posible encontrar un factor de corrección $S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr}}$, para hacer a ∇ simpléctica (notemos que por la Proposición 2.2.6. sin pérdida de generalidad, podemos suponer de inicio que ∇ es simétrica). Para probar esto, usaremos el siguiente lema:

Lema 2.2.20. Si ∇ es una conexión graduada simétrica, y $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^2_{\mathsf{Gr}}(M)$, entonces $d^G\boldsymbol{\omega}$ se puede descomponer mediante la siguiente suma cíclica graduada:

$$
\begin{aligned}
&\langle D_1, D_2, D; d^G\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad = \langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|D|(|D_1|+D_2)}\langle D, D_1; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D|)}\langle D_2, D; \nabla_{D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle.
\end{aligned}
$$

Proposición 2.2.21. Sea ∇ una conexión graduada simétrica y $\boldsymbol{\omega}$ una forma simpléctica graduada. Entonces para $S \in \mathcal{T}^2_{1,\mathsf{Gr\,Sim}}$ definido mediante la relación

$$
\langle\, D_3, \langle D_1, D_2; S\rangle\,; \boldsymbol{\omega}\rangle = \frac{1}{3}\left\{(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_3, D_2; \nabla_{D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle + \langle D_3, D_1; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle\right\}
$$

para todo D_3, se cumple que

$$
\langle D_1, D_2; (\nabla + S)_D\boldsymbol{\omega}\rangle = \frac{1}{3}\langle D_1, D_2, D; d^G\boldsymbol{\omega}\rangle
$$

y así, $\nabla + S$ es una conexión graduada simpléctica.

Demostración. Probaremos primero que S definido de esta manera es $\Gamma(\bigwedge E)$-bilineal graduado y simétrico graduado. Para comprobar la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad en el primer argumento, por un lado, para todo D_3 se tiene

$$
\langle D_3, \langle \alpha D_1, D_2; S\rangle; \boldsymbol{\omega}\rangle = \frac{1}{3}\left\{(-1)^{|\alpha D_1||D_2|}\langle D_3, D_2; \nabla_{\alpha D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle + \langle D_3, \alpha D_1; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle\right\}
$$

pero, como ∇ es una derivada covariante en el espacio de tensores,

$$
\begin{aligned}
(-1)^{|\alpha D_1||D_2|}\langle D_3, D_2; \nabla_{\alpha D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle &= (-1)^{|\alpha|+|D_1||D_2|}\langle D_3, D_2; \alpha\nabla_{D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= (-1)^{|D_1||D_2|+|\alpha||D_3|}\alpha\langle D_3, D_2; \nabla_{D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle
\end{aligned}
$$

y por otro lado, por la $\Gamma(\bigwedge E)$-bilinealidad graduada de $\nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}$,

$$
\langle D_3, \alpha D_1; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle = (-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha\langle D_3, D_1; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle
$$

de modo, que para todo D_3,

$$
\begin{aligned}
\langle D_3, \langle \alpha D_1, D_2; S\rangle; \boldsymbol{\omega}\rangle &= (-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha\tfrac{1}{3}\left\{(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_3, D_2; \nabla_{D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle + \langle D_3, D_1; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&= (-1)^{|\alpha||D_3|}\alpha\langle D_3, \langle D_1, D_2; S\rangle; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= \langle D_3, \alpha\langle D_1, D_2; S\rangle; \boldsymbol{\omega}\rangle
\end{aligned}
$$

y por la no degeneración de $\boldsymbol{\omega}$, se sigue que $\langle \alpha D_1, D_2; S\rangle = \alpha\langle D_1, D_2; S\rangle$.

Por otro lado, notemos que S es simétrico graduado, pues, nuevamente por ser $\boldsymbol{\omega}$ no degenerada,

$$
\begin{aligned}
\langle D_3, \langle D_1, D_2; S\rangle; \boldsymbol{\omega}\rangle &= \tfrac{1}{3}\left\{(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_3, D_2; \nabla_{\alpha D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle + \langle D_3, \alpha D_1; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&= \tfrac{1}{3}(-1)^{|D_1||D_2|}\left\{\langle D_3, D_2; \nabla_{D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_3, D_1; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&= (-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_3, \langle D_2, D_1; S\rangle; \boldsymbol{\omega}\rangle
\end{aligned}
$$

para todo D_3, de modo que $\langle D_1, D_2; S\rangle = \langle D_2, D_1; S\rangle$. Luego, la simetría y la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada de S en el primer argumento, implican que S es $\Gamma(\bigwedge E)$-bilineal graduado, ya que para todo D_3

$$\begin{aligned}
\langle\, D_3, \langle D_1, \alpha D_2; S\rangle\,; \boldsymbol{\omega}\rangle &= \langle\, D_3, (-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}\langle \alpha D_2, D_1; S\rangle\,; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= \langle\, D_3, (-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}\alpha\langle D_2, D_1; S\rangle\,; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= \langle\, D_3, (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1, D_2; S\rangle\,; \boldsymbol{\omega}\rangle
\end{aligned}$$

por lo que $\langle D_1, \alpha D_2; S\rangle = (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\langle D_1, D_2; S\rangle$.

De lo anterior, y la Proposición 2.2.1. se sigue que $\nabla + S$ es una conexión graduada. Además, por ser ∇ simétrica, la Proposición 2.2.4. nos dice que $\nabla + S$ es también simétrica.

Solo falta probar que $\nabla + S$ es compatible con $\boldsymbol{\omega}$. Para esto, usando el lema anterior, mostraremos que

$$\langle D_1, D_2; (\nabla + S)_D\boldsymbol{\omega}\rangle = \frac{1}{3}\langle D_1, D_2, D; d^G\boldsymbol{\omega}\rangle$$

y entonces, por ser $d^G\boldsymbol{\omega} = 0$, pues $\boldsymbol{\omega}$ es simpléctica, tendremos que $(\nabla + S)\boldsymbol{\omega} = 0$.

Por un lado de la relación (2.5) tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2; (\nabla + S)_D\boldsymbol{\omega}\rangle &= \langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\{\langle\,\langle D, D_1; S\rangle, D_2\boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad +(-1)^{|D||D_1|}\langle\, D_1, \langle D, D_2; S\rangle\,; \boldsymbol{\omega}\rangle\}.
\end{aligned}$$

Pero, por la antisimetría graduada de $\boldsymbol{\omega}$ y la definición de S,

$$\begin{aligned}
\langle\,\langle D, D_1; S\rangle, D_2\,; \boldsymbol{\omega}\rangle &= -(-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)}\langle\, D_2, \langle D, D_1; S\rangle\,; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= -(-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)}\tfrac{1}{3}\left\{(-1)^{|D||D_1|}\langle D_2, D_1; \nabla_D\boldsymbol{\omega}\rangle + \langle D_2, D; \nabla_{D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&= -(-1)^{|D_1||D_2|}\tfrac{1}{3}\langle D_2, D_1; \nabla_D\boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|D_2|(|D|+|D_1|)}\tfrac{1}{3}\langle D_2, D; \nabla_{D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&(-1)^{|D||D_1|}\langle\, D_1, \langle D, D_2; S\rangle\,; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad = (-1)^{|D||D_1|}\tfrac{1}{3}\left\{(-1)^{|D||D_2|}\langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\omega}\rangle + \langle D_1, D; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&\quad = (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\tfrac{1}{3}\langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|D||D_1|}\tfrac{1}{3}\langle D_1, D; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
&(-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)}\left\{\langle\,\langle D, D_1; S\rangle, D_2\,; \boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|D||D_1|}\langle\, D_1, \langle D, D_2; S\rangle\,; \boldsymbol{\omega}\rangle\right\} \\
&\quad = -(-1)^{|D_1||D_2|}\tfrac{1}{3}\langle D_2, D_1; \nabla_D\boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|D_1|(|D|+|D_2|)}\tfrac{1}{3}\langle D_2, D; \nabla_{D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\qquad +\tfrac{1}{3}\langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|D||D_2|}\tfrac{1}{3}\langle D_1, D; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\quad = \tfrac{1}{3}\langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\omega}\rangle - (-1)^{|D_1|(|D|+|D_2|)}\tfrac{1}{3}\langle D_2, D; \nabla_{D_1}\boldsymbol{\omega}\rangle \\
&\qquad +\tfrac{1}{3}\langle D_1, D_2; \nabla_D\boldsymbol{\omega}\rangle + (-1)^{|D||D_2|}\tfrac{1}{3}\langle D_1, D; \nabla_{D_2}\boldsymbol{\omega}\rangle
\end{aligned}$$

donde se ha usado la antisimetría graduada de $\boldsymbol{\omega}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2; (\nabla + S)_D \boldsymbol{\omega} \rangle &= \langle D_1, D_2; \nabla_D \boldsymbol{\omega} \rangle - \tfrac{2}{3} \langle D_1, D_2; \nabla_D \boldsymbol{\omega} \rangle \\
&\quad + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D|)} \tfrac{1}{3} \langle D_2, D; \nabla_{D_1} \boldsymbol{\omega} \rangle - (-1)^{|D||D_2|} \tfrac{1}{3} \langle D_1, D; \nabla_{D_2} \boldsymbol{\omega} \rangle \\
&= \tfrac{1}{3} \left\{ \langle D_1, D_2; \nabla_D \boldsymbol{\omega} \rangle + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D|)} \langle D_2, D; \nabla_{D_1} \boldsymbol{\omega} \rangle \right. \\
&\quad \left. - (-1)^{|D||D_2|} \langle D_1, D; \nabla_{D_2} \boldsymbol{\omega} \rangle \right\} \\
&= \tfrac{1}{3} \left\{ \langle D_1, D_2; \nabla_D \boldsymbol{\omega} \rangle + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D|)} \langle D_2, D; \nabla_{D_1} \boldsymbol{\omega} \rangle \right. \\
&\quad \left. - (-1)^{|D|(|D_1|+|D_2|)} \langle D, D_1; \nabla_{D_2} \boldsymbol{\omega} \rangle \right\} \\
&= \tfrac{1}{3} \langle D_1, D_2, D; d^G \boldsymbol{\omega} \rangle
\end{aligned}$$

por el lema anterior.

Concluimos que $\nabla + S$ es simétrica y compatible con la forma simpléctica $\boldsymbol{\omega}$. ■

2.3. Curvatura graduada

Se define la **curvatura** de una conexión graduada ∇, [cf. [23]],

$$R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$$

como

$$\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle := \nabla_{D_1} \nabla_{D_2} D_3 - (-1)^{|D_1||D_2|} \nabla_{D_2} \nabla_{D_1} D_3 - \nabla_{[D_1, D_2]} D_3.$$

Observemos que como ∇ es par, se tiene que R^{∇}_{Gr} es un operador homogéneo par, esto es $|\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle| = |D_1| + |D_2| + |D_3| \pmod 2$.

Veamos ahora que la notación $\langle -, R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle$ tiene sentido, esto es, R^{∇}_{Gr} es $\Gamma(\bigwedge E)$-multilineal graduada. De hecho, en el caso no graduado la curvatura es una 2-forma valuada vectorial, veremos que en el caso graduado, se tienen las siguientes propiedades análogas:

Proposición 2.3.1. La curvatura R^{∇}_{Gr} tiene las siguientes propiedades:

1. Antisimetría graduada en las primeras dos componentes:
   $\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle = -(-1)^{|D_1||D_2|} \langle D_2, D_1, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle$.
2. $R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \in \mathcal{T}^3_{1,\mathsf{Gr}}$, es decir, R^{∇}_{Gr} es $\Gamma(\bigwedge E)$-trilineal graduada, esto es,
   (i) $\langle \alpha D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle = \alpha \langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle$
   (ii) $\langle D_1, \alpha D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle = (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle$
   (iii) $\langle D_1, D_2, \alpha D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle = (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)} \alpha \langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle$

Demostración. Para establecer la antisimetría graduada en los primeros dos argumentos, usamos que el corchete de derivaciones es antisimétrico graduado. Así,

$\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} \rangle$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3 - \nabla_{[D_1,D_2]}D_3\\
&= \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3 + (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{[D_2,D_1]}D_3\\
&= -(-1)^{|D_1||D_2|}(\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3 - \nabla_{[D_2,D_1]}D_3)\\
&= -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle.
\end{aligned}
$$

Ahora, para verificar la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada en el primer argumento, por la definición de R^{∇}_{Gr} tenemos que

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \nabla_{\alpha D_1}\nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{\alpha D_1}D_3\\
&\quad -\nabla_{[\alpha D_1,D_2]}D_3
\end{aligned}
$$

pero por un lado, por la regla de Leibniz graduada,

$$
\nabla_{D_2}\nabla_{\alpha D_1}D_3 = \nabla_{D_2}(\alpha\nabla_{D_1}D_3) = D_2(\alpha)\nabla_{D_1}D_3 + (-1)^{|D_2||\alpha|}\alpha\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
-(-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{\alpha D_1}D_3 &= -(-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|}D_2(\alpha)\nabla_{D_1}D_3\\
&\quad -(-1)^{|D_1||D_2|}\alpha\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3
\end{aligned}
$$

y además como el corchete satisface que

$$
[\alpha D_1, D_2] = \alpha[D_1, D_2] - (-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|}D_2(\alpha)D_1
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \alpha\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|}D_2(\alpha)\nabla_{D_1}D_3\\
&\quad -(-1)^{|D_1||D_2|}\alpha\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3 - \alpha\nabla_{[D_1,D_2]}D_3\\
&\quad +(-1)^{(|\alpha|+|D_1|)|D_2|}D_2(\alpha)\nabla_{D_1}D_3\\
&= \alpha\left\{\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3\right.\\
&\quad \left.-\nabla_{[D_1,D_2]}D_3\right\}\\
&= \alpha\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle.
\end{aligned}
$$

Ahora, para comprobar la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada de R^{∇}_{Gr} en el segundo argumento, usamos la antisimetría graduada en los primeros dos argumentos de R^{∇}_{Gr} y la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad en el primero, y entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
\langle D_1, \alpha D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= -(-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}\langle \alpha D_2, D_1, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\
&= -(-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}\alpha\langle D_2, D_1, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\
&= -(-1)^{|D_1||\alpha|}\alpha(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\
&= (-1)^{|D_1||\alpha|}\alpha\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle.
\end{aligned}
$$

Finalmente, para la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada en el tercer argumento de R^{∇}_{Gr}, por un lado

$$
\langle D_1, D_2, \alpha D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle = \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}\alpha D_3 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}\alpha D_3 - \nabla_{[D_1,D_2]}\alpha D_3
$$

pero, aplicando repetidamente la regla de Leibniz graduada, podemos reescribir cada uno de estos términos como sigue: el primero es

$$\begin{aligned}
&\nabla_{D_1}(\nabla_{D_2}\alpha D_3)\\
&\quad = \nabla_{D_1}(D_2(\alpha)D_3 + (-1)^{|\alpha||D_2|}\alpha\nabla_{D_2}D_3)\\
&\quad = \nabla_{D_1}(D_2(\alpha)D_3) + (-1)^{|\alpha||D_2|}\nabla_{D_1}(\alpha\nabla_{D_2}D_3)\\
&\quad = D_1(D_2(\alpha))D_3 + (-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}D_2(\alpha)\nabla_{D_1}D_3\\
&\qquad +(-1)^{|\alpha||D_2|}\left\{D_1(\alpha)\nabla_{D_2}D_3 + (-1)^{|\alpha||D_1|}\alpha\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3\right\}\\
&\quad = D_1(D_2(\alpha))D_3 + (-1)^{|D_1|(|\alpha|+|D_2|)}D_2(\alpha)\nabla_{D_1}D_3\\
&\qquad +(-1)^{|\alpha||D_2|}D_1(\alpha)\nabla_{D_2}D_3 + (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\alpha\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3
\end{aligned}$$

luego, permutando los índices 1 y 2 en el cálculo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\nabla_{D_2}(\nabla_{D_1}\alpha D_3)\\
&\quad = D_2(D_1(\alpha))D_3 + (-1)^{|D_2|(|\alpha|+|D_1|)}D_1(\alpha)\nabla_{D_2}D_3\\
&\qquad +(-1)^{|\alpha||D_1|}D_2(\alpha)\nabla_{D_1}D_3 + (-1)^{|\alpha|(|D_2|+|D_1|)}\alpha\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
&-(-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}(\nabla_{D_1}\alpha D_3)\\
&\qquad = -(-1)^{|D_1||D_2|}D_2(D_1(\alpha))D_3 - (-1)^{|D_2||\alpha|}D_1(\alpha)\nabla_{D_2}D_3\\
&\qquad\quad -(-1)^{(|\alpha|+|D_2|)|D_1|}D_2(\alpha)\nabla_{D_1}D_3\\
&\qquad\quad -(-1)^{|\alpha|(|D_2|+|D_1|)+|D_1||D_2|}\alpha\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3
\end{aligned}$$

y sumando estas dos últimas expresiones que hemos calculado, y cancelando los términos correspondientes, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\nabla_{D_1}(\nabla_{D_2}\alpha D_3) - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}(\nabla_{D_1}\alpha D_3)\\
&\qquad = [D_1, D_2](\alpha)D_3 + (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\alpha\{\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3\\
&\qquad\quad -(-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3\}
\end{aligned}$$

y finalmente, como

$$-\nabla_{[D_1,D_2]}\alpha D_3 = -[D_1, D_2](\alpha)D_3 - (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\alpha\nabla_{[D_1,D_2]}D_3$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
&\langle D_1, D_2, \alpha D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\
&\quad = (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\alpha(\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3)\\
&\qquad -(-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\alpha\nabla_{[D_1,D_2]}D_3\\
&\quad = (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\alpha(\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3 - \nabla_{[D_1,D_2]}D_3)\\
&\quad = (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)}\alpha\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle.
\end{aligned}$$

■

En el caso de una conexión graduada simétrica, se tiene también un análogo a la primera identidad de Bianchi:

Proposición 2.3.2. **(1^a Identidad de Bianchi graduada)** Si $\nabla \in \mathcal{S}_{\mathsf{Gr}}(M)$, la suma cíclica graduada respecto a los argumentos de R^{∇}_{Gr} es cero, esto es,

$$\begin{aligned} &\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_2, D_3, D_1; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\ &+ \ (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle = 0 \end{aligned}$$

Demostración. Veremos que la suma cíclica graduada en la ecuación se reduce a la identidad de Jacobi graduada que satisface el corchete de derivaciones.

Desarrollando cada término de la suma cíclica, tenemos que

$$\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \quad = \quad \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3 - \nabla_{[D_1,D_2]}D_3$$

y

$$\begin{aligned} &(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_2, D_3, D_1; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\ &\quad = \ (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\nabla_{D_2}\nabla_{D_3}D_1 - (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)+|D_1||D_2|}\nabla_{D_3}\nabla_{D_2}D_1 \\ &\qquad -(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\nabla_{[D_2,D_3]}D_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\ &\quad = \ (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\nabla_{D_3}\nabla_{D_1}D_2 - (-1)^{|D_2||D_3|}\nabla_{D_1}\nabla_{D_3}D_2 \\ &\qquad -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\nabla_{[D_3,D_1]}D_2. \end{aligned}$$

Entonces, sumando estas tres ecuaciones y agrupando términos, resulta que

$$\begin{aligned} &\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_2, D_3, D_1; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\ &\ + \ (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\ = \ &\nabla_{D_1}(\nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{|D_2||D_3|\nabla_{D_3}D_2}) \\ &-(-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}(\nabla_{D_1}D_3 - (-1)^{|D_1||D_3|\nabla_{D_3}D_1}) \\ &+(-1)^{D_3(|D_1||D_2|)}\nabla_{D_3}(\nabla_{D_1}D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|\nabla_{D_2}D_1}) \\ &-\nabla_{[D_1,D_2]}D_3 - (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\nabla_{[D_2,D_3]}D_1 - (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\nabla_{[D_3,D_1]}D_2 \end{aligned}$$

pero al ser $\mathsf{T}^{\nabla} = 0$, en particular

$$\begin{aligned} \nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{|D_2||D_3|\nabla_{D_3}D_2} &= [D_2, D_3], \\ \nabla_{D_1}D_3 - (-1)^{|D_1||D_3|\nabla_{D_3}D_1} &= [D_1, D_3], \\ \nabla_{D_1}D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|\nabla_{D_2}D_1} &= [D_1, D_2], \end{aligned}$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
&\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_2, D_3, D_1; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\
&\quad + \ (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\
&\quad = \ \nabla_{D_1}[D_2, D_3] - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}[D_1, D_3] + (-1)^{D_3(|D_1||D_2|)}\nabla_{D_3}[D_1, D_2] \\
&\qquad -\nabla_{[D_1,D_2]}D_3 - (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\nabla_{[D_2,D_3]}D_1 - (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\nabla_{[D_3,D_1]}D_2 \\
&\quad = \ \nabla_{D_1}[D_2, D_3] - (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\nabla_{[D_2,D_3]}D_1 \\
&\qquad -\nabla_{[D_1,D_2]}D_3 + (-1)^{D_3(|D_1||D_2|)}\nabla_{D_3}[D_1, D_2] \\
&\qquad -(-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}[D_1, D_3] + (-1)^{|D_2||D_3|}\nabla_{[D_1,D_3]}D_2 \\
&\quad = \ \nabla_{D_1}[D_2, D_3] - (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\nabla_{[D_2,D_3]}D_1 \\
&\qquad -(\nabla_{[D_1,D_2]}D_3 - (-1)^{D_3(|D_1||D_2|)}\nabla_{D_3}[D_1, D_2]) \\
&\qquad -(-1)^{|D_1||D_2|}(\nabla_{D_2}[D_1, D_3] - (-1)^{|D_2|(|D_1|+|D_3|)}\nabla_{[D_1,D_3]}D_2
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la antisimetría graduada del corchete. Luego, usando nuevamente que $\mathsf{T}^{\nabla} = 0$, podemos reescribir

$$
\begin{aligned}
\nabla_{D_1}[D_2, D_3] - (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\nabla_{[D_2,D_3]}D_1 &= [D_1, [D_2, D_3]] \\
\nabla_{[D_1,D_2]}D_3 - (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\nabla_{D_3}[D_1, D_2] &= [[D_1, D_2], D_3] \\
\nabla_{D_2}[D_1, D_3] - (-1)^{|D_2|(|D_1|+|D_3|)}\nabla_{[D_1,D_3]}D_2 &= [D_2, [D_1, D_3]]
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
&\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_2, D_3, D_1; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\
&\quad + \ (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\
&\quad = [D_1, [D_2, D_3]] - [[D_1, D_2]D_3] - (-1)^{|D_1||D_2|}[D_2, [D_1, D_3]] \\
&\quad = 0
\end{aligned}
$$

por la identidad de Jacobi graduada. ∎

2.4. El tensor de curvatura graduado

Para $\nabla \in \mathcal{C}_{\mathsf{Gr}}(M)$ y $\boldsymbol{\tau}$ un 2-tensor covariante graduado se define el **tensor de curvatura graduado** respecto a $\boldsymbol{\tau}$ [cf. [23]]

$$
\underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}} : \quad \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \quad \to \quad \Gamma(\wedge E)
$$

como $\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle := \langle\, \langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle, D_4\,; \boldsymbol{\tau}\rangle$

Notemos que si $\boldsymbol{\tau}$ es homogénea, como ∇ es par, $\underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}}$ es homogéneo y de grado $|\underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}}| = |\boldsymbol{\tau}|$.

Verifiquemos ahora que la notación $\langle -; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle$ tiene sentido, esto es, que efectivamente $\underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}}$ es $\Gamma(\wedge E)$-multilineal graduado.

Proposición 2.4.1. Para todo 2-tensor covariante graduado $\boldsymbol{\tau}$ el operador $\underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}}$ tiene las siguientes propiedades:

1. Si ∇ es par, $\underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}$ es un 4-tensor covariante graduado, esto es,

   (i) $\langle \alpha D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle = \alpha \langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle$

   (ii) $\langle D_1, \alpha D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle = (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle$

   (iii) $\langle D_1, D_2, \alpha D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle = (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|)} \alpha \langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle$

   (iv) $\langle D_1, D_2, D_3, \alpha D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle = (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|+|D_3|)} \alpha \langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle$

2. Es antisimétrico graduado en sus primeros dos índices, esto es,

$$\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle = -(-1)^{|D_1||D_2|} \langle D_2, D_1, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle$$

3. Si ∇ es simétrica, la suma cíclica graduada en sus primeros tres argumentos se anula, esto es,

$$\begin{aligned} &\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle + (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)} \langle D_3, D_1, D_2, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle \\ +\ &(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)} \langle D_2, D_3, D_1, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle\rangle = 0 \end{aligned}$$

Demostración. La afirmación 2. se sigue directamente de 1. en la Proposición 2.3.1 que nos dice que la curvatura es antisimétrica graduada en sus primeros dos argumentos. La afirmación 3. se sigue directamente de la 1^a Identidad de Bianchi graduada. Así, solo nos falta verificar la afirmación 1.

La $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada de $\underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}$ en los primeros tres argumentos se debe a la $\Gamma(\bigwedge E)$-multilinealidad graduada que satisface R^{∇}, y la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad de $\boldsymbol{\tau}$ en su primer argumento, pues

$$\begin{aligned} \langle \alpha D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle &= \langle\, \langle \alpha D_1, D_2, D_3; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla} \rangle, D_4; \boldsymbol{\tau} \rangle \\ &= \langle\, \alpha \langle D_1, D_2, D_3; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla} \rangle, D_4; \boldsymbol{\tau} \rangle \\ &= \alpha \langle\, \langle D_1, D_2, D_3; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla} \rangle, D_4; \boldsymbol{\tau} \rangle \\ &= \alpha \langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle D_1, \alpha D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle &= \langle\, \langle D_1, \alpha D_2, D_3; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla} \rangle, D_4; \boldsymbol{\tau} \rangle \\ &= \langle\, (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \langle D_1, D_2, D_3; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla} \rangle, D_4; \boldsymbol{\tau} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \langle\, \langle D_1, D_2, D_3; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla} \rangle, D_4; \boldsymbol{\tau} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle D_1, D_2, \alpha D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle &= \langle\, \langle D_1, D_2, \alpha D_3; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla} \rangle, D_4; \boldsymbol{\tau} \rangle \\ &= \langle\, (-1)^{|\alpha||(D_1|+|D_2|)} \alpha \langle D_1, D_2, D_3; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla} \rangle, D_4; \boldsymbol{\tau} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha||(D_1|+|D_2|)} \alpha \langle\, \langle D_1, D_2, D_3; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla} \rangle, D_4; \boldsymbol{\tau} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha||(D_1|+|D_2|)} \alpha \langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}} \rangle. \end{aligned}$$

Y finalmente, como ∇ es par, R_{Gr}^{∇} también lo es, y entonces la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada en el último argumento de $\underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}$ se debe a la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada de $\boldsymbol{\tau}$ en su segundo argumento, pues

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2, D_3, \alpha D_4; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \langle\, \langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle, \alpha D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|+|D_3|)}\alpha\langle\, \langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|(|D_1|+|D_2|+|D_3|)}\alpha\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle.\end{aligned}$$

■

La siguiente propiedad del tensor de curvatura graudada nos ayudará más adelante a describir las propiedades de $\underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}}$ en el caso de ser $\boldsymbol{\tau}$ una métrica graduada o de ser $\boldsymbol{\tau}$ una 2-forma simpléctica graduada.

Lema 2.4.2. Si ∇ es compatible con el 2-tensor covariante graduado $\boldsymbol{\tau}$, entonces

$$\langle\, \langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle, D_4\,; \boldsymbol{\tau}\rangle = -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle\, D_3, \langle D_1, D_2, D_4; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\,; \boldsymbol{\tau}\rangle$$

Demostración. Como

$$\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle = \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3 - (-1)^{|D_1||D_2|}\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3 - \nabla_{[D_1,D_2]}D_3$$

entonces

$$\begin{aligned}&\langle\, \langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &\qquad = \langle \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3, D_4\,; \boldsymbol{\tau}\rangle - (-1)^{|D_1||D_2|}\langle \nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3, D_4\,; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &\qquad\quad -\langle \nabla_{[D_1,D_2]D_3}, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle.\end{aligned}$$

Desarrolaremos ahora cada término del lado derecho de la ecuación anterior, usando repetidamente el hecho de que $\nabla\boldsymbol{\tau} = 0$, o equivalentemente, que para todos A, B, C,

$$\langle \nabla_A B, C; \boldsymbol{\tau}\rangle = A(\langle B, C; \boldsymbol{\tau}\rangle) - (-1)^{|A||B|}\langle B, \nabla_A C; \boldsymbol{\tau}\rangle.$$

Por un lado,

$$\begin{aligned}&\langle \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_3, D_4\,; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= D_1(\langle \nabla_{D_2}D_3, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle) - (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle \nabla_{D_2}D_3, \nabla_{D_1}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= D_1(\, D_2(\langle D_3, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle) - (-1)^{|D_2||D_3|}\langle D_3, \nabla_{D_2}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle\,) \\ &\quad -(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\left\{D_2(\langle D_3, \nabla_{D_1}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle) - (-1)^{|D_2||D_3|}\langle D_3, \nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle\right\} \\ &= D_1(D_2(\langle D_3, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle)) - (-1)^{|D_2||D_3|}D_1(\langle D_3, \nabla_{D_2}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle) \\ &\quad -(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}D_2(\langle D_3, \nabla_{D_1}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle) \\ &\quad +(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)+|D_1||D_2|}\langle D_3, \nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle,\end{aligned}$$

y por otro lado, permutando los índices 1 y 2 en la ecuación anterior, y multiplicando ambos lados por el factor $-(-1)^{|D_1||D_2|}$, tenemos que

$$\begin{aligned}&-(-1)^{|D_1||D_2|}\langle \nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_3, D_4\,; \boldsymbol{\tau}\rangle \\ &= -(-1)^{|D_1||D_2|}D_2(D_1(\langle D_3, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle)) + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}D_2(\langle D_3, \nabla_{D_1}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle) \\ &\quad +(-1)^{|D_2||D_3|}D_1(\langle D_3, \nabla_{D_2}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle) - (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle,\end{aligned}$$

y finalmente,

$$-\langle \nabla_{[D_1,D_2]}D_3, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle$$
$$= -[D_1,D_2](\langle D_3, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle) + (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, \nabla_{[D_1,D_2]}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle.$$

Luego, sumando las últimas tres ecuaciones obtenidas, resulta

$$\begin{aligned}
&\langle\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle \\
&= [D_1,D_2](\langle D_3, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle) + (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)+|D_1||D_2|}\langle D_3, \nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle - [D_1,D_2](\langle D_3, D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle) \\
&\quad +(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, \nabla_{[D_1,D_2]}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle \\
&= -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\,\{\langle D_3, \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle \\
&\quad -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_3, \nabla_{D_2}\nabla_{D_1}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle - \langle D_3, \nabla_{[D_1,D_2]}D_4; \boldsymbol{\tau}\rangle\} \\
&= -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, \langle D_1, D_2, D_4; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle; \boldsymbol{\tau}\rangle
\end{aligned}$$

que es lo que deseabamos probar. ■

Analizaremos en las siguientes secciones más propiedades del tensor de curvatura graduada pero en el caso particular donde el 2-tensor covariante graduado $\boldsymbol{\tau}$ tiene propiedades de simetría ó antisimetría graduada.

2.4.1. Caso métrico graduado

Enlistamos a continuación las propiedades del tensor de curvatura graduada en una supervariedad Riemanniana.

Proposición 2.4.3. Si $((M, \Gamma(\bigwedge E)), \boldsymbol{g}, \nabla^{\boldsymbol{g}})$ es una supervariedad Riemanniana y $\nabla^{\boldsymbol{g}}$ la conexión de Levi-Civita graduada,

(i) La suma cíclica graduada de $\underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{g}}}_{\mathsf{Gr}}$ en sus primeros tres argumentos se anula,

$$\begin{aligned}
&\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{g}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2, D_4; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{g}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\
&\quad + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_2, D_3, D_1, D_4; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{g}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle = 0
\end{aligned}$$

(ii) $\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{g}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle = -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{g}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle$

(iii) $\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{g}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle = -(-1)^{|D_3||D_4|}\langle D_1, D_2, D_4, D_3; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{g}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle$.

(iv) $\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle = (-1)^{(|D_1|+|D_2|)(|D_3|+|D_4|)}\langle D_3, D_4, D_1, D_2; \underline{R}^{\nabla^{\boldsymbol{g}}}_{\mathsf{Gr}}\rangle$.

Demostración. Observemos que basta probar (iii) y (iv), pues por la Proposición 2.4.1. la propiedad (i) se cumple por ser ∇ simétrica, y además, la propiedad (ii) se cumplen para todo $\boldsymbol{\tau}$.

Para probar (iii), como ∇ es compatible con $\boldsymbol{g}$, podemos usar el Lema 2.4.2. con $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{g}$, y entonces, por la simetría graduada de $\boldsymbol{g}$ y el hecho de que R^{∇}_{Gr} es par (pues la conexión de Levi Civita lo es) tenemos que

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \langle\langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle, D_4\,; \boldsymbol{g}\rangle\\ &= -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, \langle D_1, D_2, D_4; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\,; \boldsymbol{g}\rangle\\ &= -(-1)^{|D_3||D_4|}\langle\langle D_1, D_2, D_4; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle, D_3\,; \boldsymbol{g}\rangle\\ &= -(-1)^{|D_3||D_4|}\langle D_1, D_2, D_4, D_3; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle.\end{aligned}$$

Probaremos ahora la propiedad (iv). De (i) tenemos que

$$\begin{aligned}&\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_2, D_3, D_1, D_4; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\ &+ \ (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2, D_4; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{|D_4|(|D_1|+|D_2|+|D_3|)}&\Big\{\langle D_4, D_1, D_2, D_3; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_4|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_1, D_2, D_4, D_3; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\ &+ \ (-1)^{|D_2|(|D_1|+|D_4|)}\langle D_2, D_4, D_1, D_3; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\Big\} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{(|D_1|+|D_2|)(|D_3|+|D_4|)}&\Big\{\langle D_3, D_4, D_1, D_2; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_4|)}\langle D_4, D_1, D_3, D_2; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\ &+ \ (-1)^{|D_1|(|D_3|+|D_4|)}\langle D_1, D_3, D_4, D_2; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\Big\} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|+|D_4|)}&\Big\{\langle D_2, D_3, D_4, D_1\rangle + (-1)^{|D_2|(|D_3|+|D_4|)}\langle D_3, D_4, D_2, D_1; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\ &+ \ (-1)^{|D_4|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_4, D_2, D_3, D_1; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\Big\} = 0\end{aligned}$$

Luego, sumando las cuatro ecuaciones anteriores, varios términos se cancelan debido a la propiedad (iii) que acabamos de probar, y en la suma, sólo sobrevive el último término de cada ecuación, esto es, la suma de las cuatro ecuaciones resulta en la ecuación

$$\begin{aligned}&(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2, D_4; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\ &+(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_4|)+|D_3||D_4|}\langle D_2, D_4, D_1, D_3; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\ &+(-1)^{|D_2|(|D_3|+|D_4|)}\langle D_1, D_3, D_4, D_2; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\ &+(-1)^{|D_4|(|D_2|+|D_3|)+|D_1|(|D_2|+|D_3|+|D_4|)}\langle D_4, D_2, D_3, D_1; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle = 0\end{aligned} \tag{2.10}$$

pero usando (ii), (iii) en los últimos tres términos del lado izquierdo de la ecuación anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}&(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_4|)+|D_3||D_4|}\langle D_2, D_4, D_1, D_3; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\ &\quad= (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|+|D_4|)+|D_3||D_4|}\langle D_2, D_4, D_3, D_1; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&(-1)^{|D_2|(|D_3|+|D_4|)}\langle D_1, D_3, D_4, D_2; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\ &\quad= (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2, D_4; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&(-1)^{|D_4|(|D_2|+|D_3|)+|D_1|(|D_2|+|D_3|+|D_4|)}\langle D_4, D_2, D_3, D_1; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\ &\quad= (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|+|D_4|)+|D_3||D_4|}\langle D_2, D_4, D_3, D_1; \underline{R}^{\nabla^{g}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\end{aligned}$$

de modo que la ecuación (2.10) se reduce a lo siguiente

$$2(-1)^{|D_1||D_3|}\left\{(-1)^{|D_3||D_2|}\langle D_3, D_1, D_2, D_4; \underline{R}^{\nabla^g}_{\mathsf{Gr}}\rangle \right.$$
$$\left. +(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_4|)}\langle D_2, D_4, D_3, D_1; \underline{R}^{\nabla^g}_{\mathsf{Gr}}\rangle\right\} = 0$$

o equivalentemente,

$$\langle D_3, D_1, D_2, D_4; \underline{R}^{\nabla^g}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{(|D_1|+|D_3|)(|D_2|+|D_4|)}\langle D_2, D_4, D_3, D_1; \underline{R}^{\nabla^g}_{\mathsf{Gr}}\rangle = 0$$

que es lo que queríamos probar. ■

2.4.2. Caso simpléctico graduado

Proposición 2.4.4. Si $((M, \Gamma(\bigwedge E)), \boldsymbol{\omega})$ es una supervariedad simpléctica y ∇ una conexión simpléctica par,

1. La suma cíclica graduada de $\underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}$ en sus primeros tres argumentos se anula,

$$\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle$$
$$+ \ (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_2, D_3, D_1, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle = 0$$

2. $\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle = -(-1)^{|D_1||D_2|}\langle D_2, D_1, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle$.

3. $\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle = (-1)^{|D_3||D_4|}\langle D_1, D_2, D_4, D_3; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle$.

4. La suma cíclica graduada de $\underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}$ en todos sus argumentos se anula,

$$\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_4|(|D_1|+|D_2|+|D_3|)}\langle D_4, D_1, D_2, D_3; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle$$
$$+(-1)^{(|D_1|+|D_2|)(|D_3|+|D_4|)}\langle D_3, D_4, D_1, D_2; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle$$
$$+(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|+|D_4|)}\langle D_2, D_3, D_4, D_1; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle = 0$$

Demostración. La prueba es bastante similar a la del caso métrico graduado. Notemos que basta probar (iii) y (iv), pues por la Proposición 2.4.1. la propiedad (i) se cumple por ser ∇ simétrica, y además, la propiedad (ii) se cumplen para todo $\boldsymbol{\tau}$.

Para probar (iii), como ∇ es compatible con $\boldsymbol{\omega}$, podemos usar el Lema 2.4.2. haciendo $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}$, y entonces, por la antisimetría graduada de $\boldsymbol{\omega}$ y el hecho de que R^{∇}_{Gr} es par (pues por hipótesis ∇ lo es) tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \langle\, \langle D_1, D_2, D_3; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle, D_4\,; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= -(-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle\, D_3, \langle D_1, D_2, D_4; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\,; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= (-1)^{|D_3||D_4|}\langle\langle D_1, D_2, D_4; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle, D_3\,; \boldsymbol{\omega}\rangle \\
&= (-1)^{|D_3||D_4|}\langle D_1, D_2, D_4, D_3; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle.
\end{aligned}$$

Probaremos ahora la propiedad (iv). De (i) tenemos que

$$\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_2, D_3, D_1, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle$$
$$+ \ (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_3, D_1, D_2, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle = 0,$$

$$(-1)^{|D_4|(|D_1|+|D_2|+|D_3|)}\left\{\langle D_4, D_1, D_2, D_3; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_4|(|D_1|+|D_2|)}\langle D_1, D_2, D_4, D_3; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle \right.$$
$$\left. + \ (-1)^{|D_2|(|D_1|+|D_4|)}\langle D_2, D_4, D_1, D_3; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle\right\} = 0,$$

$$(-1)^{(|D_1|+|D_2|)(|D_3|+|D_4|)}\left\{\langle D_3, D_4, D_1, D_2; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_3|(|D_1|+|D_4|)}\langle D_4, D_1, D_3, D_2; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle \right.$$
$$\left. + \ (-1)^{|D_1|(|D_3|+|D_4|)}\langle D_1, D_3, D_4, D_2; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle\right\} = 0$$

$$(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|+|D_4|)}\left\{\langle D_2, D_3, D_4, D_1; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_2|(|D_3|+|D_4|)}\langle D_3, D_4, D_2, D_1; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle \right.$$
$$\left. + \ (-1)^{|D_4|(|D_2|+|D_3|)}\langle D_4, D_2, D_3, D_1; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle\right\} = 0$$

Ahora, si sumamos las cuatro ecuaciones anteriores, por las propiedades (ii) y (iii) podemos ver que en particular, la suma del último término de cada una de las ecuaciones se anulará; y por otro lado, podemos ver que mediante la propiedad (iii) podemos escribir los términos restantes en notación cíclica, de modo que la ecuación se reducirá a la siguiente

$$\begin{aligned}
&2\left\{\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_4|(|D_1|+|D_2|+|D_3|)}\langle D_4, D_1, D_2, D_3; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle\right.\\
&+(-1)^{(|D_1|+|D_2|)(|D_3|+|D_4|)}\langle D_3, D_4, D_1, D_2; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\
&\left.+(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|+|D_4|)}\langle D_2, D_3, D_4, D_1; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle\right\} = 0
\end{aligned}$$

que equivale a la ecuación

$$\begin{aligned}
&\langle D_1, D_2, D_3, D_4; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle + (-1)^{|D_4|(|D_1|+|D_2|+|D_3|)}\langle D_4, D_1, D_2, D_3; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\
&+(-1)^{(|D_1|+|D_2|)(|D_3|+|D_4|)}\langle D_3, D_4, D_1, D_2; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\
&+(-1)^{|D_1|(|D_2|+|D_3|+|D_4|)}\langle D_2, D_3, D_4, D_1; \underline{R}^{\nabla^\omega}_{\mathsf{Gr}}\rangle = 0
\end{aligned}$$

que es precisamente lo que queríamos probar. ■

2.5. El tensor de Ricci graduado

Sea $(M, \Gamma(\wedge E))$ una supervariedad. Como la curvatura R^{∇}_{Gr} es un operador homogéneo par si ∇ es par, para cada pareja $D_1, D_2 \in \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$ podemos inducir los siguientes operadores homogéneos de grado $|D_1| + |D_2|$:

1. $\langle \cdot, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle : D \mapsto \langle D, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle$
2. $\langle D_1, \cdot, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle : D \mapsto \langle D_1, D, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle$
3. $\langle D_1, D_2, \cdot; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle : D \mapsto \langle D_1, D_2, D; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle$

luego, como por la Proposición 2.3.1. la curvatura es $\Gamma(\wedge)$-multilineal graduada, se sigue que solo la primera aplicación es $\Gamma(\wedge E)$-lineal por la izquierda. En términos de este operador definimos el tensor de Ricci graduado análogamente a como se hace en el caso usual (no graduado) [cf. [23]]:

Para ∇ una conexión graduada par, el **tensor de Ricci graduado**

$$\mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathsf{Gr}} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \longrightarrow \Gamma(\wedge E)$$

se define como

$$\langle D_1, D_2; \mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle := \mathrm{STr}\left(D \mapsto \langle D, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\right).$$

Explícitamente, si $\{\bar{D}_1, ..., \bar{D}_p; \tilde{D}_{p+1}, ..., \tilde{D}_{p+q}\}$ es una base pura de supercampos vectoriales, como el morfismo $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal $D \mapsto \langle D, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle$ tiene grado $|D_1| + |D_2|$

$$\begin{aligned}\langle D_1, D_2; \mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \sum_{i=1}^{p}\langle\, \langle \bar{D}_i, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle \\ &\quad -(-1)^{(|D_1|+|D_2|)} \sum_{l=p+1}^{p+q}\langle\, \langle \tilde{D}_l, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle. \qquad (2.11)\end{aligned}$$

Comprobemos que efectivamente $\mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}$ es un 2-tensor covariente graduado, es decir, es $\Gamma(\bigwedge E)$-bilineal graduado. Para ésto, consideremos una base pura de supercampos vectoriales $\{\bar{D}_1, ..., \bar{D}_p; \tilde{D}_{p+1}, ..., \tilde{D}_{p+q}\}$, y usaremos la $\Gamma(\bigwedge E)$-multilinealidad graduada de R^{∇}_{Gr} y de los 1-tensores covariantes graduados D^{i*}.

Para verificar la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad de $\mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}$ en el primer argumento, consideremos el morfismo $H_{\alpha D_1\, D_2} : D \mapsto \langle D, \alpha D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle$ de grado $|\alpha| + |D_1| + |D_2|$, entonces

$$\begin{aligned}&\langle \alpha D_1, D_2; \mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\ &= \mathrm{STr}\, H_{\alpha D_1\, D_2} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p}\langle\, \langle \bar{D}_i; H_{\alpha D_1\, D_2}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle - (-1)^{|H_{\alpha D_1\, D_2}|} \sum_{l=p+1}^{p+q}\langle\, \langle \tilde{D}_l; H_{\alpha D_1\, D_2}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p}\langle\, \langle \bar{D}_i, \alpha D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle \\ &\quad \textstyle -(-1)^{(|\alpha|+|D_1|+|D_2|)} \sum_{l=p+1}^{p+q}\langle\, \langle \tilde{D}_l, \alpha D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p}(-1)^{|\alpha|\cdot 0}\alpha\langle\, \langle \bar{D}_i, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle \\ &\quad \textstyle -(-1)^{|\alpha|+|D_1|+|D_2|} \sum_{l=p+1}^{p+q}(-1)^{|\alpha|\cdot 1}\alpha\langle\, \langle \tilde{D}_l, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p}\alpha\langle\, \langle \bar{D}_i, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle \\ &\quad \textstyle -(-1)^{|\alpha|+|D_1|+|D_2|} \sum_{l=p+1}^{p+q}(-1)^{|\alpha|}\alpha\langle\, \langle \tilde{D}_l, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle \\ &= \textstyle\alpha\left\{ \sum_{i=1}^{p}\langle\, \langle \bar{D}_i, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle \right. \\ &\quad \left.\textstyle -(-1)^{(|D_1|+|D_2|)} \sum_{l=p+1}^{p+q}\langle\, \langle \tilde{D}_l, D_1, D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle \right\} \\ &= \alpha\langle D_1, D_2; \mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle.\end{aligned}$$

Ahora, para verificar la $\Gamma(\bigwedge E)$-linealidad graduada en el segundo argumento de $\mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}$, considerando el morfismo $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal $H_{D_1\, \alpha D_2} : D \mapsto \langle D, D_1, \alpha D_2; R^{\nabla}_{\mathsf{Gr}}\rangle$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\langle D_1, \alpha D_2; \mathrm{Ric}^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle \\
&\quad = \mathrm{STr}\, H_{D_1\,\alpha D_2} \\
&\quad = \textstyle\sum_{i=1}^{p} \langle\, \langle \bar{D}_i; H_{D_1\,\alpha D_2}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle - (-1)^{|H_{D_1\,\alpha D_2}|} \sum_{l=p+1}^{p+q} \langle\, \langle \tilde{D}_l; H_{D_1\,\alpha D_2}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle \\
&\quad = \textstyle\sum_{i=1}^{p} \langle\, \langle \bar{D}_i, D_1, \alpha D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle \\
&\qquad - (-1)^{(|D_1|+|\alpha|+|D_2|)} \textstyle\sum_{l=p+1}^{p+q} \langle\, \langle \tilde{D}_l, D_1, \alpha D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle \\
&\quad = \textstyle\sum_{i=1}^{p} (-1)^{|\alpha|(0+|D_1|)} \alpha \langle\, \langle \bar{D}_i, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle \\
&\qquad - (-1)^{(|D_1|+|\alpha|+|D_2|)} \textstyle\sum_{l=p+1}^{p+q} (-1)^{|\alpha|(1+|D_1|)} \alpha \langle\, \langle \tilde{D}_l, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle \\
&\quad = (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \textstyle\sum_{i=1}^{p} \langle\, \langle \bar{D}_i, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle \\
&\qquad - (-1)^{(|D_1|+|D_2|)} (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \textstyle\sum_{l=p+1}^{p+q} \langle\, \langle \tilde{D}_l, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle \\
&\quad = (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \big\{ \textstyle\sum_{i=1}^{p} \langle\, \langle \bar{D}_i, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \bar{D}^{i*}\rangle \\
&\qquad - (-1)^{(|D_1|+|D_2|)} \textstyle\sum_{l=p+1}^{p+q} \langle\, \langle \tilde{D}_l, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\, ;\, \tilde{D}^{l*}\rangle \big\} \\
&\quad = (-1)^{|\alpha||D_1|} \alpha \langle D_1, D_2; \mathrm{Ric}^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle.
\end{aligned}
$$

Concluimos que efectivamente $\mathrm{Ric}^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}$ es un 2-tensor covariante graduado.

A diferencia del caso clásico (no graduado) donde el tensor de Ricci es simétrico, ésta propiedad no se cumple más en el caso graduado, como veremos más adelante con ejemplos explícitos.

2.5.1. Punto de vista matricial

Si $H : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$ es una aplicación $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal por la izquierda y homogénea, sabemos que

$$\mathrm{STr}\, H \equiv \mathrm{STr}\,(H)_{\mathbf{B}},$$

donde $(H)_{\mathcal{B}}$ es la supermatriz asociada a H en la base $\mathcal{B}$. Así, en particular si H es la aplicación $H : D \mapsto \langle D, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle$, podemos calcular $\mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}$ matricialmente. Veremos que en la presencia de una forma bilineal graduada no degenerada $\boldsymbol{\tau}$, podemos dar además otra expresión matricial de $\mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}$, en términos de la supermatriz asociada a $\boldsymbol{\tau}$ y del tensor de curvatura graduado $\underline{R}^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\tau}}}$.

Lema 2.5.1. Sea $\mathcal{B} = \{\bar{D}_1, ..., \bar{D}_p; \tilde{D}_{p+1}, ..., \tilde{D}_{p+q}\}$ una base pura de supercampos vectoriales. Si $H : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$ es una aplicación $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal por la izquierda y homogénea, con supermatriz homogénea asociada $(H)_{\mathcal{B}}$, y $\boldsymbol{\tau}$ es no-degenerada, entonces

$$(H)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \big(\langle\langle \bar{D}_i; H\rangle, \bar{D}_r\, ;\, \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ir} & \big(\langle\langle \bar{D}_i; H\rangle, \tilde{D}_s\, ;\, \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{is} \\ \big(\langle\langle \tilde{D}_l; H\rangle, \bar{D}_r\, ;\, \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{lr} & \big(\langle\langle \tilde{D}_l; H\rangle, \tilde{D}_s\, ;\, \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ls} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\tau})^{-1}_{\mathcal{B}}.$$

Demostración. Sea

$$(H)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \big(A_i^j\big)_{ij} & \big(B_i^k\big)_{ik} \\ \big(C_l^j\big)_{lj} & \big(D_l^k\big)_{lk} \end{pmatrix}$$

la supermatriz asociada a H, esto es,

$$\langle \bar{D}_i; H\rangle = \sum_{j=1}^{p} A_i^j \bar{D}_j + \sum_{k=1}^{q} B_i^k \tilde{D}_{p+k}, \qquad \forall\, 1 \le i \le p$$

y

$$\langle \tilde{D}_l; H\rangle = \sum_{j=1}^{p} C_l^j \bar{D}_j + \sum_{k=1}^{q} D_l^k \tilde{D}_{p+k}, \qquad \forall\, p+1 \le l \le p+q.$$

Entonces, por la $\Gamma(\bigwedge E)$-bilinealidad de $\boldsymbol{\tau}$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} \big(\langle\langle \bar{D}_i; H\rangle, \bar{D}_r\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ir} & \big(\langle\langle \bar{D}_i; H\rangle, \tilde{D}_s\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{is} \\ \big(\langle\langle \tilde{D}_l; H\rangle, \bar{D}_r\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{lr} & \big(\langle\langle \tilde{D}_l; H\rangle, \tilde{D}_s\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ls} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \big(\langle \sum_j A_i^j \bar{D}_j + \sum_k B_i^k \tilde{D}_k, \bar{D}_r; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ir} & \big(\langle \sum_j A_i^j \bar{D}_j + \sum_k B_i^k \tilde{D}_k, \tilde{D}_s; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{is} \\ \big(\langle \sum_j C_l^j \bar{D}_j + \sum_k D_l^k \tilde{D}_k, \bar{D}_r; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{lr} & \big(\langle \sum_j C_l^j \bar{D}_j + \sum_k D_l^k \tilde{D}_k, \tilde{D}_s; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ls} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \big(A_i^j\big)_{ij} & \big(B_i^k\big)_{ik} \\ \big(C_l^j\big)_{lj} & \big(D_l^k\big)_{lk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \big(\langle \bar{D}_j, \bar{D}_r; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{jr} & \big(\langle \bar{D}_j, \tilde{D}_s; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{js} \\ \big(\langle \tilde{D}_k, \bar{D}_r; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{kr} & \big(\langle \tilde{D}_k, \tilde{D}_s; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ks} \end{pmatrix}$$

pero precisamente

$$\begin{pmatrix} \big(\langle \bar{D}_j, \bar{D}_r; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{jr} & \big(\langle \bar{D}_j, \tilde{D}_s; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{js} \\ \big(\langle \tilde{D}_k, \bar{D}_r; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{kr} & \big(\langle \tilde{D}_k, \tilde{D}_s; \boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ks} \end{pmatrix}$$

es la supermatriz homogénea de grado $|\boldsymbol{\tau}|$ correspondiente a la forma bilineal graduada $\boldsymbol{\tau}$ en la base $\mathbf{B}$, así que podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{pmatrix} \big(\langle\langle \bar{D}_i; H\rangle, \bar{D}_r\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ir} & \big(\langle\langle \bar{D}_i; H\rangle, \tilde{D}_r\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{is} \\ \big(\langle\langle \tilde{D}_l; H\rangle, \bar{D}_r\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{lr} & \big(\langle\langle \tilde{D}_l; H\rangle, \tilde{D}_s\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ls} \end{pmatrix} = (H)_{\mathcal{B}}\,(\boldsymbol{\tau})_{\mathcal{B}}.$$

Luego, si además $\boldsymbol{\tau}$ es no degenerada, se tiene que

$$(H)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \big(\langle\langle \bar{D}_i; H\rangle, \bar{D}_r\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ir} & \big(\langle\langle \bar{D}_i; H\rangle, \tilde{D}_s\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{is} \\ \big(\langle\langle \tilde{D}_l; H\rangle, \bar{D}_r\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{lr} & \big(\langle\langle \tilde{D}_l; H\rangle, \tilde{D}_s\,;\,\boldsymbol{\tau}\rangle\big)_{ls} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\tau})_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

■

En particular, si H es la aplicación $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal homogénea

$$H = \langle \cdot, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\boldsymbol{\nabla}}\rangle : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$$

se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.5.2. Sea $\boldsymbol{\tau}$ un 2-tensor covariante no degenerado y H la aplicación $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal por la izquierda $H := \langle \cdot, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\boldsymbol{\nabla}}\rangle$ de grado $|D_1| + |D_2|$. Si $\mathcal{B} = \{\bar{D}_1, ..., \bar{D}_p; \tilde{D}_{p+1}, ..., \tilde{D}_{p+q}\}$ es una base pura de supercampos vectoriales, y $\boldsymbol{\tau}$, $(H)_{\boldsymbol{B}}$ las supermatrices asociadas a $\boldsymbol{\tau}$ y H respectivamente en la base $\boldsymbol{B}$, entonces

$$\begin{aligned} &\langle D_1, D_2; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}^{\boldsymbol{\tau}}\rangle \\ &\qquad = \mathrm{STr}\,(H)_{\mathcal{B}} \\ &\qquad = \mathrm{STr}\left\{ \begin{pmatrix} \big(\langle \bar{D}_i, D_1, D_2, \bar{D}_r; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\tau}}}\rangle\big)_{ir} & \big(\langle \bar{D}_i, D_1, D_2, \tilde{D}_s; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\tau}}}\rangle\big)_{is} \\ \big(\langle \tilde{D}_l, D_1, D_2, \bar{D}_r; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\tau}}}\rangle\big)_{lr} & \big(\langle \tilde{D}_l, D_1, D_2, \tilde{D}_s; \underline{R}_{\mathsf{Gr}}^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\tau}}}\rangle\big)_{ls} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\tau})_{\boldsymbol{B}}^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Notemos que si $\boldsymbol{\tau}$ tiene una forma sencilla, se pueden simplificar algunos cálculos a la hora de calcular el tensor de Ricci graduado.

2.6. Curvatura escalar graduada

Sea $(M, \boldsymbol{\tau}, \Gamma(\bigwedge E))$ una supervariedad y $\boldsymbol{\tau}$ una métrica graduada ó una 2-forma simpléctica graduada, homogénea. Consideremos para los 2-tensores covariantes graduados $\mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \Gamma(\bigwedge E)$ y $\boldsymbol{\tau} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \times \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \Gamma(\bigwedge E)$ las aplicaciones $\Gamma(\bigwedge E)$-lineales por la izquierda inducidas

$$\mathrm{Ric}^{\flat}_{\mathsf{Gr}} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{X}^{*}_{\mathsf{Gr}}(M) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tau}^{\flat} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{X}^{*}_{\mathsf{Gr}}(M)$$

de grados $|\mathrm{Ric}^{\flat}_{\mathsf{Gr}}| = 0$ y $|\boldsymbol{\tau}^{\flat}| = |\boldsymbol{\tau}|$. Como $\boldsymbol{\tau}$ es no degenerada, la aplicación homogénea $\boldsymbol{\tau}^{\flat}$ es invertible, y se tiene bien definida la aplicación $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal inversa $\left(\boldsymbol{\tau}^{\flat}\right)^{-1} : \mathcal{X}^{*}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$, también de grado $|\boldsymbol{\tau}|$. Así, podemos considerar la aplicación $\Gamma(\bigwedge E)$-lineal por la izquierda

$$\left(\boldsymbol{\tau}^{\flat}\right)^{-1} \circ \mathrm{Ric}^{\flat}_{\mathsf{Gr}} : \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M) \to \mathcal{X}_{\mathsf{Gr}}(M)$$

que resulta ser homogénea de grado $|\boldsymbol{\tau}|$. En términos de esta composición, definimos la curvatura escalar de una supervariedad.

Definición 2.6.1. Sea $\boldsymbol{\tau}$ una métrica graduada o una forma simpléctica graduada. La **curvatura escalar graduada** de una supervariedad $(M, \Gamma(\bigwedge E))$ se define como

$$\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M) := \mathrm{STr}\left[\left(\boldsymbol{\tau}^{\flat}\right)^{-1} \circ \mathrm{Ric}^{\flat}_{\mathsf{Gr}}\right].$$

2.6.1. Punto de vista matricial

Como la composición de aplicaciones $\Gamma(\bigwedge E)$-lineales por la izquierda se corresponde con el producto de las supermatrices asociadas, tenemos una manera matricial de calcular $\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}$.

Proposición 2.6.2. Si $\mathcal{B}$ es una base pura de supercampos vectoriales

$$\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M) = \mathrm{STr}\left\{(\mathrm{Ric}^{\flat}_{\mathsf{Gr}})_{\mathcal{B}}\, (\boldsymbol{\tau}^{\flat})^{-1}_{\mathcal{B}}\right\}$$

donde el producto del lado derecho corresponde al producto usual de matrices.

Si la supermatriz par asociada a $\mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}$ en la base $\mathcal{B}$ tiene la forma $(\mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ entonces

$$\left(\mathrm{Ric}^{\flat}_{\mathsf{Gr}}\right)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} R^t & -(-1)^0 T^t \\ S^t & (-1)^0 U^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^t & -T^t \\ S^t & U^t \end{pmatrix}$$

y luego, si la supermatriz inversa de $\boldsymbol{\tau}^{\flat}$ tiene la forma por bloques

$$\left(\boldsymbol{\tau}^{\flat}\right)^{-1}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

como $|(\boldsymbol{\tau}^{\flat})^{-1}| = |\boldsymbol{\tau}^{\flat}| = |\boldsymbol{\tau}|$ se tendrá que

$$\begin{aligned} \mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M) &= \mathrm{STr}\left\{\begin{pmatrix} R^t & -T^t \\ S^t & U^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right\} \\ &= \mathrm{Tr}\,(R^t A - T^t C) - (-1)^{|\boldsymbol{\tau}|}\mathrm{Tr}\,(S^t B + U^t D) \end{aligned}$$

Capítulo 3

Curvatura escalar de una s-Fedosov de la forma $((M, \Gamma \wedge E), \omega_H, \mathbb{V})$

En este capítulo se presentan los resultados principales de este trabajo. Se describen las propiedades de una supervariedad de Fedosov $((M, \Gamma \wedge E), \boldsymbol{\omega}_H, \mathbb{V})$ en términos de campos tensoriales asociados a la variedad base M (ver (3.3) y (3.5)), y se analiza, en la Sección 3.2, la forma explícita de la supercurvatura escalar en términos de dichos campos tensoriales. En el Teorema 3.2.3 establecemos el primer resultado principal de este trabajo, el cual afirma que la curvatura simpléctica de supervariedades de Koszul-Cartan $((M, \Omega(M)), \boldsymbol{\omega}_H, \mathbb{V})$ es trivial, siempre que $\nabla H = 0$ sobre la variedad base (M, H, ∇), esto es, la supercurvatura escalar se anula, sin importar las simetrías de H, como sucede en el caso de variedades Riemannianas o de Fedosov. En la Sección 3.3 se propone una clase particular de supervariedades de Fedosov, dando así solución al sistema de ecuaciones tensoriales que las caracteriza (ver (3.5)), donde dicha supervariedad es precisamente una supervariedad de Koszul-Cartan de la forma $((M, \Omega(M)), \boldsymbol{\omega}_g, \mathbb{V})$ para una variedad de Weyl $(M, [g])$. Finalmente, se ilustra un ejemplo explícito con curvatura escalar simpléctica impar no trivial, considerando el ejemplo de la métrica del espaciotiempo de Schwarzchild en las coordenadas de Kruskal-Szekeres, resultando en este caso, la curvatura escalar simpléctica impar como una forma diferencial sobre M no homogénea de grado $1 + 3$.

3.1. Caracterización de una s-Fedosov de la forma $((M, \Gamma \wedge E), \omega_H, \mathbb{V})$

Sea M una variedad y ∇ una conexión lineal en $E \to M$, y consideremos la 2-forma graduada impar $\boldsymbol{\omega}_H$ determinada por un isomorfismo $H : TM \to E$ mediante las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \langle \nabla_X, \nabla_Y ; \boldsymbol{\omega}_H \rangle & = & \nabla_X (H(Y)) - \nabla_Y (H(X)) - H([X, Y]) \in \Gamma(E) \\ \langle \nabla_X, i_\alpha ; \boldsymbol{\omega}_H \rangle & = & -i_\alpha (H(X)) = -\langle i_\alpha, \nabla_X ; \boldsymbol{\omega}_H \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M) \\ \langle i_\alpha, i_\beta ; \boldsymbol{\omega}_H \rangle & = & 0 \end{array} \right\}. \tag{3.1}$$

Si $((M, \Gamma \wedge E), \boldsymbol{\omega}_H, \mathbb{V})$ es una supervariedad de Fedosov, $\mathbb{V}$ se puede caracterizar a través de campos tensoriales K_i, L_i, $i = 0, 1, 2, 3$, en la variedad base M como en [22]. Notemos que en particular,

$$i_\beta H(K_2(\alpha,Y)) = \nabla_Y(H(K_3(\alpha,\beta))) - \nabla_{K_3(\alpha,\beta)}(H(Y)) - H([Y,K_3(\alpha,\beta)]) - i_{L_3(\alpha,\beta)}H(Y)$$

y además

$$i_\beta H(K_1(X,\alpha)) = i_\alpha H(K_1(X,\beta))$$

entonces, para todo $\alpha \in \Gamma(E^*)$

$$\begin{aligned}
i_\alpha H(K_1(X,\beta)) &= i_\beta H(K_1(X,\alpha))\\
&= i_\beta H(K_2(\alpha,X))\\
&= \nabla_X(H(K_3(\alpha,\beta))) - \nabla_{K_3(\alpha,\beta)}(H(X)) - H([X,K_3(\alpha,\beta)])\\
&\quad -i_{L_3(\alpha,\beta)}H(X)\\
&= -\nabla_X(H(K_3(\beta,\alpha))) + \nabla_{K_3(\beta,\alpha)}(H(X)) + H([X,K_3(\beta,\alpha)])\\
&\quad +i_{L_3(\beta,\alpha)}H(X)\\
&= -i_\alpha H(K_2(\beta,X))\\
&= -i_\alpha H(K_1(X,\beta))
\end{aligned}$$

y como H es no degenerada, concluimos que $K_1 = 0$, de modo que también $K_2 = 0$. Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3.1.1. Si $((M,\Gamma(\bigwedge E)),\boldsymbol{\omega}_H,\mathbb{V})$ es una supervariedad de Fedosov, $\mathbb{V}$ tiene la forma

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\mathbb{V}_{\nabla_X}\nabla_Y &=& \nabla_{\nabla_X Y + K_0(X,Y)} + i_{L_0(X,Y)},\\
\mathbb{V}_{\nabla_X} i_\alpha &=& i_{\nabla_X\alpha + L_1(X,\alpha)},\\
\mathbb{V}_{i_\alpha}\nabla_Y &=& i_{L_2(\alpha,Y)},\\
\mathbb{V}_{i_\alpha} i_\beta &=& \nabla_{K_3(\alpha,\beta)} + i_{L_3(\alpha,\beta)}
\end{array}\right\}. \tag{3.2}$$

para todos $X,Y,Z \in \Gamma E$ y $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma E^*$.

En este trabajo nos interesa estudiar ciertas familias de supervariedades de Fedosov donde el isomorfismo H es de la forma $H : TM \to T^*M$. La manera natural en la que aparecen tales isomorfismos es asociándolos a formas bilineales no degeneradas $B : TM \times TM \to \mathcal{C}^\infty(M)$, haciendo $H = \flat$ el isomorfismo musical inducido por B. Los casos más importantes son aquellos en los que B es simétrica (métricas pseudo-Riemannianas, en particular, Riemannianas) o antisimétrica (conteniendo en particular la clase de formas simplécticas). A continuación estudiaremos estos casos. Cabe mencionar que abusando de notación, en lo que sigue, denotaremos indistintamente con B a la pseudo-métrica/forma simpléctica, y a su inducido $\flat : TM \to T^*M$.

3.1.1. Caso (M,H,∇) variedad pseudo-Riemanniana o simpléctica

Sea (M,H,∇) una variedad pseudo-Riemanniana[1] ó simpléctica, donde $H : TM \to T^*M$ denota la métrica/forma simpléctica.

Notemos que en este caso,

$$H(K_2(\alpha,Y),\beta) = -H(Y,L_3(\alpha,\beta))$$

[1]En lo que sigue, por \`metrica' entenderemos una metrica pseudo-Riemanniana salvo mencion expresa en contra.

que implica que también $L_3=0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} H(Y,L_2(\alpha,Z)) &= H(Y,L_1(Z,\alpha)) \\ &= -H(K_0(Z,Y),\alpha) \\ &= -H(K_0(Y,Z),\alpha) \\ &= H(Z,L_1(Y,\alpha)) \\ &= H(Z,L_2(\alpha,Y)) \end{aligned}$$

y por lo tanto, podemos concluir lo siguiente:

Corolario 3.1.2. Si $((M,\Omega(M)),\boldsymbol{\omega}_H,\mathbb{V})$ es una supervariedad de Fedosov, con ∇ simétrica y compatible con H, entonces $\mathbb{V}$ tiene la forma

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{V}_{\nabla_X}\nabla_Y &=& \nabla_{\nabla_X Y+K_0(X,Y)}+i_{L_0(X,Y)}, \\ \mathbb{V}_{\nabla_X}i_\alpha &=& i_{\nabla_X\alpha+L_1(X,\alpha)}, \\ \mathbb{V}_{i_\alpha}\nabla_Y &=& i_{L_2(\alpha,Y)}, \\ \mathbb{V}_{i_\alpha}i_\beta &=& \nabla_{K_3(\alpha,\beta)} \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

y está caracterizada por las siguientes condiciones

$$\left\{\begin{array}{ll} K_0 \text{ es simétrico} & H(K_3(\alpha,\beta),\gamma)=-H(K_3(\alpha,\gamma),\beta) \\ L_0(X,Y)=L_0(Y,X)+R^\nabla(X,Y) & H(K_0(X,Y),\alpha)=-H(Y,L_1(X,\alpha)) \\ L_1(X,\alpha)=L_2(\alpha,X) & H(Y,L_0(X,Z))=H(Z,L_0(X,Y)) \\ K_3 \text{ es antisimétrico} & \end{array}\right\}$$

para todos $X,Y,Z,\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma(TM)$.

3.1.2. Caso (M,g,∇^W) de Weyl

Sea (M,g,∇^W) una variedad de Weyl donde g denota una métrica y ∇^W una conexión tal que $\nabla^W g=\theta\otimes g$, y sea $((M,\Gamma(\wedge E)),\boldsymbol{\omega}_g,\mathbb{V})$ supervariedad de Fedosov.

Notemos que en este caso

$$g(Y,L_2(\alpha,Z))=g(Z,L_2(\alpha,Y))-(\nabla^W_Y g)(Z,\alpha)+(\nabla^W_Z g)(Y,\alpha)$$

y además

$$\begin{aligned} g(Y,L_2(\alpha,Z))-g(Z,L_2(\alpha,Y)) &= g(Y,L_1(Z,\alpha))-g(Z,L_1(Y,\alpha)) \\ &= -g(K_0(Z,Y),\alpha)+\theta(Z)g(Y,\alpha) \\ &\quad +g(K_0(Y,Z),\alpha)-\theta(Y)g(Z,\alpha) \\ &= -g(K_0(Z,Y),\alpha)+\theta(Z)g(Y,\alpha) \\ &\quad +g(K_0(Z,Y),\alpha)-\theta(Y)g(Z,\alpha) \\ &= \theta(Z)g(Y,\alpha)-\theta(Y)g(Z,\alpha) \end{aligned}$$

de modo que, podemos concluir lo siguiente:

Corolario 3.1.3. Si $((M, \Gamma(\bigwedge T^*M)), \boldsymbol{\omega}_H, \mathbb{\nabla})$ es de Fedosov con ∇ de Weyl, entonces $\mathbb{\nabla}$ tiene la forma

$$\left.\begin{cases} \mathbb{\nabla}_{\nabla_X}\nabla_Y &= \nabla_{\nabla_X Y + K_0(X,Y)} + i_{L_0(X,Y)}, \\ \mathbb{\nabla}_{\nabla_X} i_\alpha &= i_{\nabla_X \alpha + L_1(X,\alpha)}, \\ \mathbb{\nabla}_{i_\alpha}\nabla_Y &= i_{L_2(\alpha,Y)}, \\ \mathbb{\nabla}_{i_\alpha} i_\beta &= \nabla_{K_3(\alpha,\beta)} + i_{L_3(\alpha,\beta)} \end{cases}\right\}. \tag{3.4}$$

y está caracterizada por las siguientes condiciones

$$\left.\begin{cases} K_0 \text{ es simétrico} \\ L_0(X,Y) = L_0(Y,X) + R^\nabla(X,Y) \\ L_1(X,\alpha) = L_2(\alpha,X) \\ K_3 \text{ y } L_3 \text{ son antisimétricos} \\ g(K_3(\alpha,\beta),\gamma) = -g(K_3(\alpha,\gamma),\beta) \\ g(Y, L_3(\alpha,\beta)) = \theta(Y)g(K_3(\alpha,\beta),\cdot) - \theta(K_3(\alpha,\beta))g(Y,\cdot) \\ g(K_0(X,Y),\alpha) = -g(Y, L_1(X,\alpha)) + \theta(X)g(Y,\alpha) \\ g(Y, L_0(X,Z)) = g(Z, L_0(X,Y)) - (\nabla_X\theta)(Y)g(Z,\cdot) - \theta(Y)\theta(X)g(Z,\cdot) \\ \qquad +(\nabla_X\theta)(Z)g(Y,\cdot) + \theta(Z)\theta(X)g(Y,\cdot) + \theta(K_0(X,Y))g(Z,\cdot) \\ \qquad -\theta(Z)g(K_0(X,Y),\cdot) + \theta(Y)g(K_0(X,Z),\cdot) - \theta(K_0(X,Z))g(Y,\cdot) \end{cases}\right\} \tag{3.5}$$

para todos $X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(TM)$.

3.2. Expresión general de la curvatura

Consideremos una supervariedad de Fedosov de la forma $((M, \Gamma\bigwedge E), \boldsymbol{\omega}_H, \mathbb{\nabla})$, para $H : TM \to E$ un isomorfismo y $\boldsymbol{\omega}_H$ la 2-forma graduada simpléctica impar definida por (3.1). En una base homogénea de supercampos $\{\nabla_{X_i}, i_{\alpha_i}\}$ la supermatriz impar asociada a $\boldsymbol{\omega}_H$ tiene la forma

$$(\boldsymbol{\omega}_H) = \begin{pmatrix} P & -H \\ H^t & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

(donde estamos nombrando H a la matriz invertible asociada al isomorfismo dado por H) y por lo tanto,

$$(\boldsymbol{\omega}_H^\flat) = \begin{pmatrix} P^t & -(-1)^1(H^t)^t \\ (-H)^t & (-1)^1 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^t & H \\ -H^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, una matriz por bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

con B y C invertibles, es también invertible, con inversa dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{pmatrix}$$

así, tenemos que

$$(\boldsymbol{\omega}_H^\flat)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & (-H^t)^{-1}\\ H^{-1} & -(H^{-1})P^t(-H^t)^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & (-H^t)^{-1}\\ H^{-1} & H^{-1}P^t(H^t)^{-1}\end{pmatrix}.$$

Por otro lado si la supermatriz par asociada a $\mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}$ es

$$(\mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}})=\begin{pmatrix}R & S\\ T & U\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

entonces

$$\left(\mathrm{Ric}^\flat_{\mathsf{Gr}}\right)=\begin{pmatrix}R^t & -(-1)^0T^t\\ S^t & (-1)^0U^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R^t & -T^t\\ S^t & U^t\end{pmatrix},$$

así

$$\begin{aligned}
\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M) &= \mathrm{STr}\left[\left(\mathrm{Ric}^\flat_{\mathsf{G}}\right)\left(\boldsymbol{\omega}_H^\flat\right)^{-1}\right]\\
&= \mathrm{STr}\left[\begin{pmatrix}R^t & -T^t\\ S^t & U^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & (-H^t)^{-1}\\ H^{-1} & H^{-1}P^t(H^t)^{-1}\end{pmatrix}\right]\\
&= \mathrm{STr}\begin{pmatrix}-T^tH^{-1} & *\\ * & -S^t(H^t)^{-1}+U^tH^{-1}P^t(H^t)^{-1}\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{Tr}\left[-T^tH^{-1}\right]-(-1)^1\,\mathrm{Tr}\left[-S^t(H^t)^{-1}+U^tH^{-1}P^t(H^t)^{-1}\right]\\
&= -\mathrm{Tr}\left[T^tH^{-1}\right]+\mathrm{Tr}\left[-S^t(H^t)^{-1}\right]+\mathrm{Tr}\left[U^tH^{-1}P^t(H^t)^{-1}\right].
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Para calcular la curvatura escalar debemos analizar el tensor de Ricci graduado, que a su vez requiere del análisis del tensor de curvatura que, en general, para una $\mathbb{V}$ determinada por los campos tensoriales $\{K_i,L_i\}$,

$$\left\{\begin{aligned}
\langle\nabla_X,\nabla_Y,\nabla_Z;R^{\boldsymbol{\nabla}^H}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \nabla_{A_1(X,Y,Z)}+i_{B_1(X,Y,Z)}\\
\langle\nabla_X,\nabla_Y,i_Z;R^{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \nabla_{A_2(X,Y,Z)}+i_{B_2(X,Y,Z)}\\
\langle\nabla_X,i_Y,\nabla_Z;R^{\boldsymbol{\nabla}^H}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \nabla_{A_3(X,Y,Z)}+i_{B_3(X,Y,Z)}=-\langle i_Y,\nabla_X,\nabla_Z;R^{\boldsymbol{\nabla}^H}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\
\langle\nabla_X,i_Y,i_Z;R^{\boldsymbol{\nabla}^H}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \nabla_{A_4(X,Y,Z)}+i_{B_4(X,Y,Z)}=-\langle i_Y,\nabla_X,i_Z;R^{\boldsymbol{\nabla}^H}_{\mathsf{Gr}}\rangle\\
\langle i_X,i_Y,\nabla_Z;R^{\boldsymbol{\nabla}^H}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \nabla_{A_5(X,Y,Z)}+i_{B_5(X,Y,Z)}\\
\langle i_X,i_Y,i_Z;R^{\boldsymbol{\nabla}^H}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \nabla_{A_6(X,Y,Z)}+i_{B_6(X,Y,Z)}
\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1(X,Y,Z) &= \nabla_XK_0(Y,Z)+K_0(X,\nabla_YZ+K_0(Y,Z))+K_1(X,L_0(Y,Z))\\
&\quad -\nabla_YK_0(X,Z)-K_0(Y,\nabla_XZ+K_0(X,Z))-K_1(Y,L_0(X,Z))\\
&\quad +R^\nabla(X,Y)Z-K_0([X,Y],Z)-K_2(R^\nabla(X,Y),Z)\\
B_1(X,Y,Z) &= \nabla_XL_0(Y,Z)+L_0(X,\nabla_YZ+K_0(Y,Z))+L_1(X,L_0(Y,Z))\\
&\quad -\nabla_YL_0(X,Z)-L_0(Y,\nabla_XZ+K_0(X,Z))-L_1(Y,L_0(X,Z))\\
&\quad -L_0([X,Y],Z)-L_2(R^\nabla(X,Y),Z)\\
A_2(X,Y,Z) &= K_0(X,K_1(Y,Z))+\nabla_X(K_1(Y,Z))+K_1(X,\nabla_YZ+L_1(Y,Z))\\
&\quad -K_0(Y,K_1(X,Z))-\nabla_Y(K_1(X,Z))-K_1(Y,\nabla_XZ+L_1(X,Z))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -K_1([X,Y],Z) - K_3(R^{\nabla}(X,Y),Z) \\
B_2(X,Y,Z) &= L_0(X,K_1(Y,Z)) + \nabla_X L_1(Y,Z) + L_1(X,\nabla_Y Z + L_1(Y,Z)) \\
& \quad L_0(X,K_1(Y,Z)) - \nabla_Y L_1(X,Z) - L_1(Y,\nabla_X Z + L_1(X,Z)) \\
& \quad +R^{\nabla}(X,Y)Z - L_1([X,Y],Z) - L_3(R^{\nabla}(X,Y),Z) \\
A_3(X,Y,Z) &= K_0(X,K_2(Y,Z)) + K_1(X,L_2(Y,Z)) + \nabla_X(K_2(Y,Z)) \\
& \quad -K_2(Y,\nabla_X Z + K_0(X,Z)) - K_2(\nabla_X Y,Z) - K_3(Y,L_0(X,Z)) \\
B_3(X,Y,Z) &= L_0(X,K_2(Y,Z)) + L_1(X,L_2(Y,Z)) + \nabla_X L_2(Y,Z) \\
& \quad -L_2(Y,\nabla_X Z + K_0(X,Z)) - L_2(\nabla_X Y,Z) - L_3(Y,L_0(X,Z)) \\
A_4(X,Y,Z) &= K_0(X,K_3(Y,Z)) + K_1(X,L_3(Y,Z)) - K_2(Y,K_1(X,Z)) + \nabla_X K_3(Y,Z) \\
& \quad -K_3(Y,\nabla_X Z + L_1(X,Z)) - K_3(\nabla_X Y,Z) \\
B_4(X,Y,Z) &= L_0(X,K_3(Y,Z)) + L_1(X,L_3(Y,Z)) - L_2(Y,K_1(X,Z)) + \nabla_X L_3(Y,Z) \\
& \quad -L_3(Y,\nabla_X Z + L_1(X,Z)) - L_3(\nabla_X Y,Z) \\
A_5(X,Y,Z) &= K_2(X,K_2(Y,Z)) + K_3(X,L_2(Y,Z)) \\
& \quad +K_2(Y,K_2(X,Z)) + K_3(Y,L_2(X,Z)) \\
B_5(X,Y,Z) &= L_2(X,K_2(Y,Z)) + L_3(X,L_2(Y,Z)) \\
& \quad +L_2(Y,K_2(X,Z)) + L_3(Y,L_2(X,Z)) \\
A_6(X,Y,Z) &= K_2(X,K_3(Y,Z)) + K_3(X,L_3(Y,Z)) \\
& \quad +K_2(Y,K_3(X,Z)) + K_3(Y,L_3(X,Z)) \\
B_6(X,Y,Z) &= L_2(X,K_3(Y,Z)) + L_3(X,L_3(Y,Z)) + L_2(Y,K_3(X,Z)) + L_3(Y,L_3(X,Z)).
\end{aligned}
$$

3.2.1. Caso (M,H,∇) variedad pseudo-Riemanniana o simpléctica

En este caso, el bloque homogéneo P de la ecuación (3.6) se anula, y entonces por (3.8) la curvatura escalar se puede calcular como

$$
\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M) = -\mathrm{Tr}\left[T^t H^{-1}\right] + \mathrm{Tr}\left[-S^t (H^t)^{-1}\right].
$$

Así, para determinar las propiedades de los bloques homogéneos involucrados, analizaremos el tensor de Ricci graduado, analizando también el tensor de curvatura graduado.

Por el Corolario 3.1.2. $K_1 = K_2 = L_3 = 0$, y entonces la curvatura graduada de $\mathbb{\nabla}$, que está determinada por las ecuaciones (3.9), se reduce a la forma

$$\begin{aligned}
A_1(X,Y,Z) &= \nabla_X K_0(Y,Z)+K_0(X,\nabla_Y Z+K_0(Y,Z))-K_0([X,Y],Z)+R^{\nabla}(X,Y)Z\\
&\quad -\nabla_Y K_0(X,Z)-K_0(Y,\nabla_X Z+K_0(X,Z))\\
B_1(X,Y,Z) &= \nabla_X L_0(Y,Z)+L_0(X,\nabla_Y Z+K_0(Y,Z))+L_1(X,L_0(Y,Z))\\
&\quad -\nabla_Y L_0(X,Z)-L_0(Y,\nabla_X Z+K_0(X,Z))-L_1(Y,L_0(X,Z))\\
&\quad -L_0([X,Y],Z)-L_2(R^{\nabla}(X,Y),Z)\\
A_2(X,Y,Z) &= -K_3(R^{\nabla}(X,Y),Z)\\
B_2(X,Y,Z) &= \nabla_X L_1(Y,Z)+L_1(X,\nabla_Y Z+L_1(Y,Z))-L_1([X,Y],Z)+R^{\nabla}(X,Y)Z\\
&\quad -\nabla_Y L_1(X,Z)-L_1(Y,\nabla_X Z+L_1(X,Z))\\
A_3(X,Y,Z) &= -K_3(Y,L_0(X,Z))\\
B_3(X,Y,Z) &= L_1(X,L_2(Y,Z))+\nabla_X L_2(Y,Z)-L_2(Y,\nabla_X Z+K_0(X,Z))-L_2(\nabla_X Y,Z)\\
A_4(X,Y,Z) &= K_0(X,K_3(Y,Z))+\nabla_X K_3(Y,Z)-K_3(Y,\nabla_X Z+L_1(X,Z))-K_3(\nabla_X Y,Z)\\
B_4(X,Y,Z) &= L_0(X,K_3(Y,Z))\\
A_5(X,Y,Z) &= K_3(X,L_2(Y,Z))+K_3(Y,L_2(X,Z))\\
B_5(X,Y,Z) &= 0 = A_6(X,Y,Z)\\
B_6(X,Y,Z) &= L_2(X,K_3(Y,Z))+L_2(Y,K_3(X,Z)),
\end{aligned}$$

y entonces el tensor de curvatura graduado es (donde estamos omitiendo el subíndice Gr en $\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}$)

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\langle\nabla_X,\nabla_Y,\nabla_Z,\nabla_T\,;\,\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& \langle\nabla_{A_1(X,Y,Z)},\nabla_T;\boldsymbol{\omega}_H\rangle+i_{B_1(X,Y,Z)}H(T)\\
\langle\nabla_X,\nabla_Y,\nabla_Z,i_T\,;\,\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& -i_T H(A_1(X,Y,Z))=\langle\nabla_X,\nabla_Y,i_T,\nabla_Z\,;\,\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
\langle\nabla_X,i_Y,\nabla_Z,\nabla_T\,;\,\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& \langle\nabla_{A_3(X,Y,Z)},\nabla_T\rangle+i_{B_3(X,Y,Z)}H(T)=-\langle i_Y,\nabla_X,\nabla_Z,\nabla_T\,;\,\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
\langle\nabla_X,\nabla_Y,i_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& -i_T H(A_2(X,Y,Z))\\
\langle\nabla_X,i_Y,\nabla_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& -i_T H(A_3(X,Y,Z))=\langle\nabla_X,i_Y,i_T,\nabla_Z;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
&=& -\langle i_Y,\nabla_X,\nabla_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle=-\langle i_Y,\nabla_X,i_T,\nabla_Z;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
\langle i_X,i_Y,\nabla_Z,\nabla_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& \langle\nabla_{A_5(X,Y,Z)},\nabla_T;\boldsymbol{\omega}_H\rangle\\
\langle\nabla_X,i_Y,i_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& -i_T H(A_4(X,Y,Z))=-\langle i_Y,\nabla_X,i_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
\langle i_X,i_Y,\nabla_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& -i_T H(A_5(X,Y,Z))=\langle i_X,i_Y,i_T,\nabla_Z;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
\langle i_X,i_Y,i_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& 0
\end{array}\right\}. \tag{3.10}$$

Usando las ecuaciones que definen $\boldsymbol{\omega}_H$, el tensor de curvatura graduado se puede expresar en la forma

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\langle\nabla_X,\nabla_Y,\nabla_Z,\nabla_T\,;\,\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& H(T,B_1(X,Y,Z))\\
\langle\nabla_X,\nabla_Y,\nabla_Z,i_T\,;\,\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& -H(A_1(X,Y,Z),T)=\langle\nabla_X,\nabla_Y,i_T,\nabla_Z\,;\,\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
\langle\nabla_X,i_Y,\nabla_Z,\nabla_T\,;\,\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& H(T,B_3(X,Y,Z))=-\langle i_Y,\nabla_X,\nabla_Z,\nabla_T\,;\,\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
\langle\nabla_X,\nabla_Y,i_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& -H(A_2(X,Y,Z),T)\\
\langle\nabla_X,i_Y,\nabla_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& -H(A_3(X,Y,Z),T)=\langle\nabla_X,i_Y,i_T,\nabla_Z;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
&=& -\langle i_Y,\nabla_X,\nabla_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle=-\langle i_Y,\nabla_X,i_T,\nabla_Z;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
\langle i_X,i_Y,\nabla_Z,\nabla_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& 0\\
\langle\nabla_X,i_Y,i_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& -H(A_4(X,Y,Z),T)=-\langle i_Y,\nabla_X,i_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
\langle i_X,i_Y,\nabla_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& -H(A_5(X,Y,Z),T)=\langle i_X,i_Y,i_T,\nabla_Z;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle\\
\langle i_X,i_Y,i_Z,i_T;\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_H}\rangle &=& 0
\end{array}\right\}. \tag{3.11}$$

Analizaremos ahora el tensor de Ricci graduado. Para ésto, veamos primero que se cumplen las siguientes propiedades:

Lema 3.2.1. Si $\mathbb{\nabla}$ es simpléctica,

1. $A_3(X,Z,T) = A_3(T,Z,X) - A_2(X,T,Z)$
2. $H(A_3(X,Z,T),Y) = H(A_3(T,Z,X),Y) - H(A_2(T,X,Y),Z)$
3. $H(A_3(Z,T,X),Y) = -H(A_3(Z,Y,X),T)$

Demostración.

1. Recordemos que al ser $\mathsf{T}^{\mathbb{\nabla}} = 0$, entonces $L_0(T,X) = L_0(X,T) + R^{\nabla}(X,T)$ y K_3 es antisimétrico, por lo tanto, usando la definición de A_3 y A_2 tenemos que
$$\begin{aligned} A_3(X,Z,T) &= -K_3(Z,L_0(X,T)) \\ &= -K_3(Z,L_0(T,X)+R^{\nabla}(X,T)) \\ &= -K_3(Z,L_0(T,X)) - K_3(Z,R^{\nabla}(X,T)) \\ &= -K_3(Z,L_0(T,X)) + K_3(R^{\nabla}(X,T),Z) \\ &= A_3(T,Z,X) - A_2(X,T,Z). \end{aligned}$$

2. Por un lado, aplicando $H(-,Y)$ en ambos lados de la ecuación en 1., tenemos que
$$H(A_3(X,Z,T),Y) = H(A_3(T,Z,X),Y) - H(A_2(X,T,Z),Y).$$
Pero, como $\mathbb{\nabla}\boldsymbol{\omega}_H = 0$ implica que $H(K_3(P,Z),Y) = -H(K_3(P,Y),Z)$, y además R^{∇} es antisimétrica, tenemos que
$$\begin{aligned} H(A_2(X,T,Z),Y) &= H(-K_3(R^{\nabla}(X,T),Z),Y) \\ &= H(K_3(R^{\nabla}(T,X),Z),Y) \\ &= -H(K_3(R^{\nabla}(T,X),Y),Z) \\ &= H(A_2(T,X,Y),Z) \end{aligned}$$
y por lo tanto
$$\begin{aligned} H(A_3(X,Z,T),Y) &= H(A_3(T,Z,X),Y) - H(A_2(X,T,Z),Y) \\ &= H(A_3(T,Z,X),Y) - H(A_2(T,X,Y),Z). \end{aligned}$$

3. Finalmente,
$$\begin{aligned} H(A_3(Z,T,X),Y) &= H(-K_3(T,L_0(Z,X)),Y) \\ &= H(K_3(L_0(Z,X),T),Y) \\ &= -H(K_3(L_0(Z,X),Y),T) \\ &= H(K_3(Y,L_0(Z,X)),T) \\ &= -H(A_3(Z,Y,X),T)). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Mediante el lema anterior, probaremos en el siguiente resultado que en el caso de ser H una mérica pseudo-Riemanniana o una forma simpléctica, se cumple que $T=-S^t$ en (3.7).

Proposición 3.2.2. Si H es una forma simpléctica ó una métrica, por el lema anterior, se tiene que

$$\langle \nabla_X, i_Y; \mathrm{Ric}^{\boldsymbol{\omega}_H}_{\mathsf{Gr}}\rangle = -\langle i_Y, \nabla_X; \mathrm{Ric}^{\boldsymbol{\omega}_H}_{\mathsf{Gr}}\rangle$$

Demostración. Supongamos primero que $H=\omega_0$ es una forma simpléctica. Si $\{e_i,f_i\}_{i=1}^n$ es un marco simpléctico, para la variedad de Fedosov (M,ω_0,∇), esto es, $\omega_0(e_i,f_j)=\delta_{ij}$ y cero en otros caso, o bien, tal que matricialmente ω_0 tiene la forma

$$w_0=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}$$

y consideremos la base pura de supercampos vectoriales $\mathcal{B}=\{\nabla_{e_i},\nabla_{f_i};i_{e_i},i_{f_i}\}_{i=1}^n$ para la supervariedad de Fedosov $((M,\Omega(M)),\boldsymbol{\omega}_{\omega_0},\mathbb{V})$.

La base dual de $\mathbf{B}$ es el conjunto de 1-formas graduadas $\mathcal{B}^*=\{\nabla^*_{e_i},\nabla^*_{f_i};i^*_{e_i},i^*_{f_i}\}$ definidas como

$$\nabla^*_{e_i}=-i_{i_{f_i}}\boldsymbol{\omega}_{\omega_0},\qquad \nabla^*_{f_i}=i_{i_{e_i}}\boldsymbol{\omega}_{\omega_0},\qquad i^*_{e_i}=-i_{\nabla_{f_i}}\boldsymbol{\omega}_{\omega_0},\qquad i^*_{f_i}=i_{\nabla_{e_i}}\boldsymbol{\omega}_{\omega_0},$$

ya que, usando la expresión para $\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}$, y el hecho de que $\{e_i,f_i\}$ es un marco simpléctico,

$$\begin{aligned}
\langle\nabla_{e_j};\nabla^*_{e_i}\rangle &= -\langle\nabla_{e_j},i_{f_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=\omega_0(e_j,f_i)=\delta_{ij}\\
\langle\nabla_{f_j};\nabla^*_{e_i}\rangle &= -\langle\nabla_{f_j},i_{f_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=\omega_0(f_j,f_i)=0\qquad\forall j\\
\langle i_-;\nabla^*_{e_i}\rangle &= -\langle i_-,i_{f_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle\nabla_{f_j};\nabla^*_{f_i}\rangle &= \langle\nabla_{f_j},i_{e_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=-\omega_0(f_j,e_i)=\delta_{ij}\\
\langle\nabla_{e_j};\nabla^*_{f_i}\rangle &= \langle\nabla_{e_j},i_{e_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=0\qquad\forall j\\
\langle i_-;\nabla^*_{f_i}\rangle &= \langle i_-,i_{e_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle i_{e_j};i^*_{e_i}\rangle &= -\langle i_{e_j},\nabla_{f_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=-\omega_0(f_i,e_j)=\delta_{ij}\\
\langle i_{f_j};i^*_{e_i}\rangle &= -\langle i_{f_j},\nabla_{f_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=-\omega_0(f_i,f_j)=0\qquad\forall j\\
\langle\nabla_-;i^*_{e_i}\rangle &= -\langle\nabla_-,\nabla_{f_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=0
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
\langle i_{f_j};i^*_{f_i}\rangle &= \langle i_{f_j},\nabla_{e_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=\omega_0(e_i,f_j)=\delta_{ij}\\
\langle i_{e_j};i^*_{f_i}\rangle &= \langle i_{e_j},\nabla_{e_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=\omega_0(e_i,e_j)=0\qquad\forall j\\
\langle\nabla_-;i^*_{f_i}\rangle &= \langle\nabla_-,\nabla_{e_i};\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle=0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \mathrm{STr}\left(D \mapsto \langle D, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\omega}_H}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\langle\, \langle \nabla_{e_i}, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\omega}_H}}\rangle \,;\, \nabla_{e_i}^{*}\rangle + \langle\, \langle \nabla_{f_i}, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\omega}_H}}\rangle \,;\, \nabla_{f_i}^{*}\rangle\right\}\\
&\quad -(-1)^{(|D_1|+|D_2|)}\sum_{i=1}^{n}\left\{\langle\, \langle i_{e_i}, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\omega}_H}}\rangle \,;\, i_{e_i}^{*}\rangle + \langle\, \langle i_{f_i}, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\omega}_H}}\rangle \,;\, i_{f_i}^{*}\rangle\right\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{-\langle\, \langle \nabla_{e_i}, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\omega}_H}}\rangle \,,\, i_{f_i} \,;\, \boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle + \langle\, \langle \nabla_{f_i}, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\omega}_H}}\rangle \,,\, i_{e_i} \,;\, \boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle\right\}\\
&\quad -(-1)^{(|D_1|+|D_2|)}\sum_{i=1}^{n}\Big\{-\langle\, \langle i_{e_i}, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\omega}_H}}\rangle \,,\, \nabla_{f_i} \,;\, \boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle\\
&\qquad\qquad + \langle\, \langle i_{f_i}, D_1, D_2; R_{\mathsf{Gr}}^{\nabla^{\boldsymbol{\omega}_H}}\rangle \,,\, \nabla_{e_i} \,;\, \boldsymbol{\omega}_{\omega_0}\rangle\Big\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{-\langle \nabla_{e_i}, D_1, D_2, i_{f_i} \,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}}\rangle + \langle \nabla_{f_i}, D_1, D_2, i_{e_i} \,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}}\rangle\right\}\\
&\quad -(-1)^{(|D_1|+|D_2|)}\sum_{i=1}^{n}\Big\{-\langle i_{e_i}, D_1, D_2, \nabla_{f_i} \,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}}\rangle\\
&\qquad\qquad + \langle i_{f_i}, D_1, D_2, \nabla_{e_i} \,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}}\rangle\Big\}\,.
\end{aligned}$$

Entonces, de las ecuaciones (3.11) que determinan el tensor de curvatura $\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_{\omega_0}}$, se sigue que

$$\langle i_Y, \nabla_X; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\{\omega_0(A_3(e_i, Y, X)\,,\, f_i) - \omega_0(A_3(f_i, Y, X)\,,\, e_i)\}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X, i_Y; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\{\omega_0(A_2(e_i, X, Y)\,,\, f_i) - \omega_0(A_2(f_i, X, Y)\,,\, e_i)\}\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\{-\omega_0(A_3(X, e_i, f_i)\,,\, Y) + \omega_0(A_3(X, f_i, e_i)\,,\, Y)\}
\end{aligned}$$

pero, de (2) en el lema anterior, tenemos que

$$-\omega_0(A_3(X, e_i, f_i)\,,\, Y) = -\omega_0(A_3(f_i, e_i, X), Y) + \omega_0(A_2(f_i, X, Y), e_i)$$

y

$$\omega_0(A_3(X, f_i, e_i)\,,\, Y) = \omega_0(A_3(e_i, f_i, X), Y) - \omega_0(A_2(e_i, X, Y), f_i)$$

y por lo tanto

$$\langle \nabla_X, i_Y; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\{-\omega_0(A_3(f_i, e_i, X), Y) + \omega_0(A_3(e_i, f_i, X), Y)\}$$

luego, aplicando (3) del lema anterior a cada término, se sigue que

$$\langle \nabla_X, i_Y; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\{\omega_0(A_3(f_i, Y, X), e_i) - \omega_0(A_3(e_i, Y, X), f_i)\}$$

y así, se tiene que $\langle \nabla_X, i_Y; \mathrm{Ric}_{Gr}\rangle = -\langle i_Y, \nabla_X; \mathrm{Ric}_{Gr}\rangle$.

Ahora, si en particular $H = g_0$ es una métrica Riemanniana y $\{X_i\}$ es un marco ortonormal local para la variedad Riemanniana (M, g_0, ∇), esto es, $g_0(X_i, X_j) = \delta_{ij}$ o matricialmente $g_0 = \mathsf{I}$, podemos considerar la base pura de supercampos vectoriales $\mathcal{B} = \{\nabla_{X_i}; i_{X_i}\}_{i=1}^n$ para la supervariedad de Fedosov $((M, \Omega(M)), \boldsymbol{\omega}_{g_0}, \mathbb{V})$.

La base dual de $\mathcal{B}$ es el conjunto de 1-formas graduadas $\mathcal{B}^* = \{\nabla^*_{X_i}; i^*_{X_i}\}$ definidas como

$$\nabla^*_{X_i} = -i_{i_{X_i}}\boldsymbol{\omega}_{g_0}, \qquad i^*_{X_i} = i_{\nabla_{X_i}}\boldsymbol{\omega}_{g_0},$$

ya que, usando la expresión para $\boldsymbol{\omega}_{g_0}$, y el hecho de que $\{X_i\}$ es g_0-ortonormal,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{X_j}; \nabla^*_{X_i}\rangle &= -\langle \nabla_{X_j}, i_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_{g_0}\rangle = g_0(X_j, X_i) = \delta_{ij}\\
\langle i_{X_j}; \nabla^*_{X_i}\rangle &= -\langle i_{X_j}, i_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_{g_0}\rangle = 0 \qquad \forall j
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\langle i_{X_j}; i^*_{X_i}\rangle &= \langle i_{X_j}, \nabla_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_{g_0}\rangle = g_0(X_i, X_j) = \delta_{ij}\\
\langle \nabla_{X_j}; i^*_{X_i}\rangle &= \langle \nabla_{X_j}, \nabla_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_{g_0}\rangle = 0 \qquad \forall j.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \mathrm{STr}\left(D \mapsto \langle D, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\omega}_H}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \langle\, \langle \nabla_{X_i}, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\omega}_H}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\,;\, \nabla^*_{X_i}\rangle\\
&\quad -(-1)^{(|D_1|+|D_2|)}\sum_{i=1}^n \langle\, \langle i_{X_i}, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\omega}_H}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\,;\, i^*_{X_i}\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n \left\{-\langle\, \langle \nabla_{X_i}, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\omega}_H}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\,,\, i_{X_i}\,;\, \boldsymbol{\omega}_{g_0}\rangle\right\}\\
&\quad -(-1)^{(|D_1|+|D_2|)}\sum_{i=1}^n \langle\, \langle i_{X_i}, D_1, D_2; R^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\omega}_H}}_{\mathsf{Gr}}\rangle\,,\, \nabla_{X_i}\,;\, \boldsymbol{\omega}_{g_0}\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n \left\{-\langle \nabla_{X_i}, D_1, D_2, i_{f_i}\,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_{g_0}}\rangle\right\}\\
&\quad -(-1)^{(|D_1|+|D_2|)}\sum_{i=1}^n \langle i_{X_i}, D_1, D_2, \nabla_{X_i}\,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_{g_0}}\rangle.
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.11) que determinan el tensor de curvatura, tenemos que

$$\langle i_Y, \nabla_X; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}\rangle = \sum_{i=1}^n \{g_0(A_3(X_i, Y, X)\,,\, X_i)\}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X, i_Y; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}\rangle &= \sum_{i=1}^n \{g_0(A_2(X_i, X, Y)\,,\, X_i)\}\\
&+ \sum_{i=1}^n \{g_0(A_3(X, X_i, X_i)\,,\, Y)\}
\end{aligned}$$

pero, de (2) en el lema anterior,

$$g_0(A_3(X, X_i, X_i)\,,\, Y) = g_0(A_3(X_i, X_i, X), Y) - g_0(A_2(X_i, X, Y), X_i)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X, i_Y; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \{ g_0(A_2(X_i, X, Y)\,,\, X_i) \} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \{ g_0(A_3(X_i, X_i, X), Y) - g_0(A_2(X_i, X, Y), X_i) \} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{ g_0(A_3(X_i, X_i, X), Y) \}
\end{aligned}$$

y aplicando (3) del lema anterior

$$\langle \nabla_X, i_Y; \mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \{ -g_0(A_3(X_i, Y, X), X_i) \}$$

y por lo tanto $\langle \nabla_X, i_Y; \mathrm{Ric}_{Gr} \rangle = -\langle i_Y, \nabla_X; \mathrm{Ric}_{Gr} \rangle$. ■

De la proposición anterior concluimos que si H representa una forma simpléctica ó una métrica Riemanniana, entonces $T = -S^t$ y por lo tanto,

$$\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M) = -\mathrm{Tr}\left[T^t H^{-1} \right] + \mathrm{Tr}\left[T (H^t)^{-1} \right]$$

pero, recordemos que todo bloque homogéneo invertible A tienen la propiedad de que

$$(A^t)^{-1} = (-1)^{|A|} (A^{-1})^t$$

y además, para bloques homogéneos tenemos también la propiedad

$$\mathrm{Tr}\,[A^t B] = \mathrm{Tr}\,[A B^t],$$

y por lo tanto, al ser H un bloque homogéneo par, $(H^t)^{-1} = (H^{-1})^t$ y se sigue que

$$\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M) = -\mathrm{Tr}\left[T (H^{-1})^t \right] + \mathrm{Tr}\left[T (H^{-1})^t \right] = 0,$$

lo cual prueba el siguiente resultado anunciado en [13]:

Teorema 3.2.3. Si $((M, \Gamma(\bigwedge T^* M)), \boldsymbol{\omega}_H, \mathbb{\nabla})$ es una supervariedad de Fedosov, tal que la variedad subyacente (M, H, ∇) es una variedad Riemanniana o una variedad de Fedosov, entonces

$$\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M) = 0.$$

En cierta manera, este teorema explica por qué es tan difícil encontrar ejemplos explícitos de supercurvaturas escalares simplécticas, dado que lo natural es considerar isomorfismos H que sean paralelos respecto de alguna conexión. Sin embargo, vemos aquí que la introducción de tanta simetría se traduce en la anulación de $\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}$.

Llegados a este punto, se presentan dos posibles maneras de evitar esta obstrucción. La primera consiste en tomar un isomorfismo arbitrario $H : TM \to T^* M$ que no esté determinado por una forma bilineal simétrica o antisimétrica. Esto presenta el problema de que tales objetos no son tan naturales desde el punto de vista físico como una métrica o una forma simpléctica, lo que obligaría a justificar cuidadosamente su introducción. Una forma alternativa de atacar el problema pasa por considerar una conexión ∇ tal que $\nabla H \neq 0$. Esta posibilidad es mucho más interesante y es la que abordamos en la siguiente subsección. No estudiaremos el caso más general, sino que nos restringiremos a una clase de variedades para las cuales ∇H, aunque distinto de cero, está determinado geométricamente. Tales variedades son las de Weyl, que se consideran en el Apéndice B.

3.2.2. Caso (M, g, ∇^W) de Weyl

En este caso, en una base homogénea de supercampos $\{\nabla^W_{X_i}, i_{Y_i}\}$ la supermatriz impar asociada a $\boldsymbol{\omega}_g$ tiene la forma por bloques

$$(\boldsymbol{\omega}_g) = \begin{pmatrix} P & -g \\ g^t & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

(donde estamos nombrando g a la matriz invertible asociada a la métrica g) y entonces, por la relación (3.8),

$$\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M) \;=\; -\mathrm{Tr}\left[T^t g^{-1}\right] + \mathrm{Tr}\left[-S^t (g^t)^{-1}\right] + \mathrm{Tr}\left[U^t g^{-1} P^t (g^t)^{-1}\right]. \tag{3.13}$$

Así, para calcular la curvatura escalar graduada debemos analizar primero algunas propiedades del tensor de Ricci graduado para obtener información sobre la forma que tienen los bloques homogéneos S, T y U. Para ésto, comencemos analizando la curvatura graduada.

Como $K_1 = K_2 = 0$, entonces la curvatura graduada de $\mathbb{V}$, la cual está determinada por las ecuaciones (3.9) se reduce a la forma

$$\begin{aligned}
A_1(X,Y,Z) &= \nabla_X K_0(Y,Z) + K_0(X, \nabla_Y Z + K_0(Y,Z)) \\
&\quad -\nabla_Y K_0(X,Z) - K_0(Y, \nabla_X Z + K_0(X,Z)) \\
&\quad +R^\nabla(X,Y)Z - K_0([X,Y],Z) \\
B_1(X,Y,Z) &= \nabla_X L_0(Y,Z) + L_0(X, \nabla_Y Z + K_0(Y,Z)) + L_1(X, L_0(Y,Z)) \\
&\quad -\nabla_Y L_0(X,Z) - L_0(Y, \nabla_X Z + K_0(X,Z)) - L_1(Y, L_0(X,Z)) \\
&\quad -L_0([X,Y],Z) - L_2(R^\nabla(X,Y),Z) \\
A_2(X,Y,Z) &= -K_3(R^\nabla(X,Y),Z) \\
B_2(X,Y,Z) &= \nabla_X L_1(Y,Z) + L_1(X, \nabla_Y Z + L_1(Y,Z)) \\
&\quad -\nabla_Y L_1(X,Z) - L_1(Y, \nabla_X Z + L_1(X,Z)) \\
&\quad +R^\nabla(X,Y)Z - L_1([X,Y],Z) - L_3(R^\nabla(X,Y),Z) \\
A_3(X,Y,Z) &= -K_3(Y, L_0(X,Z)) \\
B_3(X,Y,Z) &= L_1(X, L_2(Y,Z)) + \nabla_X L_2(Y,Z) - L_2(Y, \nabla_X Z + K_0(X,Z)) \\
&\quad -L_2(\nabla_X Y, Z) - L_3(Y, L_0(X,Z)) \\
A_4(X,Y,Z) &= K_0(X, K_3(Y,Z)) + \nabla_X K_3(Y,Z) \\
&\quad -K_3(Y, \nabla_X Z + L_1(X,Z)) - K_3(\nabla_X Y, Z) \\
B_4(X,Y,Z) &= L_0(X, K_3(Y,Z)) + L_1(X, L_3(Y,Z)) + \nabla_X L_3(Y,Z) \\
&\quad -L_3(Y, \nabla_X Z + L_1(X,Z)) - L_3(\nabla_X Y, Z) \\
A_5(X,Y,Z) &= K_3(X, L_2(Y,Z)) + K_3(Y, L_2(X,Z)) \\
B_5(X,Y,Z) &= L_3(X, L_2(Y,Z)) + L_3(Y, L_2(X,Z)) \\
A_6(X,Y,Z) &= K_3(X, L_3(Y,Z)) + K_3(Y, L_3(X,Z)) \\
B_6(X,Y,Z) &= L_2(X, K_3(Y,Z)) + L_3(X, L_3(Y,Z)) \\
&\quad L_2(Y, K_3(X,Z)) + L_3(Y, L_3(X,Z)).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

y así el tensor de curvatura graduado es

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\langle \nabla_X, \nabla_Y, \nabla_Z, \nabla_T\,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle & = & \theta(A_1(X,Y,Z))g(T,\cdot) - \theta(T)g(A_1(X,Y,Z),\cdot) + g(T, B_1(X,Y,Z))\\
\langle \nabla_X, \nabla_Y, \nabla_Z, i_T\,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle & = & -g(A_1(X,Y,Z),T)\\
& = & \langle \nabla_X, \nabla_Y, i_T, \nabla_Z\,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle\\
\langle \nabla_X, i_Y, \nabla_Z, \nabla_T\,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle & = & \theta(A_3(X,Y,Z))g(T,\cdot) - \theta(T)g(A_3(X,Y,Z),\cdot) + g(T, B_3(X,Y,Z))\\
& = & -\langle i_Y, \nabla_X, \nabla_Z, \nabla_T\,;\, \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle\\
\langle \nabla_X, \nabla_Y, i_Z, i_T; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle & = & -g(A_2(X,Y,Z),T)\\
\langle \nabla_X, i_Y, \nabla_Z, i_T; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle & = & -g(A_3(X,Y,Z),T) = \langle \nabla_X, i_Y, i_T, \nabla_Z; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle\\
& = & -\langle i_Y, \nabla_X, \nabla_Z, i_T; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle - \langle i_Y, \nabla_X, i_T, \nabla_Z; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle\\
\langle i_X, i_Y, \nabla_Z, \nabla_T; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle & = & \theta(A_5(X,Y,Z))g(T,\cdot) - \theta(T)g(A_5(X,Y,Z),\cdot) + g(T, B_5(X,Y,Z))\\
\langle \nabla_X, i_Y, i_Z, i_T; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle & = & -g(A_4(X,Y,Z),T)\\
& = & -\langle i_Y, \nabla_X, i_Z, i_T; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle\\
\langle i_X, i_Y, \nabla_Z, i_T; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle & = & -g(A_5(X,Y,Z),T)\\
& = & \langle i_X, i_Y, i_T, \nabla_Z; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle\\
\langle i_X, i_Y, i_Z, i_T; \underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle & = & -g(A_6(X,Y,Z),T)
\end{array}\right\}. \tag{3.15}$$

Analizaremos ahora el tensor de Ricci graduado. Para ésto, completamos el lema 3.2.1 (que sigue siendo válido en este caso, pues $\nabla\!\!\!\!\nabla$ simpléctica) con una propiedad adicional (recordemos que las primeras tres ecuaciones se usaron para calcular la curvatura escalar graduada en el caso de (M, H, ∇) variedad pseudo-Riemanniana ó simpléctica):

Lema 3.2.4. Como $\nabla\!\!\!\!\nabla$ es simpléctica,

1. $A_3(X,Z,T) = A_3(T,Z,X) - A_2(X,T,Z)$
2. $H(A_3(X,Z,T),Y) = H(A_3(T,Z,X),Y) - H(A_2(T,X,Y),Z)$
3. $H(A_3(Z,T,X),Y) = -H(A_3(Z,Y,X),T)$
4. $A_5(X,Y,Z) = A_5(Y,X,Z)$

Consideremos ahora una base $\{X_i\}$ local g-ortogonal para M, y consideramos la base pura de supercampos vectoriales $\mathcal{B} = \{\nabla^W_{X_i}; i_{X_i}\}_{i=1}^n$ para la supervariedad de Fedosov $((M, \Gamma(\bigwedge T^*M)), \boldsymbol{\omega}_g, \nabla\!\!\!\!\nabla)$. Entonces, la base dual de $\mathcal{B}$ es el conjunto de 1-formas graduadas $\mathcal{B}^* = \{\nabla^{W*}_{X_i}; i^*_{X_i}\}$ definidas como

$$\nabla^*_{X_i} = -\langle \cdot, i_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii}, \qquad i^*_{X_i} = \langle \cdot, \nabla_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii} + \sum_{k=1}^n \langle \cdot, i_{X_k}; \boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{kk}\langle \nabla_{X_k}, \nabla_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii},$$

ya que, usando la expresión para $\boldsymbol{\omega}_g$, y el hecho de que $\{X_i\}$ es g-ortogonal, por un lado

$$\langle \nabla_{X_j}; \nabla^*_{X_i}\rangle = -\langle \nabla_{X_j}, i_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii} = g(X_j, X_i)g^{ii} = \delta_{ij}$$

y

$$\langle i_{X_j}; \nabla^*_{X_i}\rangle = -\langle i_{X_j}, i_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii} = 0 \qquad \forall j$$

y por otro lado

$$\langle i_{X_j}; i^*_{X_i}\rangle = \langle i_{X_j}, \nabla_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii} + \sum_{k=1}^n \langle i_{X_j}, i_{X_k}; \boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{kk}\langle \nabla_{X_k}, \nabla_{X_i}; \boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii} = g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$$

y

$$
\begin{aligned}
\langle\nabla_{X_j};i^*_{X_i}\rangle &= \langle\nabla_{X_j},\nabla_{X_i};\boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii}+\textstyle\sum_{k=1}^n\langle\nabla_{X_j},i_{X_k};\boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{kk}\langle\nabla_{X_k},\nabla_{X_i};\boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii}\\
&= \langle\nabla_{X_j},\nabla_{X_i};\boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii}-\textstyle\sum_{k=1}^n g(X_j,X_k)g^{kk}\langle\nabla_{X_k},\nabla_{X_i};\boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii}\\
&= \langle\nabla_{X_j},\nabla_{X_i};\boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii}-g(X_j,X_j)g^{jj}\langle\nabla_{X_j},\nabla_{X_i};\boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii}\\
&= \langle\nabla_{X_j},\nabla_{X_i};\boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii}-\langle\nabla_{X_j},\nabla_{X_i};\boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Así para todo par D_1,D_2,
$\langle D_1,D_2;\mathrm{Ric}_{\mathsf{Gr}}\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{STr}\left(D\mapsto\langle D,D_1,D_2;R_{\mathsf{Gr}}^{\boldsymbol{\nabla}^{\omega_H}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n-\langle\nabla_{X_i},D_1,D_2,i_{X_i};\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle g^{ii}\\
&\quad -(-1)^{(|D_1|+|D_2|)}\sum_{i=1}^n\left\{\langle i_{X_i},D_1,D_2,\nabla_{X_i};\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle g^{ii}+\sum_{k=1}^n\langle i_{X_i},D_1,D_2,i_{X_k};\underline{R}^{\boldsymbol{\omega}_g}\rangle g^{kk}\langle\nabla_{X_k},\nabla_{X_i};\boldsymbol{\omega}_g\rangle g^{ii}\right\}
\end{aligned}
$$

de donde podemos ver que S y T son matrices de 1-formas, mientras que U tiene una parte de grado cero y una de grado 2. Por lo tanto, de las ecuaciones (3.15) que determinan el tensor de curvatura, podemos analizar las entradas de los bloques homogéneos T, U, S que componen la supermatriz $\mathrm{Ric}_{\mathsf{G}}$.

Luego, de la ecuación (3.13) se sigue que

$\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M)$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_j\sum_i\{\theta(A_5(X_i,X_j,X_j))g(X_i,\cdot)-\theta(X_i)g(A_5(X_i,X_j,X_j),\cdot)+g(X_i,B_5(X_i,X_j,X_j))\}\,g^{ii}g^{jj}\\
&\quad+\sum_j\sum_i\sum_k\{2g(A_5(X_i,X_j,X_j),X_k)-g(A_4(X_j,X_i,X_j),X_k)+g(A_4(X_j,X_i,X_k),X_j)\}\,g^{kk}g^{ii}\\
&\qquad\qquad[(\nabla_{X_k}g)(X_i,\cdot)-(\nabla_{X_i}g)(X_k,\cdot)]g^{jj}\\
&\quad+\sum_j\sum_i\sum_k\sum_m\{g(A_6(X_i,X_k,X_j),X_m)g^{mm}[(\nabla_{X_m}g)(X_i,\cdot)-(\nabla_{X_i}g)(X_m,\cdot)]g^{ii}g^{kk}\\
&\qquad\qquad[(\nabla_{X_j}g)(X_k,\cdot)-(\nabla_{X_k}g)(X_j,\cdot)]g^{jj}\}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

de modo que $\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M)\in\Omega^1(M)\oplus\Omega^3(M)$ es un elemento impar de $\Omega(M)$, como se esperaba, pues $\boldsymbol{\omega}_g$ es impar.

Podemos observar que si $K_3=0$ o $L_3=0$, de las relaciones (3.5) que determinan $\mathbb{V}$ se tiene que $\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M)=0$.

3.3. Una clase particular de supervariedades de Fedosov

El objetivo de esta sección es construir una familia explícita de supervariedades de Fedosov, esto es, una familia de supervariedades de la forma $((M,\Gamma(\bigwedge T^*M)),\boldsymbol{\omega}_H,\mathbb{V})$, que es solución al sistema de ecuaciones tensoriales lineales (3.5).

Teorema 3.3.1. Consideremos una variedad pseudo-Riemanniana (M,g), y ∇ una conexión de Weyl inducida por la conexión de Levi-Civita, tal que $\nabla g=\theta\otimes g$. Entonces la supervariedad de Fedosov $((M,\Omega(M),\boldsymbol{\omega}_g,\mathbb{V})$ donde:

- $\boldsymbol{\omega}_g \in \Omega^2_{\mathsf{Gr}}(M)$ es la 2-forma graduada impar cerrada definida en derivaciones básicas como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \langle \nabla_X, \nabla_Y; \boldsymbol{\omega}_g \rangle & = & (\nabla_X g)(Y, \cdot) - (\nabla_Y) g(X, \cdot) \in \Omega^1(M) \\ \langle \nabla_X, i_Y; \boldsymbol{\omega}_g \rangle & = & -g(X,Y) = -\langle i_Y, \nabla_X; \boldsymbol{\omega}_g \rangle \in \Omega^0(M) \\ \langle i_X, i_Y; \boldsymbol{\omega}_g \rangle & = & 0 \end{array} \right\} \tag{3.17}$$

- $\mathbb{\nabla}$ es la conexión graduada par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{\nabla}_{\nabla_X} \nabla_Y & = & \nabla_{\nabla_X Y} + i_{L_0(X,Y)}, \\ \mathbb{\nabla}_{\nabla_X} i_Y & = & i_{\nabla_X Y + L_1(X,Y)}, \\ \mathbb{\nabla}_{i_X} \nabla_Y & = & i_{L_1(Y,X)}, \\ \mathbb{\nabla}_{i_X} i_Y & = & \nabla_{K_3(X,Y)} + i_{L_3(X,Y)} \end{array} \right\} \tag{3.18}$$

  donde $K_3(X,Y), L_1(X,Y) \in \Omega^0(M, TM)$ y $L_0(X,Y), L_3(X,Y) \in \Omega^1(M, TM)$ están definidos como

$$\left\{ \begin{array}{l} K_3(X,Y) = \eta(X,Y)^\sharp \\ L_0(X,Y)\cdot = ((\nabla_X \theta) Y + \theta(X)\theta(Y))\cdot \\ L_1(X,Y) = \theta(X) Y \\ g(Z, L_3(X,Y)\cdot) = \theta(Z)\eta(X,Y,\cdot) - \theta(\eta(X,Y)^\sharp) g(Z,\cdot) \end{array} \right\}$$

  para alguna $\eta \in \Omega^3(M)$,

es solución del sistema de ecuaciones (3.5).

Notemos que podemos calcular explícitamente los campos tensoriales que definen a $\mathbb{\nabla}$ (note las simetrías), pues si denotamos por $g_{ii} := \|X_i\|^2$, para $i = 0,1,2,3$,

$$\begin{array}{rcl} K_3(X_1, X_2) & = & g_{11} g_{22} X_3 \\ K_3(X_1, X_3) & = & -g_{11} g_{33} X_2 \\ K_3(X_2, X_3) & = & g_{22} g_{33} X_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} L_3(X_1, X_2) X_0 & = & -g_{11} g_{22} \theta(X_3) X_0 \\ L_3(X_1, X_2) X_1 & = & -g_{11} g_{22} \theta(X_3) X_1 \\ L_3(X_1, X_2) X_2 & = & -g_{11} g_{22} \theta(X_3) X_2 \\ L_3(X_1, X_2) X_3 & = & -g_{11} g_{22} \theta(X_3) X_3 + g_{11} g_{22} g_{33} \theta^\sharp \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} L_3(X_1, X_3) X_0 & = & g_{11} g_{33} \theta(X_2) X_0 \\ L_3(X_1, X_3) X_1 & = & g_{11} g_{33} \theta(X_2) X_1 \\ L_3(X_1, X_3) X_2 & = & g_{11} g_{33} \theta(X_2) X_2 - g_{11} g_{22} g_{33} \theta^\sharp \\ L_3(X_1, X_3) X_3 & = & g_{11} g_{33} \theta(X_2) X_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} L_3(X_2, X_3) X_0 & = & -g_{22} g_{33} \theta(X_1) X_0 \\ L_3(X_2, X_3) X_1 & = & -g_{22} g_{33} \theta(X_1) X_1 + g_{11} g_{22} g_{33} \theta^\sharp \\ L_3(X_2, X_3) X_2 & = & -g_{22} g_{33} \theta(X_1) X_2 \\ L_3(X_2, X_3) X_3 & = & -g_{22} g_{33} \theta(X_1) X_3 \end{array}$$

Por otro lado, la curvatura escalar graduada estará dada por la ecuación (3.16) donde, notemos que de las expresiones que definen a los tensores $A_i's, B_i's$ (3.14), y la antisimetría de K_3 y L_3,

$$
\begin{aligned}
A_5(X,Y,Z) &= \eta(X,L_1(Z,Y),\cdot)^\sharp + \eta(Y,L_1(Z,X),\cdot)^\sharp \\
&= \eta(X,\theta(Z)Y,\cdot)^\sharp + \eta(Y,\theta(Z)X,\cdot)^\sharp \\
&= \theta(Z)[\eta(X,Y,\cdot)^\sharp - \eta(X,Y,\cdot)^\sharp] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_5(X,Y,Z) &= L_3(X,\theta(Z)Y)\cdot + L_3(Y,\theta(Z)X)\cdot \\
&= \theta(Z)[L_3(X,Y)\cdot - L_3(X,Y)\cdot] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(A_4(X,Y,Z),W) &= g(\nabla_X(\eta(Y,Z,\cdot)^\sharp) - \eta(Y,\nabla_X Z,\cdot)^\sharp - \theta(X)\eta(Y,Z,\cdot)^\sharp \\
&\quad -\eta(\nabla_X Y,Z,\cdot)^\sharp, W) \\
&= g(\nabla_X(\eta(Y,Z,\cdot)^\sharp),W) - \eta(Y,\nabla_X Z,W) - \theta(X)\eta(Y,Z,W) \\
&\quad -\eta(\nabla_X Y,Z,W)^\sharp, W) \\
&= X(g(\eta(Y,Z,\cdot)^\sharp,W)) - g(\eta(Y,Z,\cdot)^\sharp,\nabla_X W) - \theta(X)g(\eta(Y,Z,\cdot)^\sharp,W) \\
&\quad -\eta(Y,\nabla_X Z,W) - \theta(X)\eta(Y,Z,W) - \eta(\nabla_X Y,Z,W)^\sharp,W) \\
&= X(\eta(Y,Z,W)) - \eta(Y,Z,\nabla_X W) - \theta(X)\eta(Y,Z,W) \\
&\quad -\eta(Y,\nabla_X Z,W) - \theta(X)\eta(Y,Z,W) - \eta(\nabla_X Y,Z,W) \\
&= (\nabla_X\eta)(Y,Z,W) - 2\theta(X)\eta(Y,Z,W)
\end{aligned}
$$

de modo que la curvatura escalar se reduce a la expresión

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Scal}_{\mathsf{Gr}}(M) \\
&= \sum_{i,j,k=0}^{3}\{-g(A_4(X_j,X_i,X_j),X_k) + g(A_4(X_j,X_i,X_k),X_j)\}\, g^{ii}g^{jj}g^{kk} \\
&\qquad [(\nabla_{X_k}g)(X_i,\cdot) - (\nabla_{X_i}g)(X_k,\cdot)] \\
&\quad + \sum_{i,j,k,m=0}^{3}\Big\{g(A_6(X_i,X_k,X_j),X_m)[(\nabla_{X_m}g)(X_i,\cdot) - (\nabla_{X_i}g)(X_m,\cdot)]g^{ii}g^{jj}g^{kk}g^{mm} \\
&\qquad [(\nabla_{X_j}g)(X_k,\cdot) - (\nabla_{X_k}g)(X_j,\cdot)]\Big\} \\
&= \sum_{i,j,k=0}^{3}\Big\{-(\nabla_{X_j}\eta)(X_i,X_j,X_k) + 2\theta(X_j)\eta(X_i,X_j,X_k) \\
&\qquad + (\nabla_{X_j}\eta)(X_i,X_k,X_j) - 2\theta(X_j)\eta(X_i,X_k,X_j)\Big\}\, g^{ii}g^{jj}g^{kk} \\
&\qquad [(\nabla_{X_k}g)(X_i,\cdot) - (\nabla_{X_i}g)(X_k,\cdot)] \\
&\quad + \sum_{i,j,k,m=0}^{3}\Big\{g(A_6(X_i,X_k,X_j),X_m)[(\nabla_{X_m}g)(X_i,\cdot) - (\nabla_{X_i}g)(X_m,\cdot)]g^{ii}g^{jj}g^{kk}g^{mm} \\
&\qquad [(\nabla_{X_j}g)(X_k,\cdot) - (\nabla_{X_k}g)(X_j,\cdot)]\Big\} \\
&=: S_1 + S_2
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

donde la primera sumatoria corresponde a la 1-forma

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i,j,k=0}^{3} \left\{ -(\nabla_{X_j}\eta)(X_i,X_j,X_k) + 2\theta(X_j)\eta(X_i,X_j,X_k) \right. \\
&\qquad \left. + (\nabla_{X_j}\eta)(X_i,X_k,X_j) - 2\theta(X_j)\eta(X_i,X_k,X_j) \right\} g^{ii}g^{jj}g^{kk} \\
&\qquad [(\nabla_{X_k}g)(X_i,\cdot) - (\nabla_{X_i}g)(X_k,\cdot)] \\
&= \sum_{i,j,k=0}^{3} \left\{ -2(\nabla_{X_j}\eta)(X_i,X_j,X_k) + 4\theta(X_j)\eta(X_i,X_j,X_k) \right\} g^{ii}g^{jj}g^{kk} \\
&\qquad [\theta(X_k)X_i^\flat - \theta(X_i)X_k^\flat]
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

y la segunda sumatoria corresponde a la 3-forma

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i,j,k,m=0}^{3} \left\{ g(A_6(X_i,X_k,X_j),X_m)[(\nabla_{X_m}g)(X_i,\cdot) - (\nabla_{X_i}g)(X_m,\cdot)] g^{ii}g^{jj}g^{kk}g^{mm} \right. \\
&\qquad \left. [(\nabla_{X_j}g)(X_k,\cdot) - (\nabla_{X_k}g)(X_j,\cdot)] \right\} \\
&= \sum_{i,j,k,m=0}^{3} \left\{ g(A_6(X_i,X_k,X_j),X_m)[\theta(X_m)X_i^\flat - \theta(X_i)X_m^\flat] g^{ii}g^{jj}g^{kk}g^{mm} \right. \\
&\qquad \left. [\theta(X_j)X_k^\flat - \theta(X_k)X_j^\flat] \right\}
\end{aligned}
$$

Notemos que la curvatura escalar queda descrita completamente en términos de la 3−forma η (que determina a K_3) y la conexión de Weyl ∇. También, observemos que en la expresión anterior la curvatura escalar es trivial si K_3 es trivial.

3.4. Un ejemplo no trivial

El objetivo de esta sección es mostrar un ejemplo explícito de una supervariedad de Fedosov con curvatura escalar simpléctica no trivial. De acuerdo con la observación del último párrafo, todo el problema se concentra en obtener una expresión no nula para el tensor K_3. Dado que este tensor, a su vez, está determinado por la 3−forma η, debemos buscar algún contexto geométrico en que podamos distinguir de una forma canónica una tal forma.

El contexto apropiado lo podemos encontrar en la teoría de la Relatividad General. En ella, se considera una clase de 4−variedades con una estructura geométrica muy particular, los *espaciotiempos globalmente hiperbolicos*. Este tipo de espacios surge de manera natural al considerar el universo físico 4−dimensional formado por sucesos espaciotemporales como la evolución temporal de un universo 3−dimensional 'instantáneo'. Un requisito físicamente plausible es que fijado un instante de tiempo t (respecto de algún observador), la superficie formada por todos los sucesos cuya coordenada temporal es precisamente t, denotada Σ, sea tal que al dar condiciones iniciales sobre ella las ecuaciones de Einstein determinen el estado del universo en cualquier instante anterior y en cualquier instante posterior. Se puede probar que tal superficie, si existe, debe ser cerrada y *acronal* (es decir, no existen puntos p, q en ella tal que partiendo de p y siguiendo una geodésica temporal orientada al futuro se llegue a q, intuitivamente, cualquier observador solo puede intersectar una vez una superficie de este tipo). La condición de que un conjunto de condiciones iniciales sobre Σ determine todo el universo se suele escribir como

$$D(\Sigma) = D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma) = M\,,$$

donde $D^+(\Sigma)$ (resp. $D^-(\Sigma)$) es el ***dominio de dependencia*** futuro (resp. pasado) de Σ[2].

Un subconjunto $\Sigma\subset M$ cerrado y acronal tal que $D(\sigma)=M$, se llama una ***super cie de Cauchy*** del espaciotiempo M. Si M admite una superficie de Cauchy, se dice que es globalmente hiperbólico [30]. Existen fuertes razones de carácter tanto físico como matemático que motivan la consideración de los espacios globalmente hiperbólicos como la clase de espaciotiempos válidos en Relatividad General [24]. La interpretación intuitiva de estos espacios, como hemos mencionado, se traduce en que están foliados por superficies 3−dimensionales que representan el universo en distintos instantes de su evolución temporal, con mayor precisión, se tiene el siguiente resultado [6].

Teorema 3.4.1. Sea (M,g) un espaciotiempo globalmente hiperbólico. Entonces, es isométrico a la variedad producto

$$\left(\mathsf{R}\times\mathcal{S},\langle\cdot,\cdot\rangle=-\beta\,d\mathcal{T}^2+\bar{g}\right)$$

donde $\mathcal{S}$ es una superficie de Cauchy suave de tipo espacial, $\mathcal{T}:\mathsf{R}\times\mathcal{S}\to\mathsf{R}$ es la proyección natural, $\beta:\mathsf{R}\times\mathcal{S}\to(0,\infty)$ es una función diferenciable y $\bar{g}$ es un tensor 2-covariante simétrico sobre $\mathsf{R}\times\mathcal{S}$, todo ello satisfaciendo:

1. $\nabla\mathcal{T}$ es temporal y orientado al pasado sobre todo M (en particular, $\mathcal{T}$ es una ***funcion tiempo***).
2. Cada hipersuperficie de nivel $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ a $\mathcal{T}$ constante es de Cauchy y la restricción $\bar{g}_\mathcal{T}$ de $\bar{g}$ a una tal $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ es una métrica Riemanniana (i.e. $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ es espacial).
3. El radical de $\bar{g}$ en cada $w\in\mathsf{R}\times\mathcal{S}$ es Span$\nabla\mathcal{T}$ (=Span $\partial_\mathcal{T}$) en w.

Ahora es claro cómo nos ayuda disponer de una 4−variedad (M,g) que a la vez es un espaciotiempo globalmente hiperbólico: se tiene una descomposición canónica $M=\mathsf{R}\times\mathcal{S}$, donde $\mathcal{S}$ es una 3−variedad Riemanniana, de modo que podemos tomar como nuestra 3−forma η su forma de volumen asociada.

Uno de los ejemplos fundamentales de espaciotiempo globalmente hiperbólico es la solución de Schwarzschild a las ecuaciones de Einstein correspondientes al campo gravitatorio creado por un cuerpo estático y con simetría esférica (una estrella). Si la estrella es suficientemente masiva, las reacciones termonucleares en su interior no pueden compensar el colapso gravitatorio, cuando éste ocurre, la geometría del espaciotiempo resultante está descrita por la métrica de Schwarzschild, la cual contiene una singularidad en el origen y da lugar a la estructura conocida como ***agujero negro***.

Tras el colapso estelar, las ecuaciones de Einstein se reducen a las ecuaciones en el vacío (puramente geométricas)

$$\mathrm{Ric}(g)=0\,,$$

es decir, las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein son precisamente las variedades Ricci llanas.

[2] Tecnicamente, $D^+(\ \ )$ se de ne como el conjunto de puntos $p\in M$ tal que toda curva causal, inextendible hacia el pasado, que pasa por p, intersecta a . El dominio $D^-(\ \ )$ se de ne analogamente cambiando `hacia el pasado' por `hacia el futuro'.

El espaciotiempo globalmente hiperbólico de Schwarzschild $(M \simeq \mathsf{R} \times \mathcal{S}, g)$, descrito en las coordenadas de Kruskal-Szekeres[3] (T, X, θ, φ), tiene por métrica

$$g = -\frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} dT^2 + \frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} dX^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2 \,.$$

En el Apéndice B se prueba que se trata, efectivamente, de una variedad Ricci llana. Aquí la usaremos para construir una supervariedad de Fedosov geométricamente a través de su álgebra exterior.

Consideremos la supervariedad de Fedosov $((M, \Omega(M)), \boldsymbol{\omega}_g, \mathbb{\nabla})$ donde $\boldsymbol{\omega}_g$ está definida en términos de una conexión de Weyl ∇ como en (3.17), la cual a su vez está inducida por la conexión de Levi-Civita ∇^g para el espaciotiempo de Schwarzschild (M, g), esto es,

$$\nabla = \nabla^g - \frac{1}{2} \left(\beta \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \beta - g \otimes \beta \right)$$

para algún $\beta \in \Omega^1(M)$, y sea $\mathbb{\nabla}$ definida como en (3.18) donde η es la forma de volumen de una hipersuperficie de Cauchy 3–dimensional $\mathcal{S}$, dotada de la métrica Riemanniana

$$\tilde{g} = \frac{4r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} dX^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2$$

esto es, si nombramos $X_0 := \frac{\partial}{\partial T}, X_1 := \frac{\partial}{\partial X}, X_2 := \frac{\partial}{\partial \theta}, X_3 := \frac{\partial}{\partial \varphi}$, entonces $\eta = X_1^\flat \wedge X_2^\flat \wedge X_3^\flat$.

Teorema 3.4.2. La supercurvatura escalar simpléctica de la supervariedad de Fedosov $((M, \Omega(M)), \boldsymbol{\omega}_g, \mathbb{\nabla})$ es no trivial.

Para comprobar la validez del enunciado anterior, notemos primero que la curvatura escalar graduada en este caso está dada por la expresión (3.19). Para probar que es no trivial, comprobaremos que el primer término de esta ecuación, esto es, la parte de 1-forma $S_1 \in \Omega(M)$ descrita por (3.20) es no nula.

Por un lado, la expresión (3.20) tiene 64 términos, pero por la antisimetría de η, los términos con 2 índices repetidos se anulan. Por lo tanto, S_1 se compone de 24 términos. Observemos ahora, que podemos agrupar éstos términos por parejas, para reducir a 12 términos, pues, por ejemplo, el término correspondiente a $(i = 2, j = 1, k = 0)$ se puede agrupar con el término con $(i = 0, j = 1, k = 2)$. De hecho la correspondencia de agrupación

[3]Estas coordenadas presentan la ventaja de hacer mani esto que la *única* singularidad del espaciotiempo de Schwarzschild se encuentra en el origen, evitando discusiones acerca del horizonte de sucesos y conceptos relacionados que son super uas en nuestro caso [17, 28]

es de la terna (i,j,k) con la terna (k,j,i), obteniendo que

$$\begin{aligned}
S_1 = & -4(\nabla_{X_1}\eta)(X_2,X_1,X_0)g^{00}g^{11}g^{22}[\beta(X_0)X_2^\flat-\beta(X_2)X_0^\flat]\\
& -4(\nabla_{X_1}\eta)(X_3,X_1,X_0)g^{00}g^{11}g^{33}[\beta(X_0)X_3^\flat-\beta(X_3)X_0^\flat]\\
& -4(\nabla_{X_2}\eta)(X_1,X_2,X_0)g^{00}g^{22}g^{11}[\beta(X_0)X_1^\flat-\beta(X_1)X_0^\flat]\\
& -4(\nabla_{X_2}\eta)(X_3,X_2,X_0)g^{00}g^{22}g^{33}[\beta(X_0)X_3^\flat-\beta(X_3)X_0^\flat]\\
& -4(\nabla_{X_3}\eta)(X_1,X_3,X_0)g^{00}g^{33}g^{11}[\beta(X_0)X_1^\flat-\beta(X_1)X_0^\flat]\\
& -4(\nabla_{X_3}\eta)(X_2,X_3,X_0)g^{00}g^{33}g^{22}[\beta(X_0)X_2^\flat-\beta(X_2)X_0^\flat]\\
& -4(\nabla_{X_0}\eta)(X_2,X_0,X_1)g^{11}g^{00}g^{22}[\beta(X_1)X_2^\flat-\beta(X_2)X_1^\flat]\\
& -4(\nabla_{X_0}\eta)(X_3,X_0,X_1)g^{33}g^{00}g^{11}[\beta(X_1)X_3^\flat-\beta(X_3)X_1^\flat]\\
& +\{-4(\nabla_{X_2}\eta)(X_1,X_2,X_3)+8\beta(X_2)\eta(X_1,X_2,X_3)\}\,g^{33}g^{22}g^{11}[\beta(X_3)X_1^\flat-\beta(X_1)X_3^\flat]\\
& +\{-4(\nabla_{X_3}\eta)(X_1,X_3,X_2)+4\beta(X_3)\eta(X_1,X_3,X_2)\}\,g^{22}g^{33}g^{11}[\beta(X_2)X_1^\flat-\beta(X_1)X_2^\flat]\\
& -4(\nabla_{X_0}\eta)(X_3,X_0,X_2)g^{22}g^{00}g^{33}[\beta(X_2)X_3^\flat-\beta(X_3)X_2^\flat]\\
& +\{-4(\nabla_{X_1}\eta)(X_2,X_1,X_3)+4\beta(X_1)\eta(X_2,X_1,X_3)\}\,g^{33}g^{11}g^{22}[\beta(X_3)X_2^\flat-\beta(X_2)X_3^\flat].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Por otro lado, al analizar la 3-forma $\nabla\eta$ podemos observemos que por definición de η, varias de las evaluaciones de $\nabla\eta$ en básicos se anulan, pues contienen términos de la forma $\eta(\cdots,\frac{\partial}{\partial T},\cdots)$. Luego, los términos no nulos de las evaluaciones $\nabla\eta$ en básicos, quedan expresados en términos de los coeficientes de la conexión de Weyl como sigue:

$$(\nabla_{X_0}\eta)(X_2,X_0,X_1) = -\eta\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial X}\right)$$

$$(\nabla_{X_0}\eta)(X_3,X_0,X_1) = -\eta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial X}\right)$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_2}\eta)(X_1,X_2,X_3) = & \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\eta\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right)-\eta\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)-\eta\left(\frac{\partial}{\partial X},\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
& -\eta\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\theta},\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_3}\eta)(X_1,X_3,X_2) = & \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\eta\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right)-\eta\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\eta\left(\frac{\partial}{\partial X},\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
& -\eta\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi},\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

$$(\nabla_{X_0}\eta)(X_3,X_0,X_2) = -\eta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_1}\eta)(X_2,X_1,X_3) = & \frac{\partial}{\partial X}\left(\eta\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right)-\eta\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)-\eta\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
& -\eta\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial X},\nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\end{aligned}$$

y recordando las expresiones de los coeficientes de la conexión de Weyl que calculamos en el apéndice B, sección B.5, concluimos que

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{X_0}\eta)(X_2, X_0, X_1) &= -\frac{1}{2} g_{00}\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial X}\right)\\
(\nabla_{X_0}\eta)(X_3, X_0, X_1) &= -\frac{1}{2} g_{00}\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial X}\right)\\
(\nabla_{X_2}\eta)(X_1, X_2, X_3) &= \frac{\partial}{\partial\theta}(g_{11}g_{22}g_{33}) + 2\beta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) g_{11}g_{22}g_{33} - \frac{1}{2}\, g_{22}\eta\left(\frac{\partial}{\partial X}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
&\quad -\cot\theta\, g_{11}g_{22}g_{33}\\
(\nabla_{X_3}\eta)(X_1, X_3, X_2) &= -\frac{\partial}{\partial\varphi}(g_{11}g_{22}g_{33}) - 2\beta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) g_{11}g_{22}g_{33} - \frac{1}{2}\, g_{33}\eta\left(\frac{\partial}{\partial X}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
(\nabla_{X_0}\eta)(X_3, X_0, X_2) &= f_X\, g_{11}g_{22}g_{33} - \frac{1}{2} g_{00}\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
(\nabla_{X_1}\eta)(X_2, X_1, X_3) &= -\frac{\partial}{\partial X}(g_{11}g_{22}g_{33}) - 2\beta\left(\frac{\partial}{\partial X}\right) g_{11}g_{22}g_{33} + 2F_{XC}\, g_{11}g_{22}g_{33}\\
&\quad -f_X\, g_{11}g_{22}g_{33} - \frac{1}{2}\, g_{11}\eta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

donde $f_X = \left[\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r}\right]\frac{r_s^2}{r} X e^{-\frac{r}{r_s}}$ y $f_{XC} = 2\frac{r_s^2}{r^2} X e^{-\frac{r}{r_s}}$; y puesto que $g_{11}g_{22}g_{33} = 4r_s^3 r^3 e^{-\frac{r}{r_s}}\operatorname{sen}^2\theta$, después de simplificar y agrupar algunos términos obtenemos que S_1 es de la forma $S_1 = f_1 X_1^\flat + f_2 X_2^\flat + f_3 X_3^\flat \in \Omega^1(\mathsf{R}^4)$,

$$
\begin{aligned}
S_1 \;=\; & \begin{bmatrix}
-4\eta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial X}\right) 4r_s^3 r e^{-\frac{r}{r_s}}\beta(\frac{\partial}{\partial\theta})\\
-4\eta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial X}\right) 4r_s^3 r e^{-\frac{r}{r_s}}\operatorname{sen}^2\theta\beta(\frac{\partial}{\partial\varphi})\\
-128 r_s^6 r^6 e^{-\frac{2r}{r_s}}\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\beta(\frac{\partial}{\partial\varphi})\\
+4\cot\theta + 4\beta(\frac{\partial}{\partial\varphi})\beta(\frac{\partial}{\partial\theta})
\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial X}^\flat\\
& + \begin{bmatrix}
4\eta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial X}\right) 4r_s^3 r e^{-\frac{r}{r_s}}\beta(\frac{\partial}{\partial X})\\
-4\eta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) r^4\operatorname{sen}^2\theta\,\beta(\frac{\partial}{\partial\varphi})\\
+128 r_s^7 r^4 X e^{-\frac{3r}{r_s}}\operatorname{sen}^4\theta\,(3r_s - r)\beta(\frac{\partial}{\partial\varphi})\\
-16\frac{r_s^2}{r^2} X e^{-\frac{r}{r_s}}\beta(\frac{\partial}{\partial\varphi})
\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\theta}^\flat\\
& + \begin{bmatrix}
4\eta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial X}\right) 4r_s^3 r e^{-\frac{r}{r_s}}\operatorname{sen}^2\theta\,\beta(\frac{\partial}{\partial X})\\
+128 r_s^6 r^6 e^{-\frac{2r}{r_s}}\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\,\beta(\frac{\partial}{\partial X})\\
-8\left(\frac{r_s}{r} + \frac{r_s^2}{r^2}\right) X e^{-\frac{r}{r_s}}\beta(\frac{\partial}{\partial\theta})\\
+4\eta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \beta^\sharp, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) r^2\operatorname{sen}^2\theta\,\beta(\frac{\partial}{\partial\theta})\\
-128 r_s^7 r^4 X e^{-\frac{3r}{r_s}}\operatorname{sen}^4\theta\,(3r_s - r)\beta(\frac{\partial}{\partial\theta})\\
-4\beta(\frac{\partial}{\partial X})\beta(\frac{\partial}{\partial\theta})\\
+16\frac{r_s^2}{r^2} X e^{-\frac{r}{r_s}}\beta(\frac{\partial}{\partial\theta})
\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\varphi}^\flat
\end{aligned}
$$

Si en particular tomamos $\beta := d\varphi$, la 1-forma se reduce a

$$
S_1 = \left[-128 r_s^6 r^6 e^{-\frac{2r}{r_s}}\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\right]\frac{\partial}{\partial X}^\flat + \left[128 r_s^7 r^4 X e^{-\frac{3r}{r_s}}\operatorname{sen}^4\theta\,(3r_s - r) - 16\frac{r_s^2}{r^2} X e^{-\frac{r}{r_s}}\right]\frac{\partial}{\partial\theta}^\flat
$$

que en general no se anula.

Apéndice A

Elementos de Geometría Diferencial

El propósito de este capítulo es recordar algunas definiciones y propiedades básicas que encontramos en el contexto de la geometría diferencial ordinaria (no graduada).

A.1. Conexiones lineales en fibrados vectoriales

Consideremos la categoría de **variedades diferenciales** con los morfismos dados por las **aplicaciones diferenciables**. En particular, el espacio de funciones diferenciables sobre una variedad M,

$$\mathcal{C}^\infty(M) := \{f : M \to \mathsf{R} \mid f \text{ diferenciable}\}$$

tiene estructura natural de R-álgebra asociativa, conmutativa y con unidad, heredada de la estructura de anillo de R.

Por otro lado, si $E = \bigcup_{x\in M} E_x \to M$ es un **haz fibrado vectorial real sobre** M (o, simplemente, un *fibrado vectorial real*[1]), su espacio de **secciones** diferenciables, denotado por $\Gamma(E)$ tiene estructura natural de R-espacio vectorial, heredada por la estructura R-lineal en las fibras, y aún más, $\Gamma(E)$ tiene estructura de $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo, con acción

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(M) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(E) \\ (f,s) & \longmapsto & fs \end{array}$$

definida por $(fs)(x) = f(x)s(x) \in E_x$, $x \in M$. Luego, si el haz tiene rango k, $\Gamma(E)$ es un $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo localmente libre de rango también k, esto es, para una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de M trivializante para E, existen secciones linealmente independientes $s_1, ..., s_k \in \Gamma(U_\alpha \times \mathsf{R}^k)$.

Toda variedad diferencial tiene un haz vectorial distinguido, el **haz tangente sobre** M, $TM \to M$, que es el haz cuya fibra sobre $x \in M$ es el espacio tangente T_xM, de modo que resulta tener rango igual que la dimensión de M. El espacio de secciones, cuyos elementos son llamados **campos vectoriales sobre** M, será denotado por $\mathcal{X}(M) := \Gamma(TM)$. A su vez, cada campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ puede ser considerado como una derivación sobre el álgebra de funciones diferenciables sobre M, $\mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$, y de hecho, se tiene una identificación

$$\mathcal{X}(M) = \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M)).$$

[1] En esta tesis, todos los fibrados que consideraremos son vectoriales reales.

Además de tener estructura de $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo, el espacio de campos vectoriales tiene estructura adicional de álgebra asociativa respecto a la composición $(\mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M),\circ)$ que determina por lo tanto una estructura de álgebra de Lie, con el corchete dado por el conmutador de endomorfismos.

Existen varias construcciones que se pueden realizar a partir de haces dados, donde la estructura de haz vectorial real es heredada por la estructura F-lineal en las fibras de los haces originales. A continuación presentamos algunas de las construcciones que estaremos utilizando en este trabajo.

Si $E \to M$ es un haz vectorial, el **haz dual** $E^* \to M$ es el haz cuya fibra sobre el punto $x \in M$ es el R-espacio vectorial dual $(E_x)^*$. Así E^* tiene el mismo rango que E. En particular si $E = TM$, $E^* =: T^*M$ se llama el **haz cotangente** sobre M.

Por otro lado, si $E \to M$ tiene rango k, **el haz exterior** $\bigwedge E : \bigsqcup_{x\in M}(\bigwedge E)_x \to M$ es el haz cuya fibra sobre $x \in M$ es el espacio vectorial $\bigwedge(E_x) = \bigoplus_{p=0}^k \bigwedge^p(E_x)$, de modo que tiene rango 2^k. Luego, como $\bigwedge(E_x)$ tiene la estructura adicional de álgebra sobre R con el producto exterior, el espacio de secciones $\Gamma(\bigwedge E)$ hereda una estructura de álgebra con la operación

$$\begin{array}{rcl} \wedge : \Gamma(\bigwedge^p E) \times \Gamma(\bigwedge^r E) & \longrightarrow & \Gamma(\bigwedge^{p+r} E) \\ (s_1, s_2) & \longmapsto & s_1 \wedge s_2 \end{array}$$

inducida por el producto exterior en cada fibra, esto es, tal que $(s_1 \wedge s_2)(x) := s_1(x) \wedge s_2(x) \in \bigwedge^{p+r}(E_x)$, $x \in M$. En particular si $E = T^*M$, el espacio de secciones $\Gamma(\bigwedge T^*M)$ se denota por $\Omega(M)$ y se llama espacio de **formas diferenciales**.

Ahora, si $E, F \to M$ son dos haces vectoriales sobre M, el **haz producto tensorial** $E \otimes F \to M$ es el haz cuya fibra sobre $x \in M$ es el espacio vectorial $E_x \otimes F_x$ que puede identificarse con el espacio de aplicaciones R-multilineales $E_x^* \times F_x^* \to \mathsf{R}$. En general, el haz producto tensorial de la forma $E^* \otimes \overset{(p)}{\cdots} \otimes E^* \otimes E \otimes \overset{(q)}{\cdots} \otimes E \to M$, el cual, tiene fibra sobre el punto $x \in M$ dada por el R-espacio vectorial de aplicaciones R-multilineales $\mathcal{T}_q^p(E_x)$. En particular, las secciones en $\mathcal{T}_q^p(E) := \Gamma(E^* \otimes \overset{(p)}{\cdots} \otimes E^* \otimes E \otimes \overset{(q)}{\cdots} \otimes E)$ reciben el nombre de **campos tensoriales**. En general, se define el **haz de morfismos** $\mathrm{Hom}(E,F)$ como el haz cuya fibra sobre $x \in M$ es el espacio de aplicaciones R-lineales $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)$, de modo que podemos identificar $\mathrm{Hom}(E, M \times \mathsf{R}) = E^*$ y $\mathrm{Hom}(E,F) = E^* \otimes F$. Finalmente, el espacio de secciones del haz producto tensorial $E \otimes \Lambda^p T^*M$ se denota como $\Omega^p(M,E) = \Gamma(E \otimes \Lambda^p T^*M)$ y sus elementos son las **formas diferenciales E-valuadas**, donde $\Omega^0(M,E) = \Gamma(E)$.

Sea M una variedad. Una **conexión lineal** en el haz $E \to M$ es una aplicación

$$\begin{array}{rrcl} \nabla : & \Gamma(TM) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(E) \\ & (X, s) & \longmapsto & \nabla_X s \end{array}$$

con $\nabla_X f := X(f)$ para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, tal que para todos $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $s, \tilde{s} \in \Gamma(E)$:

(i) Es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en la primera componente, es decir,

- $\nabla_{X+Y} = \nabla_X + \nabla_Y$
- $\nabla_{fX} = f\nabla_X$

(ii) Satisface la regla de Leibniz en la segunda componente,

- $\nabla_X(s + \tilde{s}) = \nabla_X s + \nabla_X \tilde{s}$
- $\nabla_X(fs) = X(f)\, s + f\, \nabla_X s$.

En adelante denotaremos por $\mathcal{C}(M)$ a la colección de conexiones lineales en $E \to M$.

Recordemos que un conjunto A es un **espacio afín sobre el espacio vectorial** V si existe una acción $+ : V \times A \to A$, tal que para cada $x \in A$ fijo, $v \mapsto v + x$ es una biyección, la cual determina una única correspondencia $- : A \times A \to V$. Luego, **una transformación afín** $F : A_1 \to A_2$ entre espacios afines A_1, A_2 sobre V_1, V_2 respectivamente, es una aplicación de la forma $x \mapsto F(x_0) + L(x - x_0)$ para alguna transformación lineal $L : V_1 \to V_2$.

Lema A.1.1. El conjunto $\mathcal{C}(M)$ de conexiones lineales en E es un espacio afín modelado sobre el espacio vectorial $\Omega^1(M; \mathrm{End}(E))$.

Este resultado nos dice que si consideramos $\nabla \in \mathcal{C}(M)$ y $S \in \Omega^1(M; \mathrm{End}(E))$, definiendo

$$\begin{array}{rccc} \nabla + S: & \Gamma(TM) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(E) \\ & (X, s) & \longmapsto & \nabla_X s + S_X(s) \end{array}$$

resulta que $\nabla + S$ es una conexión lineal. Recíprocamente,

$$\nabla - \tilde{\nabla} \in \Omega^1(M; \mathrm{End}(E)).$$

Además, si consideramos ciertas subclases de conexiones, a saber, la de conexiones simétricas en $E = TM$, la clase de conexiones compatibles con un 2-tensor covariante, y la clase de conexiones que cumplen ambas propiedades, resultan ser también subespacios afines [cf. [11]].

Por último, mencionemos que una conexión lineal ∇ en E fija, induce una conexión lineal en fibrados construidos a partir de E (que continuaremos denotando por el mismo símbolo, en un abuso de mnotación); como ejemplos principales tenemos la conexión inducida en el dual

$$(\nabla_X \alpha)(s) := X(\alpha(s)) - \alpha(\nabla_X s) \in \mathcal{C}^\infty(M) \tag{A.1}$$

para todo $s \in \Gamma(E)$, y la inducida en el producto tensorial $\bigotimes^p E \bigotimes^q E^*$,

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)(\alpha_1, ..., \alpha_p; s_1, ..., s_q) &= X(T(\alpha_1, ..., \alpha_p; s_1, ..., s_q)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{p} T(\alpha_1, ... \nabla_X \alpha_i ... \alpha_p; s_1, ..., s_q) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{q} T(\alpha_1, ..., \alpha_p; s_1, ... \nabla_X s_i ... s_q) \end{aligned} \tag{A.2}$$

para $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \Gamma(E^*)$ y $s_1, ..., s_q \in \Gamma(E)$.

Finalmente, se tiene que la restricción de ∇ a $\Gamma(\bigwedge^p E)$ es cerrada, de modo que en particular define una conexión en el espacio de tensores alternates de tipo $(p, 0)$,

$$\nabla : \quad \Gamma(TM) \times \Gamma(\textstyle\bigwedge^p E) \longrightarrow \Gamma(\textstyle\bigwedge^p E).$$

Si consideramos otra conexión de la forma $\nabla + S$, ésta, induce también conexiones en los fibrados anteriores.
Establecemos las observaciones anteriores en el siguiente resultado:

Proposición A.1.2. Si ∇ es una conexión lineal en E y $S \in \Omega^1(M; \mathrm{End}(E))$, entonces la conexión inducida por $\nabla + S$ en E^* ,

$$\begin{array}{rccc} \nabla + S: & \Gamma(TM) \times \Gamma(E^*) & \longrightarrow & \Gamma(E^*) \\ & (X, \alpha) & \longmapsto & (\nabla + S)_X \alpha \end{array}$$

se relaciona con la inducida por ∇ en E^* como

$$(\nabla + S)_X \alpha = \nabla_X \alpha - \alpha \circ S_X,$$

y la conexión inducida en $\bigotimes^p E \bigotimes^q E^*$ por $\nabla + S$,

$$\begin{array}{rrcl} \nabla + S: & \Gamma(TM) \times \mathcal{T}_q^p & \longrightarrow & \mathcal{T}_q^p \\ & (X,T) & \longmapsto & (\nabla + S)_X T \end{array}$$

es

$$\begin{aligned} (\nabla + S)_X T\,(\alpha_1, ..., \alpha_p; s_1, ..., s_q) \\ = \;& (\nabla_X T)(\alpha_1, ..., \alpha_p; s_1, ..., s_q) \\ & + \sum_{i=1}^{p} T(\alpha_1, ..., \alpha_i \circ S_X, ..., \alpha_p; s_1, ..., s_q) \\ & - \sum_{i=1}^{q} T(\alpha_1, ..., \alpha_p; s_1, ..., S_X s_i, ..., s_q). \end{aligned} \tag{A.3}$$

A.2. El subespacio afín de las conexiones simétricas

Consideremos el caso particular de $E = TM$. La **torsión** $T^\nabla \in \Omega^2(M;TM)$ de una conexión lineal ∇ en TM, se define en términos del corchete de Lie de campos vectoriales como

$$T^\nabla(X,Y) \coloneqq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]. \tag{A.4}$$

Si $T^\nabla = 0$ se dice que ∇ es una **conexión simétrica**. Denotaremos por $\mathcal{S}(M)$ a la colección de conexiones lineales simétricas en TM.

Por otro lado, si M es una variedad con $\nabla \in \mathcal{C}(M)$ dada, por el Lema (A.1.1) cualquier otra conexión lineal en M es de la forma $\nabla + S$, para algún (2,1)-tensor S. En particular de la definición de torsión aplicada a $\nabla + S$, tenemos que $T^{\nabla + S}(X,Y) = \nabla_X Y + S_X Y - \nabla_Y X - S_Y X - [X,Y] = T^\nabla(X,Y) + S_X Y - S_Y X$. Así, la torsión de ∇ y de $\nabla + S$ se relacionan de la siguiente manera:

$$T^{\nabla + S}(X,Y) = T^\nabla(X,Y) + S_X Y - S_Y X. \tag{A.5}$$

Lema A.2.1. [12] La correspondencia

$$\begin{array}{rcl} T: \mathcal{C}(M) & \longrightarrow & \Omega^2(M;TM) \\ \nabla & \longmapsto & T^\nabla \end{array}$$

define una aplicación afín, con transformación lineal asociada

$$\begin{array}{rcl} \tilde{T}: \Omega^1(M;\mathrm{End}(TM)) & \longrightarrow & \Omega^2(M;TM) \\ S & \longmapsto & \tilde{T}(S) \end{array}$$

dada por $\tilde{T}(S)(X,Y) \coloneqq S_X Y - S_Y X$, esto es, $\tilde{T}$ es el doble del operador antisimetrización de S.

Por otro lado, recordemos que una conexión es simétrica si $T^\nabla = 0$. Luego, si denotamos por $\Omega^1_{\mathsf{Sim}}(M;\mathrm{End}(TM)) := \{S \in \Omega^1(M;\mathrm{End}(TM)) \mid S_X Y = S_Y X\}$, de la relación (A.5), se tiene que si ∇ es una conexión simétrica, la simetría de cualquier otra conexión $\nabla + S$ se refleja en la simetría del tensor S, esto es, para $\nabla \in \mathcal{S}(M)$,

$$\nabla + S \in \mathcal{S}(M) \iff S \in \Omega^1_{\mathsf{Sim}}(M;\mathrm{End}(TM)). \tag{A.6}$$

En particular, se cumple que las conexiones simétricas forman también un espacio afín.

Lema A.2.2. El conjunto $\mathcal{S}(M)$ de conexiones lineales simétricas en M forma un subespacio afín de $\mathcal{C}(M)$, sobre el espacio vectorial $\Omega^1_{\mathsf{Sim}}(M;\mathrm{End}(TM))$.

El siguiente resultado nos dice que $\mathcal{S}_G(M) \neq \varnothing$, esto es, que las conexiones simétricas existen. La prueba consiste en tomar una conexión ∇ fija y ajustarla mediante un factor de corrección en $S \in \Omega^1(M;\mathrm{End}(TM))$ de tal forma que $\nabla + S$ resulte ser simétrica.

Lema A.2.3. Si ∇ es una conexión lineal en TM, entonces $\nabla - \frac{1}{2}T^\nabla$ resulta ser una conexión simétrica.

Existe una descomposición de las conexiones lineales en una parte simétrica y una antisimétrica.

Lema A.2.4. Toda conexión $\nabla \in \mathcal{C}(M)$ en TM se puede descomponer de manera única en una parte simétrica y una antisimétrica como

$$\nabla = \nabla^{\mathsf{Sim}} + A \tag{A.7}$$

donde $\nabla^{\mathsf{Sim}} := \nabla - \frac{1}{2}T^\nabla \in \mathcal{S}(M)$ y $A := \frac{1}{2}T^\nabla \in \Omega^2(M;TM)$. Decimos que ∇^{Sim} es la **parte simétrica** de ∇ y A la **parte anitisimétrica**. En particular,

$$\nabla \in \mathcal{S}(M) \quad \text{si y sólo si} \quad \nabla = \nabla^{\mathsf{Sim}}. \tag{A.8}$$

Si ∇ es una conexión fija, para cualquier otra $\nabla + S \in \mathcal{C}(M)$, se tiene que $(\nabla + S)^{\mathsf{Sim}} = \nabla + S - \frac{1}{2}T^{\nabla+S}$, de modo que por (A.5)

$$\begin{aligned} (\nabla + S)^{\mathsf{Sim}}_X Y &= \nabla_X Y + S_X Y - \tfrac{1}{2}(T^\nabla(X,Y) + S_X Y - S_Y X) \\ &= \nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y + \tfrac{1}{2}\left[S_X Y + S_Y X\right], \end{aligned}$$

así, la parte simétrica de ∇ y la de $\nabla + S$ están relacionadas como sigue:

$$(\nabla + S)^{\mathsf{Sim}}_X Y = \nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y + \frac{1}{2}[S_X Y + S_Y X]. \tag{A.9}$$

Lema A.2.5. La correspondencia

$$\begin{aligned} \mathrm{Sim} : \mathcal{C}(M) &\longrightarrow \mathcal{S}(M) \\ \nabla &\longmapsto \nabla^{\mathsf{Sim}} \end{aligned}$$

define una aplicación afín, con transformación lineal asociada

$$\widetilde{\mathrm{Sim}} : \Omega^1(M;\mathrm{End}(TM)) \longrightarrow \Omega^1_{\mathsf{Sim}}(M;\mathrm{End}(TM))$$

dada por $\widetilde{\mathrm{Sim}}(S)(X,Y) = \frac{1}{2}[S_X Y + S_Y X]$, esto es, $\widetilde{\mathrm{Sim}}$ es el operador simetrización.

Más adelante, en la sección A.3.2, veremos que si M posee una estructura simpléctica, Sim se restringe a una biyección sobre el conjunto de conexiones que preservan dicha estructura, de modo que se pueden describir todas las conexiones que preservan la estructura simpléctica mediante $\mathcal{S}(M)$.

A.3. El espacio afín de conexiones compatibles

Recordemos que una conexión ∇ en $E \to M$, induce una conexión en el espacio de tensores tipo (p,q). En términos de esta conexión inducida, tenemos la siguiente definición:

Definición A.3.1. Decimos que la conexión ∇ en $E \to M$ es **compatible** con el tensor $T \in \mathcal{T}_q^p$ si $\nabla T = 0$. Denotaremos por $\mathcal{C}^T(M)$ a la colección de conexiones compatibles con T.

Notemos que en particular, la ecuación (A.3) que establece que

$$
\begin{aligned}
(\nabla + S)_X T(\alpha_1, ..., \alpha_p; s_1, ..., s_q) \\
= \; & (\nabla_X T)(\alpha_1, ..., \alpha_p; s_1, ..., s_q) \\
& + \sum_{i=1}^{p} T(\alpha_1, ..., \alpha_i \circ S_X, ..., \alpha_p; s_1, ..., s_q) \\
& - \sum_{i=1}^{q} T(\alpha_1, ..., \alpha_p; s_1, ..., S_X s_i, ..., s_q).
\end{aligned}
$$

sugiere que el espacio de conexiones compatibles con T tiene estructura de espacio afín.

Lema A.3.2. El conjunto $\mathcal{C}^T(M)$ de conexiones lineales compatibles con $T \in \mathcal{T}_q^p$ forma un subespacio afín de $\mathcal{C}(M)$ sobre el espacio de todos los $S \in \Omega^1(M; \mathrm{End}(TM))$ tales que

$$
\sum_{i=1}^{p} T(\alpha_1, ..., \alpha_i \circ S_X, ..., \alpha_p; s_1, ..., s_q) - \sum_{i=1}^{q} T(\alpha_1, ..., \alpha_p; s_1, ..., S_X s_i, ..., s_q) = 0.
$$

Estaremos interesados en analizar el caso donde $E = TM$ y T es un $(2,0)$-tensor τ. De hecho, nos restringiremos al caso donde τ es una métrica o una forma simpléctica en la variedad M, esto es, donde la estructura τ tiene propiedades de (anti)simetría. Recordemos que si M una variedad diferencial,

- Una **variedad pseudoriemanniana** es un par (M,g) donde g es una métrica Riemanniana, esto es, un (2,0)-tensor simétrico no degenerado. Si además g es definida positiva, decimos que (M,g) es una **variedad Riemanniana**.
- Una **variedad casi-simpléctica** es un par (M,ω) donde $\omega \in \Omega^2(M)$ es no-degenerada. En el caso donde ω es cerrada y no-degenerada decimos que el par (M,ω) es una **variedad simpléctica**. Llamaremos a ω una estructura (casi o pre)-simpléctica en M según corresponda. Si además (M,ω) posee una conexión ∇ simétrica y compatible con ω, la terna (M,ω,∇) se llama **variedad de Fedosov**.

En estos términos, podemos reescribir el lema precedente como sigue:

Lema A.3.3. [12]

(i) Si (M,g) es una variedad Riemanniana, el espacio $\mathcal{C}^g(M)$ de conexiones lineales compatibles con la métrica es un espacio afín sobre

$$
\{S \in \Omega^1(M; \mathrm{End}(TM) \mid g(S_Z X, Y) + g(X, S_Z Y) = 0\}.
$$

(ii) Si (M,ω) una variedad (casi)-simpléctica, el espacio de conexiones lineales compatibles con la estructura simpléctica $C^{\omega}(M)$ es un espacio afín sobre

$$\{S \in \Omega^1(M;\mathrm{End}(TM) \mid \omega(S_Z X, Y) + \omega(X, S_Z Y) = 0\} \equiv \Omega^1(M;\mathrm{sp}(TM))$$

donde $\mathrm{sp}(TM)$ es el subhaz de $\mathrm{End}(TM)$ de morfismos Hamiltonianos.

En el caso de tener una variedad Riemanniana, veremos que podemos describir todas las conexiones lineales compatibles con la métrica mediante el espacio $\Omega^2(M;TM)$; específicamente, se tiene una identificación $C^g(M) \xrightarrow{\simeq} \Omega^2(M;TM)$ dada en términos de la parte antisimétrica de la conexión (ver el Teorema A.3.5.). Veremos también que en el caso simpléctico, el espacio $C^{\omega}(M)$ de conexiones compatibles con la estructura simpléctica está caracterizado por el espacio $\mathcal{S}(M)$, donde la correspondencia $C^{\omega}(M) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{S}(M)$ está dada por su parte simétrica (ver el Teorema A.3.7).

A.3.1. Caracterización en una variedad Rimenniana y la conexión de Levi-Civita

El Lema A.2.1. nos dice que la aplicación $T : \mathcal{C}(M) \to \Omega^2(M;TM)$ dada por la torsión, define una transformación afín. Resulta que la restricción de T al subespacio $\mathcal{C}^g(M)$ es una biyección. La demostración se basa en el siguiente resultado, de interés por sí mismo.

Proposición A.3.4. Sea (M,g) una variedad Riemanniana.

(i) Si ∇ es compatible con la métrica g, satisface:

$$\begin{aligned} 2g(Z,\nabla_X Y) & \\ = \;& X(g(Y,Z)) - Z(g(X,Y)) + Y(g(Z,X)) \\ & g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X) \\ & g(T^{\nabla}(X,Y),Z) + g(T^{\nabla}(Z,X),Y) - g(T^{\nabla}(Y,Z),X) \end{aligned} \tag{A.10}$$

(ii) Recíprocamente, si $T^{\nabla} \in \Omega^2(M;TM)$ denota una 2-forma valuada vectorial arbitraria, entonces ∇ definida mediante la ecuación (A.10) es compatible con g, y tiene torsión precisamente T^{∇}.

Teorema A.3.5. (cf. [12]) Sea (M,g) una variedad Riemanniana.

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{C}^g(M) & \longrightarrow & \Omega^2(M;TM) \\ \nabla & \longmapsto & T^{\nabla} \end{array}$$

define una correspondencia afín biyectiva. La expresión (A.10) define una inversa para T.

En particular, existe una única $\nabla \in \mathcal{C}^g(M)$ tal que $T^{\nabla} = 0$, llamada **la conexión de Levi-Civita**, dada explícitamente por

$$\begin{aligned} 2g(Z,\nabla_X Y) = \;& X(g(Y,Z)) - Z(g(X,Y)) + Y(g(Z,X)) \\ & + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X) + g([X,Y],Z). \end{aligned} \tag{A.11}$$

A.3.2. Caracterización en una variedad simpléctica.

Se probará ahora una versión análoga del teorema anterior en el caso simpléctico, esto es, se dará una caracterización del conjunto de conexiones compatibles con la estructura simpléctica, pero ahora, a diferencia del caso Riemanniano, se mostrará que tal colección forma un espacio afín; de hecho se mostrará que existe una correspondencia 1-1 con el espacio afín $\mathcal{S}(M)$. Para probar esto, se usará el siguiente resultado (observemos la analogía que tiene con la proposición dada en el caso Riemanniano).

Proposición A.3.6. Sea (M, ω) una variedad (casi)-simpléctica.

(i) Si ∇ es compatible con ω

$$\begin{aligned} \omega(Z, \nabla_X Y) &= -\frac{1}{2}d\omega(X,Y,Z) + Z(\omega(X,Y)) - \omega([Y,Z],X)] \\ &\quad +\omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Y Z, X) - \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Z X, Y) - \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y, Z) \end{aligned} \tag{A.12}$$

donde d denota la diferencial exterior.

(ii) Recíprocamente, si ∇^{Sim} denota una conexión simétrica arbitraria, entonces ∇ definida mediante la ecuación (A.12) es compatible con ω. De hecho su parte simétrica es precisamente ∇^{Sim}.

Demostración. .
(i) Sea ∇ compatible con ω, esto es, $\nabla\omega = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} Z(\omega(X,Y)) &= \omega(\nabla_Z X, Y) + \omega(X, \nabla_Z Y), \\ -X(\omega(Y,Z)) &= -\omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z), \\ -Y(\omega(Z,X)) &= -\omega(\nabla_Y Z, X) - \omega(Z, \nabla_Y X). \end{aligned}$$

Luego, sumando estas tres expresiones y agrupando términos obtenemos
$Z(\omega(X,Y)) - X(\omega(Y,Z)) - Y(\omega(Z,X))$

$$= \omega(\nabla_X Z + \nabla_Z X, Y) - \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) - \omega(\nabla_Y Z + \nabla_Z Y, X).$$

Ahora, si multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por $1/2$ y recordamos la definición de la parte simétrica de una conexión, tenemos que
$\frac{1}{2}\{Z(\omega(X,Y)) - X(\omega(Y,Z)) - Y(\omega(Z,X))\}$

$$\begin{aligned} &= \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Z - \tfrac{1}{2}[X,Z], Y) - \omega(\nabla_X Y - \nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y + \tfrac{1}{2}[X,Y], Z) - \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Y Z - \tfrac{1}{2}[Y,Z], X) \\ &= \tfrac{1}{2}\{-\omega([X,Z],Y) - \omega([X,Y],Z) + \omega([Y,Z],X)\} \\ &\quad +\omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Z, Y) - \omega(\nabla_X Y, Z) + \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y, Z) - \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Y Z, X) \end{aligned}$$

entonces, despejando $\omega(\nabla_X Y, Z)$ de la ecuación anterior, y usando la antisimetría de ω, resulta

$$\begin{aligned} \omega(Z, \nabla_X Y) = \; &\tfrac{1}{2}\{Z(\omega(X,Y)) - X(\omega(Y,Z)) - Y(\omega(Z,X)) \\ &+\omega([X,Z],Y) + \omega([X,Y],Z) - \omega([Y,Z],X)\} \\ &+\omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Y Z, X) - \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Z, Y) - \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y, Z). \end{aligned}$$

Podemos reacomodar ahora la expresión del lado derecho de la igualdad para dejarla en notación cíclica, usando que

$$\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Z = \nabla^{\mathsf{Sim}}_Z X + [X,Z]$$

para tener

$$\begin{aligned}\omega(Z,\nabla_X Y) = \ & \tfrac{1}{2}\{Z(\omega(X,Y)) - X(\omega(Y,Z)) - Y(\omega(Z,X)) \\ & +\omega([Z,X],Y) + \omega([X,Y],Z) - \omega([Y,Z],X)\} \\ & +\omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Y Z, X) - \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Z X, Y) - \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y, Z).\end{aligned}$$

Finalmente, recordando la definición de diferencial exterior para una 2-forma, se sigue que

$$\begin{aligned}\omega(Z,\nabla_X Y) = \ & -\tfrac{1}{2}d\omega(X,Y,Z) + Z(\omega(X,Y)) - \omega([Y,Z],X) \\ & +\omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Y Z, X) - \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Z X, Y) - \omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y, Z).\end{aligned}$$

(ii) La prueba es muy similar a la proposición dada en el caso Riemanniano, solo que debemos tener en cuenta ahora la antisimetría de ω. Sea $\tilde{\nabla} \in \mathcal{S}(M)$ arbitraria y ∇ definida mediante la ecuación (A.12), esto es,

$$\begin{aligned}\omega(Z,\nabla_X Y) \quad = \quad & -\frac{1}{2}d\omega(X,Y,Z) + Z(\omega(X,Y)) - \omega([Y,Z],X) \\ & +\omega(\tilde{\nabla}_Y Z, X) - \omega(\tilde{\nabla}_Z X, Y) - \omega(\tilde{\nabla}_X Y, Z).\end{aligned} \tag{A.13}$$

Afirmamos que ∇ efectivamente es una conexión compatible con ω, y que tiene parte simétrica $\nabla^{\mathsf{Sim}} = \tilde{\nabla}$.

Veamos primero que ∇ es conexión. Usaremos la propiedad de derivación de los campos, la $\mathcal{C}^\infty(M)$-linealidad de ω y $d\omega$, y que $\tilde{\nabla}$ es una conexión. Por un lado
$\omega(Z,\nabla_{fX}Y)$

$$\begin{aligned} = \ & -\frac{1}{2}d\omega(fX,Y,Z) + Z(\omega(fX,Y)) - \omega([Y,Z],fX) \\ & +\omega(\tilde{\nabla}_Y Z, fX) - \omega(\tilde{\nabla}_Z fX, Y) - \omega(\tilde{\nabla}_{f} XY, Z) \\ = \ & -\frac{1}{2}fd\omega(X,Y,Z) + Z(f\omega(X,Y)) - f\omega([Y,Z],X) \\ & +f\omega(\tilde{\nabla}_Y Z, X) - \omega(Z(f)X + f\tilde{\nabla}_Z X, Y) - \omega(f\tilde{\nabla}_X Y, Z) \\ = \ & -\frac{1}{2}fd\omega(X,Y,Z) + Z(f)\omega(X,Y) + fZ(\omega(X,Y)) - f\omega([Y,Z],X) \\ & +f\omega(\tilde{\nabla}_Y Z, X) - \omega(Z(f)X,Y) + f\omega(\tilde{\nabla}_Z X, Y) - f\omega(\tilde{\nabla}_X Y, Z) \\ = \ & -\frac{1}{2}fd\omega(X,Y,Z) + fZ(\omega(X,Y)) - f\omega([Y,Z],X) \\ & +f\omega(\tilde{\nabla}_Y Z, X) + f\omega(\tilde{\nabla}_Z X, Y) - f\omega(\tilde{\nabla}_X Y, Z) \\ = \ & \omega(Z, f\nabla_X Y)\end{aligned}$$

y como $\omega^\flat : \Gamma(TM) \to \Gamma(T^*M)$ es un isomorfismo para cada Z, por ser ω no degenerada, se sigue que $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$.

Por otro lado, como además ω es antisimétrica, usando la propiedad de derivación del corchete

$$\begin{aligned}
&\omega(Z,\nabla_X fY)\\
&\quad= -\frac{1}{2}d\omega(X,fY,Z)+Z(\omega(X,fY))-\omega([fY,Z],X)\\
&\qquad+\omega(\tilde{\nabla}_{fY}Z,X)-\omega(\tilde{\nabla}_Z X,fY)-\omega(\tilde{\nabla}_X fY,Z)\\
&\quad= -\frac{1}{2}fd\omega(X,Y,Z)+Z(f\omega(X,Y))-\omega(-Z(f)Y+f[Y,Z],X)\\
&\qquad+\omega(f\tilde{\nabla}_Y Z,X)-f\omega(\tilde{\nabla}_Z X,Y)-\omega(X(f)Y+f\tilde{\nabla}_X Y,Z)\\
&\quad= -\frac{1}{2}fd\omega(X,Y,Z)+Z(f)\omega(X,Y)+fZ(\omega(X,Y))+\omega(Z(f)Y,X)-\omega(f[Y,Z],X)\\
&\qquad+f\omega(\tilde{\nabla}_Y Z,X)-f\omega(\tilde{\nabla}_Z X,Y)-\omega(X(f)Y,Z)-f\omega(\tilde{\nabla}_X Y,Z)\\
&\quad= \omega(Z,X(f)Y)+\omega(Z,f\nabla_X Y)\\
&\quad= \omega(Z,X(f)Y+f\nabla_X Y)
\end{aligned}$$

y por ser $\omega^\flat$ isomorfismo para cada Z, tenemos que $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$, con lo que se prueba que $\nabla \in \mathcal{C}(M)$.

Para ver que ∇ es compatible con ω, debemos comprobar que $Z(\omega(X,Y)) = \omega(\nabla_Z X,Y)+\omega(X,\nabla_Z Y)$. Para ésto, aplicamos (A.13) a cada uno de los términos de la derecha de esta ecuación. Por un lado

$$\begin{aligned}
\omega(\nabla_Z X,Y) &= -\omega(Y,\nabla_Z X)\\
&= \frac{1}{2}d\omega(Z,X,Y)-Y(\omega(Z,X))+\omega([X,Y],Z)\\
&\quad -\omega(\tilde{\nabla}_X Y,Z)+\omega(\tilde{\nabla}_Y Z,X)+\omega(\tilde{\nabla}_Z X,Y)
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
\omega(X,\nabla_Z Y) &= -\frac{1}{2}d\omega(Z,Y,X)+X(\omega(Z,Y))-\omega([Y,X],Z)\\
&\quad +\omega(\tilde{\nabla}_Y X,Z)-\omega(\tilde{\nabla}_X Z,Y)-\omega(\tilde{\nabla}_Z Y,X)
\end{aligned}$$

Entonces, sumando las dos ecuaciones anteriores, y usando que $\tilde{\nabla}$ tiene torsión cero (de modo que por ejemplo $\tilde{\nabla}_X Y-\tilde{\nabla}_Y X=[X,Y]$) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\omega(\nabla_Z X,Y)+\omega(X,\nabla_Z Y)\\
&\quad= d\omega(Z,X,Y)-Y(\omega(Z,X))+X(\omega(Z,Y))+\omega([X,Y],Z)-\omega([Y,X],Z)\\
&\qquad-\omega(\tilde{\nabla}_X Y-\tilde{\nabla}_Y X,Z)-\omega(\tilde{\nabla}_Z Y-\tilde{\nabla}_Y Z,X)-\omega(\tilde{\nabla}_X Z,Y-\tilde{\nabla}_Z X,Y)\\
&\quad= d\omega(Z,X,Y)-Y(\omega(Z,X))+X(\omega(Z,Y))+\omega([X,Y],Z)-\omega([Y,X],Z)\\
&\qquad-\omega([X,Y],Z)-\omega([Z,Y],X)-\omega([X,Z],Y)\\
&\quad= d\omega(X,Y,Z)-Y(\omega(Z,X))-X(\omega(Y,Z))+\omega([X,Y],Z)\\
&\qquad+\omega([Y,Z],X)+\omega([Z,X],Y)\\
&\quad= d\omega(X,Y,Z)+Z(\omega(X,Y))-d\omega(X,Y,Z)\\
&\quad= Z(\omega(X,Y))
\end{aligned}$$

de donde se sigue que ∇ es compatible con ω.

Finalmente veamos que efectivamente la parte simétrica de ∇ es $\tilde{\nabla}$. Recordemos que la parte simétrica de ∇ es

$$\nabla_X^{\mathsf{Sim}}Y=\nabla_X Y-\frac{1}{2}T^{\nabla}(X,Y)=\frac{1}{2}(\nabla_X Y+\nabla_Y X+[X,Y])$$

entonces $\omega(Z,\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y)=\frac{1}{2}\omega(Z,\nabla_X Y)+\frac{1}{2}\omega(Z,\nabla_Y X)+\frac{1}{2}\omega(Z,[X,Y])$ o bien

$$2\omega(Z,\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y)=\omega(Z,\nabla_X Y)+\omega(Z,\nabla_Y X)+\omega(Z,[X,Y])$$

pero, por (A.13)

$$\begin{aligned}\omega(Z,\nabla_X Y) &= -\frac{1}{2}d\omega(X,Y,Z)+Z(\omega(X,Y))-\omega([Y,Z],X)\\ &\quad+\omega(\tilde\nabla_Y Z,X)-\omega(\tilde\nabla_Z X,Y)-\omega(\tilde\nabla_X Y,Z)\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\omega(Z,\nabla_Y X) &= -\frac{1}{2}d\omega(Y,X,Z)+Z(\omega(Y,X))-\omega([X,Z],Y)\\ &\quad+\omega(\tilde\nabla_X Z,Y)-\omega(\tilde\nabla_Z Y,X)-\omega(\tilde\nabla_Y X,Z).\end{aligned}$$

Luego, usando la antisimetría de ω y $d\omega$, y agrupando términos, y recordando que $T^{\nabla}=0$

$$\begin{aligned}2\omega(Z,\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y) &= -\omega([Y,Z],X)+\omega(\tilde\nabla_Y Z,X)-\omega(\tilde\nabla_Z X,Y)-\omega(\tilde\nabla_X Y,Z)\\ &\quad-\omega([X,Z],Y)+\omega(\tilde\nabla_X Z,Y)-\omega(\tilde\nabla_Z Y,X)-\omega(\tilde\nabla_Y X,Z)\\ &\quad+\omega(Z,[X,Y])\\ &= -\omega(\tilde\nabla_Z Y-\tilde\nabla_Y Z-[Z,Y],X)-\omega(\tilde\nabla_Z X,Y-\tilde\nabla_X Z-[Z,X],Y)\\ &\quad\omega(Z,\tilde\nabla_X Y+\tilde\nabla_Y X+[X,Y])\\ &= \omega(Z,\tilde\nabla_X Y+\tilde\nabla_Y X+[X,Y])\\ &= \omega(Z,2\tilde\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y)\end{aligned}$$

pero la parte simétrica de $\tilde\nabla$ es precisamente $\tilde\nabla$ pues $\tilde\nabla\in\mathcal{S}(M)$ por hipótesis, de modo que

$$2\omega(Z,\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y)=2\omega(Z,\tilde\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y)=2\omega(Z,\tilde\nabla_X Y),$$

luego, como $\omega^\flat$ es un isomorfismo para cada Z, se sigue que $\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y=\tilde\nabla_X Y$, y como X,Y se tomaron arbitrarios, concluimos que $\nabla^{\mathsf{Sim}}=\tilde\nabla$.

■

Teorema A.3.7. Sea (M,ω) una variedad (casi)-simpléctica. Entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Sim}:\mathcal{C}^\omega(M) &\longrightarrow \mathcal{S}(M)\\ \nabla &\longmapsto \nabla^{\mathsf{Sim}}\end{aligned}$$

define una correspondencia afín biyectiva. La expresión (A.12) define una inversa para Sim. En particular como $\mathcal{S}(M)\neq\varnothing$, existen conexiones compatibles con ω.

Demostración. Del lema (A.2.5) ya tenemos que Sim es una aplicación afín. Luego, para ver que es inyectiva usaremos (i) de la proposición anterior. Consideremos $\nabla,\tilde\nabla\in\mathcal{C}^\omega(M)$ tales que sus partes simétricas coinciden, $\nabla^{\mathsf{Sim}}=\tilde\nabla^{\mathsf{Sim}}$. Entonces aplicando (A.12) a ∇ y $\tilde\nabla$

$$\begin{aligned}\omega(Z,\nabla_X Y) &= -\frac{1}{2}d\omega(X,Y,Z)+Z(\omega(X,Y))-\omega([Y,Z],X)]\\ &\quad+\omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Y Z,X)-\omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_Z X,Y)-\omega(\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y,Z)\\ &= -\frac{1}{2}d\omega(X,Y,Z)+Z(\omega(X,Y))-\omega([Y,Z],X)]\\ &\quad+\omega(\tilde\nabla^{\mathsf{Sim}}_Y Z,X)-\omega(\tilde\nabla^{\mathsf{Sim}}_Z X,Y)-\omega(\tilde\nabla^{\mathsf{Sim}}_X Y,Z)\\ &= \omega(Z,\tilde\nabla_X Y)\end{aligned}$$

y como ω es no degenerada, $\omega^\flat : \Gamma(TM) \to \Gamma(T^*M)$ se restringe a un isomorfismo para cada Z, y concluimos que $\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y$ para todos X, Y, esto es, $\nabla = \tilde{\nabla}$ y Sim es inyectiva.

Que Sim es sobreyectiva se sigue directamente de (ii) en la proposición anterior. ■

A.3.3. El espacio de conexiones simplécticas

Recordemos que toda variedad Riemanniana tiene una conexión simétrica y compatible con la estructura Riemanniana (Teorema A.3.5.). En el caso simpléctico no siempre es posible definir una conexión con las propiedades de la conexión de Levi Civita. Las variedades simplécticas que tienen propiedades análogas a las Riemannianas, en el sentido de que exista una conexión análoga a la de Levi Civita, reciben un nombre especial. De hecho, si (M, ω) es una variedad simpléctica, decimos que una conexión lineal ∇ es una **conexión simpléctica** si es simétrica y compatible con ω; en particular una terna (M, ω, ∇) donde ∇ es una conexión simpléctica se llama **variedad de Fedosov**.

A.4. Curvatura

Si ∇ es una conexión lineal en $E \to M$, la **curvatura** $R^\nabla \in \Omega^2(M; \mathrm{End}(E))$ de ∇, se define como

$$R^\nabla(X,Y) \coloneqq \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

donde $[\cdot,\cdot]$ es el corchete de Lie sobre $\mathcal{X}(M)$.

Notemos que de la antisimetría del corchete de Lie se sigue claramente que el operador R^∇ es antisimétrico en las primeras dos componentes. Un cálculo directo muestra que efectivamente R^∇ es tri-lineal.

Si ∇ es una conexión fija en E, y consideramos otra conexión cualquiera, sabemos que será de la forma $\nabla + S$. Veamos cómo se relaciona la curvatura de ∇ y la curvatura de $\nabla + S$: para $X, Y \in \Gamma(TM)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
R^{\nabla+S}(X,Y) &= (\nabla + S)_X(\nabla + S)_Y - (\nabla + S)_Y(\nabla + S)_X - (\nabla + S)_{[X,Y]} \\
&= (\nabla + S)_X(\nabla_Y + S_Y) - (\nabla + S)_Y(\nabla_X + S_X) - \nabla_{[X,Y]} - S_{[X,Y]} \\
&= \nabla_X(\nabla_Y + S_Y) + S_X(\nabla_Y + S_Y) \\
&\quad -\nabla_Y(\nabla_X + S_X) - S_Y(\nabla_X + S_X) \\
&\quad -\nabla_{[X,Y]} - S_{[X,Y]} \\
&= R^\nabla(X,Y) + [\nabla_X, S_Y] + [S_X, \nabla_Y] + R^S(X,Y),
\end{aligned}$$

lo cual establecemos en el siguiente resultado:

Lema A.4.1. Si ∇ es una conexión lineal en E, para cualesquier otra conexión $\nabla + S$,

$$R^{\nabla+S}(X,Y) = R^\nabla(X,Y) + [\nabla_X, S_Y] + [S_X, \nabla_Y] + R^S(X,Y) \tag{A.14}$$

donde $R^S(X,Y) \coloneqq S_X S_Y - S_Y S_X - S_{[X,Y]} \in \Gamma\mathrm{End}(E)$ que denotaremos como R^S por analogía al operador de curvatura.

Por otra parte, si ∇ es una conexión lineal en $E \to M$, notemos que considerando las conexiones inducidas en E^* y en el espacio de (p,q)-tensores $\otimes^p E \otimes^q E^*$, tiene sentido extender el operador $R^\nabla(X,Y) : \Gamma E \to \Gamma E$ a

$$R^\nabla(X,Y) : \Gamma(E^*) \to \Gamma(E^*)$$

y

$$R^\nabla(X,Y) : \mathcal{T}_q^p \to \mathcal{T}_q^p.$$

Proposición A.4.2. Si ∇ es una conexión lineal en E, para las conexiones inducidas en E^* y $\bigotimes^p E \bigotimes^q E^*$, el operador curvatura cumple que, para $\alpha \in \Gamma(E^*)$,

$$R^\nabla(X,Y)\alpha = -\alpha(R^\nabla(X,Y)\cdot).$$

y para τ un $(2,0)$-tensor,

$$R^\nabla(X,Y)\tau = -\tau(R^\nabla(X,Y)\cdot,\cdot) - \tau(\cdot, R^\nabla(X,Y)\cdot). \tag{A.15}$$

Inmediatamente del resultado anterior se sigue que:

Corolario A.4.3. Si ∇ es compatible con el (0,2)-tensor τ, al ser $R^\nabla(X,Y)\tau = 0$ para todo par $X, Y \in \Gamma(TM)$, se cumple que

$$\tau(R^\nabla(X,Y)s_1, s_2) + \tau(s_1, R^\nabla(X,Y)s_2) = 0 \tag{A.16}$$

para todos $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$.

En particular si $E = TM$ y $T = \omega$ es una estructura (casi)-simpléctica, $R^\nabla \in \Omega^2(M; \mathrm{sp}(TM))$.

Recogemos como referencia dos porpiedades importantes de la curvatura en el caso $E = TM$.

Lema A.4.4. (1^a-identidad de Bianchi). Si $\nabla \in \mathcal{S}(M)$ es una conexión en el haz tangente,

$$R^\nabla(X,Y)Z + R^\nabla(Y,Z)X + R^\nabla(Z,X)Y = 0$$

para todos $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

En el siguiente resultado, consideramos R^∇ como un (1,3)-tensor.

Lema A.4.5. (2^a-identidad de Bianchi). Si $\nabla \in \mathcal{S}(M)$,

$$(\nabla_X R^\nabla)(Y,Z)T + (\nabla_Z R^\nabla)(X,Y)T + (\nabla_Y R^\nabla)(Z,X)T = 0.$$

A.5. El tensor de curvatura

Sea ∇ una conexión en $E \to M$ y τ un $(2,0)$-tensor. El **tensor de curvatura** $\underline{R}^{\nabla^\tau} \in \Omega^2(M; E^* \otimes E^*)$ se define como

$$\underline{R}^{\nabla^\tau}(X,Y,s_1,s_1) := \tau(R^\nabla(X,Y)s_1, s_2)$$

para todos $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$.

Como R^∇ es $\mathcal{C}^\infty$-trilineal, también $\underline{R}^{\nabla^\tau}$ lo es en sus primeros tres argumentos; luego por la antisimetría de R^∇ en las primeras dos componentes, se sigue directamente que $\underline{R}^{\nabla^\tau}$ es antisimétrico en los primeros dos índices

$$\underline{R}^{\nabla^\tau}(X,Y,s_1,s_2) = -\underline{R}^{\nabla^\tau}(Y,X,s_1,s_2). \tag{A.17}$$

Finalmente, por la $\mathcal{C}^\infty$-linealidad de τ en su segundo argumento, concluimos que $\underline{R}^{\nabla^\tau}$ también es $\mathcal{C}^\infty$- lineal en su cuarto argumento, de modo que $\underline{R}^{\nabla,\tau}$ es $\mathcal{C}^\infty$-lineal en sus cuatro entradas.

En el caso en que $E = TM$ si $\nabla \in \mathcal{S}(M)$, de la 1^a Identidad de Bianchi, se tiene que el tensor de curvatura tiene la siguiente propiedad cíclica en sus primeros tres argumentos:

$$\underline{R}^{\nabla^\tau}(X,Y,Z,T) + \underline{R}^{\nabla^\tau}(Z,X,Y,T) + \underline{R}^{\nabla^\tau}(Y,Z,X,T) = 0, \tag{A.18}$$

para todos $X,Y,Z,T \in \Gamma(TM)$.

Finalmente, veamos cómo se relaciona el tensor de curvatura $\underline{R}^{\nabla^\tau}$ con el de otra conexión de la forma $\tilde{\nabla} = \nabla + S$. De la ecuación (A.14) tenemos que $R^{\tilde{\nabla}}(X,Y) = R^\nabla(X,Y) + [\nabla_X, S_Y] + [S_X, \nabla_Y] + R^S(X,Y)$, así que

$$\begin{aligned}
\underline{R}^{\tilde{\nabla}^\tau}(X,Y,Z,T) &= \tau(R^{\tilde{\nabla}}(X,Y)Z\,,T) \\
&= \tau(R^\nabla(X,Y)Z,T) \\
&\quad + \tau([\nabla_X, S_Y]Z + [S_X,\nabla_Y]Z + R^S(X,Y)Z\,,T) \\
&= \underline{R}^{\nabla^\tau}(X,Y,Z,T) + \tau([\nabla_X,S_Y]Z + [S_X,\nabla_Y]Z + R^S(X,Y)Z\,,T)
\end{aligned}$$

esto es,

$$\underline{R}^{\tilde{\nabla}^\tau}(X,Y,Z,T) = \underline{R}^{\nabla^\tau}(X,Y,Z,T) + \tau([\nabla_X,S_Y]Z + [S_X,\nabla_Y]Z + R^S(X,Y)Z\,,T). \tag{A.19}$$

A.5.1. Caso Riemanniano

Resumimos a continuación las propiedades del tensor de curvatura para el caso especial en que $E = TM$ y el (2,0)-tensor τ corresponde a una métrica riemmaniana:

Proposición A.5.1. Si (M,g) es una variedad Riemanniana y ∇^g la conexión de Levi-Civita,

(i) $\underline{R}^{\nabla^g}(X,Y,Z,T) + \underline{R}^{\nabla^g}(Y,Z,X,T) + \underline{R}^{\nabla^g}(Z,X,Y,T) = 0$

(ii) $\underline{R}^{\nabla^g}(X,Y,Z,T) = -\underline{R}^{\nabla^g}(Y,X,Z,T)$

(iii) $\underline{R}^{\nabla^g}(X,Y,Z,T) = -\underline{R}^{\nabla^g}(X,Y,T,Z)$

(iv) $\underline{R}^{\nabla^g}(X,Y,Z,T) = \underline{R}^{\nabla^g}(Z,T,X,Y)$.

A.5.2. Caso simpléctico

Se resumen ahora las propiedades del tensor de curvatura para el caso en el que $E = TM$ y el (2,0)-tensor τ corresponde a una conexión simpléctica. La prueba sigue las líneas del caso Riemanniano.

Proposición A.5.2. Sea (M,ω) una variedad simpléctica y ∇ una conexión simpléctica.

(i) $\underline{R}^{\nabla^\omega}(X,Y,Z,T) + \underline{R}^{\nabla^\omega}(Y,Z,X,T) + \underline{R}^{\nabla^\omega}(Z,X,Y,T) = 0$

(ii) $\underline{R}^{\nabla^\omega}(X,Y,Z,T) = -\underline{R}^{\nabla^\omega}(Y,X,Z,T)$

(iii) $\underline{R}^{\nabla^\omega}(X,Y,Z,T) = \underline{R}^{\nabla^\omega}(X,Y,T,Z)$

(iv) $\underline{R}^{\nabla^\omega}$ es completamente cícilico,

$$\underline{R}^{\nabla^\omega}(X,Y,Z,T) + \underline{R}^{\nabla^\omega}(T,X,Y,Z) + \underline{R}^{\nabla^\omega}(Z,T,X,Y) + \underline{R}^{\nabla^\omega}(Y,Z,T,X) = 0.$$

A.6. El Tensor de Ricci

Para considerar simultáneamente el caso Riemanniano y el caso simpléctico, sea $\tau \in \{g, \omega\}$, y sea (M, τ, ∇) una variedad Riemanniana o una variedad de Fedosov. Si consideramos la curvatura R^∇, que es en particular un (3,1)-tensor, tenemos tres formas de obtener un endomorfismo de $\Gamma(TM)$ en $\Gamma(TM)$ fijando dos de sus entradas, esto es, si $X, Y \in \Gamma(TM)$ son campos fijos, los siguientes son endomorfismos:

1. $R^\nabla(\cdot, X)Y : Z \mapsto R^\nabla(Z, X)Y$
2. $R^\nabla(X, \cdot)Y : Z \mapsto R^\nabla(X, Z)Y$
3. $R^\nabla(X, Y) : Z \mapsto R^\nabla(X, Y)Z$

Analicemos la traza de estos endomorfismos. Primero, notemos que los primeros dos morfismos están relacionados por $R^\nabla(\cdot, X)Y = -R^\nabla(X, \cdot)Y$, entonces también sus trazas están relacionadas como

$$\mathrm{Tr}\,(R^\nabla(\cdot, X)Y) = -\mathrm{Tr}\,(R^\nabla(X, \cdot)Y).$$

y por otro lado, tenemos el siguiente resultado:

Lema A.6.1. Si (M, ∇, τ) es una variedad Riemanniana o una variedad de Fedosov, y $\mathcal{B} = \{X_i\}$ es una base local de campos vectoriales

$$\mathrm{Tr}(R^\nabla(X, Y)\cdot) = 0$$

Demostración. Como la base dual de $\mathcal{B}$ es precisamente $\mathcal{B}^* = \{\sum_k \tau(\cdot, X_k)\tau^{ki}\}_i$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(R^\nabla(X, Y)\cdot) &= \sum_i X_i^*(R^\nabla(X, Y)X_i) \\ &= \sum_i \sum_k \tau(R^\nabla(X, Y)X_i, X_k)\tau^{ki} \\ &= \sum_i \sum_k \underline{R}^{\nabla^\tau}(X, Y, X_i, X_k)\tau^{ki}.\end{aligned}$$

Si $\tau = g$, entonces τ^{-1} es simétrica y $\tau^{ki} = \tau^{ik}$, y además, de (iii) en la Proposición A.5.1. $\underline{R}^{\nabla^\tau}(X, Y, X_i, X_k) = -\underline{R}^{\nabla^\tau}(X, Y, X_k, X_i)$, por lo tanto

$$\mathrm{Tr}(R^\nabla(X, Y)\cdot) = \sum_i \sum_k \underline{R}^{\nabla^\tau}(X, Y, X_i, X_k)\tau^{ki} = -\sum_i \sum_k \underline{R}^{\nabla^\tau}(X, Y, X_k, X_i)\tau^{ik}$$

y al renombrar índices $i \leftrightarrow k$ en esta última expresión, concluímos que $\mathrm{Tr}(R^\nabla(X, Y)\cdot) = 0$. Por otro lado, Si $\tau = \omega$, entonces τ^{-1} es antisimétrica y $\tau^{ki} = -\tau^{ik}$, y además, de (iii) en la Proposición A.5.2. $\underline{R}^{\nabla^\tau}(X, Y, X_i, X_k) = \underline{R}^{\nabla^\tau}(X, Y, X_k, X_i)$, por lo tanto

$$\mathrm{Tr}(R^\nabla(X, Y)\cdot) = \sum_i \sum_k \underline{R}^{\nabla^\tau}(X, Y, X_i, X_k)\tau^{ki} = -\sum_i \sum_k \underline{R}^{\nabla^\tau}(X, Y, X_k, X_i)\tau^{ik}$$

y al renombrar índices $i \leftrightarrow k$ en la última expresión, concluímos también que $\mathrm{Tr}(R^\nabla(X, Y)\cdot) = 0$. ■

Se sigue que sólo uno de los tres morfismos inducidos por R^∇ tiene traza no trivial en general, lo que dá pie a la siguiente definición: el **tensor de Ricci** de la variedad Riemanniana o simpléctica (M, ∇, τ) es el (2,0)-tensor

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^\tau}(X, Y) := \mathrm{Tr}_\tau(R^\nabla(\cdot, X)Y)$$

donde R^∇ corresponde a la curvatura de la conexión ∇.

A.6.1. Caso Riemanniano.

En particular si (M,g) es una variedad Riemanniana y tenemos una base local de campos vectoriales, podemos calcular el tensor de Ricci como sigue:

Proposición A.6.2. Sea (M,g,∇) una variedad Riemanniana de dimensión n con ∇ la conexión de Levi-Civita.

(i) Si $\{X_i\}_i$ es una base local g-ortonormal, al ser su dual $\{g(X_i,\cdot)\}_i$,

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y)=\sum_{i=1}^n g(X_i,R^{\nabla}(X_i,X)Y)=\sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^g}(X_i,X,Y,X_i).$$

(ii) Si $\{X_i\}_i$ es solo g-ortogonal, al ser su dual $\left\{\frac{1}{g(X_i,X_i)}g(X_i,\cdot)\right\}_i$,

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y)=\sum_{i=1}^n \frac{1}{g(X_i,X_i)}g(X_i,R^{\nabla}(X_i,X)Y)=\sum_{i=1}^n \frac{1}{g(X_i,X_i)}\underline{R}^{\nabla^g}(X_i,X,Y,X_i). \tag{A.20}$$

(iii) En general, para una base local $\{X_i\}_i$, al ser su dual $\{\sum_k g(\cdot,X_k)g^{ki}\}_i$

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n g(R^{\nabla}(X_i,X)Y,X_k)g^{ki}=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n \underline{R}^{\nabla^g}(X_i,X,Y,X_k)g^{ki}.$$

El tensor de Ricci resulta ser simétrico:

Proposición A.6.3. En una variedad Riemanniana (M,g,∇) con ∇ la conexión de Levi-Civita

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y)=\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(Y,X).$$

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una base local g-ortonormal. Entonces usando (iii), (ii) y (iv) de (A.5.1),

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y) &= \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^g}(X_i,X,Y,X_i)=\sum_{i=1}^n -\underline{R}^{\nabla^g}(X_i,X,X_i,Y)\\
&= \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^g}(X,X_i,X_i,Y)=\sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^g}(X_i,Y,X,X_i)\\
&= \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(Y,X).
\end{aligned}$$

■

A.6.2. Caso simpléctico.

Sea (M,ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$ con una conexión simpléctica ∇. En particular, si tenemos una base local de campos vectoriales, podemos calcular el tensor de Ricci como sigue:

Proposición A.6.4. Sea (M,ω) una variedad simpléctica y ∇simpléctica.

(i) Si $\{e_i, f_i\}$ es una base local simpléctica, al ser $\{e^i = -\omega(f_i, \cdot), f^i = \omega(e_i, \cdot)\}$ su dual,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{\nabla^\omega}(X,Y) &= -\sum_{i=1}^n \omega(f_i, R(e_i,X)Y) + \sum_{i=1}^n \omega(e_i, R(f_i,X)Y) \\ &= \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,X,Y,f_i) - \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,X,Y,e_i).\end{aligned} \tag{A.21}$$

(ii) En general, para una base $\{X_i\}$, al ser su dual $\{\sum_k \omega(\cdot, X_k)\omega^{ki}\}_i$

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^\omega}(X,Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \omega(R^\nabla(X_i,X)Y, X_k)\omega^{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(X_i,X,Y,X_k)\omega^{ki}.$$

Veremos que también en el caso simpléctico, el tensor de Ricci es simétrico.

Proposición A.6.5. En una variedad simpléctica (M,ω) con ∇ simpléctica

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^\omega}(X,Y) = \mathrm{Ric}^{\nabla^\omega}(Y,X).$$

Demostración. Sea $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$ una base local simpléctica. Entonces

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^\omega}(X,Y) = \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,X,Y,f_i) - \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,X,Y,e_i)$$

pero por (i) en (A.5.2)

$$\begin{aligned}\underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,X,Y,f_i) &= -\underline{R}^{\nabla^\omega}(Y,e_i,X,f_i) - \underline{R}^{\nabla^\omega}(X,Y,e_i,f_i), \\ -\underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,X,Y,e_i) &= \underline{R}^{\nabla^\omega}(Y,f_i,X,e_i) + \underline{R}^{\nabla^\omega}(X,Y,f_i,e_i)\end{aligned}$$

de modo que, sumando estas expresiones y aplicando (iii) y (ii) de (A.5.2)

$$\begin{aligned}\underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,X,Y,f_i) - \underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,X,Y,e_i) &= -\underline{R}^{\nabla^\omega}(Y,e_i,X,f_i) - R^\omega(X,Y,e_i,f_i) \\ &\quad +\underline{R}^{\nabla^\omega}(Y,f_i,X,e_i) + \underline{R}^{\nabla^\omega}(X,Y,f_i,e_i) \\ &= -\underline{R}^{\nabla^\omega}(Y,e_i,X,f_i) + \underline{R}^{\nabla^\omega}(Y,f_i,X,e_i) \\ &= \underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,Y,X,f_i) - \underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,Y,X,e_i)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{\nabla^\omega}(X,Y) &= \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,X,Y,f_i) - \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,X,Y,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,Y,X,f_i) - \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,Y,X,e_i) \\ &= \mathrm{Ric}^{\nabla^\omega}(Y,X).\end{aligned}$$

■

A.6.3. Punto de vista matricial

Puesto que la traza de un endomorfismo $H : V \to V$ se puede calcular en términos de una base dual o de su matriz asociada $(H)_{\mathcal{B}}$ en una base arbitraria $\mathcal{B} = \{v_i\}$, $\operatorname{Tr} H = \sum_i v^{i*}(H(v_i)) \equiv \operatorname{Tr}(H)_{\mathcal{B}}$, podemos escribir también el tensor de Ricci analizado en la sección A.6 en términos matriciales. Para considerar simultáneamente el caso Riemanniano y el caso simpléctico, (M, τ, ∇) denotará ya sea una variedad Riemanniana con la conexión de Levi-Civita, ó una variedad de Fedosov.

Observemos que si $H : V \to V$ es una aplicación F-lineal,

$$\operatorname{Tr} H = \sum_i v^{i*}(H(v_i)).$$

para $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V, y si además se tiene una forma F-bilineal no degenerada τ definida en V, como

$$v^{i*} = \sum_k \tau(\cdot, v_k)\tau^{ki}$$

entonces

$$\operatorname{Tr} H \quad = \quad \sum_i \sum_k \tau(H(v_i), v_k)\tau^{ki} = \operatorname{Tr}\left\{\left(\tau\,(\,H(v_i)\,,\,v_j\,)\,\right)_{ij}(\tau)^{-1}_{\mathcal{B}}\right\}. \qquad \text{(A.22)}$$

Aplicando lo anterior al morfismo $H := R^{\nabla}(\cdot, X)Y$, tenemos la siguiente expresión matricial para el tensor de Ricci, que puede ser útil para calcular si no tenemos explícitamente una base dual de $\mathcal{B}$, pero conocemos la matriz no singular asociada a τ:

Proposición A.6.6. Sea τ una métrica Riemanniana o una forma simpléctica. Si $\mathcal{B} = \{X_i\}$ es una base local de campos vectoriales y $H = R^{\nabla}(\cdot, X)Y$

$$\operatorname{Ric}^{\nabla^\tau}(X,Y) = \operatorname{Tr}_\tau(H)_{\mathcal{B}} = \operatorname{Tr}\left\{\left(\,\underline{R}^{\nabla^\tau}(X_i, X, Y, X_k)\,\right)_{ik}(\tau)^{-1}_{\mathcal{B}}\right\}. \qquad \text{(A.23)}$$

Notemos que si en particular, $\tau = g$ es una métrica, del resultado anterior se deducen las expresiones de la Proposición A.6.2, por ejemplo, en una base local g-ortonormal, la matriz $(g)^{-1}_{\mathcal{B}}$ es la matriz identidad pues $(g)_{\mathcal{B}}$ lo es, y por lo tanto

$$\operatorname{Ric}^{\nabla^g}(X,Y) = \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^g}(X_i, X, Y, X_i).$$

En el caso de que $\tau = \omega$ es una forma simpléctica, del resultado anterior se deducen las expresiones de la Proposición A.6.4, por ejemplo, en una base simpléctica,

$$(\omega)^{-1}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}^{\nabla^\omega}(X,Y) &= \operatorname{Tr}_\omega\left\{\begin{pmatrix} \left(\underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,X,Y,e_j)\right)_{ij} & \left(\underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,X,Y,f_j)\right)_{ij} \\ \left(\underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,X,Y,e_j)\right)_{ij} & \left(\underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,X,Y,f_j)\right)_{ij} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \operatorname{Tr}_\omega\left\{\begin{pmatrix} \left(\underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,X,Y,f_j)\right)_{ij} & -\left(\underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,X,Y,e_j)\right)_{ij} \\ \left(\underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,X,Y,f_j)\right)_{ij} & -\left(\underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,X,Y,e_j)\right)_{ij} \end{pmatrix}\right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(e_i,X,Y,f_i) - \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^\omega}(f_i,X,Y,e_i)
\end{aligned}$$

que es precisamente la ecuación (A.21).

Lema A.6.7. Sea τ una métrica Riemanniana o una forma simpléctica. Si $\mathcal{B} = \{X_i\}$ es una base local de campos vectoriales

$$\operatorname{Tr}\left\{\left(\underline{R}^{\nabla^\tau}(X,Y,X_i,X_k)\right)_{ik}(\tau)_{\mathcal{B}}^{-1}\right\} = 0. \tag{A.24}$$

Demostración. Haciendo $H := R^\nabla(X,Y)\cdot$ en (A.22) se tiene que

$$(H)_{\mathcal{B}}^t = \left(\underline{R}^{\nabla^\tau}(X,Y,X_i,X_k)\right)_{ik}(\tau)_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Pero, si $\tau = g$, entonces la matriz

$$\left(\underline{R}^{\nabla^\tau}(X,Y,X_i,X_k)\right)_{ik}$$

es antisimétrica (por (iii) en A.5.1) y la matriz

$$(\tau)_{\mathcal{B}}^{-1}$$

es simétrica; y en el caso de que $\tau = \omega$, entonces la matriz

$$\left(\underline{R}^{\nabla^\tau}(X,Y,X_i,X_k)\right)_{ik}$$

es simétrica (por (iii) en A.5.2) y la matriz

$$(\tau)_{\mathcal{B}}^{-1}$$

es antisimétrica. Así, en cualesquiera de los dos casos $\tau \in \{g,\omega\}$, la matriz $(H)_{\mathcal{B}}^t$ es el producto de una matriz simétrica por una antisimétrica, de modo que tiene traza cero. ∎

Este resultado comprueba matricialmente, que en particular de los tres morfismos

1. $R^\nabla(\cdot,X)Y : Z \mapsto R^\nabla(Z,X)Y$
2. $R^\nabla(X,\cdot)Y : Z \mapsto R^\nabla(X,Z)Y$
3. $R^\nabla(X,Y) : Z \mapsto R^\nabla(X,Y)Z$

el tercero tiene traza cero, como se esperaba del cálculo que se realizó en las secciones A.6.1 y A.6.2. Del mismo modo, se puede probar con esta técnica que el tensor de Ricci es siempre simétrico.

A.7. Curvatura escalar

Hasta ahora, hemos visto definiciones que aparecen tanto en el contexto de variedades Riemannianas como en el de variedades simplécticas, así como propiedades muy similares que se cumplen en los dos casos. Veremos ahora que la curvatura escalar, que se define a partir del tensor de Ricci, no es interesante en el caso simpléctico debido a que resulta ser trivial, cosa que no sucede para variedades Riemannianas en general.

En adelante, para considerar simultáneamente el caso Riemanniano y el caso simpléctico, (M,τ,∇) denotará ya sea una variedad Riemanniana con la conexión de Levi-Civita, ó una variedad de Fedosov. Si consideramos el (2,0)-tensor de Ricci, y consideramos los morfismos inducidos $\mathrm{Ric}^\flat : \Gamma(TM) \to \Gamma(T^*M)$ y $\tau^\sharp : \Gamma(T^*M) \to \Gamma(TM)$, entonces tenemos un endomorfismo bien definido

$$\tau^\sharp \circ \mathrm{Ric}^\flat : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM).$$

Se define **la curvatura escalar de** (M,τ), donde τ es una métrica o una estructura simpléctica, se define como

$$\mathrm{Scal}(M) := \mathrm{Tr}\left(\tau^\sharp \circ \mathrm{Ric}^\flat\right)$$

Teorema A.7.1. Si (M,ω) es una variedad simpléctica

$$\mathrm{Scal}(M) = 0$$

Demostración. Sea $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$ una base local simpléctica. Como su base dual es precisamente

$$e^i := -\omega(f_i,\cdot) \qquad \text{y} \qquad f^i := \omega(e_i,\cdot) \qquad \forall i = 1,\ldots,n,$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Scal}(M) &= \mathrm{Tr}(\omega^\sharp \circ \mathrm{Ric}^\flat) \\
&= \sum_{i=1}^n e^i(\omega^\sharp(\mathrm{Ric}(e_i,\cdot))) + \sum_{i=1}^n f^i(\omega^\sharp(\mathrm{Ric}(f_i,\cdot))) \\
&= -\sum_{i=1}^n \omega(f_i, \omega^\sharp(\mathrm{Ric}(e_i,\cdot))) + \sum_{i=1}^n \omega(e_i, \omega^\sharp(\mathrm{Ric}(f_i,\cdot)))
\end{aligned}$$

luego, por definición de la inversa de $\omega^\sharp$ y la simetría de Ric, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Scal}(M) &= -\sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}(e_i,f_i) + \sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}(f_i,e_i) \\
&= -\sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}(f_i,e_i) + \sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}(f_i,e_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Scal}(M) = 0$ para toda variedad simpléctica M. ∎

En el caso Riemanniano, como es bien sabido, en general $\mathrm{Scal}(M)$ no es cero.

Proposición A.7.2. Sea (M,g,∇) una variedad Riemanniana de dimensión n con ∇ la conexión de Levi-Civita.

(i) Si $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una base local g-ortonormal, al ser su dual $\{g(X_i,\cdot)\}_i$

$$\mathrm{Scal}(M,g) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}(X_i,X_i).$$

(ii) Si $\{X_i\}_i$ es sólo g-ortogonal, al ser su dual $\{\frac{1}{g(X_i,X_i)} g(X_i,\cdot)\}_i$,

$$\mathrm{Scal}(M,g) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{g(X_i,X_i)} \mathrm{Ric}(X_i,X_i).$$

(iii) En general, para una base local $\{X_i\}_i$, al ser su dual $\{\sum_k g(X_k,\cdot)g^{ki}\}_i$,

$$\mathrm{Scal}(M,g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g(X_i,X_i)} \mathrm{Ric}(X_i,X_i).$$

Demostración. Si $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una base local g-ortonormal, entonces su dual está dado por $\{g(X_i,\cdot)\}_{i=1}^n$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Scal}(M) &= \mathrm{Tr}(g^\sharp \circ \mathrm{Ric}^\flat)\\ &= \sum_{i=1}^{n} g(X_i, g^\sharp(\mathrm{Ric}(X_i,\cdot))))\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(X_i,X_i).\end{aligned}$$

La segunda afirmación en el teorema se sigue del hecho de que en ese caso $\left\{\frac{1}{g(X_i,X_i)} g(X_i,\cdot)\right\}_{i=1}^n$ es la base dual a $\{X_i\}$. ■

A.7.1. Punto de vista matricial

Consideremos ahora (M,τ) una variedad Riemanniana ó una variedad simpléctica, y consideramos los (2,0)-tensores Ric y τ, y sus morfismos inducidos $Ric^\flat, \tau^\sharp$. Entonces, la matriz asociada al morfismo $H := \tau^\sharp \circ \mathrm{Ric}^\flat : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ en una base B es

$$(H)_{\mathcal{B}} = \tau^\sharp_{\mathcal{B}} \left(\mathrm{Ric}^\flat\right)_{\mathcal{B}} = (\tau)_{\mathcal{B}}^{-1\ t} \ (\mathrm{Ric})_{\mathcal{B}}{}^t.$$

y tenemos la siguiente expresión matricial para la curvatura escalar:

Proposición A.7.3. Sea τ una métrica Riemanniana o una forma simpléctica. Si $\mathcal{B} = \{X_i\}$ es una base local de campos vectoriales y $H = \tau^\sharp \circ \mathrm{Ric}^\flat$

$$\mathrm{Scal}(M) = \mathrm{Tr}\,(H)_{\mathcal{B}} = \mathrm{Tr}\left\{(\tau)_{\mathcal{B}}^{-1\ t} \ (\mathrm{Ric})_{\mathcal{B}}{}^t\right\}. \tag{A.25}$$

En particular, en el caso de que $\tau = \omega$ es una forma simpléctica, $(\tau)_{\mathcal{B}}^{-1\ t}$ es una matriz antisimétrica, pues $(\tau)_{\mathcal{B}}$ lo es, y como además $(\mathrm{Ric})_{\mathcal{B}}{}^t$ es una matriz simétrica, por ser Ric simétrico, se sigue que $(H)_{\mathcal{B}}$ es el producto de una matriz simétrica por una antisimétrica, por lo que tiene traza cero. Así, tenemos un argumento matricial que comprueba el Teorema A.7.1. de la sección A.7 que enunciamos nuevamente a continuación:

Teorema. Si (M,ω) es una variedad simpléctica

$$\mathrm{Scal}(M) = 0.$$

En el caso Riemanniano en general $\mathrm{Scal}(M)$ no es cero, pues si $\tau = g$ es una métrica $(\tau)_{\mathcal{B}}^{-1\ t}$ resulta ser simétrica y $\mathrm{Scal}(M)$ es la traza del producto de dos matrices simétricas, lo cual en general no se anula.

Apéndice B

Variedades de Weyl

Dado que los ejemplos explícitos de supercurvatura escalar simpléctica que presentaremos se dan en el contexto de las variedades de Weyl, en este apéndice recogeremos algunos cálculos en esta clase de variedades que serán utilizados en el capítulo dedicado a los resultados principales.

B.1. Variedades de Weyl

En esta sección se introducen y se analizan ciertas conexiones llamadas de Weyl, que aparecen en el contexto de variedades conformes. A diferencia del caso de las variedades Riemannianas y simplécticas, en una variedades de Weyl la conexión no necesariamente es compatible con la métrica. El análisis aquí presentado está basado en [1].

Dos métricas $g, \tilde{g}$ sobre la variedad M se dicen **métricas conformes** si existe $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $\tilde{g} = e^h g$.

La relación "ser conformes" define una relación de equivalencia: $g \sim g$ ya que $g = e^0 g$; si $\tilde{g} \sim g$ entonces $\tilde{g} = e^h g$, o bien, $e^{-h}\tilde{g} = g$ de modo que $g \sim \tilde{g}$; y finalmente, si $\tilde{g} \sim g$ y $g \sim \hat{g}$ como $\tilde{g} = e^h g$ y $g = e^f \hat{g}$, entonces $\tilde{g} = e^h e^f \hat{g} = e^{h+f}\hat{g}$ así que $\tilde{g} \sim \hat{g}$.

Si M denota una variedad diferencial, estableceremos las siguientes definiciones:

- Una **variedad conforme** consiste de un par (M, c) donde c es una clase conforme de métricas Riemannianas.
- Una **conexión de Weyl** ∇^W sobre una variedad conforme (M, c) es una conexión lineal en el haz tangente TM tal que
  - (i) Es simétrica
  - (ii) Preserva la clase conforme, esto es, para cada $g \in c$, existe $\theta_g \in \Omega^1(M)$ tal que

$$\nabla^W g = \theta_g \otimes g.$$

- Una **variedad de Weyl** (M, c, ∇^W) consiste de una variedad conforme con una conexión de Weyl ∇^W definida sobre ella.

A partir de una variedad Riemanniana (M, g) podemos inducir estructuras de Weyl que de hecho preservan la clase conforme de la métrica g; a saber, para cada $0 \neq \theta \in \Omega^1(M)$ fija, $\tilde{\nabla}$ definida como

$$\tilde{\nabla} := \nabla^g - \frac{1}{2}\left\{\theta \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \theta - g \otimes \theta^{\#}\right\}$$

donde ∇^g corresponde a la conexión de Levi-Civita asociada a g, define una conexión de Weyl. Para comprobar ésto, notemos primero que $\tilde{\nabla}$ es una conexión pues claramente

$$S := -\frac{1}{2}\left\{\theta \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \theta - g \otimes \theta^{\#}\right\} \in \Omega^1(M; \mathrm{End}(TM)) \tag{B.1}$$

por la $\mathcal{C}^\infty(M)$-linealidad de θ y de g.

Ahora, para comprobar que efectivamente $\tilde{\nabla}$ es de Weyl, notemos que por la simetría de g, se tiene que S es simétrico, y por lo tanto de la ecuación (A.5)

$$T^{\tilde{\nabla}} = T^{\nabla^g} + S_X Y - S_Y X = T^{\nabla^g} = 0$$

y $\tilde{\nabla}$ es simétrica.

Comprobemos ahora que efectivamente $\tilde{\nabla}$ preserva la clase conforme de la métrica g. Para ésto consideremos primero la misma métrica g. Por la ecuación (A.3), y recordando que ∇^g es compatible con g, tenemos que

$$(\tilde{\nabla}_X g)(Y, Z) = (\nabla^g_X g)(Y, Z) - g(S_X Y, Z) - g(Y, S_X Z) = -g(S_X Y, Z) - g(Y, S_X Z)$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X g)(Y, Z) &= -g(S_X Y, Z) - g(Y, S_X Z) \\
&= -g(-\frac{1}{2}\left\{\theta(X)Y + X\theta(Y) - g(X, Y)\theta^{\#}\right\}, Z) \\
&\quad -g(Y, -\frac{1}{2}\left\{\theta(X)Z + X\theta(Z) - g(X, Z)\theta^{\#}\right\}) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\theta(X)g(Y, Z) + \theta(Y)g(X, Z) - g(X, Y)g(\theta^{\#}, Z)\right. \\
&\quad \left. + \theta(X)g(Y, Z) + \theta(Z)g(Y, X) - g(X, Z)g(Y, \theta^{\#})\right\}
\end{aligned}$$

y como

$$g(\theta^{\sharp}, A) = \theta(A) \quad \text{para todo } A \in \Gamma(TM)$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X g)(Y, Z) &= \frac{1}{2}\{2\theta(X)g(Y, Z) + \theta(Y)g(X, Z) - g(X, Y)\theta(Z) \\
&\quad + \theta(Z)g(Y, X) - g(X, Z)\theta(Y)\} \\
&= \theta(X)g(Y, Z)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\tilde{\nabla} g = \theta \otimes g. \tag{B.2}$$

Ahora, consideremos cualesquier $\tilde{g} \sim g$, digamos $\tilde{g} = e^h g$, entonces, usando que $\tilde{\nabla}$ satisface la regla de Leibniz en su segundo argumento, y la relación (B.2) obtenida anteriormente,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X \tilde{g} &= \tilde{\nabla}_X (e^h g) \\
&= X(e^h) g + e^h \tilde{\nabla}_X g \\
&= de^h(X)\, g + e^h(\theta(X) g) \\
&= e^h\, dh(X)\, g + e^h(\theta(X) g) \\
&= (dh(X) + \theta(X))\, e^h\, g \\
&= (dh(X) + \theta(X))\, \tilde{g}
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\tilde{\nabla}\tilde{g} = (dh + \theta) \otimes \tilde{g}.$$

Como $\tilde{g}$ se tomó arbitraria en la clase conforme de g, se sigue que $\tilde{\nabla}$ preserva la clase conforme. De lo anterior, concluimos que efectivamente $(M, [g], \tilde{\nabla})$ es una variedad de Weyl.

B.2. Curvatura de una variedad de Weyl

A continuación, veremos cómo se relacionan los objetos geométricos asociados a una conexión de Weyl ∇^W inducida sobre una variedad Riemanniana (M, g), con los definidos para la conexión de Levi-Civita ∇^g.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana con conexión de Levi-Civita ∇^g. De la relación (A.14), se tiene que para $\nabla^W = \nabla^g + S$,

$$R^{\nabla^W}(X, Y) = R^{\nabla^g}(X, Y) + [\nabla^g_X, S_Y] + [S_X, \nabla^g_Y] + R^S(X, Y);$$

analicemos la 2-forma con valores en $\mathrm{End}(TM)$ dada por $[\nabla^g_X, S_Y] + [S_X, \nabla^g_Y] + R^S(X, Y)$, sabiendo que S es de la forma (B.1). Por un lado, para cada $Z \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}
[\nabla^g_X, S_Y]Z &= \nabla^g_X(S_Y Z) - S_Y(\nabla^g_X Z) \\
&= \nabla^g_X\left(-\frac{1}{2}\left\{\theta(Y)Z + Y\theta(Z) - g(Y,Z)\theta^\sharp\right\}\right) \\
&\quad -\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\theta(Y)\nabla^g_X Z + Y\theta(\nabla^g_X Z) - g(Y, \nabla^g_X Z)\theta^\sharp\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\nabla^g_X(\theta(Y)Z) + \nabla^g_X(\theta(Z)Y) - \nabla^g_X\left(g(Y,Z)\theta^\sharp\right)\right. \\
&\quad \left. -\theta(Y)\nabla^g_X Z - \theta(\nabla^g_X Z)Y + g(Y, \nabla^g_X Z)\theta^\sharp\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{X(\theta(Y))Z + \theta(Y)\nabla^g_X Z + X(\theta(Z))Y + \theta(Z)\nabla^g_X Y\right. \\
&\quad -X(g(Y,Z))\theta^\sharp - g(Y,Z)\nabla^g_X\theta^\sharp - \theta(Y)\nabla^g_X Z - \theta(\nabla^g_X Z)Y \\
&\quad \left. +g(Y, \nabla^g_X Z)\theta^\sharp\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{X(\theta(Y))Z + X(\theta(Z))Y + \theta(Z)\nabla^g_X Y - X(g(Y,Z))\theta^\sharp\right. \\
&\quad \left. -g(Y,Z)\nabla^g_X\theta^\sharp - \theta(\nabla^g_X Z)Y + g(Y, \nabla^g_X Z)\theta^\sharp\right\}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Por otro lado, para analizar el término $[S_X, \nabla^g_Y]$ observemos que como $[S_X, \nabla^g_Y] = -[\nabla^g_Y, S_X]$, usando la ecuación (B.3) tenemos que para todo $Z \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}
[S_X, \nabla^g_Y]Z &= \frac{1}{2}\left\{Y(\theta(X))Z + Y(\theta(Z))X + \theta(Z)\nabla^g_Y X - Y(g(X,Z))\theta^\sharp\right. \\
&\left. -g(X,Z)\nabla^g_Y\theta^\sharp - \theta(\nabla^g_Y Z)X + g(X, \nabla^g_Y Z)\theta^\sharp\right\}.
\end{aligned}$$

Ahora, por definición de S,

$$\begin{aligned}
R^S(X,Y)Z &= S_X(S_Y Z) - S_Y(S_X Z) - S_{[X,Y]}Z \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\theta(X)S_Y Z + X\theta(S_Y Z) - g(X, S_Y Z)\theta^\sharp\right\} \\
&\quad -\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\theta(Y)S_X Z + Y\theta(S_X Z) - g(Y, S_X Z)\theta^\sharp\right\} \\
&\quad -\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\theta([X,Y])Z + [X,Y]\theta(Z) - g([X,Y],Z)\theta^\sharp\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\ \theta(X)\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\theta(Y)Z + Y\theta(Z) - g(Y,Z)\theta^\sharp\right\}\right. \\
&\quad +X\theta\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\theta(Y)Z + Y\theta(Z) - g(Y,Z)\theta^\sharp\right\}\right) \\
&\quad -g(X, \left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\theta(Y)Z + Y\theta(Z) - g(Y,Z)\theta^\sharp\right\})\theta^\sharp \\
&\quad -\theta(Y)\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\theta(X)Z + X\theta(Z) - g(X,Z)\theta^\sharp\right\} \\
&\quad -Y\theta\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\theta(X)Z + X\theta(Z) - g(X,Z)\theta^\sharp\right\}\right) \\
&\quad +g(Y, \left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\theta(X)Z + X\theta(Z) - g(X,Z)\theta^\sharp\right\})\theta^\sharp \\
&\quad \left. -\theta([X,Y])Z - [X,Y]\theta(Z) + g([X,Y],Z)\theta^\sharp\ \right\}
\end{aligned}$$

y usando la $\mathcal{C}^\infty$-linealidad de θ y de g,

$$\begin{aligned}
R^S(X,Y)Z &= \frac{1}{4}\left\{\ \theta(X)\theta(Y)Z + \theta(X)\theta(Z)Y - \theta(X)g(Y,Z)\theta^\sharp\right. \\
&\quad +\theta(Y)\theta(Z)X + \theta(Y)\theta(Z)X - g(Y,Z)\theta(\theta^\sharp)X \\
&\quad -\theta(Y)g(X,Z)\theta^\sharp - \theta(Z)g(X,Y)\theta^\sharp + g(Y,Z)g(X,\theta^\sharp)\theta^\sharp \\
&\quad -\theta(X)\theta(Y)Z - \theta(Z)\theta(Y)X + g(X,Z)\theta(Y)\theta^\sharp \\
&\quad -\theta(Z)\theta(X)Y - \theta(X)\theta(Z)Y + g(X,Z)\theta(\theta^\sharp)Y \\
&\quad \left. +\theta(X)g(Y,Z)\theta^\sharp + \theta(Z)g(Y,X)\theta^\sharp - g(X,Z)g(Y,\theta^\sharp)\theta^\sharp\ \right\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\left\{-\theta([X,Y])Z - [X,Y]\theta(Z) + g([X,Y],Z)\theta^\sharp\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\ \theta(Y)\theta(Z)X - g(Y,Z)X\theta(\theta^\sharp) - \theta(Y)g(Z,X)\theta^\sharp\right. \\
&\quad \left. -\theta(X)\theta(Z)Y + g(X,Z)Y\theta(\theta^\sharp) + \theta(X)g(Z,Y)\theta^\sharp\ \right\} \\
&\quad +\frac{1}{2}\left\{\theta([X,Y])Z + [X,Y]\theta(Z) - g([X,Y],Z)\theta^\sharp\right\},
\end{aligned}$$

y entonces, para cada $Z \in \Gamma(TM)$

$$
\begin{aligned}
&[\nabla^g_X, S_Y]Z + [S_X, \nabla^g_Y]Z + R^S(X,Y)Z \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\{X(\theta(Y))Z - Y(\theta(X))Z - \theta([X,Y])Z \\
&\qquad\quad +\theta(Z)\nabla^g_X Y - \theta(Z)\nabla^g_Y X - \theta(Z)[X,Y] \\
&\qquad\quad +X(\theta(Z))Y - \theta(\nabla^g_X Z)Y + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(Z)Y - \frac{1}{2}g(X,Z)Y\theta(\theta^\sharp) \\
&\qquad\quad -Y(\theta(Z))X + \theta(\nabla^g_Y Z)X - \frac{1}{2}\theta(Y)\theta(Z)X + \frac{1}{2}g(Y,Z)X\theta(\theta^\sharp) \\
&\qquad\quad -X(g(Y,Z))\theta^\sharp + g(Y,\nabla^g_X Z)\theta^\sharp + Y(g(X,Z))\theta^\sharp - g(X,\nabla^g_Y Z)\theta^\sharp \\
&\qquad\quad +g([X,Y],Z)\theta^\sharp + \frac{1}{2}\theta(Y)g(Z,X)\theta^\sharp - \frac{1}{2}\theta(X)g(Z,Y)\theta^\sharp \\
&\qquad\quad -g(Y,Z)\nabla^g_X\theta^\sharp + g(X,Z)\nabla^g_Y\theta^\sharp\}
\end{aligned}
$$

pero como $T^{\nabla^g}(X,Y) = 0$ y $\nabla^g_X g(Y,Z) = 0 = \nabla^g_Y g(X,Z)$, y usando la expresión para $\nabla^g\theta$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&[\nabla^g_X, S_Y]Z + [S_X, \nabla^g_Y]Z + R^S(X,Y)Z \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\{d\theta(X,Y)Z \\
&\qquad\quad (\nabla^g_X\theta)(Z)Y + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(Z)Y - \frac{1}{2}g(X,Z)Y\theta(\theta^\sharp) \\
&\qquad\quad -(\nabla^g_Y\theta)(Z)X - \frac{1}{2}\theta(Y)\theta(Z)X + \frac{1}{2}g(Y,Z)X\theta(\theta^\sharp) \\
&\qquad\quad -g(\nabla^g_X Y,Z)\theta^\sharp + g(\nabla^g_Y X,Z)\theta^\sharp \\
&\qquad\quad +g([X,Y],Z)\theta^\sharp + \frac{1}{2}\theta(Y)g(Z,X)\theta^\sharp - \frac{1}{2}\theta(X)g(Z,Y)\theta^\sharp \\
&\qquad\quad -g(Y,Z)\nabla^g_X\theta^\sharp + g(X,Z)\nabla^g_Y\theta^\sharp\}
\end{aligned}
$$

o bien,

$$
\begin{aligned}
&[\nabla^g_X, S_Y]Z + [S_X, \nabla^g_Y]Z + R^S(X,Y)Z \\
&\quad = -\frac{1}{2}\{d\theta(X,Y)Z \\
&\qquad +\Big((\nabla^g_X\theta)Z + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(Z) - \frac{1}{2}g(X,Z)\theta(\theta^\sharp)\Big)Y - \frac{1}{2}\theta(X)g(Z,Y)\theta^\sharp + g(X,Z)\nabla^g_Y\theta^\sharp \\
&\qquad -\Big((\nabla^g_Y\theta)Z + \frac{1}{2}\theta(Y)\theta(Z) - \frac{1}{2}g(Y,Z)\theta(\theta^\sharp)\Big)X + \frac{1}{2}\theta(Y)g(Z,X)\theta^\sharp - g(Y,Z)\nabla^g_X\theta^\sharp\Big\}.
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

Entonces, como $R^{\nabla^W}(X,Y) = R^{\nabla^g}(X,Y) + [\nabla^g_X, S_Y] + [S_X, \nabla^g_Y] + R^S(X,Y)$, los cálculos anteriores comprueban el siguiente resultado:

Proposición B.2.1. Si ∇^W es una conexión de Weyl sobre la variedad Riemanniana (M,g), la curvatura de ∇^W y la curvatura de la conexión de Levi-Civita ∇^g se relacionan como sigue,

$$
\begin{aligned}
&R^{\nabla^W}(X,Y)Z \\
&= R^{\nabla^g}(X,Y)Z - \frac{1}{2}\Big\{d\theta(X,Y)Z \\
&\quad + \Big((\nabla^g_X\theta)Z + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(Z) - \frac{1}{2}g(X,Z)\theta(\theta^\sharp)\Big)Y + g(X,Z)\nabla^g_Y\theta^\sharp - \frac{1}{2}\theta(X)g(Z,Y)\theta^\sharp \\
&\quad - \Big((\nabla^g_Y\theta)Z + \frac{1}{2}\theta(Y)\theta(Z) - \frac{1}{2}g(Y,Z)\theta(\theta^\sharp)\Big)X - g(Y,Z)\nabla^g_X\theta^\sharp + \frac{1}{2}\theta(Y)g(Z,X)\theta^\sharp\Big\}.
\end{aligned}
$$

O bien, podemos reescribir la ecuación del resultado anterior como

$$R^{\nabla^W}(X,Y)Z = R^{\nabla^g}(X,Y)Z - \frac{1}{2}\left\{d\theta(X,Y)Z + \hat{T}(X,Z,Y) - \hat{T}(Y,Z,X)\right\}$$

donde $\hat{T}$ es el tensor

$$\hat{T} := \nabla^g\theta \otimes \mathrm{Id} + \frac{1}{2}\theta\otimes\theta\otimes\mathrm{Id} - \frac{1}{2}g\otimes\mathrm{Id}\otimes\theta(\theta^\sharp) - \frac{1}{2}\theta\otimes g\otimes\theta^\sharp + g\otimes\nabla^g\theta^\sharp.$$

Por otro lado, por mencionar algunas de las propiedades de la curvatura R^{∇^W}, tenemos que

$$R^{\nabla^W}(X,Y) = -R^{\nabla^W}(Y,X)$$

y por ser ∇^W simétrica y lineal sobre el haz tangente, satisface la identidad de Bianchi

$$R^{\nabla^W}(X,Y,Z) + R^{\nabla^W}(Y,Z,X) + R^{\nabla^W}(Z,X,Y) = 0$$

y también la segunda identidad de Bianchi

$$(\nabla^W_X R^{\nabla^W})(Y,Z)T + (\nabla^W_Z R^{\nabla^W})(X,Y)T + (\nabla^W_Y R^{\nabla^W})(Z,X)T = 0.$$

Finalmente presentamos la siguiente propiedad de la curvatura que nos servirá para analizar las simetrías del tensor de curvatura para una conexión de Weyl:

Lema B.2.2. Si ∇^W es una conexión de Weyl sobre la variedad Riemanniana (M,g), entonces

$$R^{\nabla^W}(X,Y)g = d\theta(X,Y)g$$

y en particular, de (A.15)

$$g(R^{\nabla^W}(X,Y)Z,T) = -g(R^{\nabla^W}(X,Y)T,Z) - d\theta(X,Y)g(Z,T).$$

Demostración. Si consideramos un par $Z, T \in \Gamma(TM)$ arbitrarios,

$$\begin{aligned}
(R^{\nabla^W}(X,Y)g)(Z,T) &= (\nabla^W_X \nabla^W_Y g)(Z,T) - (\nabla^W_Y \nabla^W_X g)(Z,T) - (\nabla^W_{[X,Y]} g)(Z,T) \\
&= X(\nabla^W_Y g(Z,T)) - \nabla^W_Y g(\nabla^W_X Z, T) - \nabla^W_Y g(Z, \nabla^W_X T) \\
&\quad -Y(\nabla^W_X g(Z,T)) + \nabla^W_X g(\nabla^W_Y Z, T) + \nabla^W_X g(Z, \nabla^W_Y T) \\
&\quad -(\nabla^W_{[X,Y]} g)(Z,T) \\
&= X(\theta(Y) g(Z,T)) - \theta(Y) g(\nabla^W_X Z, T) - \theta(Y) g(Z, \nabla^W_X T) \\
&\quad -Y(\theta(X) g(Z,T)) + \theta(X) g(\nabla^W_Y Z, T) + \theta(X) g(Z, \nabla^W_Y T) \\
&\quad -\theta([X,Y]) g(Z,T) \\
&= X(\theta(Y)) g(Z,T) + \theta(Y) X(g(Z,T)) \\
&\quad -Y(\theta(X)) g(Z,T) - \theta(X) Y(g(Z,T)) \\
&\quad -\theta(Y) \left\{ g(\nabla^W_X Z, T) + g(Z, \nabla^W_X T) \right\} \\
&\quad +\theta(X) \left\{ g(\nabla^W_Y Z, T) + g(Z, \nabla^W_Y T) \right\} \\
&\quad -\theta([X,Y]) g(Z,T) \\
&= d\theta(X,Y) g(Z,T) + \theta(Y) X(g(Z,T)) - \theta(X) Y(g(Z,T)) \\
&\quad -\theta(Y) \left\{ X(g(Z,T)) - (\nabla^W_X g)(Z,T) \right\} \\
&\quad +\theta(X) \left\{ Y(g(Z,T)) - (\nabla^W_Y g)(Z,T) \right\} \\
&= d\theta(X,Y) g(Z,T) + \theta(Y) (\nabla^W_X g)(Z,T) \\
&\quad -\theta(X) (\nabla^W_Y g)(Z,T) \\
&= d\theta(X,Y) g(Z,T) + \theta(Y)\theta(X) g(Z,T) \\
&\quad -\theta(X)\theta(Y) g(Z,T) \\
&= d\theta(X,Y) g(Z,T)
\end{aligned}$$

de modo, que efectivamente $R^{\nabla^W}(X,Y)$ es el múltiplo de la métrica g dado por $d\theta(X,Y)g$. Luego, de (A.15)

$$\begin{aligned}
g(R^{\nabla^W}(X,Y)Z,T) &= -g(R^{\nabla^W}(X,Y)T,Z) - (R^{\nabla^W}(X,Y)g)(Z,T) \\
&= -g(R^{\nabla^W}(X,Y)T,Z) - d\theta(X,Y) g(Z,T).
\end{aligned}$$

■

B.2.1. Propiedades del tensor de curvatura

El tensor de curvatura de una variedad de Weyl respecto a la métrica g, la cual proviene de una variedad Riemanniana (M,g) es el tensor

$$\underline{R}^{\nabla^W,g}(X,Y,Z,T) = g(R^{\nabla^W}(X,Y)Z,T).$$

En particular, por A.19

$$\underline{R}^{\nabla^W,g}(X,Y,Z,T) = \underline{R}^{\nabla^g}(X,Y,Z,T) + g([\nabla_X, S_Y]Z + [S_X \nabla_Y]Z + R^S(X,Y)Z\ ,\ T)$$

donde por B.4 el último término del lado derecho es

$$
\begin{aligned}
&g([\nabla_X, S_Y]Z + [S_X \nabla_Y]Z + R^S(X,Y)Z\,,\,T) \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\{d\theta(X,Y)g(Z,T) \\
&\qquad\quad +\Big((\nabla^g_X\theta)Z + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(Z) - \frac{1}{2}g(X,Z)\theta(\theta^\sharp)\Big)g(Y,T) \\
&\qquad\quad -\frac{1}{2}\theta(X)g(Z,Y)g(\theta^\sharp,T) + g(X,Z)g(\nabla^g_Y\theta^\sharp,T) \\
&\qquad\quad -\Big((\nabla^g_Y\theta)Z + \frac{1}{2}\theta(Y)\theta(Z) - \frac{1}{2}g(Y,Z)\theta(\theta^\sharp)\Big)g(X,T) \\
&\qquad\quad +\frac{1}{2}\theta(Y)g(Z,X)g(\theta^\sharp,T) - g(Y,Z)g(\nabla^g_X\theta^\sharp,T)\Big\}
\end{aligned}
$$

o bien, como $g(\theta^\sharp,T) = \theta(T)$, y por ser $\nabla^g g = 0$, para todo $A \in \Gamma(TM)$

$$
\begin{aligned}
g(\nabla^g_A\theta^\sharp,T) &= A(g(\theta^\sharp,T)) - g(\theta^\sharp,\nabla^g_A T) \\
&= A(\theta(T)) - \theta(\nabla^g_A T) \\
&= (\nabla^g_A\theta)T
\end{aligned} \tag{B.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&g([\nabla_X, S_Y]Z + [S_X \nabla_Y]Z + R^S(X,Y)Z\,,\,T) \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\{d\theta(X,Y)g(Z,T) \\
&\qquad\quad +\Big((\nabla^g_X\theta)Z + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(Z) - \frac{1}{2}g(X,Z)\theta(\theta^\sharp)\Big)g(Y,T) \\
&\qquad\quad -\frac{1}{2}\theta(X)g(Z,Y)\theta(T) + g(X,Z)(\nabla^g_Y\theta)T \\
&\qquad\quad -\Big((\nabla^g_Y\theta)Z + \frac{1}{2}\theta(Y)\theta(Z) - \frac{1}{2}g(Y,Z)\theta(\theta^\sharp)\Big)g(X,T) \\
&\qquad\quad +\frac{1}{2}\theta(Y)g(Z,X)\theta(T) - g(Y,Z)(\nabla^g_X\theta)T\Big\}
\end{aligned}
$$

y reacomodando términos

$$
\begin{aligned}
&g([\nabla_X, S_Y]Z + [S_X \nabla_Y]Z + R^S(X,Y)Z\,,\,T) \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\{d\theta(X,Y)g(Z,T) \\
&\qquad\quad +\Big((\nabla^g_X\theta)Z + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(Z) - \frac{1}{2}g(X,Z)\theta(\theta^\sharp)\Big)g(Y,T) \\
&\qquad\quad -\Big((\nabla^g_Y\theta)Z + \frac{1}{2}\theta(Y)\theta(Z) - \frac{1}{2}g(Y,Z)\theta(\theta^\sharp)\Big)g(X,T) \\
&\qquad\quad -\Big((\nabla^g_X\theta)T + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(T)\Big)g(Z,Y) \\
&\qquad\quad +\Big((\nabla^g_Y\theta)T + \frac{1}{2}\theta(Y)\theta(T)\Big)g(X,Z)\Big\},
\end{aligned}
$$

y así, como

$$
\underline{R}^{\nabla^W,g}(X,Y,Z,T) = \underline{R}^{\nabla^g}(X,Y,Z,T) + g([\nabla_X, S_Y]Z + [S_X \nabla_Y]Z + R^S(X,Y)Z\,,\,T)
$$

el tensor de curvatura respecto a ∇^W tiene la forma que se presenta en el siguiente resultado:

Proposición B.2.3. Sea ∇^W una conexión de Weyl sobre la variedad Riemanniana (M,g). Entonces el tensor de curvatura de ∇^W respecto a g, y el de la conexión de Levi-Civita ∇^g se relacionan de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,Z,T)\\
&\qquad = \underline{R}^{\nabla^g}(X,Y,Z,T)\\
&\qquad\quad -\frac{1}{2}\left\{d\theta(X,Y)g(Z,T)\right.\\
&\qquad\quad +\left((\nabla^g_X\theta)Z+\frac{1}{2}\theta(X)\theta(Z)-\frac{1}{2}g(X,Z)\theta(\theta^\sharp)\right)g(Y,T)\\
&\qquad\quad -\left((\nabla^g_Y\theta)Z+\frac{1}{2}\theta(Y)\theta(Z)-\frac{1}{2}g(Y,Z)\theta(\theta^\sharp)\right)g(X,T)\\
&\qquad\quad -\left((\nabla^g_X\theta)T+\frac{1}{2}\theta(X)\theta(T)\right)g(Z,Y)\\
&\qquad\quad \left.+\left((\nabla^g_Y\theta)T+\frac{1}{2}\theta(Y)\theta(T)\right)g(X,Z)\right\}. \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}
$$

Resumiremos ahora las propiedades del tensor de curvatura para el caso especial de una conexión de Weyl sobre una variedad Riemanniana. Es de esperar analogías con el caso Riemanniano y simpléctico de aquellas propiedades que dependen sólo de la simetría de una conexión, mas no las que dependen de la compatibilidad con la métrica o la forma simpléctica.

En particular, observemos la analogía de las propiedades de simetría del tensor de curvatura $\underline{R}^{\nabla^g}$ para la conexión de Levi-Civita de una variedad Riemanniana, con el tensor de curvatura $\underline{R}^{\nabla^W}$ para conexiones de Weyl cuya 1-forma θ es cerrada:

Proposición B.2.4. Para una variedad Riemanniana (M,g) con una conexión de Weyl de la forma $\nabla^W = \theta\otimes g$,

(i) $\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,Z,T)+\underline{R}^{\nabla^W}(Y,Z,X,T)+\underline{R}^{\nabla^W}(Z,X,Y,T)=0$

(ii) $\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,Z,T)=-\underline{R}^{\nabla^W}(Y,X,Z,T)$

(iii) $\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,Z,T)=-\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,T,Z)-d\theta(X,Y)g(Z,T)$

(iv) $\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,Z,T)$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{R}^{\nabla^W}(Z,T,X,Y)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}-d\theta(Z,X)g(T,Y)-d\theta(X,T)g(Y,Z)+d\theta(X,Y)g(T,Z)\\ -d\theta(T,Y)g(Z,X)+d\theta(T,Z)g(Y,X)-d\theta(Y,Z)g(T,X)\end{matrix}\right\}
\end{aligned}
$$

Concluímos que el tensor de curvatura para una conexión de Weyl tiene las mismas (anti)simetrías que el tensor de curvatura correspondiente a la conexión de Levi-Civita, si y sólo si θ es cerrada.

Demostración.

(i) Se sigue directamente de la primera identidad de Bianchi que satisface ∇^W que es simétrica.

(ii) Se sigue del hecho de que el operador R^∇ es antisimétrico en sus primeras dos componentes para toda conexión ∇.

(iii) Se deduce directamente del Lema B.2.2. pues

$$\begin{aligned}
\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,Z,T) &= g(R^{\nabla^W}(X,Y)Z,T)\\
&= -g(R^{\nabla^W}(X,Y)T,Z) - d\theta(X,Y)g(Z,T)\\
&= \underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,T,Z) - d\theta(X,Y)g(Z,T).
\end{aligned}$$

(iv) Aplicando (i) repetidas veces obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned}
\underline{R}^{\nabla^W}(Y,Z,X,T) + \underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,Z,T) + \underline{R}^{\nabla^W}(Z,X,Y,T) &= 0\\
\underline{R}^{\nabla^W}(Z,X,T,Y) + \underline{R}^{\nabla^W}(T,Z,X,Y) + \underline{R}^{\nabla^W}(X,T,Z,Y) &= 0\\
\underline{R}^{\nabla^W}(X,T,Y,Z) + \underline{R}^{\nabla^W}(Y,X,T,Z) + \underline{R}^{\nabla^W}(T,Y,X,Z) &= 0\\
\underline{R}^{\nabla^W}(T,Y,Z,X) + \underline{R}^{\nabla^W}(Z,T,Y,X) + \underline{R}^{\nabla^W}(Y,Z,T,X) &= 0,
\end{aligned}$$

pero por (iii) la segunda de ellas es quivalente a

$$\begin{aligned}
&-\underline{R}^{\nabla^W}(Z,X,Y,T) - d\theta(Z,X)g(T,Y) + \underline{R}^{\nabla^W}(T,Z,X,Y)\\
&+\underline{R}^{\nabla^W}(X,T,Z,Y) = 0
\end{aligned}$$

y por (ii) y (iii) la tercera es equivalente a

$$\begin{aligned}
- &\quad \underline{R}^{\nabla^W}(X,T,Z,Y) - d\theta(X,T)g(Y,Z) + \underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,Z,T)\\
+ &\quad d\theta(X,Y)g(T,Z) + \underline{R}^{\nabla^W}(T,Y,X,Z) = 0
\end{aligned}$$

y la cuarta equivalente a

$$\begin{aligned}
&-\underline{R}^{\nabla^W}(T,Y,X,Z) - d\theta(T,Y)g(Z,X) + \underline{R}^{\nabla^W}(T,Z,X,Y)\\
&+d\theta(T,Z)g(Y,X) - \underline{R}^{\nabla^W}(Y,Z,X,T) - d\theta(Y,Z)g(T,X) = 0,
\end{aligned}$$

y entonces, sumando las cuatro ecuaciones, podemos cancelar varios términos hasta obtener que

$$\begin{aligned}
&2\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,Z,T) + 2\underline{R}^{\nabla^W}(T,Z,X,Y)\\
&\qquad = d\theta(Z,X)g(T,Y) + d\theta(X,T)g(Y,Z) - d\theta(X,Y)g(T,Z)\\
&\qquad\quad +d\theta(T,Y)g(Z,X) - d\theta(T,Z)g(Y,X) + d\theta(Y,Z)g(T,X)
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}
&\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,Z,T)\\
&\qquad = \underline{R}^{\nabla^W}(Z,T,X,Y)\\
&\qquad\quad -\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}-d\theta(Z,X)g(T,Y) - d\theta(X,T)g(Y,Z) + d\theta(X,Y)g(T,Z)\\ -d\theta(T,Y)g(Z,X) + d\theta(T,Z)g(Y,X) - d\theta(Y,Z)g(T,X)\end{matrix}\right\}
\end{aligned}$$

■

B.3. El tensor de Ricci en una variedad de Weyl

Sea (M,g) una variedad Riemanniana con una conexión de Weyl tal que $\nabla^W g = \theta \otimes g$. Si consideramos la curvatura R^{∇^W} de ∇^W, que es en particular un (3,1)-tensor, tenemos las siguientes tres formas de obtener un endomorfismo de $\Gamma(TM)$ en $\Gamma(TM)$ fijando dos de sus entradas:

1. $R^{\nabla^W}(\cdot,X)Y : Z \mapsto R^{\nabla^W}(Z,X)Y$
2. $R^{\nabla^W}(X,\cdot)Y : Z \mapsto R^{\nabla^W}(X,Z)Y$
3. $R^{\nabla^W}(X,Y)\cdot : Z \mapsto R^{\nabla^W}(X,Y)Z$

Si analizamos la traza de estos endomorfismos, primero podemos notar que los primeros dos morfismos están relacionados por $R^{\nabla^W}(\cdot,X)Y = -R^{\nabla^W}(X,\cdot)Y$ y entonces también sus trazas están relacionadas como

$$\mathrm{Tr}\,(R^{\nabla^W}(\cdot,X)Y) = -\mathrm{Tr}\,(R^{\nabla^W}(X,\cdot)Y).$$

Por otro lado, si consideremos $\{X_i\}_{i=1}^n$ una base local g-ortonormal para $\Gamma(TM)$, como $\{g(X_i,\cdot)\}_{i=1}^n$ es la base local dual a $\{X_i\}$, tenemos que para el tercer morfismo $R^{\nabla^W}(X,Y)\cdot :$ $Z \mapsto R(X,Y)Z$, por la simetría de g,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(R^{\nabla^W}(X,Y)\cdot) &= \sum_{i=1}^n g(X_i, R^{\nabla^W}(X,Y)X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n g(R^{\nabla^W}(X,Y)X_i, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,X_i,X_i)
\end{aligned}$$

pero por la propiedad (iii) de $\underline{R}^{\nabla^W}$ en la proposición (B.2.4) para cada $i = 1,\dots,n$

$$\begin{aligned}
\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,X_i,X_i) &= -\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,X_i,X_i) - d\theta(X,Y)g(X_i,X_i) \\
&= -\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,X_i,X_i) - d\theta(X,Y)
\end{aligned}$$

por lo que $2\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,X_i,X_i) = -d\theta(X,Y)$, o bien

$$\underline{R}^{\nabla^W}(X,Y,X_i,X_i) = -\frac{1}{2}d\theta(X,Y)$$

y por lo tanto la traza del tercer morfismo es

$$\mathrm{Tr}\,(R^{\nabla^W}(X,Y)\cdot) = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}d\theta(X,Y) = -\frac{n}{2}d\theta(X,Y)$$

que depende sólo de θ, de modo que no proporciona información acerca de la geometría de la variedad. Debido a estos argumentos es que se define el tensor de Ricci en términos del primer morfismo, esto es: el tensor de Ricci de la variedad Riemanniana (M,g) respecto a la conexión de Weyl ∇^W es el 2-tensor

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y) := \mathrm{Tr}\,(R^{\nabla^W}(\cdot,X)Y).$$

En particular en una base local $\{X_i\}_{i=1}^n$ de $\Gamma(TM)$ que es g-ortonormal,

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y) = \sum_{i=1}^n g(X_i, R^{\nabla^W}(X_i,X)Y) = \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^W}(X_i,X,Y,X_i).$$

A diferencia del caso Riemanniano o del caso simpléctico, en general Ric^{∇^W} no es un tensor simétrico: en efecto, debido a las propiedades de (anti)simetría del tensor de curvatura $\underline{R}^{\nabla^W}$ presentadas en la Proposición B.2.4, tenemos que si $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una base local de $\Gamma(TM)$, usando (iii), (ii) y (iv) de la Proposición B.2.4,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y) &= \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^W}(X_i,X,Y,X_i)\\
&= \sum_{i=1}^n \Big[-\underline{R}^{\nabla^W}(X_i,X,X_i,Y) - d\theta(X_i,X)g(Y,X_i)\Big]\\
&= \sum_{i=1}^n \Big[\underline{R}^{\nabla^W}(X,X_i,X_i,Y) - d\theta(X_i,X)g(Y,X_i)\Big]\\
&= \sum_{i=1}^n \Big[\underline{R}^{\nabla^W}(X_i,Y,X,X_i)\\
&\quad -\frac{1}{2}\{-d\theta(X_i,X)g(Y,X_i) - d\theta(X,Y)g(X_i,X_i) + d\theta(X,X_i)g(Y,X_i)\\
&\quad -d\theta(Y,X_i)g(X_i,X) + d\theta(Y,X_i)g(X_i,X) - d\theta(X_i,X_i)g(Y,X)\}\\
&\quad -d\theta(X_i,X)g(Y,X_i)]\\
&= \sum_{i=1}^n \Big[\underline{R}^{\nabla^W}(X_i,Y,X,X_i)\\
&\quad -\frac{1}{2}\{-2d\theta(X_i,X)g(Y,X_i) - d\theta(X,Y)g(X_i,X_i)\}\\
&\quad -d\theta(X_i,X)g(Y,X_i)]\\
&= \sum_{i=1}^n \Big[\underline{R}^{\nabla^W}(X_i,Y,X,X_i) + \frac{1}{2}d\theta(X,Y)\Big]\\
&= \mathrm{Ric}^{\nabla^W}(Y,X) + \frac{n}{2}d\theta(X,Y)
\end{aligned}$$

y así tenemos el siguiente resultado

Proposición B.3.1. Si (M,g) es una variedad Riemanniana con ∇^W conexión de Weyl

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y) = \mathrm{Ric}^{\nabla^W}(Y,X) + \frac{n}{2}d\theta(X,Y)$$

y por lo tanto Ric^{∇^W} es simétrico si y sólo si θ es cerrada.

Veamos ahora cómo se relaciona Ric^{∇^W} con Ric^{∇^g}.

Proposición B.3.2. Si $\nabla^W = \theta \otimes g$ es una conexión de Weyl sobre la variedad Riemanniana (M,g), entonces el tensor de Ricci asociado a ∇^W se puede expresar en una base

g-ortonormal $\{X_i\}_{i=1}^n$ como

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y) &= \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y) + \frac{n}{2}\left((\nabla^g_X\theta)Y + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(Y) - \frac{1}{2}g(X,Y)\theta(\theta^\sharp)\right)\\
&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left\{\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X)\right)g(Y,X_i)\right.\\
&+\left((\nabla^g_{X_i}\theta)Y + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(Y) - \frac{1}{2}g(X_i,Y)\theta(\theta^\sharp)\right)g(X,X_i)\\
&\left.-\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X_i + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X_i)\right)g(Y,X)\right\}
\end{aligned}$$

donde Ric^{∇^g} es el tensor de Ricci asociado a la conexión de Levi-Civita.

Demostración. Sabemos que en la base de campos vectoriales $\{X_i\}$ g-ortonormal

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y) = \sum_{i=1}^n \underline{R}^{\nabla^W}(X_i,X,Y,X_i)$$

pero, por la relación (B.6) tenemos que para cada $i = 1,...,n$

$$\begin{aligned}
\underline{R}^{\nabla^W}(X_i,X,Y,X_i) &= \underline{R}^{\nabla^g}(X_i,X,Y,X_i)\\
&-\frac{1}{2}\left\{d\theta(X_i,X)g(Y,X_i)\right.\\
&+\left((\nabla^g_{X_i}\theta)Y + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(Y) - \frac{1}{2}g(X_i,Y)\theta(\theta^\sharp)\right)g(X,X_i)\\
&-\left((\nabla^g_{X}\theta)Y + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(Y) - \frac{1}{2}g(X,Y)\theta(\theta^\sharp)\right)g(X_i,X_i)\\
&-\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X_i + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X_i)\right)g(Y,X)\\
&\left.+\left((\nabla^g_{X}\theta)X_i + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(X_i)\right)g(X_i,Y)\right\}\\
&= \underline{R}^{\nabla^g}(X_i,X,Y,X_i)\\
&-\frac{1}{2}\left\{\left(d\theta(X_i,X) + (\nabla^g_{X}\theta)X_i + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(X_i)\right)g(Y,X_i)\right.\\
&+\left((\nabla^g_{X_i}\theta)Y + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(Y) - \frac{1}{2}g(X_i,Y)\theta(\theta^\sharp)\right)g(X,X_i)\\
&-\left((\nabla^g_{X}\theta)Y + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(Y) - \frac{1}{2}g(X,Y)\theta(\theta^\sharp)\right)g(X_i,X_i)\\
&\left.-\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X_i + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X_i)\right)g(Y,X)\right\}
\end{aligned}$$

y como para todo par $A,B \in \Gamma(TM)$ se cumple que

$$d\theta(A,B) = (\nabla^g_A\theta)B - (\nabla^g_B\theta)A$$

y tenemos además que $\{X_i\}$ es g-ortonormal, entonces

$$\begin{aligned}
\underline{R}^{\nabla^W}(X_i,X,Y,X_i) &= \underline{R}^{\nabla^g}(X_i,X,Y,X_i) \\
&-\frac{1}{2}\Big\{\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)X+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X)\Big)g(Y,X_i) \\
&+\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)Y+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(Y)-\frac{1}{2}g(X_i,Y)\theta(\theta^\sharp)\Big)g(X,X_i) \\
&-\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)X_i+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X_i)\Big)g(Y,X)\Big\} \\
&+\frac{1}{2}\Big((\nabla^g_X\theta)Y+\frac{1}{2}\theta(X)\theta(Y)-\frac{1}{2}g(X,Y)\theta(\theta^\sharp)\Big)
\end{aligned}$$

y por lo tanto, sumando para cada $i=1,...,n$ en ambos lados de la ecuación,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y) &= \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y)+\frac{n}{2}\Big((\nabla^g_X\theta)Y+\frac{1}{2}\theta(X)\theta(Y)-\frac{1}{2}g(X,Y)\theta(\theta^\sharp)\Big) \\
&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big\{\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)X+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X)\Big)g(Y,X_i) \\
&+\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)Y+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(Y)-\frac{1}{2}g(X_i,Y)\theta(\theta^\sharp)\Big)g(X,X_i) \\
&-\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)X_i+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X_i)\Big)g(Y,X)\Big\}.
\end{aligned}$$

■

En particular usando la expresión del tensor Ric^{∇^W} dada en la proposición anterior, calcularemos las partes antisimétrica y simétrica de dicho tensor. Por un lado, la parte antisimétrica es

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\Big\{\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y)-\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(Y,X)\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y)+\frac{n}{2}\Big((\nabla^g_X\theta)Y+\frac{1}{2}\theta(X)\theta(Y)-\frac{1}{2}g(X,Y)\theta(\theta^\sharp)\Big) \\
&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big\{\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)X+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X)\Big)g(Y,X_i) \\
&+\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)Y+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(Y)-\frac{1}{2}g(X_i,Y)\theta(\theta^\sharp)\Big)g(X,X_i) \\
&-\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)X_i+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X_i)\Big)g(Y,X)\Big\} \\
&-\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(Y,X)-\frac{n}{2}\Big((\nabla^g_Y\theta)X+\frac{1}{2}\theta(Y)\theta(X)-\frac{1}{2}g(Y,X)\theta(\theta^\sharp)\Big) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big\{\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)Y+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(Y)\Big)g(X,X_i) \\
&+\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)X+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X)-\frac{1}{2}g(X_i,X)\theta(\theta^\sharp)\Big)g(Y,X_i) \\
&-\Big((\nabla^g_{X_i}\theta)X_i+\frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X_i)\Big)g(X,Y)\Big\}\Big]
\end{aligned}$$

luego, podemos cancelar varios términos en la expresión anterior para obtener que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Big\{\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y)-\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(Y,X)\Big\} &= \frac{1}{2}\big[\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y)-\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(Y,X)\big] \\
&+\frac{n}{4}\big[(\nabla^g_X\theta)Y-(\nabla^g_Y\theta)X\big]
\end{aligned}$$

pero al ser Ric^{∇^g} simétrico, su parte antisimétrica es cero, y además como $(\nabla^g_X\theta)Y - (\nabla^g_Y\theta)X = d\theta(X,Y)$, concluimos que

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y) - \mathrm{Ric}^{\nabla^W}(Y,X)\right\} = \frac{n}{4}d\theta(X,Y),$$

esto es, la parte antisimétrica de Ric^{∇^W} es $\frac{n}{4}d\theta$.

Por otro lado, la parte simétrica de Ric^{∇^W} es

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y) + \mathrm{Ric}^{\nabla^W}(Y,X)\right\}\\
&= \mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,Y) - \frac{n}{4}d\theta(X,Y)\\
&= \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y) + \frac{n}{2}(\nabla^g_X\theta)Y + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\theta(X)\theta(Y) - \frac{1}{2}g(X,Y)\theta(\theta^\sharp)\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left\{\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X)\right)g(Y,X_i)\right.\\
&\quad +\left((\nabla^g_{X_i}\theta)Y + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(Y) - \frac{1}{2}g(X_i,Y)\theta(\theta^\sharp)\right)g(X,X_i)\\
&\quad \left. -\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X_i + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X_i)\right)g(Y,X)\right\}\\
&\quad -\frac{n}{4}\left\{(\nabla^g_X\theta)Y - (\nabla^g_Y\theta)X\right\}\\
&= \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y) + \frac{n}{4}\left\{(\nabla^g_X\theta)Y + (\nabla^g_Y\theta)X + \theta(X)\theta(Y) - g(X,Y)\theta(\theta^\sharp)\right\}\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left\{\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X)\right)g(Y,X_i)\right.\\
&\quad +\left((\nabla^g_{X_i}\theta)Y + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(Y) - \frac{1}{2}g(X_i,Y)\theta(\theta^\sharp)\right)g(X,X_i)\\
&\quad \left. -\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X_i + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X_i)\right)g(Y,X)\right\}.
\end{aligned}$$

En particular, si $X = Y$ la parte simétrica del tensor Ric^{∇^W} es

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,X)\\
&= \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,X) + \frac{n}{2}\left((\nabla^g_X\theta)X + \frac{1}{2}\theta(X)\theta(X) - \frac{1}{2}g(X,X)\theta(\theta^\sharp)\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left\{\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X)\right)g(X,X_i)\right.\\
&\quad +\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X) - \frac{1}{2}g(X_i,X)\theta(\theta^\sharp)\right)g(X,X_i)\\
&\quad \left. -\left((\nabla^g_{X_i}\theta)X_i + \frac{1}{2}\theta(X_i)\theta(X_i)\right)g(X,X)\right\}
\end{aligned}$$

y por la $\mathcal{C}^\infty$-linealidad de ∇^g en su primer argumento, y la de θ, tenemos que

$\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,X)$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,X) + \frac{n}{2}(\nabla^g_X\theta)X + \frac{n}{4}\theta(X)^2 - \frac{n}{4}g(X,X)\theta(\theta^\sharp)\\
&-\frac{1}{2}\left(\nabla^g_{\sum_{i=1}^n g(X,X_i)X_i}\theta\right)X - \frac{1}{4}\theta\left(\sum_{i=1}^n g(X,X_i)X_i\right)\theta(X)\\
&-\frac{1}{2}\left(\nabla^g_{\sum_{i=1}^n g(X,X_i)X_i}\theta\right)X - \frac{1}{4}\theta\left(\sum_{i=1}^n g(X,X_i)X_i\right)\theta(X) + \frac{1}{4}\theta(\theta^\sharp)\sum_{i=1}^n g(X_i,X)^2\\
&+\frac{1}{2}g(X,X)\sum_{i=1}^n(\nabla^g_{X_i}\theta)X_i + \frac{1}{4}g(X,X)\sum_{i=1}^n\theta(X_i)\theta(X_i)\Bigg\}
\end{aligned}$$

pero al ser $\{X_i\}_{i=1}^n$ una base g-ortonormal,

$$X = \sum_{i=1}^n g(X,X_i)X_i \quad \text{y} \quad \|X\|^2 = \sum_{i=1}^n g(X,X_i)^2 = g(X,X);$$

luego, considerando en $\Omega^1(M)$ la métrica inducida por g mediante el isomorfismo $g^\flat$, esto es, tal que $\|\theta\|^2 = g(\theta,\theta) := g(\theta^\sharp,\theta^\sharp)$ tenemos en particular que

$$\|\theta\|^2 = g(\theta^\sharp,\theta^\sharp) = \theta(\theta^\sharp);$$

y además, se cumple que

$$\sum_{i=1}^n \theta(X_i)\theta(X_i) \;=\; \|\theta\|^2 \quad \text{y} \quad d^*\theta = \sum_{i=1}^n(\nabla_{X_i}\theta)X_i \tag{B.7}$$

donde $d^*\theta := \mathrm{div}(\theta^\sharp) = \mathrm{Tr}(Z\to\nabla^g_Z\theta)$ es la cofrontera de θ, pues

$$\sum_{i=1}^n\theta(X_i)\theta(X_i) = \theta(\sum_{i=1}^n\theta(X_i)X_i) = \theta(\sum_{i=1}^n g(X_i,\theta^\sharp)X_i) = \theta(\theta^\sharp) = \|\theta\|^2$$

y

$$d^*\theta = \mathrm{Tr}(Z\to\nabla^g_Z\theta) = \sum_{i=1}^n g(X_i,\nabla^g_{X_i}\theta^\sharp) = \sum_{i=1}^n(\nabla^g_{X_i}\theta)X_i$$

donde hemos utilizado la ecuación (B.5) en la última igualdad.

Así, de las relaciones anteriores concluímos que

$\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,X)$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,X) + \frac{n}{2}(\nabla^g_X\theta)X + \frac{n}{4}\theta(X)^2 - \frac{n}{4}\|X\|^2\|\theta\|^2\\
&-\frac{1}{2}\left(\nabla^g_X\theta\right)X - \frac{1}{4}\theta\left(X\right)^2\\
&-\frac{1}{2}\left(\nabla^g_X\theta\right)X - \frac{1}{4}\theta\left(X\right)^2 + \frac{1}{4}\|X\|^2\|\theta\|^2\\
&+\frac{1}{2}\|X\|^2 d^*\theta + \frac{1}{4}\|X\|^2\|\theta\|^2\\
&= \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,X) + \frac{n-2}{2}(\nabla^g_X\theta)X + \frac{n-2}{4}\theta(X)^2 - \frac{n-2}{4}\|X\|^2\|\theta\|^2\\
&+\frac{1}{2}\|X\|^2 d^*\theta
\end{aligned}$$

o bien,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X,X)\\
&\quad = \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,X) + \frac{n-2}{2}(\nabla^g_X\theta)X - \frac{n-2}{4}(\|X\|^2\|\theta\|^2 - \theta(X)^2) + \frac{1}{2}\|X\|^2 d^*\theta
\end{aligned} \tag{B.8}
$$

B.3.1. Curvatura escalar en variedades de Weyl

La curvatura escalar de una variedad Riemanniana (M,g) respecto a la conexión de Weyl ∇^W es la función

$$\mathrm{Scal}^{\nabla^W}(M,g) := \mathrm{Tr}\,(g^\sharp \circ (\mathrm{Ric}^{\nabla^W})^\flat)$$

Si $\{X_i\}$ es una base local de $\Gamma(TM)$ que es g-ortonormal, como $\{g(X_i,\cdot)\}$ es su base dual,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Scal}^{\nabla^W}(M,g) &= \mathrm{Tr}\,(g^\sharp \circ (\mathrm{Ric}^{\nabla^W})^\flat)\\
&= \sum_{i=1}^n g(X_i, g^\sharp \circ (\mathrm{Ric}^{\nabla^W})^\flat(X_i,\cdot))\\
&= \sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}^{\nabla^W}(X_i,X_i)
\end{aligned}
$$

y entonces, por (B.8) y (B.7)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Scal}^{\nabla^W}(M,g) &= \sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X_i,X_i) + \frac{n-2}{2}\sum_{i=1}^n(\nabla^g_{X_i}\theta)X_i\\
&\quad -\frac{n-2}{4}\|\theta\|^2\sum_{i=1}^n\|X_i\|^2 + \frac{n-2}{4}\sum_{i=1}^n\theta(X_i)^2 + \frac{1}{2}d^*\theta\sum_{i=1}^n\|X_i\|^2\\
&= \mathrm{Scal}^g(M,g) + \frac{n-2}{2}d^*\theta\\
&\quad -\frac{n(n-2)}{4}\|\theta\|^2 + \frac{n-2}{4}\|\theta\|^2 + \frac{n}{2}d^*\theta\\
&= \mathrm{Scal}^g(M,g) + \frac{n-2}{2}d^*\theta\\
&\quad -\frac{n(n-2)}{4}\|\theta\|^2 + \frac{n-2}{4}\|\theta\|^2 + \frac{n}{2}d^*\theta\\
&= \mathrm{Scal}^g(M,g) + (n-1)d^*\theta + \frac{(-n+1)(n-2)}{4}\|\theta\|^2
\end{aligned}
$$

esto es,

$$\mathrm{Scal}^{\nabla^W}(M,g) = \mathrm{Scal}^g(M,g) + (n-1)d^*\theta - \frac{(n-1)(n-2)}{4}\|\theta\|^2. \tag{B.9}$$

B.4. El espaciotiempo de Schwarzschild

Consideremos como nuestra variedad M el espaciotiempo globalmente hiperbólico de Schwarzschild. Topológicamente (y también como variedades isométricas), $M = I \times \mathsf{R}^3$ con

$I \subset \mathsf{R}$ un intervalo abierto. En las coordenadas de Kruskal-Szekeres (T, X, θ, φ), M está descrito por la métrica

$$g = -\frac{32G^3m^3}{r}e^{-\frac{r}{2Gm}}dT^2 + \frac{32G^3m^3}{r}e^{-\frac{r}{2Gm}}dX^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\varphi^2$$

donde $\theta \in (0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi)$, G es la constante de Newton, la constante m representa físicamente la masa de un agujero negro estático, y $r \in \mathsf{R}^+$ está definido por $X^2 - T^2 = (\frac{r}{2Gm} - 1)e^{\frac{r}{2Gm}}$. Una expresión equivalente es

$$g = -\frac{4r_s^3}{r}e^{-\frac{r}{r_s}}dT^2 + \frac{4r_s^3}{r}e^{-\frac{r}{r_s}}dX^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\varphi^2$$

donde $r_s = 2GM/c^2$ es el llamado ***radio de Schwarzschild***, y donde estamos considerando la velocidad de la luz como $c = 1$. Entonces, matricialmente, g toma la forma

$$g = \begin{pmatrix} -\frac{4r_s^3}{r}e^{-\frac{r}{r_s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4r_s^3}{r}e^{-\frac{r}{r_s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

siendo la base de campos vectoriales $\{\frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\}$ g-ortogonal.

Para calcular la curvatura escalar del espaciotiempo, del Teorema (A.7.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Scal}(M,g) &= -\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T}\right) + \frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X}\right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \end{aligned} \tag{B.10}$$

luego, usando la Proposición (A.6.2), dichas componentes del tensor de Ricci quedan expresadas como

$$\begin{aligned} \text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T}\right) &= -\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T}\right) + \frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial X}\right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X}\right) &= -\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial T}\right) + \frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X}\right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= -\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial T}\right) + \frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial X}\right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) &= -\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\,\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial T}\right)+\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\,\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial X}\right)\\ &\quad+\frac{1}{r^2}\,\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\,\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\end{aligned}$$

donde, por la antisimetría en las primeras dos componentes de $\underline{R}^g$,

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial T}\right)=0=\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X}\right)$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=0=\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

y por otro lado, por definición del tensor de curvatura de las propiedades de anti/simetría establecidas en la Proposición (A.5.1),

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial X}\right)=g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial X}\right)=\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial T}\right),$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial T}\right),$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial T}\right),$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial X}\right),$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial X}\right),$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

así que basta calcular

$$R\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{\partial}{\partial T} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial T}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial T}-\nabla_0\frac{\partial}{\partial T}$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{\partial}{\partial T} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial T}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial T}-\nabla_0\frac{\partial}{\partial T}$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{\partial}{\partial T} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial T}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial T}-\nabla_0\frac{\partial}{\partial T}$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial X} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial X}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial X}-\nabla_0\frac{\partial}{\partial X}$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial X} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial X} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial X} - \nabla_0\frac{\partial}{\partial X}$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial\theta} - \nabla_0\frac{\partial}{\partial\theta}$$

esto es, el problema de calcular la curvatura escalar del espacio tiempo, se reduce finalmente al del cálculo de los 12 campos vectoriales $\nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial T}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial T}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial T}, ..., \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial\theta}$ involucrados en las ecuaciones anteriores.

Una serie de largos, tediosos y elementales cálculos conduce a las siguientes expresiones:

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial X}\right) = g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial X}\right) = g\left(-\frac{4r_s^4}{r^4}e^{-\frac{r}{r_s}}\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X}\right) = -16\frac{r_s^7}{r^5}e^{-\frac{2r}{r_s}}$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = g\left(\frac{2r_s^4}{r^4}e^{-\frac{r}{r_s}}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = 2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = g\left(\frac{2r_s^4}{r^4}e^{-\frac{r}{r_s}}\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = 2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = g\left(-\frac{2r_s^4}{r^4}e^{-\frac{r}{r_s}}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = -2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = g\left(-\frac{2r_s^4}{r^4}e^{-\frac{r}{r_s}}\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = -2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\underline{R}^g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = g\left(\frac{r_s}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = r_s r\operatorname{sen}^2\theta.$$

Usando las ecuaciones precedentes, es inmediato calcular las componentes del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial T},\frac{\partial}{\partial T}\right) &= -\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}(0) + \frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\left[-16\frac{r_s^7}{r^5}e^{-\frac{2r}{r_s}}\right] \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\left[2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}\right] + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\left[2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}\operatorname{sen}^2\theta\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial X}\right) &= -\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\left[-16\frac{r_s^7}{r^5}e^{-\frac{2r}{r_s}}\right] + \frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}(0) \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\left[-2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}\right] + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\left[-2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}\operatorname{sen}^2\theta\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta}\right) &= -\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\left[2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}\right] + \frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\left[-2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}\right] \\ &\quad + \frac{1}{r^2}(0) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\left[r_s r\operatorname{sen}^2\theta\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) &= -\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\left[2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}\operatorname{sen}^2\theta\right]+\frac{r}{4r_s^3}e^{\frac{r}{r_s}}\left[-2\frac{r_s^4}{r^2}e^{-\frac{r}{r_s}}\operatorname{sen}^2\theta\right] \\
&\quad +\frac{1}{r^2}\left[r_s r\operatorname{sen}^2\theta.\right]+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

de modo que resulta $\mathrm{Ric}(M,g)\equiv 0$ (esto es, se trata de una variedad ***Ricci llana***) y de (B.10) concluimos que la curvatura escalar del espaciotiempo de Scharzschild también se anula.

B.5. El espaciotiempo de Schwarzschild como variedad de Weyl

A partir de la variedad pseudoriemanniana (M,g) de la sección precedente, podemos inducir estructuras de Weyl que preservan la clase conforme de g, considerando la conexión de Weyl inducida por la conexión de Levi-Civita ∇^g asociada a g

$$\nabla^W=\nabla^g-\frac{1}{2}\left(\beta\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes\beta-g\otimes\beta\right)$$

para una $\beta\in\Omega^1(M)$ no nula.

Por las relaciones analizadas en la sección B.1 podemos calcular todos los elementos geométricos asociados a la variedad de Weyl (M,g,∇^W) en términos de los calculados en la sección B.4, de donde en particular podemos concluir que los coeficientes de la conexión de Weyl estarán dados como

$$\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial T} = \left[f_T-\beta\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)\right]\frac{\partial}{\partial T}-f_X\frac{\partial}{\partial X}+\frac{1}{2}\left[-\frac{4r_s^3}{r}e^{-\frac{r}{r_s}}\right]\beta^\sharp$$

$$\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial T} = \left[-f_X-\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)\right]\frac{\partial}{\partial T}+\left[f_T-\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)\right]\frac{\partial}{\partial X}=\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial X}$$

$$\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\frac{\partial}{\partial T} = -\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial T}+\left[-F_{TC}-\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\theta}=\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial \varphi}}\frac{\partial}{\partial T} = -\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial T}+\left[-F_{TC}-\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\varphi}=\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial T}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial X} = f_T\frac{\partial}{\partial T}+\left[-f_X-\beta\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)\right]\frac{\partial}{\partial X}+\frac{1}{2}\left[\frac{4r_s^3}{r}e^{-\frac{r}{r_s}}\right]\beta^\sharp$$

$$\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\frac{\partial}{\partial X} = -\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial X}+\left[F_{XC}-\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\theta}=\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial X} = -\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial X} + \left[F_{XC} - \frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\varphi} = \nabla^W_{\frac{\partial}{\partial X}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} = -N_T\frac{\partial}{\partial T} - N_X\frac{\partial}{\partial X} - \beta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}r^2\beta^\sharp$$

$$\nabla^W_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + \left[\cot\theta - \frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\varphi} = \nabla^W_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi} = -N_T\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial}{\partial T} - N_X\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial}{\partial X} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \beta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}r^2\operatorname{sen}^2\theta\beta^\sharp$$

donde $f_T := \left[\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r}\right]\frac{r_s^2}{r}Te^{-\frac{r}{r_s}}$, $f_X := \left[\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r}\right]\frac{r_s^2}{r}Xe^{-\frac{r}{r_s}}$, $F_{TC} := 2\frac{r_s^2}{r^2}Te^{-\frac{r}{r_s}}$, $F_{XC} := 2\frac{r_s^2}{r^2}Xe^{-\frac{r}{r_s}}$, $N_T := \frac{r}{2r_s}T$, $N_X := \frac{r}{2r_s}X$, y la curvatura escalar ya no necesariamente es trivial, y depende únicamente de β, pues de la ecuación (B.9),

$$\mathrm{Scal}^{\nabla^W}(M,g) = (n-1)d^*\beta - \frac{(n-1)(n-2)}{4}\|\beta\|^2$$

Bibliografía

[1] B. Alexandrov and S. Ivanov. Weyl structures with positive Ricci tensor. *Di erential Geometry and Its Applications*, 18(3):343–350, 2003.

[2] M. Asorey and P. M. Lavrov. Fedosov and Riemannian supermanifolds. *Journal of Mathematical Physics*, 50(1), 2009.

[3] I. Batalin and K. Bering. Odd scalar curvature in field-antifield formalism. *Journal of Mathematical Physics*, 49(3):1–22, 2008.

[4] I. A. Batalin and K. Bering. Odd scalar curvature in anti-Poisson geometry. *Physics Letters B*, 663(1):132 – 135, 2008.

[5] M. Batchelor. The Structure of Supermanifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 253:329–338, 1979.

[6] A. Bernal and M. Sánchez. Smoothnes of Time Functions and the Metric Splitting of Globally Hyperbolic Spacetimes. *Communications in Mathematical Physics*, 257(1):43–50, 2005.

[7] A. L. Besse. *Einstein Manifolds*. Springer, 1987.

[8] D. Calderbank and H. Pedersen. Einstein-Weyl Geometry. *Surveys in Di erential Geometry*, 6:387–423, 2001.

[9] M. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.

[10] B. V. Fedosov. A Simple Geometrical Construction of Deformation Quantization. *Journal of Di erential Geometry*, 40(2):213–238, 1994.

[11] I. Gelfand, V. Retakh, and M. Shubin. Fedosov Manifolds. *Advances in Mathematics*, 136(1):104 – 140, 1998.

[12] K. Habermann, L. Habermann, and P. Rosenthal. Symplectic Yang–Mills theory, Ricci tensor, and connections. *Calculus of Variations and Partial Di erential Equations*, 30(2):137–152, October 2007.

[13] R. Hernández-Amador, J. Monterde, and J. A. Vallejo. *Supermanifolds, Symplectic Geometry and Curvature. In: Geometry Algebra and Applications: From Mechanics to Cryptography. Springer Proceedings in Mathematics* & *Statistics*. Springer, 2016.

[14] O. Hohm, C. Hull, and B. Zwiebach. Generalized metric formulation of double field theory. *Journal of High Energy Physics*, 2010(8):8, Aug 2010.

[15] O. Hohm and B. Zwiebach. On the Riemann tensor in double field theory. *Journal of High Energy Physics*, 2012(5):126, May 2012.

[16] B. Kostant. Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization. In K. Bleuler and A. Reetz, editors, *Di erential Geometrical Methods in Mathematical Physics*, pages 177–306, Berlin, Heidelberg, 1977. Springer Berlin Heidelberg.

[17] M. D. Kruskal. Maximal Extension of Schwarzschild Metric. *Physical Review*, 119:1743–1745, Sep 1960.

[18] D. A. Leites. Introduction to the theory of supermanifolds. *Russian Mathematical Surveys*, 35(1):1–64, 1980.

[19] Y. I. Manin. *Gauge Field Theory and Complex Geometry (2nd Ed.)*. Springer, Berlin, 1997.

[20] J. Monterde. A characterization of graded symplectic structures. *Di erential Geometry and its Applications*, 2(1):81 – 97, 1992.

[21] J. Monterde and A. Montesinos. Integral curves of derivations. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 6(2):177–189, Jan 1988.

[22] J. Monterde, J. Muñoz-Masqué, and J. A. Vallejo. The structure of fedosov supermanifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 59(4):540 – 553, 2009.

[23] J. Monterde and O. A. Sánchez-Valenzuela. The exterior derivative as a killing vector field. *Israel Journal of Mathematics*, 93(1):157–170, Dec 1996.

[24] R. Penrose. *Singularities and Time-Asymmetry. In General Relativitiy: An Einstein Centenary Survey, Eds. S.W. Hawking and W. Israel*. Cambridge University Press, 1979.

[25] A. Rogers. *Supermanifolds: Theory and Applications*. World Scientific, 2007.

[26] G. Salgado and J. A. Vallejo. The meaning of time and covariant superderivatives in supermechanics. *Advances in Mathematical Physics*, 2009:1–21, 2009.

[27] O. A. Sánchez-Valenzuela. *Matrix computations in linear superalgebra. In Linear Algebra and Its Applications*, volume 111. Dec 1988.

[28] G. Szekeres. On the singularities of a Riemannian manifold. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 7:285–301, 1960.

[29] J. A. Vallejo. Symplectic connections and Fedosov's quantization on supermanifolds. *Journal of Physics: Conference Series*, 343, 2012.

[30] R. M. Wald. *General Relativity*. Chicago University Press, 1984.