



UNIVERSIDAD DE SONORA
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

Desigualdades con pesos para la función maximal de Hardy-Littlewood

TESIS

que para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

presenta

Alejandro de Jesús Gómez Jurado

Directora de tesis:

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora,

Agosto de 2012

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	v
1. FUNCIÓN MAXIMAL	1
1.1. Función maximal de Hardy-Littlewood	1
1.2. Función maximal con medidas duplicantes	9
1.3. Estimaciones para la función maximal	13
1.4. La función maximal diádica	20
1.5. La función maximal sharp	22
2. TRANSFORMADA DE HILBERT	27
2.1. Núcleo conjugado de Poisson	27
2.2. El valor principal de $1/x$	29
2.3. Definición y propiedades de la Transformada de Hilbert	32
2.4. Teoremas de M. Riesz y Kolmogorov	33
3. OPERADORES DE CALDERÓN-ZYGMUND	41
3.1. Ejemplos de Operadores Integrales Singulares	41
3.2. Operadores integrales de Calderón-Zygmund	43
3.3. El acotamiento L^p para ciertos operadores	50
4. TEORÍA DE PESOS DE MUCKENHOUPT	51
4.1. La condición A_p	51
4.2. Desigualdades con pesos de tipo fuerte	63
4.3. Pesos A_1	70
4.4. Desigualdades con peso para integrales singulares	73
5. ESTIMACIONES PARA LA NORMA DE LA FUNCIÓN MAXIMAL	79
5.1. Las estimaciones	79
CONCLUSIONES	84
APÉNDICES	86
BIBLIOGRAFÍA	90

INTRODUCCIÓN

Las desigualdades con pesos surgen de manera natural en el análisis de Fourier y su gran variedad de aplicaciones justifican aún mejor su uso y desarrollo. Algunas de estas aplicaciones están relacionadas con el estudio de problemas de valores frontera para la ecuación de Laplace en dominios Lipschitz (ver por ejemplo, [24], [13]). Algunas otras guardan relación con la teoría de extrapolación, con desigualdades vectoriales y con la obtención de estimaciones para cierto tipo de ecuaciones diferenciales parciales no lineales ([5], [14]).

En términos generales, por un peso entenderemos una función no negativa u que además es localmente integrable. Así, si u y w son dos funciones con estas características, los principales problemas que se abordan en el estudio de desigualdades con pesos, son estimaciones del siguiente tipo:

Estimaciones de tipo fuerte (p, p) , esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p u(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \quad (1)$$

y estimaciones de tipo débil (p, p) , a saber,

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx, \quad (2)$$

para $1 \leq p < \infty$, donde para un conjunto E , $u(E)$ significa

$$u(E) = \int_E u(x) dx,$$

y T representa alguno de los operadores clásicos en el análisis armónico, por ejemplo, el operador maximal de Hardy-Littlewood, o un operador integral singular. A su vez, estos problemas se dividen en dos casos: el estudio para un par de pesos (u, w) , o bien, para un solo peso w , es decir, $u = w$.

La teoría de pesos, dio inicio con el estudio de potencias de pesos de la forma $w(x) = |x|^a$. Posteriormente, en los años setentas del siglo pasado, empezó un período de prolongadas investigaciones en esta área con el trabajo de B. Muckenhoupt, R.

Hunt y R. Wheeden. En [16] Muckenhoupt introdujo los pesos A_p , también conocidos como los pesos de Muckenhoupt. La teoría A_p ha experimentado un desarrollo vertiginoso desde ese entonces, y actualmente es una línea de investigación muy activa. Algunas de las principales cuestiones que hoy en día se investigan están relacionadas con la obtención de constantes óptimas que satisfagan desigualdades del tipo (1) y (2) para ciertos tipos de operadores aún más generales que los considerados en esta tesis. Las técnicas empleadas para tal efecto comprenden desde argumentos de tipo probabilístico, consideraciones de tipo diádico, hasta técnicas de funciones de Bellman, solo por mencionar algunas. El lector interesado puede consultar el excelente artículo [14] de M. Lacey para ampliar su información al respecto.

Los prerrequisitos para este trabajo son que el lector esté familiarizado con los elementos básicos de la teoría de la medida y el análisis funcional, (ver, por ejemplo [8] y [12]). La notación que emplearemos es estándar. El conjunto de funciones localmente integrables en \mathbb{R}^n lo denotaremos por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Asimismo, $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ denotará la clase de Schwartz y $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^n)$ el espacio de distribuciones temperadas. Si $F \in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$, el valor de F en ϕ lo denotaremos por $\langle F, \phi \rangle$. La convolución de dos funciones f y g la denotaremos por $f * g$. Además \hat{f} denotará la transformada de Fourier de f . Frecuentemente, utilizaremos la misma letra C para denotar a una constante que podría variar renglón tras renglón.

En el Capítulo 1 trabajaremos con diferentes tipos de función maximal. Para f en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ o en $L^1_{loc}(\mu)$, donde μ es una medida duplicante, esto es, $\mu(2Q) \leq C\mu(Q)$ para todo cubo Q , definiremos la función maximal de Hardy-Littlewood de f y demostraremos la desigualdad de tipo débil $(1, 1)$ y la desigualdad de tipo fuerte (p, p) , para $1 < p < \infty$. Para la demostración de estas desigualdades usaremos la descomposición de Calderón-Zygmund. También trabajaremos con la función maximal diádica y la función maximal sharp.

En el Capítulo 2 definiremos la transformada de Hilbert, operador que sirve como modelo de la familia de operadores integrales singulares estudiados en el Capítulo 3; además probaremos la desigualdad de tipo débil $(1, 1)$ y la desigualdad de tipo fuerte (p, p) , para $1 < p < \infty$.

En el Capítulo 3 estudiaremos los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund y también mostraremos desigualdades de tipo débil $(1, 1)$ y tipo fuerte (p, p) , para $1 < p < \infty$.

En el Capítulo 4 generalizaremos las desigualdades obtenidas en los Capítulos 1 y 3 a medidas de la forma $w(x) dx$, es decir, obtendremos desigualdades de la forma (1) y (2). Veremos también como el “control” que la función maximal de Hardy-Littlewood ejerce sobre los operadores de Calderón-Zygmund, nos permite obtener los resultados de acotamiento anteriormente mencionados.

En el Capítulo 5 mostraremos que cuando w es un peso Muckenhoupt, la norma en $L^p(w)$ del operador maximal centrado de Hardy-Littlewood puede estimarse por el producto de una constante que depende de p , de la dimensión y de una potencia apropiada de la constante A_p del peso w . En este proceso, obtendremos también una estimación uniforme en w para la norma del operador maximal centrado respecto a la medida μ .

Una última parte de este trabajo contiene algunas conclusiones personales y apéndices.

CAPÍTULO 1

FUNCIÓN MAXIMAL

En este capítulo definiremos la función maximal de Hardy-Littlewood, la función maximal diádica y la función maximal sharp, así como también, probaremos algunas estimaciones que harán posible obtener resultados de acotamiento para estos operadores. Adicionalmente, obtendremos la descomposición de Calderón-Zygmund, herramienta que nos permitirá demostrar algunos de los resultados más importantes de este trabajo. Las referencias principales para esta parte son [9], [6], [10].

1.1. Función maximal de Hardy-Littlewood

Definición 1.1 *Sea f una función localmente integrable en \mathbb{R}^n . La función maximal de Hardy-Littlewood de f , es la función Mf definida por,*

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x y $|Q|$ representa la medida de Lebesgue de Q . **El operador maximal de Hardy-Littlewood M** es el operador que envía a la función f a la función Mf .

Mostraremos que obtenemos el mismo valor de $Mf(x)$, si en la definición solamente tomamos los cubos en los cuales x es punto interior.

Proposición 1.2 *Sea f una función localmente integrable en \mathbb{R}^n . Para $x \in \mathbb{R}^n$, sea*

$$M'f(x) = \sup_{P \ni x} \frac{1}{|P|} \int_P |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos P tales que x es punto interior de P . Entonces se tiene que $M'f(x) = Mf(x)$.

Prueba. Claramente se tiene que $M'f(x) \leq Mf(x)$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ sea Q un cubo que contiene a x , no necesariamente en su interior. Sea $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión decreciente de cubos tales que $Q \subset P_k$ propiamente para cada k y $\bigcap_{k=1}^\infty P_k = Q$. Tenemos que x es punto interior de cada P_k , además por el lema de Fatou,

$$\int_Q |f(y)| dy \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{P_k} |f(y)| dy,$$

y dado que $\lim_{k \rightarrow \infty} |P_k| = |Q|$ se sigue que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|P_k|} \int_{P_k} |f(y)| dy \leq M'f(x),$$

por lo tanto $Mf(x) \leq M'f(x)$. ■

Por Proposición 1.2 se puede obtener de manera sencilla que la función Mf es semicontinua inferiormente.

Proposición 1.3 *Sea f una función localmente integrable en \mathbb{R}^n , entonces el conjunto*

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$$

es abierto.

Prueba. Sea $x \in E_t$, entonces existe un cubo P tal que x es elemento del interior de P , y se tiene que

$$\frac{1}{|P|} \int_P |f(y)| dy > t,$$

como x está en el interior de P , existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset P$ y puesto que $P \subset E_t$ obtenemos que x es punto interior de E_t . ■

En algunas ocasiones haremos uso de la función maximal de Hardy-Littlewood centrada en bolas, la cual está definida como,

$$M''f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy.$$

Ya que las medidas de un cubo y una bola son comparables, existen constantes c_n y C_n , dependiendo solo de n , tales que

$$c_n M'' f(x) \leq M f(x) \leq C_n M'' f(x). \quad (1.1)$$

Puesto que se tiene la desigualdad (1.1), los operadores M y M'' se pueden intercambiar y usaremos cualesquiera de ellos cuando sea conveniente dependiendo de las circunstancias.

Definición 1.4 Para $k \in \mathbb{Z}$, sea $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{Z}^n$, es decir el conjunto formado por los números \mathbb{Z}^n dilatados por un factor de 2^{-k} , sea D_k el conjunto de cubos de longitud de lados 2^{-k} y cuyos vértices están en Λ_k . **Los cubos diádicos** son los cubos pertenecientes a $D = \bigcup_{-\infty}^{\infty} D_k$. Diremos que dos cubos Q y Q' **no se traslapan** si la intersección de sus interiores es vacía.

Observemos que si $Q, Q' \in D$ y $|Q'| \leq |Q|$, entonces $Q' \subset Q$, o Q y Q' no se traslapan. Notemos que cada $Q \in D_k$ es la unión de 2^n cubos que no se traslapan pertenecientes a D_{k+1} .

Otra observación importante es el hecho de que si tenemos una sucesión estrictamente creciente $\{R_j\}$ de cubos diádicos entonces $|R_j| \rightarrow \infty$. Cuando la sucesión de cubos es creciente y sus medidas están uniformemente acotadas, entonces existe un índice k_0 tal que $R_j \subset R_{k_0}$ para todo $j < k_0$ y $R_j = R_{k_0}$ cuando $j \geq k_0$.

Proposición 1.5 Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$, existe una familia de cubos $\{Q_j\}$ tales que:

$$t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2^n t.$$

Prueba. Denotaremos por C_t a la familia de cubos $Q \in D$ que satisfacen la condición

$$t < \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \quad (1.2)$$

y son maximales entre los cubos que la satisfacen.

En virtud de las observaciones previas al enunciado de esta Proposición, tenemos que cada $Q \in D$ que satisface la ecuación (1.2) está contenido en algún $Q' \in C_t$, pues la condición (1.2) da una cota superior para la medida de Q , $|Q| < t^{-1} \|f\|_1$.

Los cubos en C_t no se traslapan por definición, también se tiene que si $Q \in D_k$ es elemento de C_t y Q' es el elemento en D_{k-1} que contiene a Q , entonces

$$\frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(x)| dx \leq t.$$

Por otra parte $|Q'| = 2^n |Q|$, por lo cual,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \leq \frac{2^n}{|Q'|} \int_{Q'} |f(x)| dx \leq 2^n t.$$

■

Hemos obtenido una familia de cubos $C_t = \{Q_j\}$ para los cuales se tiene

$$t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2^n t, \quad (1.3)$$

para cada j . Por lo que podemos dar la siguiente definición

Definición 1.6 Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$. **Los cubos de Calderón-Zygmund de f correspondientes a t** , es la colección $C_t = \{Q_j\}$ de cubos diádicos maximales para los cuales el promedio de $|f|$ es mayor a t .

Ahora usaremos la Proposición 1.5 para mostrar que el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil $(1, 1)$.

Teorema 1.7 Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces para cada $t > 0$, el conjunto

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$$

está contenido en la unión de una familia de cubos $\{3Q_j\}$, que satisfacen:

$$\frac{t}{4^n} < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq \frac{t}{2^n},$$

por lo cual se obtiene

$$|E_t| \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

Prueba. Sea $x \in E_t$. Entonces existe un cubo R que contiene a x en su interior y satisface

$$t < \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy.$$

Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-(k+1)n} < |R| \leq 2^{-kn}$. Existe a lo más un punto de Λ_k en el interior de R . Consecuentemente existe un cubo en D_k , y a lo más 2^n de ellos, que intersectan el interior de R . Se sigue que existe un cubo $Q \in D_k$ que se traslapa con R y satisface

$$\int_{R \cap Q} |f(y)| dy > \frac{t|R|}{2^n}.$$

Puesto que $|R| \leq |Q| < 2^n |R|$, se sigue que,

$$\int_{R \cap Q} |f(y)| dy > \frac{t|Q|}{4^n},$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy > \frac{t}{4^n}.$$

Así, obtenemos que $Q \subset Q_j \in C_{4^{-nt}}$ para alguna j . Por Proposición 1.5 obtenemos que los cubos $\{Q_j\}$ satisfacen:

$$\frac{t}{4^n} < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq \frac{t}{2^n}.$$

Además, como R y Q se traslapan y $|R| < |Q|$, se sigue que $R \subset 3Q \subset 3Q_j$ por lo que $E_t \subset \bigcup_j 3Q_j$ (la notación $3Q$ denota al cubo con el mismo centro que Q y con longitud de lado el triple del lado de Q).

Esto conlleva a

$$|E_t| \leq \sum_j |3Q_j| = 3^n \sum_j |Q_j| \leq \frac{3^n 4^n}{t} \sum_j \int_{Q_j} |f(y)| dy \leq \frac{C}{t} \|f\|_1.$$

■

Obtendremos algunos resultados de la desigualdad $|E_t| \leq Ct^{-1} \|f\|_1$ del teorema anterior, los cuales muestran la importancia del operador maximal M . El operador M controla varios operadores que surgen en el Análisis. Por ejemplo, probaremos la siguiente extensión del teorema de diferenciación de Lebesgue.

Teorema 1.8 Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ sea

$$Q(x; r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty \equiv \max_j |y_j - x_j| \leq r \right\}.$$

Entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy = 0. \quad (1.4)$$

Prueba. Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definamos el conjunto B por

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \right\},$$

ahora para $t > 0$ definamos el conjunto

$$A_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy > t \right\}.$$

Sea $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{1/j}$ y mostremos que $B = A^c$. Sea $x \in B$, entonces

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy = 0,$$

se sigue que $x \notin A_t$ para todo $t > 0$, por lo cual $x \notin A$.

Por otro lado, si $x \notin A$ obtenemos que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy \leq \frac{1}{j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, así

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \inf \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \sup \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy = 0, \end{aligned}$$

luego

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

Será suficiente demostrar que $|A_t| = 0$ para todo $t > 0$, puesto que obtendremos $|B^c| = |A| = \lim_{j \rightarrow \infty} |A_{1/j}| = 0$. Sea $\epsilon > 0$, dado que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$, existen funciones g y h tales que $f = g + h$, g es continua con soporte compacto y $\|h\|_1 < \epsilon$. Para g se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |g(y) - g(x)| dy = 0.$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy \\ & \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |g(y) - g(x)| dy \\ & \quad + \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |h(y) - h(x)| dy \\ & \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |h(x)| dy + \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |h(y)| dy \\ & \leq |h(x)| + Mh(x). \end{aligned}$$

Así

$$A_t \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mh(x) > t/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > t/2\}.$$

Sin embargo por el Teorema 1.7

$$|E_{t/2}| = |\{x \in \mathbb{R}^n : Mh(x) > t/2\}| \leq c \|h\|_1 / t < c\epsilon / t$$

y

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > t/2\}| \leq 2 \|h\|_1 / t < 2\epsilon / t.$$

En consecuencia A_t está contenido en un conjunto de medida menor a $c\epsilon/t$, con ϵ arbitrario, por lo tanto $|A_t| = 0$. ■

Los puntos x para los cuales se satisface (1.4) se llaman puntos de Lebesgue de f . Por Teorema 1.8 casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de Lebesgue de f .

Corolario 1.9 Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para cada punto de Lebesgue de f , y así para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} f(y) dy. \quad (1.5)$$

$$|f(x)| \leq Mf(x). \quad (1.6)$$

Prueba. Notemos que

$$\left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} f(y) dy - f(x) \right| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} |f(y) - f(x)| dy,$$

por consiguiente obtenemos (1.5). Por otra parte, (1.6) es consecuencia directa de (1.5) puesto que

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x; r)|} \int_{Q(x; r)} f(y) dy \leq \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy = Mf(x).$$

■

Enseguida, notemos que si x es un punto de Lebesgue de f y tenemos una sucesión de cubos $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ con $\bigcap_j Q_j = \{x\}$, entonces

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y) dy.$$

En efecto, si Q_j tiene longitud de lado r_j , tenemos que $Q_j \subset Q(x; r_j)$, $|Q(x; r_j)| = 2^n |Q_j|$ y $r_j^n = |Q_j|$, como $\lim_{j \rightarrow \infty} |Q_j| = 0$, entonces $r_j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$. Así

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y) dy - f(x) \right| &\leq \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq \frac{2^n}{|Q(x; r_j)|} \int_{Q(x; r_j)} |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $j \rightarrow \infty$.

Teorema 1.10 Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$, entonces existe una familia de cubos que no se traslapan C_t que consiste en cubos diádicos maximales sobre los cuales el promedio de $|f|$ es mayor a t . Esta familia satisface:

- (i) Para cada $Q \in C_t$: $t < \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \leq 2^n t$.
- (ii) Para casi todo $x \notin \bigcup Q$, donde Q varía sobre C_t , $|f(x)| \leq t$.
- (iii) Para $t > 0$, $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} \subset \bigcup 3Q$ donde Q varía sobre $C_{4^{-n}t}$.

Prueba. Por Proposición 1.5 y Teorema 1.7 obtenemos (i) y (iii), respectivamente.

Para demostrar (ii), sea $C_t = \{Q_j\}$ la familia de cubos de Calderón-Zygmund de f correspondientes a t y sea $x \notin \bigcup_j Q_j$. Entonces el promedio de $|f|$ para cada cubo diádico que contiene a x es menor a t . Sea $\{R_k\}$ una sucesión de cubos diádicos decrecientes tales que $\bigcap_k R_k = \{x\}$. Para cada uno de ellos se tiene

$$\frac{1}{|R_k|} \int_{R_k} |f(y)| dy \leq t.$$

Si x es un punto de Lebesgue de f , por ende es punto de Lebesgue de $|f|$ y se obtiene

$$|f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|R_k|} \int_{R_k} |f(y)| dy \leq t.$$

Se concluye que $|f(x)| \leq t$ para casi todo $x \notin \bigcup_j Q_j$. ■

1.2. Función maximal con medidas duplicantes

Estudiaremos ahora una generalización de la función maximal. Para un cubo Q y $\alpha > 0$ denotaremos por αQ al cubo con mismo centro que Q y con longitud de lado α veces la longitud del lado de Q .

Definición 1.11 Sea μ una medida positiva de Borel sobre \mathbb{R}^n , finita en conjuntos compactos. Diremos que μ es una **medida duplicante** si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mu(2Q) \leq C\mu(Q), \tag{1.7}$$

para cada cubo Q .

Como ejemplo de medidas duplicantes tenemos las medidas $|x|^a dx$ para $a > -n$, es decir

$$\mu(E) = \int_E |x|^a dx.$$

Aunque no lo haremos aquí, no es difícil verificar que esta medida cumple con la condición (1.7) (ver por ejemplo [11], p. 285). La medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n es claramente una medida duplicante.

Proposición 1.12 *Sea μ una medida duplicante y $\alpha > 0$, entonces existe una constante C_α , que depende solo de α , tal que*

$$\mu(\alpha Q) \leq C_\alpha \mu(Q).$$

Prueba. Por definición de medida duplicante se tiene claramente que para $m \in \mathbb{N}$

$$\mu(2^m Q) \leq C^m \mu(Q).$$

Sea $\alpha > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \leq 2^n$, por lo que $\alpha Q \subseteq 2^n Q$, y así

$$\mu(\alpha Q) \leq 2^n \mu(Q) \leq C^n \mu(Q).$$

■

Se tiene que μ es finita en conjuntos compactos de \mathbb{R}^n , esto implica que μ es regular (ver [8], p. 99). Notemos que para cada cubo Q , $\mu(Q) > 0$, puesto que si $\mu(Q) = 0$ para algún cubo Q , tendríamos que $\mu(\alpha Q) \leq C_\alpha \mu(Q) = 0$, por lo que $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$, que resulta ser una medida trivial.

De manera análoga definiremos la función maximal de Hardy-Littlewood para una función localmente μ -integrable.

Definición 1.13 *Sean $f \in L^1_{loc}(\mu)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la función maximal de Hardy-Littlewood con respecto a μ de f , es la función $M_\mu f$ dada por,*

$$M_\mu f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu(y),$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x . **El operador maximal de Hardy-Littlewood con respecto a μ** es el operador M_μ que envía a la función f a la función $M_\mu f$.

De manera similar a la Proposición 1.2 obtenemos que $M_\mu f(x)$ toma el mismo valor si solo consideramos los cubos que contienen en su interior a x , por lo que a su vez se obtiene que $M_\mu f$ es semicontinua inferiormente.

Para $f \in L^1(\mu)$ y $t > 0$ queremos obtener la descomposición en cubos de Calderón-Zygmund de f y t relativos a la medida μ . A su vez queremos estimar la medida del conjunto $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > t\}$, el cual es abierto.

Proposición 1.14 *Sea μ medida duplicante. Existe una constante $K > 1$ tal que si Q y Q' son cubos diádicos con $Q' \subset Q$ propiamente, entonces $K\mu(Q') \leq \mu(Q)$.*

Prueba. Sea Q'' un cubo diádico contenido en Q , y contiguo a Q' y con el mismo diámetro que Q' . Entonces $Q' \subset 3Q''$ y consecuentemente se tiene que:

$$\mu(Q') \leq \mu(3Q'') \leq C\mu(Q'') \leq C(\mu(Q) - \mu(Q')).$$

Esto implica que

$$(1 + C)\mu(Q') \leq C\mu(Q),$$

por lo tanto, con $K = (1 + C)/C$ obtenemos el resultado. ■

Como consecuencia de la Proposición 1.14 se tiene que si $\{Q_j\}$ es una sucesión de cubos diádicos estrictamente crecientes, entonces $\mu(Q_j) \geq K^j \mu(Q_0) \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$. Concluimos que si tenemos una cadena de cubos diádicos crecientes tal que su μ -medida es acotada por arriba, entonces su diámetro es acotado, es decir, la cadena termina en un cubo que contiene a los demás.

Proposición 1.15 *Si $A > 0$, entonces existe $B > 0$ tal que para cada par de cubos Q y R que se traslapen y satisfagan $|Q| < A|R|$, se cumple que $\mu(Q) < B\mu(R)$.*

Prueba. Se tiene que $|Q|^{1/n} < A^{1/n}|R|^{1/n}$, entonces $Q \subset \alpha R$ propiamente con $\alpha = 2A^{1/n} + 1$, así $\mu(Q) < \mu(\alpha R) \leq B\mu(R)$. ■

Denotaremos por $C_t = C_t(f, \mu)$ a la colección formada por todos los cubos diádicos maximales que satisfacen la condición:

$$t < \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu(y). \quad (1.8)$$

Por la desigualdad (1.8) $\mu(Q)$, está acotado por $t^{-1} \|f\|_1$. La Proposición 1.14 implica que cada cubo diádico que satisface la ecuación (1.8) está contenido en algún elemento de C_t . Sea $Q \in C_t$, si $Q \in D_K$ y Q' es el elemento en D_{K-1} , tal que $Q \subset Q'$, tenemos que

$$\frac{1}{\mu(Q')} \int_{Q'} |f(y)| d\mu(y) \leq t.$$

Como $Q' \subset 3Q$ se tiene que $\mu(Q') \leq \mu(3Q) \leq C\mu(Q)$, en consecuencia

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x)| d\mu(x) \leq \frac{C}{\mu(Q')} \int_{Q'} |f(x)| d\mu(x) \leq Ct.$$

Por lo tanto para $Q \in C_t$ se tiene,

$$t < \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x)| d\mu(x) \leq \frac{C}{\mu(Q')} \int_{Q'} |f(x)| d\mu(x) \leq Ct.$$

Sea $x \in E_t$, esto es $M_\mu f(x) > t$. Entonces existe un cubo R que contiene a x en su interior y satisface

$$t < \frac{1}{\mu(R)} \int_R |f(y)| d\mu(y).$$

Ahora sea Q un cubo diádico que se traslapa con R , y satisface $|R| \leq |Q| < 2^n |R|$ y además

$$\int_{R \cap Q} |f| d\mu > \frac{t\mu(R)}{2^n}.$$

Sea B la constante correspondiente a $A = 2^n$ en la Proposición 1.15 entonces $\mu(Q) < B\mu(R)$ y se sigue que

$$\int_{R \cap Q} |f| d\mu > \frac{t\mu(Q)}{2^n B},$$

por lo que inferimos

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| d\mu > \frac{t}{2^n B}.$$

Se sigue que $Q \subset Q_j$ para algún $Q_j \in C_{2^{-n}B^{-1}t}$ y $R \subset 3Q \subset 3Q_j$. Si $C_{2^{-n}B^{-1}t} = \{Q_j\}$ se obtiene $E_t \subset \bigcup_j 3Q_j$ y finalmente,

$$\begin{aligned} \mu(E_t) &\leq \sum_j \mu(3Q_j) \leq C \sum_j \mu(Q_j) \\ &\leq \frac{C2^n B}{t} \sum_j \int_{Q_j} |f| d\mu \leq \frac{C}{t} \int_{R^n} |f| d\mu. \end{aligned}$$

De manera análoga a como se probó el Teorema 1.8 y el Corolario 1.9, obtenemos la siguiente extensión del teorema de diferenciación de Lebesgue:

Teorema 1.16 Sea $f \in L^1_{loc}(\mu)$. Entonces para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

- a) $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(Q(x;r))} \int_{Q(x;r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0.$
- b) $f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x;r)|} \int_{Q(x;r)} f(y) d\mu(y).$
- c) $|f(x)| \leq M_\mu f(x).$

En particular, si $C_t(f, \mu) = \{Q_j\}$, se tiene que $|f(x)| \leq t$ para casi todo $x \notin \bigcup_j Q_j$. Finalmente podemos establecer el siguiente teorema:

Teorema 1.17 Sea $f \in L^1(\mu)$ y $t > 0$. Entonces existe una familia de cubos que no se traslapan $C_t = C_t(f, \mu)$, formada por cubos diádicos maximales para los cuales el promedio de $|f|$ relativo a μ es mayor a t . Estos cubos satisfacen:

- (i) Para cada $Q \in C_t$: $t < \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| d\mu \leq Ct.$
- (ii) Para casi todo $x \notin \bigcup Q$, donde Q varía sobre C_t , se tiene $|f(x)| \leq t.$

Además, para cada $t > 0$, el conjunto $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > t\} \subset \bigcup 3Q$ donde Q varía sobre $C_{t/C}$, y se tiene la estimación:

$$\mu(E_t) \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu.$$

La letra C representa una constante absoluta, posiblemente diferente en cada ocurrencia.

1.3. Estimaciones para la función maximal

En esta sección obtendremos algunas estimaciones para la medida de Lebesgue del conjunto E_t , las cuales nos permitirán demostrar la desigualdad de tipo débil (1, 1) y la desigualdad fuerte (p, p) , $1 < p < \infty$, para el operador M .

Teorema 1.18 Sea f una función localmente integrable en \mathbb{R}^n y sea $t > 0$. Entonces se tienen las siguientes estimaciones de la medida de Lebesgue del conjunto $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$.

$$|E_t| \leq \frac{C}{t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t/2\}} |f(x)| dx. \quad (1.9)$$

$$|E_t| \geq \frac{C'}{t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}} |f(x)| dx. \quad (1.10)$$

Aquí C y C' son constantes que no dependen de f ni de t .

Prueba. Sea $f = f_1 + f_2$, donde $f_1(x) = f(x)$ si $|f(x)| > t/2$ y $f_1(x) = 0$ de otra manera. Puesto que $|f_2| \leq t/2$ implica que $Mf_2 \leq t/2$ obtenemos

$$Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x) \leq Mf_1(x) + t/2,$$

de aquí que si $x \in E_t$ entonces $t/2 < M_1f(x)$ por lo cual

$$\begin{aligned} |E_t| &\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_1(x) > t/2\}| \leq \frac{3^n 4^n}{t/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)| dx \\ &= \frac{C}{t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t/2\}} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Para probar la desigualdad (1.10) asumamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces usamos la descomposición de Calderón-Zygmund para f y t . Tenemos cubos Q_j que no se traslapan tales que

$$t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2^n t,$$

y $|f(x)| \leq t$ para casi todo $x \notin \bigcup_j Q_j$. Por lo que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, si $|f(x)| > t$ entonces $x \in \bigcup_j Q_j$. Por otra parte $x \in Q_j$ implica que $Mf(x) > t$, es decir $Q_j \subset E_t$, entonces se obtiene

$$\begin{aligned} |E_t| &\geq \left| \bigcup_j Q_j \right| = \sum_j |Q_j| \geq \frac{1}{2^n t} \sum_j \int_{Q_j} |f(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{2^n t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado se prueba de manera análoga.

Teorema 1.19 *Supóngase que μ es una medida positiva regular de Borel en \mathbb{R}^n que es duplicante. Entonces existen constantes C y C' , tales que para cualquier función Borel medible f y cualquier $t > 0$:*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > t\}) \leq \frac{C}{t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t/2\}} |f(x)| d\mu(x).$$

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > t\}) \geq \frac{C'}{t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}} |f(x)| d\mu(x).$$

Del Teorema 1.18 se deriva la siguiente estimación para la función maximal.

Teorema 1.20 *Para cada p con $1 < p < \infty$, existe una constante $C_{p,n} > 0$ tal que para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p dx \right)^{1/p} \leq C_{p,n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Prueba.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p dx &= p \int_0^\infty t^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| dt \\ &\leq Cp \int_0^\infty t^{p-2} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t/2\}} |f(x)| dx dt \\ &= Cp \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^{2|f(x)|} t^{p-2} dt \right) dx = \frac{C2^{p-1}p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

■

De manera análoga obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.21 *Sea μ una medida positiva regular de Borel en \mathbb{R}^n que es duplicante. Entonces para cada p con $1 < p < \infty$, existe una constante $C_p > 0$ tal que para cada $f \in L^p(\mu)$:*

$$\|M_\mu f\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Es trivial que para $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene $\|Mf\|_\infty \leq C \|f\|_\infty$. Por lo que por el Teorema 1.20 obtenemos que el operador M es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p \leq \infty$. Sin embargo M , no es acotado en $L^1(\mathbb{R}^n)$. De hecho para $f \geq 0$ se tiene que $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ al menos que $f(x) = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Esto es fácil de ver: supongamos que $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $a > 0$ y $|x| > a$ se tiene que

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{|Q(x; 2|x|)|} \int_{Q(x; 2|x|)} |f(y)| dy \geq \frac{1}{|Q(0; 2|x|)|} \int_{Q(0; a)} |f(y)| dy \\ &= \frac{C}{|x|^n} \int_{Q(0; a)} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Dado que $|x|^{-n}$ no es integrable para $|x| > a$ se sigue que

$$\int_{Q(0;a)} |f(y)| dy = 0,$$

para $a > 0$ arbitrario, por lo que $f = 0$ casi en todas partes.

Ejemplo 1.22 Sea $f(x) = x^{-1} (\log x)^{-2} \chi_{(0,1/2]}$. Entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $Mf \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. El cambio de variable $u = \log x$ muestra que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Probaremos que $Mf \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Sea $x \in (0, 1/2)$. Para $n \in \mathbb{N}$ con $x + 1/n < 1/2$, consideremos el intervalo $[0 + 1/n, x + 1/n]$, se tiene

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{[a,b] \ni x} \frac{1}{|b-a|} \int_{[a,b] \cap (0,1/2]} \frac{dy}{y (\log y)^2} \geq \frac{1}{x} \int_{1/n}^{x+1/n} \frac{dy}{y (\log y)^2} \\ &= \frac{1}{x} \left[\frac{-1}{\ln y} \right]_{1/n}^{x+1/n} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\ln(1/n)} - \frac{1}{\ln(x+1/n)} \right), \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ con $x + 1/n < 1/2$, por lo cual

$$Mf(x) \geq \frac{-1}{x \ln|x|},$$

para $x \in (0, 1/2)$. Un cálculo sencillo muestra que $\frac{-1}{|x| \ln|x|}$ no es localmente integrable. ■

La estimación $|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leq \frac{C}{t} \|f\|_1$ actúa como un sustituto al acotamiento en L^1 . A continuación presentamos otro sustituto a este acotamiento.

Teorema 1.23 Sea f una función integrable con soporte en una bola $B \subset \mathbb{R}^n$. Entonces Mf es integrable sobre B si y solo si:

$$\int_B |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty. \quad (1.11)$$

Prueba. Si se tiene (1.11) entonces

$$\begin{aligned}
\int_B Mf(x)dx &= \int_0^\infty |\{x \in B : Mf(x) > t\}| dt = 2 \int_0^\infty |\{x \in B : Mf(x) > 2t\}| dt \\
&\leq 2 \left(\int_0^1 |B| dt + \int_1^\infty |E_{2t}| dt \right) \\
&\leq 2|B| + C \int_1^\infty \frac{1}{t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}} |f(x)| dx dt \\
&= 2|B| + C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_1^{|f(x)|} \frac{dt}{t} dx \\
&= 2|B| + C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx.
\end{aligned}$$

En esta parte de la prueba no se utilizó el hecho de que f tenga soporte en B . El mismo argumento muestra que si $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty$ entonces Mf es localmente integrable.

Supongamos que $\int_B Mf(x)dx < \infty$. Sea c el centro de la bola B , denotemos por B' la bola con centro en c y con radio dos veces el radio de B . Mostraremos primero que $\int_{B'} Mf(x)dx < \infty$. Sea $x \in B' \setminus B$ y sea x^* el punto simétrico a x con respecto a la frontera de B . Para $r > 0$ se tiene que $B \cap B(x, r) \subset B(x^*, r)$. Como f tiene soporte en B se sigue que

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \leq \frac{1}{|B(x^*, r)|} \int_{B(x^*, r)} |f(y)| dy \leq CMf(x^*).$$

En consecuencia $Mf(x) \leq CMf(x^*)$. Así

$$\int_{B'} Mf(x)dx = \int_B Mf(x)dx + \int_{B' \setminus B} Mf(x)dx \leq (1 + C) \int_B Mf(x)dx.$$

Además para $x \notin B'$ tenemos

$$\begin{aligned}
CMf(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy = \sup_{r>|x-c|/2} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \\
&\leq \frac{1}{|B(x, |x-c|/2)|} \int_B |f(y)| dy \leq \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy < \infty.
\end{aligned}$$

Como $|B(x, |x-c|/2)| \rightarrow \infty$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ entonces

$$CMf(x) \leq \frac{1}{|B(x, |x-c|/2)|} \int_B |f(y)| dy \rightarrow 0$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$. Así, dado $t > 0$ existe $r > 0$ tal que si $|x| \geq r$ entonces $Mf(x) \leq t$, por lo cual $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} \subset B(0, r)$, luego

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} Mf(x) dx &\leq \int_{B(0, r)} Mf(x) dx = \int_{B'} Mf(x) dx + \int_{B(0, r) \setminus B'} Mf(x) dx \\ &\leq \int_{B'} Mf(x) dx + C |B(0, r) \setminus B'| < \infty. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 1\}} Mf(x) dx &\geq \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 1\}} \int_1^{Mf(x)} dt dx \\ &= \int_1^\infty |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| dt \\ &\geq \int_1^\infty \frac{1}{2^n t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}} |f(x)| dx dt \\ &= \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_1^{f(x)} \frac{dt}{t} dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx. \end{aligned}$$

En consecuencia se obtiene la ecuación (1.11) ■

Este teorema se extiende para M_μ donde μ es una medida positiva de Borel duplicante.

Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos por f_Q al promedio de f sobre el cubo Q , esto es

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx.$$

Proposición 1.24 *Sea ϕ medible y no negativa y sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} \phi(x) dx \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M\phi(x) dx.$$

Prueba. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f \geq 0$. Existe una sucesión $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ de funciones integrables tales que, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, $f_j \rightarrow f$ casi en todas partes.

Primero veremos que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} = \bigcup_j \{x \in \mathbb{R}^n : Mf_j(x) > t\}. \quad (1.12)$$

Como $f_j \leq f$ casi en todas partes, entonces $Mf_j(x) \leq Mf(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, por lo que si $Mf_j(x) > t$ entonces $Mf(x) > t$. Por otra parte, si $x \in \mathbb{R}^n$ satisface que $Mf(x) > t$, existe un cubo Q tal que $f_Q > t$; dado que $f_j \rightarrow f$ casi en todas partes y crecientemente, se sigue que $(f_j)_Q \rightarrow f_Q$; por lo cual existe k tal $(f_k)_Q > t$, de aquí que $Mf_k(x) > t$.

De esta forma, si cada f_j satisface

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_j(x) > t\}} \phi(x) dx \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)| M\phi(x) dx,$$

esto nos lleva a

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} \phi(x) dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_j(x) > t\}} \phi(x) dx \leq \frac{C}{t} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) M\phi(x) dx \\ &= \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M\phi(x) dx. \end{aligned}$$

Entonces podemos asumir que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sea $t > 0$, por la descomposición de Calderón-Zygmund obtenemos una colección de cubos que no se traslapan $\{Q_j\}$ tales que

$$\begin{aligned} \frac{t}{4^n} &< \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \leq \frac{t}{2^n}, \\ \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} &\subset \bigcup_j 3Q_j. \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} \phi(x) dx &\leq \int_{\bigcup_j 3Q_j} \phi(x) dx \leq \sum_j \int_{3Q_j} \phi(x) dx \\ &= \sum_j \frac{1}{|3Q_j|} \int_{3Q_j} \phi(x) |3Q_j| dx \\ &\leq \sum_j \frac{1}{|3Q_j|} \int_{3Q_j} \phi(x) \frac{3^n 4^n}{t} \int_{Q_j} f(y) dy dx \\ &= \frac{3^n 4^n}{t} \sum_j \int_{Q_j} f(y) \frac{1}{|3Q_j|} \int_{3Q_j} \phi(x) dx dy. \end{aligned}$$

Si $y \in Q_j$, se sigue que $y \in 3Q_j$, en consecuencia

$$M\phi(y) \geq \frac{1}{|3Q_j|} \int_{3Q_j} \phi(x) dx.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} \phi(x) dx &\leq \frac{3^n 4^n}{t} \sum_j \int_{Q_j} f(y) M\phi(y) dy \\ &= \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M\phi(x) dx. \end{aligned}$$

■

1.4. La función maximal diádica

Ahora estudiaremos otro tipo de función maximal para la cual también obtendremos la desigualdad de tipo débil (1, 1).

Definición 1.25 Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, y sea

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in D_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right) \chi_Q(x),$$

La función maximal diádica de f está definida por

$$M_d f(x) = \sup_k |E_k f(x)|.$$

El operador maximal diádico M_d es el operador que envía a la función f a la función $M_d f$.

De la definición de $E_k f(x)$ se tiene que si Ω es la unión de los cubos en D_k , entonces

$$\int_{\Omega} E_k f = \int_{\Omega} f.$$

Teorema 1.26 (1) *El operador maximal diádico M_d es de tipo débil (1, 1).*

(2) *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k f(x) = f(x)$.*

Prueba. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $f \geq 0$. Sea

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : E_k f(x) > \lambda \text{ y } E_k f(x) \leq \lambda \text{ si } j < k\}.$$

Notemos primero que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_k \Omega_k.$$

Claramente $\bigcup_k \Omega_k \subset \{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $M_d f(x) > \lambda$, entonces existe $k_1 \in \mathbb{Z}$, tal que $E_{k_1} f(x) > \lambda$. Por otra parte, como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que para $Q \in D_{k_2}$ se tiene $\|f\|_1 / |Q| \leq \lambda$, por lo que para $j \leq k_2$ obtenemos que $E_j f(x) \leq \lambda$. Sea $k = \min\{z \in \mathbb{Z} : E_z f(x) > \lambda\}$, consecuentemente $E_k f(x) > \lambda$ y $E_j f(x) \leq \lambda$ si $j < k$.

Si $x \in \Omega_k$, existe $Q \in D_k$ tal que $x \in Q$ y $f_Q > \lambda$, donde

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx.$$

Además para $j < k$, si $Q' \in D_j$ con $x \in Q'$, entonces $f_{Q'} \leq \lambda$. Se sigue que cada Ω_k es la unión de cubos en D_k . Por construcción, los conjuntos Ω_k son ajenos por pares, de aquí que

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| &\leq \sum_k |\Omega_k| \leq \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} E_k f \\ &\leq \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} f \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

(2) es una consecuencia del Teorema de diferenciación de Lebesgue puesto que la medida de $Q \in D_k$ tiende a cero cuando k tiende a infinito. ■

Observemos que el operador M_d es de tipo fuerte (p, p) , para $1 < p < \infty$. Puesto que si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, existe un único cubo $Q \in D_k$ tal que $x \in Q$, por consiguiente

$$|E_k f(x)| = \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f \right| \leq \|f\|_\infty,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, así $|M_d f(x)| \leq \|f\|_\infty$, lo que implica la desigualdad de tipo fuerte (∞, ∞) . Por el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz se obtiene que M_d es de tipo fuerte (p, p) , para $1 < p < \infty$.

1.5. La función maximal sharp

Definición 1.27 Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la *función maximal sharp* de f , es la función $M^\#f$, definida por

$$M^\#f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. El supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x , y f_Q representa el promedio de f en Q , es decir

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx.$$

El operador maximal sharp $f \rightarrow M^\#f$, es análogo al operador maximal de Hardy-Littlewood M , mas sin embargo tiene ciertas ventajas sobre M . Claramente se tiene $M^\#f(x) \leq 2Mf(x)$.

Enseguida probaremos un par de lemas cuya demostración será un ingrediente muy importante para la obtención de algunos resultados cruciales en el Capítulo 4.

Lema 1.28 Sea $f \in L^{p_0}$ para algún p_0 , $1 \leq p_0 < \infty$, entonces para toda $\gamma > 0$ y $\lambda > 0$ se tiene:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > 2\lambda, M^\#f(x) \leq \lambda\gamma\}| \leq 2^n \gamma |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}|.$$

Prueba. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f \geq 0$. Fijemos $\gamma, \lambda > 0$. Se tiene que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f^{p_0} \right)^{1/p_0},$$

por lo que de manera análoga a como se hizo en el Teorema 1.26, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$$

se puede representar como la unión de cubos disjuntos diádicos maximales. Así, si Q es uno de estos cubos, será suficiente con demostrar que

$$|\{x \in Q : M_d f(x) > 2\lambda, M^\#f(x) \leq \lambda\gamma\}| \leq 2^n \gamma |Q|.$$

Sea \tilde{Q} el cubo diádico que contiene a Q , cuya longitud de los lados es el doble de la longitud de los lados de Q . Puesto que Q es maximal, se sigue que $f_{\tilde{Q}} \leq \lambda$.

Si $M_d f(x) > 2\lambda$, existen $k \in \mathbb{Z}$ y $Q' \in D_k$ con $x \in Q'$ tal que $f_{Q'} > 2\lambda$. Dado que Q es maximal y $f_{Q'} > \lambda$, se sigue que $Q' \subset Q$. Entonces

$$\frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} f \chi_{Q'} = \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} f > 2\lambda,$$

consecuentemente $M_d(f \chi_Q)(x) > 2\lambda$.

Esto implica que

$$\begin{aligned} M_d\left(\left(f - f_{\tilde{Q}}\right) \chi_Q\right)(x) + f_{\tilde{Q}} &\geq M_d\left(\left(f - f_{\tilde{Q}}\right) \chi_Q\right)(x) + f_{\tilde{Q}} \chi_Q(x) \\ &= M_d\left(\left(f - f_{\tilde{Q}}\right) \chi_Q + f_{\tilde{Q}} \chi_Q\right)(x) \\ &= M_d(f \chi_Q)(x) > 2\lambda. \end{aligned}$$

Entonces

$$M_d\left(\left(f - f_{\tilde{Q}}\right) \chi_Q\right)(x) \geq M_d(f \chi_Q)(x) - f_{\tilde{Q}} > \lambda.$$

Como M_d es de tipo débil (1, 1) tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\left\{x \in Q : M_d\left(\left(f - f_{\tilde{Q}}\right) \chi_Q\right)(x) > \lambda\right\}\right| &\leq \frac{1}{\lambda} \int_Q |f(x) - f_{\tilde{Q}}| dx \\ &\leq \frac{2^n |Q|}{\lambda} \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |f(x) - f_{\tilde{Q}}| dx \\ &\leq \frac{2^n |Q|}{\lambda} \inf_{x \in Q} M^\# f(x). \end{aligned}$$

Si el conjunto $\left|\left\{x \in Q : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \lambda\gamma\right\}\right|$ es vacío, es trivial. Si $x \in Q$ y $M^\# f(x) \leq \lambda\gamma$, entonces

$$\begin{aligned} &\left|\left\{x \in Q : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \lambda\gamma\right\}\right| \\ &\leq \left|\left\{x \in Q : M_d f(x) > 2\lambda\right\}\right| \\ &\leq \left|\left\{x \in Q : M_d\left(\left(f - f_{\tilde{Q}}\right) \chi_Q\right)(x) > \lambda\right\}\right| \\ &\leq \frac{2^n |Q|}{\lambda} \inf_{x \in Q} M^\# f(x) \leq 2^n \gamma |Q|. \end{aligned}$$

■

La estimación que hemos establecido en el Lema previo se conoce como una desigualdad de tipo *good lambda*.

Finalmente, compararemos los operadores M_d y $M^\#$.

Lema 1.29 Si $1 \leq p_0 \leq p < \infty$ y $f \in L^{p_0}$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_d f(x)]^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} [M^\# f(x)]^p dx.$$

Prueba. Para $N > 0$ sea

$$I_N = \int_0^N p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| d\lambda.$$

Mostraremos primero que I_N es finito

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{p}{p_0} \int_0^N p_0 \lambda^{p-p_0} \lambda^{p_0-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| d\lambda \\ &\leq \frac{p}{p_0} N^{p-p_0} \int_0^\infty p_0 \lambda^{p_0-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| d\lambda \\ &= \frac{p}{p_0} N^{p-p_0} \|M_d f\|_{p_0}^{p_0} < \infty. \end{aligned}$$

Si hacemos cambio de variable $\mu = 2\lambda$ obtenemos

$$\begin{aligned} I_N &= 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > 2\lambda\}| d\lambda \\ &\leq 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} (|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \lambda\gamma\}| + \\ &\quad |\{x \in \mathbb{R}^n : M^\# f(x) > \lambda\gamma\}|) d\lambda. \end{aligned}$$

Por Lema 1.28 se sigue que

$$\begin{aligned} I_N &\leq 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| 2^n \gamma d\lambda \\ &\quad + 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M^\# f(x) > \lambda\gamma\}| d\lambda \\ &\leq 2^{p+n} \gamma I_N + 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M^\# f(x) > \lambda\gamma\}| d\lambda, \end{aligned}$$

Ahora con $\mu = \gamma\lambda$ tenemos

$$I_N \leq 2^{p+n} \gamma I_N + \frac{2^p}{\gamma^p} \int_0^{\gamma N/2} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M^\# f(x) > \lambda\}| d\lambda.$$

Fijemos γ tal que $2^{p+n}\gamma = 1/2$, luego

$$I_N \leq \frac{2^{p+1}}{\gamma^p} \int_0^{\gamma^{N/2}} p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M^\# f(x) > \lambda\}| d\lambda, \quad (1.13)$$

El caso $\|M^\# f\|_p = \infty$ es trivial. Supongamos que $\|M^\# f\|_p < \infty$. Tomemos límite cuando $N \rightarrow \infty$ en (1.13)

$$\int_0^\infty p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| d\lambda \leq \frac{2^{p+1}}{\gamma^p} \int_0^\infty p\lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : M^\# f(x) > \lambda\}| d\lambda,$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_d f(x)]^p dx \leq \frac{2^{p+1}}{\gamma^p} \int_{\mathbb{R}^n} [M^\# f(x)]^p dx.$$

■

En el Capítulo 4 generalizaremos este resultado a medidas de la forma $w(x) dx$, con w una función apropiada.

CAPÍTULO 2

TRANSFORMADA DE HILBERT

En este capítulo empezaremos por abordar el núcleo conjugado de Poisson y el valor principal de $1/x$, los cuales utilizaremos para definir la transformada de Hilbert. Después introduciremos los Teoremas de M. Riesz y Kolmogorov que nos permitirán mostrar su acotamiento. La transformada de Hilbert es el operador que sirve como modelo en la familia de operadores de Calderón-Zygmund que estudiaremos en el próximo capítulo. Nuestra exposición se basa primordialmente en [6].

2.1. Núcleo conjugado de Poisson

Dada una función f en $\mathbf{S}(\mathbb{R})$, su extensión armónica al semiplano superior está dada por la función $u(x, t) = P_t * f(x)$, donde P_t es el núcleo de Poisson unidimensional

$$P_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}.$$

Se sabe que $\widehat{P}_t(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$, entonces por el teorema de inversión se tiene

$$u(x, t) = \int \widehat{P_t * f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Sea $z = x + it$, luego

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_0^\infty e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi t\xi} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i(x+it)\xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i(x-it)\xi} d\xi \\ &= \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \bar{z} \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Ahora definamos

$$iv(z) = \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi - \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \bar{z} \xi} d\xi.$$

Se puede verificar directamente que v es armónica en \mathbb{R}_+^2 . Además u y v son reales si f es real. También se tiene que $u + iv$ es holomorfa pues

$$(u + iv)(z) = 2 \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) e^{2\pi iz\xi} d\xi,$$

y el integrando es holomorfo con respecto a z . De aquí inferimos que v es el conjugado armónico de u . Para $z = x + it$ obtenemos que

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_0^\infty (-i) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i(x+it)\xi} d\xi - \int_{-\infty}^0 (-i) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i(x-it)\xi} d\xi \\ &= \int_0^\infty (-i) e^{-2\pi t\xi} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi ix\xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 -(-i) e^{2\pi t\xi} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi ix\xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^\infty (-i) \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi ix\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Por el teorema de inversión esto equivale a

$$v(x, t) = Q_t * f(x),$$

donde

$$\widehat{Q}_t(\xi) = (-i) \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|}.$$

Si invertimos la transformada de Fourier de $\widehat{Q}_t(\xi)$ obtenemos el núcleo conjugado de Poisson.

Definición 2.1 *El núcleo conjugado de Poisson Q_t está dado por*

$$Q_t(x) = \frac{x}{\pi(t^2 + x^2)}.$$

Nótese que $Q(x, t) \equiv Q_t(x)$ es una función armónica en \mathbb{R}_+^2 y que $Q_t(x)$ es el conjugado armónico del núcleo de Poisson $P_t(x)$, puesto que para $z = x + it$ se tiene

$$P_t(x) + iQ_t(x) = \frac{t + ix}{\pi(t^2 + x^2)} = \frac{i(x - it)}{\pi(x + it)(x - it)} = \frac{i}{\pi z},$$

la cual es analítica en \mathbb{R}_+^2 .

Dado que $u(x, t) = P_t * f(x)$ y $\{P_t\}_{t>0}$ es una identidad aproximada, tenemos que para $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, se cumple que $u(x, t) \rightarrow f(x)$ en $L^p(\mathbb{R})$ cuando $t \rightarrow 0$.

Nos gustaría obtener una estimación análoga para $v(x, t)$; sin embargo $\{Q_t\}_{t>0}$ no es una identidad aproximada, de hecho Q_t no es integrable para cualquier $t > 0$, pues para $|x| \geq \sqrt{t}$ se tiene

$$|Q_t(x)| = \frac{|x|}{\pi(t^2 + x^2)} \geq \frac{|x|}{2\pi x^2} = \frac{1}{2\pi|x|},$$

y $1/2\pi|x|$ es claramente no integrable. Obsérvese que para $x \neq 0$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q_t(x) = \frac{1}{\pi x}.$$

La función $1/\pi x$ no es localmente integrable, así no es posible definir convolución con funciones suaves.

2.2. El valor principal de $1/x$

La función $1/x \notin \mathbf{S}(\mathbb{R})$, sin embargo define una distribución temperada de la siguiente manera.

Definición 2.2 *El valor principal de $1/x$ es la distribución temperada, denotada $v.p.\frac{1}{x}$, dada por*

$$v.p.\frac{1}{x}(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx, \quad \phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R}). \quad (2.1)$$

Para mostrar que la ecuación (2.1) define efectivamente una distribución temperada notemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{|x|>1} \frac{\phi(x)}{x} dx,$$

como la función $1/x$ es impar se tiene

$$\int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx.$$

Por el teorema del valor medio se sigue que

$$\left| \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\phi(x)}{x} dx \right| \leq C_1 \|\phi'\|_\infty,$$

además

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|>1} \frac{\phi(x)}{x} dx \right| &\leq \int_{|x|>1} \frac{|\phi(x)|}{|x|} dx = \int_{|x|>1} \frac{|x\phi(x)|}{x^2} dx \\ &\leq \|x\phi(x)\|_\infty \int \frac{dx}{x^2} = C_2 \|x\phi(x)\|_\infty, \end{aligned}$$

de lo que se sigue que

$$\left| v.p. \frac{1}{x}(\phi) \right| \leq C(\|\phi'\|_\infty + \|x\phi(x)\|_\infty),$$

lo que prueba que $v.p. \frac{1}{x} \in \mathbf{S}'(\mathbb{R})$.

Proposición 2.3 En $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q_t = \frac{1}{\pi} v.p. \frac{1}{x}.$$

Prueba. Para cada $\epsilon > 0$, sea $\psi_\epsilon(x) = x^{-1} \mathcal{X}_{\{|x|>\epsilon\}}$. Cada ψ_ϵ es acotado, se sigue que cada ψ_ϵ define una distribución temperada. Para $\phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \psi_\epsilon, \phi \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \psi_\epsilon(x) \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx \\ &= v.p. \frac{1}{x}(\phi) = \left\langle v.p. \frac{1}{x}, \phi \right\rangle, \end{aligned}$$

por lo cual

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi_\epsilon = v.p. \frac{1}{x} \text{ en } \mathbf{S}'(\mathbb{R}).$$

Por lo tanto basta con demostrar que en $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(Q_t - \frac{1}{\pi} \psi_t \right) = 0.$$

Sea $\phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \pi Q_t - \psi_t, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x\phi(x)}{t^2 + x^2} dx - \int_{|x|>t} \frac{\phi(x)}{x} dx \\ &= \int_{|x|<t} \frac{x\phi(x)}{t^2 + x^2} dx + \int_{|x|>t} \left(\frac{x}{t^2 + x^2} - \frac{1}{x} \right) \phi(x) dx \quad (\text{sustituyamos } x = ty) \\ &= \int_{|y|<1} \frac{y\phi(ty)}{1 + y^2} dy - \int_{|y|>1} \frac{\phi(ty)}{y(1 + y^2)} dy. \end{aligned}$$

Tenemos que $|y\phi(ty)| \leq M_1$ y $|\phi(ty)| \leq M_2$, también que $\int_{|y|<1} \frac{M_1}{1+y^2} dy < \infty$ y $\int_{|y|>1} \frac{M_2}{y(1+y^2)} dy < \infty$, por lo que el teorema de convergencia dominada implica que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi Q_t - \psi_t, \phi \rangle = \int_{|y|<1} \frac{y\phi(0)}{1+y^2} dy - \int_{|y|>1} \frac{\phi(0)}{y(1+y^2)} dy.$$

Como ambos dominios son simétricos y ambos integrandos son impares se sigue que $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi Q_t - \psi_t, \phi \rangle = 0$ para todo $\phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$, concluyendo así que $\lim_{t \rightarrow 0} (Q_t - \frac{1}{\pi}\psi_t) = 0$. ■

Como consecuencia de la Proposición 2.3 obtenemos que para $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (Q_t * f)(x) = \left(\frac{1}{\pi} v.p. \frac{1}{x} * f \right)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{|y|>t} \frac{f(x-y)dy}{y}.$$

Proposición 2.4 En $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$, se tiene

$$\left(\frac{1}{\pi} p.v. \frac{1}{x} \right)^\wedge(\xi) = (-i) \operatorname{sgn}(\xi).$$

Prueba. Es conocido que la transformada de Fourier es continua en $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$ y como $\lim_{t \rightarrow 0} Q_t = \frac{1}{\pi} v.p. \frac{1}{x}$ en $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$, se sigue que $\lim_{t \rightarrow 0} \widehat{Q}_t = \widehat{\frac{1}{\pi} v.p. \frac{1}{x}}$ en $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$. Además

$$\widehat{Q}_t(\xi) = (-i) \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|},$$

de lo cual se obtiene que para toda $\phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \langle \widehat{Q}_t, \phi \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \int (-i) \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} \phi(\xi) d\xi \\ &= \int (-i) \operatorname{sgn}(\xi) \phi(\xi) d\xi = \langle (-i) \operatorname{sgn}(\xi), \phi(\xi) \rangle, \end{aligned}$$

de lo que se infiere $\lim_{t \rightarrow 0} \widehat{Q}_t = (-i) \operatorname{sgn}(\xi)$ en $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$, y por lo tanto

$$\left(\frac{1}{\pi} p.v. \frac{1}{x} \right)^\wedge(\xi) = (-i) \operatorname{sgn}(\xi).$$

■

2.3. Definición y propiedades de la Transformada de Hilbert

De las proposiciones 2.3 y 2.4 obtenemos la siguiente definición.

Definición 2.5 Sea $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$, la transformada de Hilbert de f , denotada por Hf , está dada por cualquiera de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} Hf &= \lim_{t \rightarrow 0} (Q_t * f) \\ Hf &= \frac{1}{\pi} v.p. \frac{1}{x} * f \\ (Hf)^\wedge(\xi) &= (-i) \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Notemos que (2.2) permite definir la transformada de Hilbert en $L^2(\mathbb{R})$. Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ sea $\{\phi_n\}$ una sucesión en $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ tal que $\phi_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$. Nótese que $\{H\phi_n\}$ es una sucesión de Cauchy, puesto que

$$\begin{aligned} \|H\phi_m - H\phi_n\|_2 &= \|H(\phi_m - \phi_n)\|_2 = \left\| (H(\phi_m - \phi_n))^\wedge(\xi) \right\|_2 \\ &= \|(\phi_m - \phi_n)^\wedge(\xi)\|_2 = \|\phi_m - \phi_n\|_2. \end{aligned}$$

Se sigue que $\{H\phi_n\}$ converge en $L^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto la Transformada de Hilbert de f es la función Hf definida por

$$Hf = \lim_{n \rightarrow \infty} H\phi_n \text{ en } L^2(\mathbb{R}).$$

Veamos que Hf es independiente de la sucesión elegida. Si $\phi_n \rightarrow f$ y $\psi_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$, entonces $\phi_n - \psi_n \rightarrow 0$ en $L^2(\mathbb{R})$ y como

$$\|H\phi_n - H\psi_n\|_2 = \left\| H(\widehat{\phi_n - \psi_n}) \right\|_2 = \left\| (\widehat{\phi_n - \psi_n}) \right\|_2 = \|\phi_n - \psi_n\|_2,$$

entonces $H\phi_n - H\psi_n \rightarrow 0$ en $L^2(\mathbb{R})$.

La transformada de Hilbert satisface las siguientes propiedades en $L^2(\mathbb{R})$.

Proposición 2.6 Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces se tiene

$$\|Hf\|_2 = \|f\|_2, \tag{2.3}$$

$$H(Hf) = -f, \tag{2.4}$$

$$\int Hf \cdot g = - \int f \cdot Hg. \tag{2.5}$$

Prueba. La igualdad (2.3) se satisface puesto que

$$\|Hf\|_2 = \left\| (Hf)\widehat{(\cdot)}(\xi) \right\|_2 = \|\widehat{f}(\xi)\|_2 = \|f\|_2.$$

Por otra parte se tiene

$$(H(Hf))\widehat{(\cdot)}(\xi) = (-i)\operatorname{sgn}(\xi)(Hf)\widehat{(\cdot)}(\xi) = -\widehat{f}(\xi) = (-f)\widehat{(\cdot)}(\xi),$$

y como la transformada de Fourier es una biyección en $L^2(\mathbb{R})$ se obtiene (2.4).

Por último, para demostrar (2.5), se sabe que $\int \widehat{f} \cdot g = \int f \cdot \widehat{g}$, en consecuencia

$$\begin{aligned} \int Hf \cdot g &= \int Hf \cdot \widehat{\widehat{g}} = \int (Hf)\widehat{(\cdot)}(\xi) \cdot \widehat{\widehat{g}}(\xi) d\xi = \int (-i)\operatorname{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{\widehat{g}}(\xi) d\xi \\ &= \int \widehat{f}(\xi) \cdot (H\widehat{g})\widehat{(\cdot)}(\xi) d\xi = \int \widehat{f}(\xi) \cdot (H\widehat{g})(\xi) d\xi \\ &= - \int \widehat{f}(\xi) \cdot (\widetilde{Hg})(\xi) d\xi = - \int f \cdot Hg. \end{aligned}$$

■

2.4. Teoremas de M. Riesz y Kolmogorov

Mostraremos que la definición de la transformada de Hilbert, definida hasta ahora en $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R})$, se puede extender a funciones en $L^p(\mathbb{R})$, para $1 \leq p < \infty$.

Teorema 2.7 (*Teorema de Kolmogorov*) Sea $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$, entonces H es de tipo débil $(1, 1)$:

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Prueba. Supongamos que $f \geq 0$. Sea $\lambda > 0$, por descomposición de Calderón-Zygmund existe una sucesión de intervalos $\{I_j\}$ tales que

$$f(x) \leq \lambda \text{ para casi todo } x \notin \Omega = \bigcup_j I_j,$$

$$|\Omega| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1,$$

$$\lambda < \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \leq 2\lambda.$$

Ahora descompongamos a f como la suma de las funciones g y b , dadas por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \Omega \\ \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f & \text{si } x \in I_j \end{cases}$$

y

$$b(x) = \sum_j b_j(x)$$

donde

$$b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \right) \chi_{I_j}(x).$$

Notemos primero que $\|g\|_1 = \|f\|_1$ pues

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g &= \int_{\Omega^c} f + \int_{\Omega} \left[\sum_i \left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \right) \chi_{I_j} \right] = \int_{\Omega^c} f + \sum_i \left[\int_{I_j} \left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \right) \right] \\ &= \int_{\Omega^c} f + \sum_i \left[\left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \right) |I_j| \right] = \int_{\Omega^c} f + \sum_i \left(\int_{I_j} f \right) = \int_{\Omega^c} f + \int_{\Omega} f = \int_{\mathbb{R}} f. \end{aligned}$$

También nótese que $g \in L^2(\mathbb{R})$ puesto que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g^2 &= \int_{\Omega^c} f^2 + \int_{\Omega} \left[\sum_i \left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \right) \chi_{I_j} \right]^2 = \int_{\Omega^c} f^2 + \int_{\Omega} \left[\sum_i \left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \right)^2 \chi_{I_j} \right] \\ &\leq \int_{\Omega^c} f^2 + \int_{\Omega} \left[\sum_i \left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f^2 \right) \chi_{I_j} \right] = \int_{\Omega^c} f^2 + \sum_i \left[\int_{I_j} \left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f^2 \right) \right] \\ &= \int_{\Omega^c} f^2 + \sum_i \left(\int_{I_j} f^2 \right) = \int_{\Omega^c} f^2 + \int_{\Omega} f^2 = \int_{\mathbb{R}} f^2 < \infty. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que $b \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y $\int b = 0$.

Como $Hf = Hg + Hb$, se sigue que

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R} : |Hg(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R} : |Hb(x)| > \lambda/2\}|.$$

Estimaremos el primer sumando usando (2.3) y que $g(x) \leq 2\lambda$ casi en todas partes.

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R} : |Hg(x)| > \lambda/2\}| &\leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} |Hg(x)|^2 dx = \frac{4}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} [g(x)]^2 dx \\ &= \frac{8}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \frac{8}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} f. \end{aligned}$$

Sea $2I_j$ el intervalo con mismo centro que I_j y con el doble de longitud, y sea $\Omega^* = \bigcup_j 2I_j$. Entonces

$$|\Omega^*| \leq \sum_j |2I_j| = 2 \sum_j |I_j| = 2|\Omega| \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R} : |Hb(x)| > \lambda/2\}| &= |\{x \in \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \notin \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leq |\Omega^*| + |\{x \notin \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1 + \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R} \setminus \Omega^*} |Hb(x)| dx. \end{aligned}$$

Observemos que $\sum_j b_j$ converge a b en $L^2(\mathbb{R})$, pues $\sum_j b_j$ converge a b puntualmente, $b \in L^1(\mathbb{R})$ y $|\sum_j^n b_j| \leq |b|$ para todo n . Por (2.3) se sigue $\sum_j Hb_j$ converge Hb en $L^2(\mathbb{R})$. De aquí que existe una subsucesión $\left\{ \sum_j^{n_k} Hb_j \right\}_k$ que converge casi en todas partes a Hb , es decir

$$Hb(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_j^{n_k} Hb_j(x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R},$$

por lo cual

$$|Hb(x)| \leq \sum_j |Hb_j(x)| \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}.$$

Entonces se tiene que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \Omega^*} |Hb(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R} \setminus \Omega^*} \sum_j |Hb_j(x)| dx = \sum_j \int_{\mathbb{R} \setminus \Omega^*} |Hb_j(x)| dx \leq \sum_j \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} |Hb_j(x)| dx.$$

Para terminar la prueba falta mostrar que

$$\sum_j \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} |Hb_j(x)| dx \leq C \|f\|_1.$$

Primero notemos que si $x \notin 2I_j$, aunque $b_j \notin \mathbf{S}(\mathbb{R})$ se tiene

$$Hb_j(x) = \int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y} dy. \quad (2.6)$$

En efecto, como $b_j \in L^2(\mathbb{R})$, $\|b_j\|_2 \leq \|b\|_2$, considérese $\{\phi_n\}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R})$, tal que $\text{supp } \phi_n \subseteq I_j$ y $\phi_n \rightarrow b_j$ en $L^2(\mathbb{R})$. Para $x \notin 2I_j$ y $y \in I_j$ se tiene $|x-y| > |I_j|/2$, por lo cual

$$H\phi_n(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{y \in I_j: |x-y| > \epsilon\}} \frac{\phi_n(y)}{x-y} dy = \int_{I_j} \frac{\phi_n(y)}{x-y} dy.$$

Dado que $h(y) = \frac{1}{x-y} \in L^2(I_j)$ cuando $x \notin 2I_j$, se sigue que

$$\left| \int_{I_j} \frac{\phi_n(y)}{x-y} dy - \int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y} dy \right| \leq \int_{I_j} \left| \frac{1}{x-y} \right| |\phi_n(y) - b_j(y)| dy \leq \|h\|_2 \|\phi_n - b_j\|_2 \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Puesto que $H\phi_n \rightarrow Hb_j$ en $L^2(\mathbb{R})$, existe una subsucesión $\{H\phi_{n_k}\}_k$ que converge casi en todas partes a Hb_j . Por lo cual

$$Hb_j(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} H\phi_{n_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I_j} \frac{\phi_{n_k}(y)}{x-y} dy = \int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y} dy,$$

lo cual establece (2.6)

Denotemos por c_j el centro de I_j . Se tiene $\int b_j = 0$, luego que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} |Hb_j(x)| dx &= \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} \left| \int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y} dy \right| dx = \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} \left| \int_{I_j} b_j(y) \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j} \right) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} \left(\int_{I_j} |b_j(y)| \frac{|y-c_j|}{|x-y||x-c_j|} dy \right) dx \\ &\leq \int_{I_j} |b_j(y)| \left(\int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} \frac{|y-c_j|}{|x-y||x-c_j|} dx \right) dy, \end{aligned}$$

y puesto que $|y-c_j| \leq |I_j|/2$ y $|x-y| > |x-c_j|/2$, ya que

$$|x-y| \geq |x-c_j| - |y-c_j| \geq |x-c_j| - \frac{|I_j|}{2} > |x-c_j| - \frac{|x-c_j|}{2},$$

obtenemos

$$\int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} |Hb_j(x)| dx \leq \int_{I_j} |b_j(y)| \left(\int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} \frac{|I_j|}{(x-c_j)^2} dx \right) dy.$$

También se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} \frac{|I_j|}{(x - c_j)^2} dx &= \int_{-\infty}^{c_j - |I_j|} \frac{|I_j|}{(x - c_j)^2} dx + \int_{c_j + |I_j|}^{\infty} \frac{|I_j|}{(x - c_j)^2} dx \\ &= \left[-\frac{|I_j|}{(x - c_j)} \right]_{-\infty}^{c_j - |I_j|} + \left[-\frac{|I_j|}{(x - c_j)} \right]_{c_j + |I_j|}^{\infty} = 2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{I_j} |b_j(y)| &= \int_{I_j} \left| \left(f(y) - \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \right) \right| dy \\ &\leq \int_{I_j} f(y) dy + \int_{I_j} \left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \right) dy = 2 \int_{I_j} f(y) dy. \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\sum_j \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} |Hb_j(x)| \leq 2 \sum_j \int_{I_j} |b_j(y)| \leq 4 \sum_j \int_{I_j} f_j(y) \leq 4 \|f\|_1.$$

■

Se ha demostrado que H es de tipo débil $(1, 1)$ para $f \geq 0$. Esto es suficiente, pues una función real se descompone en su parte positiva y en su parte negativa, y una función compleja en su parte real e imaginaria.

Teorema 2.8 (*Teorema de M. Riesz*). *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces H es de tipo fuerte (p, p) , para $1 < p < \infty$, es decir:*

$$\|Hf\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Prueba. Por el Teorema 2.7, H es de tipo débil $(1, 1)$ y por la igualdad (2.3) es de tipo fuerte $(2, 2)$, entonces por Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz, H es de tipo fuerte (p, p) para $1 < p < 2$. Para $p > 2$, se tiene que $p' < 2$ con $1/p + 1/p' = 1$, por lo cual usaremos que H es de tipo fuerte (p', p') y la igualdad (2.5).

$$\begin{aligned} \|Hf\|_p &= \sup \left\{ \left| \int Hf \cdot g \right| : \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \left| \int f \cdot Hg \right| : \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} \\ &\leq \|f\|_p \sup \left\{ \|Hg\|_{p'} : \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} = C_{p'} \|f\|_p. \end{aligned}$$

■

Mediante los teoremas de Kolmogorov y de M. Riesz, extenderemos la definición de la transformada de Hilbert a los espacios $L^p(\mathbb{R})$, para $1 \leq p < \infty$.

Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ que converge a f en $L^1(\mathbb{R})$. Entonces por Teorema de Kolmogorov y la desigualdad de tipo débil $(1, 1)$, $\{Hf_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en medida, es decir para cada $\epsilon > 0$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} |\{x \in \mathbb{R} : |(Hf_n - Hf_m)(x)| > \epsilon\}| = 0.$$

En consecuencia, $\{Hf_n\}_{n=1}^\infty$ converge en medida a una función medible, la cual llamaremos la transformada de Hilbert de f , denotada por Hf , es decir

$$Hf := \lim_{n \rightarrow \infty} Hf_n \text{ en medida.}$$

Sean $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ que converge a f en $L^p(\mathbb{R})$. Por el Teorema de M. Riesz y la desigualdad de tipo fuerte (p, p) , $\{Hf_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{R})$, así $\{Hf_n\}_{n=1}^\infty$ converge a una función en $L^p(\mathbb{R})$ la cual llamaremos la transformada de Hilbert de f , denotada por Hf ,

$$Hf := \lim_{n \rightarrow \infty} Hf_n \text{ en } L^p(\mathbb{R}).$$

El operador H no es de tipo fuerte (p, p) para $p = 1$ o $p = \infty$. Consideremos la función $f = \mathcal{X}_{[0,1]} \in L^p(\mathbb{R})$, para $1 \leq p \leq \infty$. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ en $C_c(\mathbb{R})$, tal que $\text{supp } \phi_n \subset (0, 1)$, $0 \leq \phi_n \leq 1$ y $\phi_n = 1$ en $[1/2^n, 1 - 1/2^n]$. Entonces se tiene que $\phi_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$, luego que $H\phi_n \rightarrow Hf$ en $L^2(\mathbb{R})$ y por lo tanto existe una subsucesión $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ tal que $Hf(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} H\phi_k(x)$ casi en todas partes. Así para casi todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{y \in \mathbb{R} : |x-y| > \epsilon\}} \frac{\phi_k(y)}{x-y} dy.$$

Si $x \in (0, 1)$, para cada k que satisface $x \in [1/2^k, 1 - 1/2^k]$ elíjase $\epsilon_k > 0$ tal que $B(x, \epsilon_k) \subset [1/2^k, 1 - 1/2^k]$, por lo que para $\epsilon < \epsilon_k$ se tiene

$$\begin{aligned}
Hf(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{1/2^k}^{x-\epsilon} \frac{dy}{x-y} - \int_{x+\epsilon}^{1-1/2^k} \frac{dy}{y-x} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left([-\ln(x-y)]_{y=1/2^k}^{y=x-\epsilon} - [\ln(y-x)]_{y=x+\epsilon}^{y=1-1/2^k} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [-\ln(\epsilon) + \ln(x - 1/2^k) - \ln(1 - 1/2^k - x) + \ln(\epsilon)] \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} [\ln(x - 1/2^k) - \ln(1 - 1/2^k - x)] = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|.
\end{aligned}$$

De manera similar obtenemos que $Hf(x) = \pi^{-1} \ln |x/(x-1)|$ para $x \notin [0, 1]$. La función $\ln |x/(x-1)|$ no es integrable y tampoco es acotada.

CAPÍTULO 3

OPERADORES DE CALDERÓN-ZYGMUND

La expresión “operador integral singular” hace mención a dos propiedades de operadores que estudiaremos. Son definidos como integrales,

$$Tf(x) = \int K(x, y) f(y) dy,$$

donde K es singular de alguna manera. En este capítulo definiremos operador de Calderón-Zygmund y probaremos el acotamiento en L^p . Nuestra exposición estará basada en las referencias [2], [6], [22].

Con el objeto de motivar la definición de esta familia de operadores, empezaremos dando algunos ejemplos.

3.1. Ejemplos de Operadores Integrales Singulares

Ejemplo 3.1 La transformada de Hilbert.

Para $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$, sea

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{y \in \mathbb{R}: |x-y| > \epsilon\}} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

La transformada de Hilbert es un ejemplo donde el integrando es no integrable, por esta razón se utiliza el término “integral singular”. Si el núcleo $(x-y)^{-1}$ se reemplaza por su valor absoluto, entonces el límite del valor principal no existe en x siempre que $f(x) \neq 0$. De aquí que la definición de la transformada depende de la cancelación de la integral. De hecho la teoría de operadores integrales singulares descansa en tal cancelación.

Ejemplo 3.2 Las transformadas de Riesz.

Sea $n \geq 2$ y $1 \leq j \leq n$. Para $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ sea

$$R_j f(x) = C_n \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n: |x-y| > \epsilon\}} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y) dy,$$

donde

$$C_n = \Gamma((n+1)/2) / \pi^{(n+1)/2}.$$

Las transformadas de Riesz constituyen una generalización directa a varias variables de la transformada de Hilbert. El límite en la definición existe para toda $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ debido a la cancelación. La j -ésima transformada de Riesz satisface:

$$(R_j f)^\wedge(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{f}(\xi).$$

Las transformadas de Riesz tienen un interés particular en el análisis de ecuaciones diferenciales parciales. Para $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = - (R_i R_j \Delta f),$$

puesto que

$$(R_i R_j \Delta f)^\wedge(\xi) = \left(i \frac{\xi_i}{|\xi|} \right) \left(i \frac{\xi_j}{|\xi|} \right) \widehat{\Delta f}(\xi) = \xi_i \xi_j \widehat{f}(\xi) = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^\wedge(\xi).$$

También se tiene que

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2} \leq \|\Delta f\|_{L^2},$$

ya que

$$\left\| \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^\wedge(\xi) \right\|_{L^2} = \left\| \left(i \frac{\xi_i}{|\xi|} \right) \left(i \frac{\xi_j}{|\xi|} \right) \widehat{\Delta f}(\xi) \right\|_{L^2} \leq \|\widehat{\Delta f}\|_{L^2}.$$

Es decir, el laplaciano controla todas las derivadas parciales de orden 2 en la norma L^2 .

Ejemplo 3.3 Transformadas con núcleo homogéneo.

Definamos

$$T_\Omega(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| > \epsilon\}} \frac{\Omega(x_j - y_j)}{|x-y|^n} f(y) dy.$$

donde Ω es una función que satisface $\Omega(\lambda x) = \Omega(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$, y además como función definida en la esfera unitaria S^{n-1} satisface que

$$\Omega \in L^1(S^{n-1}) \quad y \quad \int_{S^{n-1}} \Omega(\sigma) d\sigma = 0.$$

Para $n \geq 2$, si $\Omega(x) = x_j/|x|$, obtenemos la transformada de Riesz R_j . Para $n = 1$, con $\Omega(x) = \text{sgn}(x)$, se tiene la transformada de Hilbert. En ambos casos Ω es impar.

Ejemplo 3.4 La transformada de Beurling.

Para $(x, y), (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, sea $z = x + iy$ y $\zeta = \xi + i\eta$, por lo que la transformada de Fourier se puede representar por

$$\widehat{f}(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(\xi x + \eta y)} f(x + iy) dx dy.$$

Sea

$$m(\xi, \eta) = \frac{\xi - i\eta}{\xi + i\eta} = \frac{\bar{\zeta}}{\zeta}.$$

Para $f \in L^2$ la transformada de Beurling está dada por

$$(B\widehat{f})(\xi, \eta) := \widehat{f}(\xi, \eta) m(\xi, \eta).$$

Al igual que la transformada de Riesz, la transformada de Beurling es un caso particular de la transformada con núcleo homogéneo. Para $f \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$ se tiene que

$$(Bf)(z) = -\frac{1}{\pi} v.p. \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{(z-w)^2} d\lambda(w),$$

donde λ denota la medida de Lebesgue en \mathbb{C} . Este operador tiene núcleo

$$K(z) = \frac{1}{z^2} = |z|^{-2} \Omega(z) \quad \text{con } \Omega(z) = \frac{|z|^2}{z^2}.$$

3.2. Operadores integrales de Calderón-Zygmund

En esta sección generalizaremos la teoría de acotamiento en L^p a operadores integrales singulares. Estos operadores serán definidos usando distribuciones. Para motivar la definición, supóngase que se tiene el siguiente operador de tipo convolución

$$Tf(x) = v.p. \int K(x-y) f(y) dy,$$

donde $K(x) = |x|^{-n} \Omega(x/|x|)$, y Ω es de tipo Hölder, es decir, $|\Omega(\theta) - \Omega(\theta')| \leq$

$C|\theta - \theta'|^\alpha$, para $0 < \alpha < 1$. Notemos las siguientes propiedades fundamentales:

$$|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad (3.1)$$

$$|K(x) - K(y)| \leq C \frac{|x - y|^\alpha}{|x|^{n+\alpha}} \text{ si } |x - y| \leq \frac{|x|}{2}. \quad (3.2)$$

Para $x \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| &\leq \left| \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) - \Omega\left(\frac{x_0}{|x_0|}\right) \right| + \left| \Omega\left(\frac{x_0}{|x_0|}\right) \right| \\ &\leq C \left| \frac{x}{|x|} - \frac{x_0}{|x_0|} \right|^\alpha + \left| \Omega\left(\frac{x_0}{|x_0|}\right) \right| \leq C2^\alpha + \left| \Omega\left(\frac{x_0}{|x_0|}\right) \right|, \end{aligned}$$

Así Ω es acotada en S^{n-1} , por lo que se sigue (3.1).

Para mostrar (3.2) veamos que

$$\begin{aligned} |K(x) - K(y)| &= \left| \frac{1}{|x|^n} \left[\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) - \Omega\left(\frac{y}{|y|}\right) \right] + \Omega\left(\frac{y}{|y|}\right) \left[\frac{1}{|x|^n} - \frac{1}{|y|^n} \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{|x|^n} \left| \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) - \Omega\left(\frac{y}{|y|}\right) \right| + \left| \Omega\left(\frac{y}{|y|}\right) \right| \left| \frac{1}{|x|^n} - \frac{1}{|y|^n} \right| = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Para S_1 se tiene

$$\begin{aligned} S_1 &\leq C \frac{|x| |y| - y |x|^\alpha}{|x|^\alpha |y|^\alpha |x|^n} \leq C \frac{|x| |y| - x |x|^\alpha}{|y|^\alpha |x|^{n+\alpha}} + C \frac{|x| |x| - y |x|^\alpha}{|y|^\alpha |x|^{n+\alpha}} \\ &\leq \frac{C |x|^\alpha}{|y|^\alpha} \left[\frac{||y| - |x||^\alpha}{|x|^{n+\alpha}} + \frac{|x - y|^\alpha}{|x|^{n+\alpha}} \right] \leq C2 \cdot 2^\alpha \frac{|x - y|^\alpha}{|x|^{n+\alpha}}, \end{aligned}$$

dado que $|x|/2 < |y|$.

Por otro lado para S_2 ,

$$\begin{aligned} S_2 &\leq C \left| \frac{|y|^n - |x|^n}{|x|^n |y|^n} \right| = C ||y| - |x|| \left| \frac{|y|^{n-1} + |x| |y|^{n-2} + \dots + |x|^{n-1}}{|x|^n |y|^n} \right| \\ &\leq C \frac{|x - y| C_n |y|^{n-1}}{|x|^n |y|^n} \text{ pues } |x| < 2|y| \\ &= C_n |x - y|^\alpha \frac{|x - y|^{1-\alpha}}{|x|^n |y|} \leq C_n |x - y|^\alpha \frac{|x|^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}} \frac{1}{|x|^n} \frac{2}{|x|} = C_{n,\alpha} \frac{|x - y|^{1-\alpha}}{|x|^{n+\alpha}}, \end{aligned}$$

por lo que obtenemos (3.2).

Consideraremos operadores integrales singulares que no necesariamente son de tipo convolución, es decir operadores de la forma

$$Tf(x) = \int K(x, y) f(y) dy.$$

Ejemplo 3.5 La integral de Cauchy definida sobre la gráfica de una función. Sea $\Gamma = \{(x, A(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ la gráfica de la función $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene regularidad de tipo Lipschitz, es decir, $|A(x) - A(y)| \leq M|x - y|$. Dada $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$, la integral de Cauchy de f sobre la gráfica Lipschitz $\Gamma = (t, A(t))$ está definida por

$$C_{\Gamma}f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(1 + iA'(t))}{t + iA(t) - z} dt$$

la cual representa una función analítica en el abierto $\Omega_+ = \{z = x + iy : y > A(x)\}$. Sus valores frontera en Γ están dados por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_{\Gamma}f(x + i(A(x) + \epsilon))$$

lo cual nos conduce a considerar el operador

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x - y + i(A(x) - A(y))} dy.$$

La integral de Cauchy no es un operador del tipo convolución, y lo incluiremos en la familia de operadores integrales singulares. Por lo tanto extenderemos el concepto de operador integral singular.

Se denotará $\mathcal{D} = C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, y por \mathcal{D}' al espacio de distribuciones en $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, esto es, el dual de $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. \mathcal{D}' está dotado de la topología de la convergencia puntual, es decir, $T_k \rightarrow T$ en dicha topología si y solo si $\langle T_k, \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle$ para todo $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 3.6 Un **núcleo** K en \mathbb{R}^n es una función $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x, y) : x = y\} \rightarrow \mathbb{C}$ la cual es localmente integrable fuera de la diagonal. Diremos que un núcleo K en \mathbb{R}^n es un **núcleo estándar**, si existen $\delta > 0$ y $0 < C < \infty$, tales que para todo par de puntos distintos $x, y \in \mathbb{R}^n$ y toda $z \in \mathbb{R}^n$ con $|x - z| < |x - y|/2$ se cumple:

$$|K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n}, \quad (3.3)$$

$$|K(x, y) - K(z, y)| \leq C \frac{|x - z|^{\delta}}{|x - y|^{n+\delta}}, \quad (3.4)$$

$$|K(y, x) - K(y, z)| \leq C \frac{|x - z|^\delta}{|x - y|^{n+\delta}}. \quad (3.5)$$

Algunos ejemplos básicos de núcleo estándar son $(x - y)^{-1}$ y $|x - y|^{-1}$ en \mathbb{R} , y los ejemplos previamente vistos en la sección anterior. Veamos que la condición $|\nabla K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n-1}$ implica (3.4) y (3.5).

Se tiene que

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K(z, y)| &= |\nabla K((1-t)(x, y) + t(z, y)) \cdot (-x + z, 0)| \quad \text{para algún } t \in (0, 1) \\ &\leq |\nabla K[(1-t)x + tz, y]| |z - x| \leq C \frac{|z - x|}{|(1-t)x + tz - y|^{n+1}} \\ &= C \frac{|x - z|}{|x - y - t(x - z)|^{n+1}} \leq C \frac{|x - z|}{(|x - y| - t|x - z|)^{n+1}} \\ &\leq C \frac{|x - z|}{(1-t/2)^{n+1} |x - y|^{n+1}} \leq C_n \frac{|x - z|}{|x - y|^{n+1}}. \end{aligned}$$

Definición 3.7 *Un operador lineal y continuo $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ está asociado a un núcleo K si para cada pareja $f, g \in \mathcal{D}$ con soportes ajenos se verifica*

$$\langle Tf, g \rangle = \int \int K(x, y) f(y) g(x) dy dx. \quad (3.6)$$

Además si K es un núcleo estándar, diremos que T es un **Operador Integral Singular**.

Notemos las siguientes observaciones importantes:

(I) La Transformada de Hilbert está asociada al núcleo $\pi^{-1}(x - y)^{-1}$; el operador identidad I está asociado al núcleo $K(x, y) = 0$ porque $If(x) = 0$ si $x \notin \text{sop } f$. Un operador está asociado a lo más a un núcleo, sin embargo, un mismo núcleo puede estar asociado a distintos operadores. Por ejemplo, el núcleo cero está asociado al operador identidad y al operador de multiplicación puntual por una función acotada.

(II) La condición (3.6) es equivalente a que para todo $x \notin \text{sop } \phi$, $\phi \in \mathcal{D}$ se cumple

$$T\phi(x) = \int K(x, y) \phi(y) dy.$$

Definición 3.8 *Un operador $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$, es un operador de Calderón-Zygmund si se cumple que:*

- (I) *T es un Operador Integral Singular.*
- (II) *T puede extenderse a un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 3.9 *Sea T un operador de Calderón-Zygmund, entonces T es de tipo débil $(1, 1)$.*

Prueba. Sean $f \in \mathcal{D}$ y $\lambda > 0$. Ahora sea $C_\lambda = \{Q_j\}$ la familia de cubos de Calderón-Zygmund de $|f|$ correspondientes a λ . Así

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f| \leq 2^n \lambda, \text{ para todo } j,$$

$$|f(x)| \leq \lambda \text{ para casi todo } x \notin \Omega = \bigcup_j Q_j,$$

$$|\Omega| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1.$$

Ahora sea $f = g + b$, donde

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \Omega \\ \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f & \text{si } x \in Q_j \end{cases}$$

y

$$b(x) = \sum_j b_j(x),$$

con

$$b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f \right) \chi_{Q_j}(x).$$

Por lo anterior tenemos que:

$$\int_{Q_j} b_j(x) = 0, \tag{I}$$

$$\int |b| = \sum_j \int_{Q_j} |b_j| \leq \sum_j \left[\int_{Q_j} |f| + \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f |Q_j| \right] \leq 2 \|f\|_1, \tag{II}$$

$$\|g\|_1 = \|f\|_1, \quad (\text{III})$$

$$|g| \leq 2^n \lambda \text{ casi en todas partes.} \quad (\text{IV})$$

Dado que $Tf = Tg + Tb$, se sigue

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \lambda/2\}|.$$

Por una parte

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \lambda/2\}| &\leq \left(\frac{2}{\lambda} \|Tg\|_2\right)^2 \leq \left(\frac{2C}{\lambda} \|g\|_2\right)^2 \\ &\leq \frac{4C^2}{\lambda^2} 2^n \lambda \|g\|_1 = \frac{C}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Sea $\Omega^* = \bigcup_j Q_j^*$, donde $Q_j^* = 2\sqrt{n}Q_j$, notemos que,

$$|\Omega^*| \leq (2\sqrt{n})^n \sum_j |Q_j| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \lambda/2\}| &= |\{x \in \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \notin \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leq |\Omega^*| + |\{x \notin \Omega^* : |Tb(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 + \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} |Tb(x)| dx. \end{aligned}$$

La serie $\sum_j b_j$ converge a b en $L^2(\mathbb{R}^n)$, como T es acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ se sigue que $\sum_j Tb_j$ converge Tb en $L^2(\mathbb{R}^n)$. De aquí que

$$|Tb(x)| \leq \sum_j |Tb_j(x)| \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Denotemos por y_j al centro de Q_j , así

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} |Tb(x)| dx &\leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} \sum_j |Tb_j(x)| dx = \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} |Tb_j(x)| dx \quad (3.7) \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |Tb_j(x)| dx = \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \left| \int_{Q_j} K(x, y) b_j(y) dy \right| dx \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \int_{Q_j} |K(x, y) - K(x, y_j)| |b_j(y)| dy dx. \end{aligned}$$

Puesto que $y \in Q_j$ y $x \notin 2\sqrt{n}Q_j$, se tiene $2|y - y_j| \leq \sqrt{n}|Q_j|^{1/n} < |x - y_j|$, luego

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} |Tb(x)| dx &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \int_{Q_j} \frac{|y - y_j|^\delta}{|x - y_j|^{n+\delta}} |b_j(y)| dy dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{|x-y_j| > 2|y-y_j|} \frac{|y - y_j|^\delta}{|x - y_j|^{n+\delta}} dx dy. \end{aligned}$$

Ahora vemos que

$$\begin{aligned} \int_{|x-y_j| > 2|y-y_j|} \frac{|y - y_j|^\delta}{|x - y_j|^{n+\delta}} dx &= |y - y_j|^\delta \int_{|u| > 2|y-y_j|} \frac{du}{|u|^{n+\delta}} \\ &= |y - y_j|^\delta \int_{2|y-y_j|}^\infty |S^{n-1}| \frac{r^{n-1}}{r^{n+\delta}} dr \\ &= |y - y_j|^\delta |S^{n-1}| \frac{r^{-\delta}}{\delta} \Big|_{r=2|y-y_j|}^{r=\infty} = \frac{|S^{n-1}|}{\delta 2^\delta} = C_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^*} |Tb(x)| dx \leq \frac{C_n}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| = \frac{C_n}{\lambda} \|b\|_1 \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1.$$

Se concluye que

$$\{x \in \mathbb{R} : |Tb(x)| > \lambda/2\} \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1.$$

■

Si $T : L^p \rightarrow L^p$, $1 < p < \infty$, es un operador acotado con núcleo asociado $K(x, y)$, el operador adjunto $T^* : L^{p'} \rightarrow L^{p'}$ tiene asociado el núcleo $K(y, x)$ ya que

$$\begin{aligned} \langle T^*(g), f \rangle &= \langle g, T(f) \rangle = \int g(s) Tf(s) ds = \int g(s) \int K(s, t) f(t) dt ds \\ &= \int \int K(s, t) g(s) ds f(t) dt. \end{aligned}$$

Y puesto que T es acotado si y solo si T^* es acotado, entonces obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.10 *Si T es un operador de Calderón-Zygmund, entonces T es de tipo fuerte (p, p) , $1 < p < \infty$.*

Prueba. Sea $K(x, y)$ el núcleo estándar al cual el operador T está asociado. Por Teorema 3.9 T es de tipo débil $(1, 1)$ y por hipótesis es de tipo fuerte $(2, 2)$. Por interpolación, T es de tipo fuerte (p, p) , para $1 < p < 2$.

Si $p > 2$ entonces $p' < 2$, dado que el operador adjunto $T^* : L^{p'} \rightarrow L^{p'}$ tiene asociado el núcleo estándar $K(y, x)$, por Teorema 3.9 el operador T^* es de tipo fuerte (p', p') , de lo que se sigue que T es de tipo fuerte (p, p) . ■

Corolario 3.11 *Se obtiene la misma conclusión que en el Teorema 3.9, si en el núcleo $K(x, y)$ en lugar de suponer las estimaciones (3.4) y (3.5), suponemos la condición de Hörmander, a saber:*

$$\int_{|x-y|>2|y-z|} |K(x, y) - K(x, z)| dx \leq C \quad y$$

$$\int_{|x-y|>2|x-w|} |K(x, y) - K(w, y)| dy \leq C.$$

La prueba es exactamente igual a la del Teorema 3.9, solo que hay que usar la condición de Hörmander en la estimación (3.7).

3.3. El acotamiento L^p para ciertos operadores

De acuerdo al Teorema 3.9 y por interpolación, la pregunta sobre el acotamiento L^p , $1 < p < \infty$, de operadores integrales singulares se reduce a obtener el acotamiento en L^2 . Para ciertos casos, este acotamiento en L^2 se traduce en propiedades expresadas a través de la transformada de Fourier.

Teorema 3.12 *Supóngase que el operador integral singular T cumple $(Tf)\widehat{(\xi)} = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$, para cierta función $m(\xi)$ y para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces T puede extenderse a un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Prueba. Supongamos que $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\|Tf\|_2 = \|\widehat{Tf}\|_2 = \|m\widehat{f}\|_2 \leq \|m\|_\infty \|\widehat{f}\|_2 = \|m\|_\infty \|f\|_2.$$

Ahora supóngase que $m \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, defínase f_N por medio de $\widehat{f_N} = \chi_{E_N}$ donde $E_N \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto acotado de medida positiva donde $|m(\xi)| \geq N$ para todo $\xi \in E_N$. Entonces

$$\|Tf_N\|_2 = \|\widehat{Tf_N}\|_2 = \|m\widehat{f_N}\|_2 = \|m\chi_{E_N}\|_2 \geq N \|\chi_{E_N}\|_2 = N \|f_N\|_2,$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, y así inferimos que T no es acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$. ■

CAPÍTULO 4

TEORÍA DE PESOS DE MUCKENHOUP

Las desigualdades obtenidas en los capítulos 1 y 3 en la medida de Lebesgue para cierto tipo de operadores, se pueden generalizar a un tipo particular de medidas de la forma $w(x) dx$. En este capítulo nos dedicaremos a estudiar dichas desigualdades. Daremos condiciones necesarias y suficientes en w para que el operador maximal de Hardy-Littlewood M sea de tipo fuerte (p, p) con respecto a w , para $1 < p < \infty$. Gracias al “control” que la función maximal ejerce sobre los operadores de Calderón-Zygmund, obtendremos también la desigualdad de tipo fuerte (p, p) , para $1 < p < \infty$, y de tipo débil $(1, 1)$ para dicha familia de operadores. La obtención de todas estas desigualdades forma parte del estudio de la teoría A_p , introducida por B. Muckenhoupt, R. Hunt and R. Wheeden en [16] y [17] y desarrollada posteriormente por otros autores (ver [3], [20], [1], [15], [14], [19]). Desarrollaremos nuestra exposición basados en las referencias [9], [6], [5], [11], [24].

4.1. La condición A_p

Definición 4.1 *Dado un espacio de medida, un peso es una función medible w con valores en $[0, \infty]$.*

Los problemas que abordaremos serán los siguientes:

Problema 4.2 *Dado $1 < p < \infty$, determinar aquellos pesos w en \mathbb{R}^n para los cuales el operador maximal M es de tipo fuerte (p, p) con respecto a la medida $w(x) dx$, esto es, existe $C > 0$ tal que*

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x) dx \right]^{1/p} \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right]^{1/p}. \quad (4.1)$$

Si generalizamos el problema anterior a un par de pesos (u, w) obtenemos lo siguiente.

Problema 4.3 Dado $1 < p < \infty$, determinar aquellos pares de pesos (u, w) en \mathbb{R}^n , para los cuales el operador maximal M es de tipo fuerte (p, p) con respecto al par de medidas $u(x) dx$ y $w(x) dx$, es decir, para los cuales existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p u(x) dx \right]^{1/p} \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right]^{1/p}. \quad (4.2)$$

También nos interesa obtener desigualdades del tipo débil, por lo que tenemos

Problema 4.4 Dado $1 \leq p < \infty$, determinar aquellos pares de pesos (u, w) en \mathbb{R}^n , para los cuales el operador maximal M es de tipo débil (p, p) con respecto al par de medidas $u(x) dx$ y $w(x) dx$, es decir, para los cuales se tiene la desigualdad

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq Ct^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx, \quad (4.3)$$

para cierta constante $C > 0$, donde para un conjunto E , $u(E)$ significa

$$u(E) = \int_E u(x) dx.$$

Empezaremos abordando el Problema 4.4. Supongamos que el par de pesos (u, w) satisface la desigualdad (4.3) para una p dada, $1 \leq p < \infty$, y para toda función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y toda $t > 0$.

Sea $f \geq 0$, sea Q un cubo tal que $f_Q > 0$. Se tiene que

$$f_Q \leq M(f\chi_Q)(x) \text{ para todo } x \in Q.$$

Puesto que

$$M(f\chi_Q)(x) = \sup_{R \ni x} \frac{1}{|R|} \int_{R \cap Q} f(y) dy \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy,$$

entonces, para cada t con $0 < t < f_Q$ se verifica

$$Q \subset E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : M(f\chi_Q)(x) > t\}.$$

Por la desigualdad (4.3) obtenemos

$$u(Q) \leq Ct^{-p} \int_Q f(x)^p w(x) dx.$$

Ahora tomamos límite cuando t tiende a f_Q para llegar a

$$(f_Q)^p u(Q) \leq C \int_Q f(x)^p w(x) dx. \quad (4.4)$$

Si S es un subconjunto medible de Q , podemos reemplazar f en (4.4) por $f \chi_S$, así

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_S f(x) dx \right)^p u(Q) \leq C \int_S f(x)^p w(x) dx. \quad (4.5)$$

Nótese que (4.5) es equivalente a (4.4). Con $f(x) \equiv 1$ en (4.5) obtenemos

$$\left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^p u(Q) \leq C w(S). \quad (4.6)$$

De (4.6) podemos extraer la siguiente información acerca del par de pesos (u, w) .

Proposición 4.5 *Sea (u, w) un par de pesos para los cuales el operador maximal M es de tipo débil (p, p) . Entonces*

- (a) $w(x) > 0$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, a menos que $u(x) = 0$ casi en todas partes.
- (b) u es localmente integrable, a menos que $w(x) = \infty$ casi en todas partes.

Prueba. Para probar (a), supongamos que $w(x) = 0$ en un conjunto S de medida positiva, sin pérdida de generalidad supongamos que S es acotado, esto implica que $w(S) = 0$; por (4.6) se sigue que $u(Q) = 0$ para todo cubo Q que contiene a S , en consecuencia $u(x) = 0$ casi para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Ahora probaremos (b). Si $u(Q) = \infty$, para algún cubo Q , consecuentemente $u(Q') = \infty$ para cualquier cubo Q' tal que $Q \subset Q'$, (4.6) conlleva a $w(S) = \infty$ para cualquier conjunto S con medida positiva, de lo que se deduce que $w(x) = \infty$ casi en todas partes. ■

Derivaremos una condición necesaria sobre el par de pesos (u, w) , a fin de que la condición de tipo débil se satisfaga para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$.

Si $p = 1$, la desigualdad (4.6) se puede escribir de la forma

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \leq C \frac{1}{|S|} \int_S w(x) dx. \quad (4.7)$$

La desigualdad (4.7) es válida para todo cubo Q y todo conjunto $S \subset Q$ con $|S| > 0$. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a > \inf es_Q(w) = \inf \{t > 0 : |\{x \in Q : w(x) < t\}| > 0\},$$

así, el conjunto $S_a = \{x \in Q : w(x) < a\}$ tiene medida positiva. Sustituyendo el conjunto S en (4.7) por S_a obtenemos

$$\frac{u(Q)}{|Q|} \leq Ca.$$

Puesto que esta desigualdad se verifica para todo $a > \inf es_Q(w)$, concluimos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q u(y) dy \leq C \inf es_Q(w) \leq Cw(x) \text{ para casi toda } x \in Q. \quad (4.8)$$

Mostraremos que (4.8) es equivalente a:

$$M(u)(x) \leq Cw(x) \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.9)$$

Es claro que (4.9) implica (4.8) para todo cubo Q . Recíprocamente, si (4.8) se cumple para todo cubo Q , entonces veremos que el conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : M(u)(x) > Cw(x)\}$$

tiene medida cero. Si $x \in \mathbb{R}^n$, cumple que $M(u)(x) > Cw(x)$, entonces existe un cubo Q que contiene a x para el cual

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q u(y) dy > Cw(x).$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que Q tiene vértices con todas sus coordenadas racionales. Por consiguiente, el conjunto B está contenido en una unión numerable de conjuntos de medida cero, y así B tiene medida cero.

Definición 4.6 *La condición (4.9),*

$$M(u)(x) \leq Cw(x) \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n,$$

se denomina la condición A_1 para el par de pesos (u, w) . Cuando se satisface decimos que el par de pesos (u, w) pertenece a la clase A_1 .

Veremos a A_1 como una colección de pares de pesos (u, w) . La constante A_1 será la C más pequeña para la cual se verifica (4.9).

En los cálculos anteriores hemos visto que si M es de tipo débil $(1, 1)$ con respecto al par (u, w) , entonces $(u, w) \in A_1$, es decir, la condición A_1 es una condición necesaria para que M sea de tipo débil $(1, 1)$ con respecto al par (u, w) . A continuación veremos que A_1 también es suficiente para garantizar desigualdad de tipo débil $(1, 1)$.

Proposición 4.7 *El operador maximal de Hardy-Littlewood M es de tipo débil $(1, 1)$ con respecto al par de pesos (u, w) , si y solo si $(u, w) \in A_1$.*

Prueba. Quedó demostrado que si M es de tipo débil $(1, 1)$ entonces $(u, w) \in A_1$. Supongamos que $(u, w) \in A_1$, por lo que $M(u)(x) \leq Cw(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por Proposición 1.24 se tiene que

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} u(x) dx \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| Mu(x) dx.$$

Así, la condición A_1 nos produce

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq Ct^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| Mu(x) dx \leq Ct^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) dx.$$

■

Enseguida trataremos el caso $1 < p < \infty$. Comenzaremos buscando una condición necesaria para que M sea de tipo débil (p, p) con respecto al par de pesos (u, w) .

Si M es de tipo débil (p, p) con respecto a (u, w) entonces se satisface (4.5), esto es,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_S f(x) dx \right)^p u(Q) \leq C \int_S f(x)^p w(x) dx$$

para toda función $f \geq 0$, todo cubo Q y todo conjunto medible $S \subset Q$. Tomemos f tal que

$$f(x) = (f(x))^p w(x),$$

es decir,

$$f(x) = w(x)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

Esta función no es necesariamente localmente integrable. Fijemos un cubo Q y sea

$$S_j = \left\{ x \in Q : w(x) > \frac{1}{j} \right\} \text{ para } j = 1, 2, \dots$$

En cada S_j , f es acotada, se sigue que $\int_{S_j} f < \infty$, por lo que (4.5) implica

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_{S_j} w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^p \frac{u(Q)}{|Q|} \leq \frac{C}{|Q|} \int_{S_j} w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx.$$

Puesto que las integrales son finitas llegamos a

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_{S_j} w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C.$$

Se tiene $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ y $\cup_{j=1}^{\infty} S_j = \{x \in Q : w(x) > 0\}$, y por (a) de la Proposición 4.5 el conjunto $Q \setminus \cup_{j=1}^{\infty} S_j$ tiene medida cero. Finalmente obtenemos

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C. \quad (4.10)$$

Definición 4.8 Sea $p > 1$, diremos que el par de pesos (u, w) satisface la condición A_p o que pertenece a la clase A_p si existe una constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C,$$

para todo cubo Q . La mas pequeña de tales constantes C se llama la constante A_p para el par (u, w) .

Hemos probado que si M es de tipo débil (p, p) con respecto al par (u, w) , entonces $(u, w) \in A_p$. Es decir, la condición A_p es una condición necesaria para garantizar la desigualdad del tipo débil (p, p) .

Proposición 4.9 Si $(u, w) \in A_p$, entonces u y $w^{\frac{-1}{p-1}}$ son localmente integrables.

Prueba. Si $|Q|^{-1} \int_Q u(x) dx = \infty$, tenemos que $|Q'|^{-1} \int_{Q'} u(x) dx = \infty$ para todo cubo $Q' \supset Q$. Por condición A_p obtenemos $|Q'|^{-1} \int_{Q'} w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx = 0$, de lo cual $w(x)^{\frac{-1}{p-1}} = 0$ casi en todas partes, en consecuencia $w(x) = \infty$ casi en todas partes, el cual es un caso que excluimos.

Análogamente si $|Q|^{-1} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx = \infty$, entonces $u(x) = 0$ casi en todas partes, el cual también es un caso que se excluye. ■

La condición A_1 puede verse como un caso límite de la condición A_p cuando $p \rightarrow 1$. En efecto, hemos visto que la condición A_1 es equivalente a

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \leq C \inf_{es_Q} (w),$$

la cual puede escribirse como

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \sup es_Q (w^{-1}) \leq C.$$

Mientras que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} &= \|w^{-1}\|_{L^{\frac{1}{p-1}}(Q, |Q|^{-1} dx)} \\ &\rightarrow \|w^{-1}\|_{L^\infty(Q)} = \sup es_Q (w^{-1}), \end{aligned}$$

cuando $p \rightarrow 1$, pues $1/(p-1) \rightarrow \infty$.

Similarmente a la Proposición 4.9 tenemos que si $(u, w) \in A_1$ entonces u es localmente integrable y w^{-1} es localmente acotada.

Ahora demostraremos que la condición A_p para el par (u, w) , es una condición suficiente para que el operador M sea tipo débil (p, p) con respecto a (u, w) .

Proposición 4.10 *Sea $1 < p < \infty$. El operador maximal de Hardy-Littlewood M es de tipo débil (p, p) con respecto al par de pesos (u, w) , si y solo si $(u, w) \in A_p$.*

Prueba. Hemos mostrado que si M es de tipo débil (p, p) con respecto a (u, w) entonces $(u, w) \in A_p$. Supongamos que $(u, w) \in A_p$, por la desigualdad Hölder para p y $p' = p/(p-1)$ tenemos que para todo cubo Q y toda $f \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} f_Q &= \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) w(x)^{1/p} w(x)^{-1/p} dx \\ &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{(p-1)/p}. \end{aligned}$$

De lo que obtenemos

$$\begin{aligned} (f_Q)^p u(Q) &\leq \frac{u(Q)}{|Q|} \left(\int_Q f(x)^p w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{(p-1)} \\ &\leq C \int_Q f(x)^p w(x) dx. \end{aligned}$$

Es decir, para todo cubo Q y toda $f \geq 0$ se cumple la desigualdad (4.4).

Nótese que (4.4) implica que $L_{loc}^p(w) \subset L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Ahora mostraremos que la desigualdad (4.4) implica la desigualdad de tipo débil.

En efecto, sea $f \in L^p_{loc}(w)$, y sea $f_k = f \chi_{Q(0,k)}$ para $k \in \mathbb{N}$, por lo que se tiene que $f = \lim f_k$ puntualmente, con $f_k \in L^p(w) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. Si la desigualdad de tipo débil (4.3) se cumple para todo f_k entonces por la igualdad (1.12) de la prueba de la Proposición 1.24 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} u(x) dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_j(x) > t\}} u(x) dx \leq \lim_{j \rightarrow \infty} Ct^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)^p w(x) dx \\ &= Ct^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p w(x) dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos asumir que $f \in L^p(w) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. Sea $t > 0$, por descomposición de Calderón-Zygmund obtenemos una colección de cubos que no se traslapan $\{Q_j\}$ tales que

$$\begin{aligned} \frac{t}{4^n} &< \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \leq \frac{t}{2^n}, \\ \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} &\subset \bigcup_j 3Q_j. \end{aligned}$$

Puesto que (4.4) es equivalente a (4.5), esto es,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_S f(x) dx \right)^p u(Q) \leq C \int_S f(x)^p w(x) dx \quad \text{para } S \subset Q,$$

tomando $Q = 3Q_j$ y $S = Q_j$ tenemos que

$$u(3Q_j) \leq C \left(\frac{1}{|3Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \right)^{-p} \int_{Q_j} f(x)^p w(x) dx.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} u(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) &\leq \sum_j u(3Q_j) \\ &\leq C \sum_j \left(\frac{1}{|3Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \right)^{-p} \int_{Q_j} f(x)^p w(x) dx \\ &\leq C \sum_j 3^{np} \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \right)^{-p} \int_{Q_j} f(x)^p w(x) dx \\ &\leq C 3^{np} 4^{np} t^{-p} \sum_j \int_{Q_j} f(x)^p w(x) dx \\ &\leq Ct^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p w(x) dx. \end{aligned}$$

■

Con lo anteriormente visto, obtenemos que la condición A_p es la respuesta al problema 4.4. Reunimos los resultados en el siguiente teorema.

Teorema 4.11 *Sean u, w pesos en \mathbb{R}^n y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *M es de tipo débil (p, p) con respecto a (u, w) , es decir, existe una constante C tal que para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y toda $t > 0$*

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq Ct^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx.$$

(b) *Existe una constante C tal que para toda función $f \geq 0$ en \mathbb{R}^n y para todo cubo Q se cumple (4.4), es decir*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \right)^p u(Q) \leq C \int_Q f(x)^p w(x) dx.$$

(c) *$(u, w) \in A_p$, esto es, existe una constante C , tal que para todo cubo Q*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C, \text{ para } 1 < p < \infty.$$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \sup_{Q} \text{es}_Q(w^{-1}) \leq C, \text{ para } p = 1.$$

Enseguida mostraremos un resultado de acotamiento fuerte para el operador M que se obtiene como una consecuencia simple del teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

Corolario 4.12 *Sea $(u, w) \in A_p$, entonces para todo q con $p < q < \infty$, el operador maximal M es acotado de $L^q(w)$ a $L^q(u)$, es decir, existe una constante C tal que para todo $f \in L^q(w)$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^q u(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q w(x) dx.$$

Prueba. Por Teorema 4.11, el operador M es de tipo débil (p, p) con respecto a (u, w) . Entonces por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, bastará con demostrar que M es acotado de $L^\infty(w)$ en $L^\infty(u)$. Probaremos que

$$\|Mf\|_{L^\infty(u)} \leq \|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_{L^\infty(w)}.$$

Recordemos que

$$\|f\|_{L^\infty(u)} = \sup \{ \alpha : u(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}) > 0 \},$$

Dado que u es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, se tiene que si α satisface que $u(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}) > 0$, entonces $|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}| > 0$, por lo que

$$\{ \alpha : u(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}) > 0 \} \subset \{ \alpha : |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}| > 0 \},$$

de aquí que $\|Mf\|_{L^\infty(u)} \leq \|Mf\|_\infty$.

Si α cumple que $|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}| > 0$, por Proposición 4.5 se tiene $w(x) > 0$ casi en todas partes, por lo cual $w(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}) > 0$, así

$$\{ \alpha : |\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}| > 0 \} \subset \{ \alpha : w(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}) > 0 \},$$

por lo tanto $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{L^\infty(w)}$.

Para $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \leq \|f\|_\infty,$$

consecuentemente $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. ■

Como caso particular del Corolario 4.12 obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p u(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p Mu(x) dx,$$

para $1 < p < \infty$, puesto que $(u, Mu) \in A_1$.

Enseguida, pasaremos a demostrar algunas propiedades básicas de las clases A_p .

Teorema 4.13 (a) Sea $1 < p < q < \infty$. Entonces $A_1 \subset A_p \subset A_q$.

(b) Sea $1 \leq p < \infty$, $0 < \epsilon < 1$ y $(u, w) \in A_p$. Entonces $(u^\epsilon, w^\epsilon) \in A_{\epsilon p + 1 - \epsilon}$.

(c) Sea $1 < p < \infty$. Entonces $(u, w) \in A_p$ si y solo si $(w^{-\frac{1}{p-1}}, u^{-\frac{1}{p-1}}) \in A_{p'}$, donde p' es el conjugado de p .

Prueba. (a) $A_1 \subset A_p$, pues si $(u, w) \in A_1$ entonces existe una constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \sup es_Q (w^{-1}) \leq C,$$

por consiguiente

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \sup es_Q (w^{-1}) \leq C,$$

es decir $(u, w) \in A_p$.

Sean $1 < p < q < \infty$ y $(u, w) \in A_p$. Entonces $(q-1)^{-1} < (p-1)^{-1}$, por lo que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{q-1}} dx \right)^{q-1} \\ & \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \\ & \leq C. \end{aligned}$$

De lo que obtenemos que $(u, w) \in A_q$.

(b) Sea $(u, w) \in A_p$. Ahora sea $r = \epsilon p + 1 - \epsilon$, de aquí que $r-1 = \epsilon(p-1)$, luego

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x)^\epsilon dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q [w(x)^\epsilon]^{-\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1} \\ & \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right)^\epsilon \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{\epsilon(p-1)} \leq C^\epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(u^\epsilon, w^\epsilon) \in A_{\epsilon p + 1 - \epsilon}$.

Si $(u, w) \in A_1$, entonces por (a) $(u, w) \in A_p$ para todo $p > 1$. Sea $r = \epsilon p + 1 - \epsilon$, por lo tanto se tiene

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x)^\epsilon dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q [w(x)^\epsilon]^{-\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1} \leq C^\epsilon.$$

Tomando límite cuando $p \rightarrow \infty$ se llega a

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x)^\epsilon dx \right) es_Q \sup (w^{-\epsilon}) \leq C^\epsilon,$$

esto es, $(u^\epsilon, w^\epsilon) \in A_1$.

(c) Supongamos que $(u, w) \in A_p$, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \\ &= \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(u(x)^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{-\frac{1}{p'-1}} dx \right] \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right]^{p-1} \leq C, \end{aligned}$$

ahora elevamos a la $(p' - 1)$, de lo que obtenemos

$$\left[\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right] \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(u(x)^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{-\frac{1}{p'-1}} dx \right]^{(p'-1)} \leq C^{(p'-1)}.$$

Se concluye que $(w^{-\frac{1}{p-1}}, u^{-\frac{1}{p-1}}) \in A_{p'}$. Como los roles de p y p' son simétricos, se obtiene del mismo modo la otra implicación. ■

Daremos un ejemplo donde mostraremos que el Corolario 4.12 no se puede extender al caso $p = q$. Encontraremos pesos u, w tales que $(u, w) \in A_p$ y sin embargo M no es acotado de $L^p(w)$ a $L^p(u)$.

Ejemplo 4.14 *Existen pesos u, w tales que $(u, w) \in A_p$ y el operador M no es acotado de $L^p(w)$ a $L^p(u)$.*

Si $p = 1$, tomamos $u \equiv w \equiv 1$, pues sabemos que si $g > 0$ casi en todas partes y es integrable, entonces Mg no es integrable. Este caso nos permite también dar un ejemplo para $p > 1$.

Sea $g \geq 0$, integrable y no trivial, de modo que $Mg \notin L^1$. Tomemos g acotada a fin de poder garantizar que $Mg(x)$ es siempre finita. Entonces $(g, Mg) \in A_1 \subset A_p$, por lo tanto

$$\left((Mg)^{-\frac{1}{p'-1}}, g^{-\frac{1}{p'-1}} \right) = ((Mg)^{1-p}, g^{1-p}) \in A_p.$$

Tomemos $u = (Mg)^{1-p}$, $w = g^{1-p}$, entonces $(u, w) \in A_p$, pero la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p u(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx$$

no se satisface para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, puesto que para $f = g$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p u(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (Mg(x))^p (Mg(x))^{1-p} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} Mg(x) dx = \infty, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (g(x))^p (g(x))^{1-p} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx < \infty. \end{aligned}$$

Del ejemplo anterior concluimos que la condición A_p no da respuesta al Problema 4.3. La condición A_p es necesaria para la desigualdad de tipo fuerte, mas sin embargo no es suficiente.

4.2. Desigualdades con pesos de tipo fuerte

A partir de aquí, enfocaremos nuestra atención en el caso $u = w$. Diremos que $w \in A_p$ si $(w, w) \in A_p$. Así tenemos lo siguiente:

La condición A_1 es

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq Cw(x),$$

casi en todas partes en Q , para todo cubo Q . Lo cual es equivalente a

$$Mw(x) \leq Cw(x),$$

casi en todo \mathbb{R}^n .

La condición A_p , para $1 < p < \infty$, es

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'} dx \right)^{(p-1)} \leq C, \quad (4.11)$$

donde $1 - p' = -1/(p - 1)$ y C es una constante independiente de Q .

Una observación notable la constituye el hecho de que la medida $w(x) dx$ es duplicante, como lo mostramos a continuación.

Proposición 4.15 *Si $w \in A_p$ entonces existe una constante C tal que*

$$w(2Q_0) \leq C2^{np}w(Q_0)$$

para cada cubo Q_0 .

Prueba. Solo basta aplicar la desigualdad (4.6) con $S = Q_0$ y $Q = 2Q_0$. ■

Además, tenemos las siguientes propiedades de los pesos A_p .

Proposición 4.16 (a) $A_p \subset A_q$, para $1 \leq p < q < \infty$.

(b) $w \in A_p$ si y solo si $w^{1-p'} \in A_{p'}$.

(c) Si $w_0, w_1 \in A_1$ entonces $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$.

Prueba. (a) y (b) se siguen del Teorema 4.13. Mostraremos (c).

Sea Q un cubo, dado que $w_i \in A_1$ para $i = 0, 1$, tenemos que para todo $x \in Q$,

$$w_i(x)^{-1} \leq C_i \left(\frac{w_i(Q)}{|Q|} \right)^{-1}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0 w_1^{1-p} \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0^{1-p'} w_1 \right)^{p-1} \\ & \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0 C_1 \left(\frac{w_1(Q)}{|Q|} \right)^{1-p} \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q C_0 \left(\frac{w_0(Q)}{|Q|} \right)^{1-p'} w_1 \right)^{p-1} \\ & = C_1 \left(\frac{w_1(Q)}{|Q|} \right)^{1-p} \frac{w_0(Q)}{|Q|} C_0^{p-1} \left(\frac{w_0(Q)}{|Q|} \right)^{-1} \left(\frac{w_1(Q)}{|Q|} \right)^{p-1} = C. \end{aligned}$$

■

Nuestro objetivo es probar que si $w \in A_p$, con $p > 1$, entonces el operador M es acotado en $L^p(w)$. Para ello mostraremos que existe q tal $q < p$ con $w \in A_q$, así por Teorema 4.11 M será de tipo débil (q, q) , y por Corolario 4.12 M será de tipo fuerte (p, p) . Para mostrar la existencia de tal q usaremos la llamada desigualdad reversa de Hölder. Su nombre se debe a que la desigualdad opuesta es consecuencia inmediata de la clásica desigualdad de Hölder.

Antes demostraremos el siguiente lema que será de mucha utilidad.

Lema 4.17 Sea $w \in A_p$, para $1 \leq p < \infty$. Entonces, para cada α , $0 < \alpha < 1$, existe β , $0 < \beta < 1$ tal que si Q es un cubo y S es un subconjunto medible de Q con $|S| \leq \alpha |Q|$, se verifica que $w(S) \leq \beta w(Q)$.

Prueba. De acuerdo a la desigualdad (4.6)

$$\left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^p w(Q) \leq C w(S),$$

substituyendo S por $Q \setminus S$ tenemos

$$\left(1 - \frac{|S|}{|Q|}\right)^p w(Q) \leq C(w(Q) - w(S)),$$

puesto que $|S| \leq \alpha|Q|$ se sigue que

$$w(S) \leq \left[\frac{C - (1 - \alpha)^p}{C}\right] w(Q),$$

tomando $\beta = 1 - C^{-1}(1 - \alpha)^p$ obtenemos el resultado deseado. ■

Con la ayuda del Lema anterior ya podemos demostrar la desigualdad reversa de Hölder.

Teorema 4.18 (Desigualdad reversa de Hölder). *Sea $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$. Entonces existen constantes $C > 0$ y $\epsilon > 0$ que dependen solo de p y de la constante A_p de w , tales que para cada cubo Q*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\epsilon}\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w. \quad (4.12)$$

Prueba. Fijemos un cubo Q y formemos la descomposición de Calderón-Zygmund de w con respecto a Q a alturas dadas por la sucesión creciente

$$\frac{w(Q)}{|Q|} = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k \dots$$

Para cada λ_k obtenemos una familia de cubos ajenos $\{Q_{k,j}\}$ tales que

$$w(x) \leq \lambda_k \text{ si } x \notin \Omega_k = \bigcup_j Q_{k,j}$$

$$\lambda_k < \frac{1}{|Q_{k,j}|} \int_{Q_{k,j}} w \leq 2^n \lambda_k.$$

Observemos primero que $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$. Si $Q_{k+1,i} \in \{Q_{k+1,j}\}$ entonces

$$\lambda_{k+1} < \frac{1}{|Q_{k+1,i}|} \int_{Q_{k+1,i}} w,$$

por lo que

$$\lambda_k < \frac{1}{|Q_{k+1,i}|} \int_{Q_{k+1,i}} w,$$

esto implica que existe $Q_{k,i} \in \{Q_{k,j}\}$ tal que $Q_{k+1,i} \subset Q_{k,i}$, por lo cual $\bigcup_j Q_{k+1,j} \subset \bigcup_j Q_{k,j}$.

Si fijamos Q_{k,j_0} de la descomposición de Calderón-Zygmund correspondiente a λ_k , entonces $Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}$ es la unión de cubos $Q_{k+1,i}$ de la descomposición correspondiente a λ_{k+1} . Así

$$\begin{aligned} |Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}| &= \sum_i |Q_{k+1,i}| \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \sum_i \int_{Q_{k+1,i}} w \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \int_{Q_{k,j_0}} w \leq \frac{2^n \lambda_k}{\lambda_{k+1}} |Q_{k,j_0}|. \end{aligned}$$

Fijemos $\alpha < 1$ y elijamos los λ_k de modo que $2^n \lambda_k / \lambda_{k+1} = \alpha$, esto es

$$\lambda_k = \frac{(2^n \alpha^{-1})^k w(Q)}{|Q|}.$$

Por lo tanto

$$|Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}| \leq \alpha |Q_{k,j_0}|,$$

por Lema 4.17 existe β , $0 < \beta < 1$, tal que

$$w(Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}) \leq \beta w(Q_{k,j_0}).$$

Ahora sumamos sobre la descomposición de todos los cubos correspondientes a λ_k para obtener:

$$w(\Omega_{k+1}) \leq \beta w(\Omega_k),$$

e iterando obtenemos

$$w(\Omega_k) \leq \beta^k w(\Omega_0).$$

Análogamente

$$|\Omega_k| \leq \alpha^k |\Omega_0|,$$

por lo tanto

$$\left| \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\Omega_k| = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|Q| &= \left| Q \setminus \left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega_k \right) \right| = \left| \bigcup_{k=0}^{\infty} Q \setminus \Omega_k \right| \\
&= \left| (Q \setminus \Omega_0) \cup \left[\bigcup_{k=0}^{\infty} (Q \setminus \Omega_{k+1}) \setminus (Q \setminus \Omega_k) \right] \right| \\
&= \left| (Q \setminus \Omega_0) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k \setminus \Omega_{k+1} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Además, si $x \in \Omega_k \setminus \Omega_{k+1}$, se tiene $w(x) \leq \lambda_{k+1}$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\epsilon} &= \frac{1}{|Q|} \int_{Q \setminus \Omega_0} w^{1+\epsilon} + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}} w^{1+\epsilon} \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \lambda_0^\epsilon \int_{Q \setminus \Omega_0} w + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k+1}^\epsilon \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}} w \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \lambda_0^\epsilon w(Q \setminus \Omega_0) + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k+1}^\epsilon w(\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}) \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \lambda_0^\epsilon w(Q) + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k+1}^\epsilon w(\Omega_k) \\
&\leq \lambda_0^\epsilon \frac{w(Q)}{|Q|} + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^{\infty} (2^n \alpha^{-1})^{(k+1)\epsilon} \lambda_0^\epsilon \beta^k w(\Omega_0). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Fijemos $\epsilon > 0$ de modo que $(2^n \alpha^{-1})^\epsilon \beta < 1$, entonces la serie en (4.13) es convergente, así

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\epsilon} &\leq \lambda_0^\epsilon \frac{w(Q)}{|Q|} + \lambda_0^\epsilon \frac{w(Q)}{|Q|} \sum_{k=0}^{\infty} (2^n \alpha^{-1})^{(k+1)\epsilon} \beta^k \\
&= \lambda_0^\epsilon \frac{w(Q)}{|Q|} + \lambda_0^\epsilon \frac{w(Q)}{|Q|} C = C \lambda_0^\epsilon \frac{w(Q)}{|Q|},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\epsilon} \leq C \left(\frac{w(Q)}{|Q|} \right)^{1+\epsilon},$$

de lo cual se obtiene (4.12). ■

Notemos que si para $\epsilon > 0$ se cumple la desigualdad reversa de Hölder entonces para δ , con $0 < \delta \leq \epsilon$ también se cumple la desigualdad reversa de Hölder, puesto que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\delta} \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w.$$

Como corolario de la desigualdad reversa de Hölder obtendremos la propiedad que necesitamos para probar que $w \in A_p$ implica que M es acotado en $L^p(w)$.

Corolario 4.19 (a) $A_p = \cup_{q < p} A_q$, para $1 < p < \infty$.

(b) Si $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $w^{1+\epsilon} \in A_p$.

(c) Si $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, entonces existe $\delta > 0$ tal que dado un cubo Q y $S \subset Q$

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq C \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^\delta. \quad (4.14)$$

Prueba. (a) Si $w \in A_p$ entonces por la Proposición 4.16, $w^{1-p'} \in A_{p'}$. Por desigualdad reversa de Hölder, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{(1-p')(1+\epsilon)} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w^{1-p'}.$$

Fijemos q tal que $(q' - 1) = (p' - 1)(1 + \epsilon)$, entonces $(p - 1) = (q - 1)(1 + \epsilon)$ y $q < p$, así

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-q'} \right)^{q-1} \leq \left(\frac{C}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{(1+\epsilon)(q-1)},$$

por lo cual

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-q'} \right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{C}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{p-1} \leq C.$$

Se concluye que $w \in A_q$.

(b) Si $p > 1$. Sea $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que w y $w^{1-p'}$ satisfacen la desigualdad reversa de Hölder, esto es

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w,$$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{(1-p')(1+\epsilon)} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w^{1-p'}.$$

De este modo

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\epsilon} \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{(1-p')(1+\epsilon)} \right)^{p-1} &\leq \left(\frac{C}{|Q|} \int_Q w \right)^{1+\epsilon} \left(\frac{C}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{(p-1)(1+\epsilon)} \\ &= C \left[\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{(p-1)} \right]^{1+\epsilon} \\ &\leq C, \end{aligned}$$

por lo cual $w^{1+\epsilon} \in A_p$.

Si $p = 1$. Entonces para cualquier cubo Q

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq Cw(x) \text{ para casi todo } x \in Q,$$

aplicando la desigualdad reversa de Hölder tenemos que para casi todo $x \in Q$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\epsilon} \right) \leq \left(\frac{C}{|Q|} \int_Q w \right)^{1+\epsilon} = C \left(\frac{w(Q)}{|Q|} \right)^{1+\epsilon} \leq Cw(x)^{1+\epsilon},$$

es decir

$$\frac{w^{1+\epsilon}(Q)}{|Q|} \leq Cw^{1+\epsilon}(x),$$

por lo tanto $w^{1+\epsilon} \in A_1$.

(c) Fijemos $S \subset Q$, supongamos que w satisface la Desigualdad Reversa de Hölder con exponente $(1 + \epsilon)$, entonces

$$\begin{aligned} w(S) &= \int_Q \chi_S w \leq \left(\int_Q w^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \left(\int_Q \chi_S^{(1+\epsilon)'} \right)^{\frac{1}{(1+\epsilon)'}} \\ &= \left(\int_Q w^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} |S|^{\frac{1}{(1+\epsilon)'}} = \left(\int_Q w^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} |S|^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \\ &\leq Cw(Q) |Q|^{\frac{-\epsilon}{1+\epsilon}} |S|^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} = Cw(Q) \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}. \end{aligned}$$

Si ahora despejamos obtenemos el resultado deseado con $\delta = \epsilon/(1 + \epsilon)$, esto es,

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq C \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^\delta.$$

■

Por (a) del Corolario 4.19 ha quedado demostrado el siguiente Teorema.

Teorema 4.20 *Sea $1 < p < \infty$, M es acotado en $L^p(w)$ si y solo si $w \in A_p$.*

Definición 4.21 *Si un peso w satisface la condición (4.14), esto es, existe $\delta > 0$ tal que para todo cubo Q y $S \subset Q$*

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq C \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^\delta, \quad (4.15)$$

diremos que $w \in A_\infty$.

El Corolario 4.19 muestra que para cada $1 \leq p < \infty$ se tiene la inclusión $A_p \subset A_\infty$. Aunque no lo demostraremos aquí, puede probarse que en realidad se tiene la siguiente igualdad

$$A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p,$$

lo cual explica el nombre de la familia de pesos que satisface la condición (4.15).

4.3. Pesos A_1

En esta sección daremos una caracterización constructiva de A_1 usando la función maximal de Hardy-Littlewood. Esto, junto con la Proposición 4.16 nos permitirá construir pesos A_p para toda p . El resultado que mostraremos fue probado originalmente en [4].

Teorema 4.22 (a) *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, tal que $Mf(x) < \infty$ casi en todas partes. Si $0 \leq \delta < 1$, entonces $w(x) = [Mf(x)]^\delta$ es un peso A_1 cuya constante A_1 depende solo de δ .*

(b) *Recíprocamente, si $w \in A_1$ entonces existen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \delta < 1$ y una función K tal que $K, K^{-1} \in L^\infty$ de modo que $w(x) = K(x) [Mf(x)]^\delta$.*

Prueba. (a) Para mostrar que $w \in A_1$, será suficiente probar que existe una constante C tal que para todo cubo Q y para casi toda $x \in Q$ se cumple

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q (Mf)^\delta \leq C [Mf(x)]^\delta.$$

Fijemos Q , y descompongamos f como $f = f_1 + f_2$ donde $f_1 = f \chi_{2Q}$ y $f_2 = f - f_1$.

Entonces $Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$, y así para $0 \leq \delta < 1$ se tiene $[Mf(x)]^\delta \leq [Mf_1(x)]^\delta + [Mf_2(x)]^\delta$, luego que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q [Mf(x)]^\delta dx \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q [Mf_1(x)]^\delta dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q [Mf_2(x)]^\delta dx.$$

Puesto que M es de tipo débil $(1, 1)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q [Mf_1(x)]^\delta &= \frac{\delta}{|Q|} \int_0^\infty \lambda^{\delta-1} |\{z \in Q : Mf_1(z) > \lambda\}| d\lambda \\ &\leq \frac{\delta}{|Q|} \int_0^\infty \lambda^{\delta-1} \min \left\{ |Q|, \frac{C}{\lambda} \|f_1\|_1 \right\} d\lambda \\ &\leq \frac{\delta}{|Q|} \int_0^{C\|f_1\|_1/|Q|} \lambda^{\delta-1} |Q| d\lambda + \frac{\delta}{|Q|} \int_{C\|f_1\|_1/|Q|}^\infty C\lambda^{\delta-2} \|f_1\|_1 d\lambda \\ &= \frac{C^\delta \|f_1\|_1^\delta}{|Q|^\delta} + \frac{\delta}{\delta-1} \frac{C}{|Q|} \frac{C^{\delta-1} \|f_1\|_1^{\delta-1}}{|Q|^{\delta-1}} \|f_1\|_1 \\ &= \frac{C_\delta}{|Q|^\delta} \|f_1\|_1^\delta = C_\delta \left(\frac{1}{|Q|} \int_{2Q} |f| \right)^\delta = C_\delta 2^{n\delta} \left(\frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} |f| \right)^\delta \\ &\leq C_\delta 2^{n\delta} [Mf(x)]^\delta, \end{aligned}$$

para $x \in Q$. Para estimar Mf_2 notemos que si $y \in Q$ y R es un cubo tal que $y \in R$ y $\int_R |f_2| > 0$, entonces

$$l(R) > \frac{1}{2} l(Q), \quad (4.16)$$

de lo contrario tendríamos que $R \subset 2Q$, lo cual implicaría $\int_R |f_2| \leq \int_{2Q} |f_2| = 0$. La desigualdad (4.16) implica que existe una constante c tal que $Q \subset cR$. Por lo que para $x \in Q$, $x \in cR$ y se cumple

$$\frac{1}{|R|} \int_R |f_2| \leq \frac{c^n}{|cR|} \int_{cR} |f_2| \leq \frac{c^n}{|cR|} \int_{cR} |f| \leq c^n Mf(x).$$

Así

$$Mf_2(y) \leq c^n Mf(x),$$

para toda $y \in Q$. Por lo tanto

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q [Mf_2(y)]^\delta dy \leq c^n [Mf(x)]^\delta.$$

(b) Si $w \in A_1$, entonces por la desigualdad reversa de Hölder existe $\epsilon > 0$ tal que para todo cubo Q

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w.$$

Por condición A_1 obtenemos

$$[M(w^{1+\epsilon})(x)]^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq CMw(x) \leq Cw(x),$$

para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$. Por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue tenemos que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$w(x) = \lim_{|Q| \rightarrow 0} \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{1+\epsilon} dy \right]^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq [Mf(x)]^\delta \leq Cw(x),$$

donde $f = w^{1+\epsilon}$, $\delta = 1/(1+\epsilon)$. Sea $K(x) = w(x)/[Mf(x)]^\delta$, esto implica que $K, K^{-1} \in L^\infty$ y $w(x) = K(x)[Mf(x)]^\delta$. ■

Observaciones.

(a) En la parte (a) del Teorema 4.22 podemos reemplazar $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, por una medida de Borel finita μ tal que $M\mu(x) < \infty$ casi en todas partes, ya que la desigualdad débil (1, 1) se verifica para tales medidas. En efecto:

$$M\mu(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} d|\mu|(y) = \sup_{r>0} \frac{|\mu|(B_r(x))}{|B_r(x)|}.$$

Sea $E = \{x \in \mathbb{R}^n : M\mu(x) > \lambda\}$ y $x \in E$. Existe $r > 0$ tal que

$$|B_r(x)| < \frac{1}{\lambda} \int_{B_r(x)} d|\mu|(y). \quad (4.17)$$

Como $\mathbb{R}^n = \cup_{k=1}^\infty B_k(0)$, entonces $E = \cup_{k=1}^\infty E_k$ con $E_k = E \cap B_k(0)$. Sea F la familia de bolas con centros en puntos de E_k que cumplan la condición (4.17). Si $E_k \neq \emptyset$, por el Lema de Cubrimiento de Vitali (ver Apéndice B), existe una sucesión de bolas que no se intersectan $\{B_j\}$ tales que $E_k \subset \cup_j 3B_j$. Por lo cual tenemos

$$|E_k| \leq 3^n \sum_j |B_j| < \frac{3^n}{\lambda} \sum_j \int_{B_j} d|\mu|(y) = \frac{3^n}{\lambda} |\mu| \left(\bigcup B_j \right) \leq \frac{3^n}{\lambda} |\mu|(\mathbb{R}^n),$$

Tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ se llega a

$$|E| \leq \frac{3^n}{\lambda} |\mu|(\mathbb{R}^n) = \frac{3^n}{\lambda} \|\mu\|.$$

(b) En particular, si δ es la medida de Dirac en el origen, entonces

$$M\delta(x) = C|x|^{-n}.$$

En efecto, dado que

$$M\delta(x) = \sup_{r>0} \frac{\delta(B_r(x))}{|B_r(x)|} = \sup_{r>0} \frac{C\delta(B_r(x))}{r^n},$$

se tiene que

$$\delta(B_r(x)) = 1 \text{ si } r > |x|,$$

$$\delta(B_r(x)) = 0 \text{ si } r \leq |x|,$$

entonces

$$M\delta(x) = \sup_{r>|x|} \frac{C\delta(B_r(x))}{r^n} = \frac{C}{|x|^n}.$$

(c) Consecuentemente

$$(1) |x|^a \in A_1 \text{ si } -n < a \leq 0.$$

$$(2) |x|^\alpha |x|^{\beta(1-p)} \in A_p \text{ si } -n < \alpha \leq 0 \text{ y } -n < \beta \leq 0.$$

Por (b) tenemos $M\delta(x) = C_n|x|^{-n}$, ahora por Teorema 4.22 $(C_n|x|^{-n})^\beta \in A_1$ si $0 \leq \beta < 1$. Tomemos $a = -n\beta$, entonces $C_n|x|^a \in A_1$ si $-n < a \leq 0$. La propiedad (2) se sigue de (1) y de la Proposición 4.16.

4.4. Desigualdades con peso para integrales singulares

En esta sección probaremos desigualdades con peso para operadores de Calderón-Zygmund. Recordemos que un operador de Calderón-Zygmund es un operador acotado en L^2 tal que para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $x \notin \text{sop } f$

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy$$

donde K es un núcleo estándar.

Empezaremos probando un par de lemas, que nos permitirán concluir, como veremos en la prueba del Teorema 4.25 que un operador de Calderón-Zygmund se puede “controlar” por medio de la función maximal de Hardy-Littlewood.

Lema 4.23 Si T es un operador de Calderón-Zygmund, entonces para cada $s > 1$ se tiene

$$M^\#(Tf)(x) \leq C_s [M(|f|^s)(x)]^{1/s},$$

donde $M^\#$ es el operador maximal sharp.

Prueba. Fijemos $s > 1$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y Q un cubo tal que $x \in Q$.

Notemos que para cualquier constante a se tiene

$$\int_Q |f_Q - a| \leq \int_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - a| dy dx = \int_Q |f(y) - a| dy = \int_Q |f(x) - a| dx,$$

de aquí obtenemos

$$\int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq \int_Q |f(x) - a| dx + \int_Q |a - f_Q| dx \leq 2 \int_Q |f(x) - a| dx.$$

Por lo tanto bastará con demostrar que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf(y) - a| dy \leq C_s [M(|f|^s)(x)]^{1/s}.$$

Sea $Q^* = 2^3 \sqrt{n} Q$. Descompongamos f como $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = \mathcal{X}_{Q^*} f$. Sea $a = Tf_2(x)$, entonces

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf(y) - a| dy \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(y)| dy + \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_2(y) - Tf_2(x)| dy. \quad (4.18)$$

Puesto que $s > 1$, T es acotado en $L^s(\mathbb{R}^n)$, por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(y)| dy &\leq \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(y)|^s dy \right]^{1/s} \leq \left[\frac{C}{|Q|} \int_Q |f_1(y)|^s dy \right]^{1/s} \\ &\leq \left[\frac{C}{|Q|} \int_Q |f(y)|^s dy \right]^{1/s} \leq C [M(|f|^s)(x)]^{1/s}. \end{aligned}$$

Enseguida estimaremos el segundo sumando de (4.18). Como K es un núcleo estándar se tiene que

$$|K(x, y) - K(w, y)| \leq \frac{C|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \text{ si } |x-w| < \frac{|x-y|}{2}.$$

Representemos por $l(Q)$ a la longitud del lado de Q . Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_2(y) - Tf_2(x)| dy &= \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} [K(y, z) - K(x, z)] f(z) dz \right| dy \\
 &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} \frac{|y-x|^\delta}{|x-z|^{n+\delta}} |f(z)| dz dy \\
 &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q l(Q)^\delta \sum_{k=-1}^{\infty} \int_{2^k l(Q) < |x-z| < 2^{k+1} l(Q)} \frac{|f(z)|}{|x-z|^{n+\delta}} dz dy \\
 &\leq Cl(Q)^\delta \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{[2^k l(Q)]^{n+\delta}} \int_{|x-z| < 2^{k+1} l(Q)} |f(z)| dz \\
 &= C \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{2^{ks}} \left[\frac{1}{(2^k l(Q))^n} \int_{|x-z| < 2^{k+1} l(Q)} |f(z)| dz \right] \\
 &= C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left[\frac{1}{|B_{2^k l(Q)}(x)|} \int_{B_{2^k l(Q)}(x)} |f(z)| dz \right] \\
 &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} Mf(x) = CMf(x) \leq C [M(|f|^s)(x)]^{1/s}.
 \end{aligned}$$

■

El siguiente lema es una versión con peso del Lema 1.29.

Lema 4.24 *Sea $w \in A_p$, $1 \leq p_0 \leq p < \infty$. Si f es tal que $M_d f \in L^{p_0}(w)$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_d f|^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |M^\# f|^p w,$$

donde M_d es el operador maximal diádico y $M^\# f$ es el operador maximal sharp, siempre que el lado izquierdo sea finito.

Prueba. Como se vio en la demostración del Lema 1.29, será suficiente probar que para alguna $\delta > 0$

$$w \{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \lambda\gamma\} \leq C\gamma^\delta w \{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}.$$

Puesto que $\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$ puede descomponerse en unión de cubos diádicos Q ajenos por pares, bastará con demostrar que para cada cubo

$$w \{x \in Q : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \lambda\gamma\} \leq C\gamma^\delta w(Q)$$

Por el Lema 1.28 tenemos

$$|\{x \in Q : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \lambda\gamma\}| \leq 2^n \gamma |Q|,$$

y como $w \in A_p$ tenemos también que se cumple (4.14), esto es, existe $\delta > 0$ tal que para todo cubo Q y $S \subset Q$

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq C \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^\delta.$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{w \{x \in Q : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \lambda\gamma\}}{w(Q)} \\ & \leq C \left(\frac{|\{x \in Q : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \lambda\gamma\}|}{|Q|} \right)^\delta \\ & \leq C (2^n \gamma)^\delta, \end{aligned}$$

por lo cual

$$w \{x \in Q : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \lambda\gamma\} \leq C\gamma^\delta w(Q).$$

■

Ya poseemos todas las herramientas para demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.25 *Si T es un operador de Calderón-Zygmund, entonces para cualquier $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, T es acotado en $L^p(w)$.*

Prueba. Fijemos $w \in A_p$. Como $L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(w)$, supongamos sin pérdida de generalidad que $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por Corolario 4.19, $A_p = \cup_{q < p} A_q$, esto implica que podemos encontrar $s > 1$ tal que $w \in A_{p/s}$. Nótese que $|Tf(x)| \leq M_d(Tf)(x)$, pues

$$|Tf(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k Tf(x)| \leq \sup_k |E_k Tf(x)| \leq M_d Tf(x).$$

Se sigue de los Lemas 4.23 y 4.24 que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^p w &\leq \int_{\mathbb{R}^n} [M_d(Tf)]^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^n} [M^\#(Tf)]^p w \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} [M(|f|^s)]^{p/s} w \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w, \end{aligned}$$

siempre y cuando

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_d(Tf)]^p w < \infty.$$

Si $Tf \in L^p(w)$, por acotamiento fuerte $M(Tf) \in L^p(w)$, además $M_d(Tf) \leq M(Tf)$ casi en todas partes, por lo que será suficiente con demostrar que $Tf \in L^p(w)$. Sea R tal que $\text{supp } f \subset B_R(0)$, por la desigualdad de Hölder se sigue que para $\epsilon > 0$

$$\int_{|x| < 2R} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq \left(\int_{|x| < 2R} w(x)^{1+\epsilon} dx \right)^{1/(1+\epsilon)} \left(\int_{|x| < 2R} |Tf(x)|^{p(1+\epsilon)/\epsilon} dx \right)^{\epsilon/(1+\epsilon)}.$$

Ahora dado que $w \in A_p$, por desigualdad reversa de Hölder existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left(\int_{|x| < 2R} w(x)^{1+\epsilon} dx \right)^{1/(1+\epsilon)} \leq C \int_{|x| < 2R} w(x) dx < \infty.$$

Además $Tf \in L^q$, para $1 < q < \infty$, ya que T es de tipo fuerte (q, q) y $f \in L^q$. Por lo que

$$\left(\int_{|x| < 2R} |Tf(x)|^{p(1+\epsilon)/\epsilon} w(x) dx \right)^{\epsilon/(1+\epsilon)} < \infty.$$

Para completar nuestra estimación, para $|x| > 2R$ se tiene

$$|Tf(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x, y) dy \right| \leq C \int_{|y| < R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy \leq C \frac{\|f\|_1}{|x|^n},$$

pues $|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x|/2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{|x| > 2R} |Tf(x)|^p w(x) dx &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k R < |x| < 2^{k+1} R} \frac{w(x)}{|x|^{np}} dx \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} (2^k R)^{-np} w(B(0, 2^{k+1} R)). \end{aligned}$$

Puesto que $w \in A_p$, existe $q < p$ tal que $w \in A_q$. Por (4.6)

$$\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^q w(Q) \leq Cw(S),$$

para $S \subset Q$, que también es válido para bolas, por lo que tomemos $S = B(0, R)$ y $Q = B(0, 2^{k+1}R)$. Así

$$w(B(0, 2^{k+1}R)) \leq C2^{knq}.$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \int_{|x|>2R} |Tf(x)|^p w(x) dx &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} (2^k R)^{-np} 2^{knq} \\ &= CR^{-np} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(nq-np)k} < \infty, \end{aligned}$$

pues $q < p$. Concluimos que $Tf \in L^p(w)$. ■

De manera análoga a como se probó el Teorema 3.9 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.26 *Sea T un operador de Calderón-Zygmund y sea $w \in A_1$. Si $f \in L^1(w)$, se cumple que*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) dx.$$

CAPÍTULO 5

ESTIMACIONES PARA LA NORMA DE LA FUNCIÓN MAXIMAL

En este capítulo consideraremos una versión más general de la función maximal de Hardy-Littlewood, tal y como lo hicimos en la Sección 1.2 del Capítulo 1, pero aquí nuestra medida μ será de la forma $d\mu = w dx$, donde w es un peso. Mostraremos que cuando w está en la clase de Muckenhoupt, la norma en $L^p(w)$ del operador maximal centrado de Hardy-Littlewood puede estimarse por el producto de una constante que depende de p y de la dimensión, y una potencia apropiada de la constante A_p del peso w . De paso, obtendremos una estimación uniforme en w para la norma del operador maximal centrado respecto a la medida μ . Nuestra herramienta principal para probar dicha estimación será el teorema de cubrimiento de Besicovitch. En este capítulo nuestras principales referencias serán [11], [9], [15], [5].

5.1. Las estimaciones

Damos inicio estableciendo primeramente las siguientes definiciones.

Definición 5.1 *Sea w un peso y $f \in L^1_{loc}(w)$. La función maximal de Hardy-Littlewood de f en el espacio $L^1_{loc}(w)$, es la función $M^w f$ definida por,*

$$M^w f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)| w(y) dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x . **El operador maximal de Hardy-Littlewood** M^w es el operador que envía a la función f a la función $M^w f$.

De manera análoga también podemos definir la función maximal de Hardy-Littlewood de f centrada en cubos, es decir

$$M_c^w f(x) = \sup_{\delta > 0} \frac{1}{w(Q(x; \delta))} \int_{Q(x; \delta)} |f(y)| w(y) dy,$$

Como los operadores M_c^w y M^w son puntualmente comparables, usaremos cualesquiera de ellos cuando sea conveniente.

También, denotaremos por M_c al clásico operador maximal de Hardy-Littlewood de f centrado en cubos, esto es

$$M_c f(x) = \sup_{\delta > 0} \frac{1}{|Q(x; \delta)|} \int_{Q(x; \delta)} |f(y)| dy.$$

Teorema 5.2 (Teorema de Cubrimiento de Besicovitch). *Sea K un conjunto acotado en \mathbb{R}^n . Para cada $x \in K$, sea Q_x un cubo abierto centrado en x . Entonces existe $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ y un conjunto de puntos $\{x_j\}_{j=1}^m$ en K tales que*

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m Q_{x_j}, \quad (5.1)$$

y para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\sum_{j=1}^m \chi_{Q_{x_j}}(y) \leq 24^n. \quad (5.2)$$

Prueba. Sea

$$s_0 = \sup \{l(Q_x) : x \in K\}.$$

Si $s_0 = \infty$, entonces existe $x_1 \in K$ tal que $l(Q_{x_1}) > 4L$, donde $[-L, L]^n$ contiene a K . Entonces K está contenido en Q_{x_1} , por lo que el teorema es válido con $m = 1$. Supongamos ahora que $s_0 < \infty$. Elijamos $x_1 \in K$ tal que $l(Q_{x_1}) > s_0/2$. Definamos

$$K_1 = K \setminus Q_{x_1}, \quad s_1 = \sup \{l(Q_x) : x \in K_1\},$$

y seleccionemos $x_2 \in K_1$ tal que $l(Q_{x_2}) > s_1/2$. Luego definamos

$$K_2 = K \setminus (Q_{x_1} \cup Q_{x_2}), \quad s_2 = \sup \{l(Q_x) : x \in K_2\},$$

y seleccionemos $x_3 \in K_2$ tal que $l(Q_{x_3}) > s_2/2$. Continuamos este proceso hasta encontrar el primer entero m tal que K_m es vacío. Si tal m no existe, continuamos el proceso indefinidamente y sea $m = \infty$.

Afirmamos que para cada $i \neq j$ se tiene que

$$\frac{1}{3}Q_{x_i} \cap \frac{1}{3}Q_{x_j} = \emptyset.$$

En efecto, supongamos que $i > j$. Entonces $x_i \in K_{i-1} = K \setminus (Q_{x_1} \cup \dots \cup Q_{x_{i-1}})$, así $x_i \notin Q_{x_j}$. También $x_i \in K_{i-1} \subset K_{j-1}$, lo que implica que

$$l(Q_{x_i}) \leq s_{j-1} < 2l(Q_{x_j}).$$

Si existiera $y \in \frac{1}{3}Q_{x_i} \cap \frac{1}{3}Q_{x_j}$ tendríamos

$$|x_i - x_j| \leq |x_i - y| + |y - x_j| < \frac{\sqrt{n}}{6}l(Q_{x_i}) + \frac{\sqrt{n}}{6}l(Q_{x_j}) < \frac{\sqrt{n}}{2}l(Q_{x_j}),$$

y así concluiríamos que $x_i \in Q_{x_j}$, lo cual no ocurre.

Ahora probaremos la inclusión (5.1). Si $m < \infty$, entonces $K_m = \emptyset$, por lo tanto $K \subset \bigcup_{j=1}^m Q_{x_j}$. Supongamos que $m = \infty$, puesto que los cubos $\frac{1}{3}Q_{x_i}$ son ajenos por pares y tienen centros en un conjunto acotado, se sigue que la sucesión $\{l(Q_{x_j})\}_{j=1}^{\infty}$ converge a cero. Si existe $y \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{x_j}$, entonces $y \in K_j$ para $j = 1, 2, \dots$, y $l(Q_y) \leq s_j$ para todo j , y puesto que $s_{j-1} < 2l(Q_{x_j})$ se sigue $l(Q_y) = 0$, por lo que el cubo abierto Q_y es vacío, lo cual es una contradicción y así obtenemos (5.1).

Enseguida, mostraremos la desigualdad (5.2). Sea $y \in \mathbb{R}^n$, consideremos n hiperplanos H_i paralelos a los hiperplanos coordenados, que pasen por el punto y . Así podemos escribir \mathbb{R}^n como la unión de 2^n octantes abiertos O_r y n hiperplanos H_i de medida de Lebesgue cero. Mostraremos que existe una cantidad finita de puntos x_j sobre cada octante O_r . Fijemos O_r , y sea x_{k_0} tal que $Q_{x_{k_0}}$ contiene a y y la distancia de x_{k_0} a y es la más grande posible. Si x_j es otro punto en $K \cap O_r$ tal que Q_{x_j} contiene a y , entonces $l(Q_{x_{k_0}}) \geq l(Q_{x_j})$ lo que conlleva a $x_j \in Q_{x_{k_0}}$. Como $i > j$ implica $x_i \notin Q_{x_j}$, se sigue que $j < k_0$, de lo cual $l(Q_{x_{k_0}})/2 < l(Q_{x_j})$. Así, todos los cubos Q_{x_j} con centros en $K \cap O_r$ que contienen al punto fijo y , tienen lados comparables a los de $Q_{x_{k_0}}$. Sea $\alpha = l(Q_{x_{k_0}})/2$ y $\{Q_{x_r}\}_{r \in I}$ la colección de cubos tales que para cada $r \in I$ se tiene que $\alpha < l(Q_{x_r}) \leq 2\alpha$, Q_{x_r} contiene a y , y los cubos $\frac{1}{3}Q_{x_r}$ son ajenos por pares. Entonces

$$\frac{\alpha^n |I|}{3^n} \leq \sum_{r \in I} \left| \frac{1}{3}Q_{x_r} \right| = \left| \bigcup_{r \in I} \frac{1}{3}Q_{x_r} \right| \leq \left| \bigcup_{r \in I} Q_{x_r} \right| \leq (4\alpha)^n,$$

dado que todos los cubos Q_{x_r} contienen el punto y y tienen longitud de lado a lo más 2α , y por tanto, deben de estar contenidos en un cubo de longitud de lado 4α y centrado en y . Esta observación prueba que $|I| \leq 12^n$, y puesto que existen 2^n conjuntos O_r concluimos (5.2). ■

Antes de establecer el resultado principal de este capítulo, será necesario introducir la siguiente notación.

Si $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, denotaremos por $[w]_{A_p}$ al ínfimo de las constantes C que satisfacen la condición (4.11). Este número se denomina la constante A_p del peso w . Cuando T sea un operador que actúa entre espacios $L^p(w)$ denotaremos su norma por $\|T\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)}$.

Teorema 5.3 *Sea $w \in A_p$ para algún $1 < p < \infty$. Entonces existe una constante $C_{n,p}$ tal que*

$$\|M_c\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)} \leq C_{n,p} [w]_{A_p}^{1/(p-1)}. \quad (5.3)$$

Prueba. Fijemos un peso w y sea $\sigma = w^{-1/(p-1)}$. Ahora fijemos un cubo abierto $Q = Q(x_0; r)$ en \mathbb{R}^n y escribamos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| dy = \frac{w(Q)^{\frac{1}{p-1}} \sigma(3Q)}{|Q|^{\frac{p}{p-1}}} \left\{ \frac{|Q|}{w(Q)} \left(\frac{1}{\sigma(3Q)} \int_Q |f| dy \right)^{p-1} \right\}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Para cada $x \in Q$, consideremos el cubo $Q(x; 2r)$. Entonces $Q \subset Q(x; 2r) \subset 3Q = Q(x_0; 3r)$ y así

$$\frac{1}{\sigma(3Q)} \int_Q |f| dy \leq \frac{1}{\sigma(Q(x; 2r))} \int_{Q(x; 2r)} |f| dy \leq M_c^\sigma(|f| \sigma^{-1})(x).$$

Así para cada $x \in Q$, se tiene

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| dy = \frac{w(Q)^{\frac{1}{p-1}} \sigma(3Q)}{|Q|^{\frac{p}{p-1}}} \left\{ \frac{1}{w(Q)} \left(\int_Q M_c^\sigma(|f| \sigma^{-1}) \right)^{p-1} dy \right\}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Puesto que

$$\frac{w(Q) \sigma(3Q)^{p-1}}{|Q|^p} \leq 3^{np} [w]_{A_p},$$

se sigue que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| dy \leq 3^{\frac{np}{p-1}} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \left(M_c^w \left[(M_c^\sigma(|f| \sigma^{-1}))^{p-1} w^{-1} \right] (x_0) \right)^{\frac{1}{p-1}},$$

dado que x_0 es el centro de Q . Así

$$M_c(f) \leq 3^{\frac{np}{p-1}} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \left(M_c^w \left[(M_c^\sigma(|f| \sigma^{-1}))^{p-1} w^{-1} \right] \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Tomando normas en $L^p(w)$, deducimos

$$\begin{aligned}
\|M_c f\|_{L^p(w)} &\leq 3^{\frac{np}{p-1}} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \left\| M_c^w \left[(M_c^\sigma (|f| \sigma^{-1}))^{p-1} w^{-1} \right] \right\|_{L^{p'}(w)}^{\frac{1}{p-1}} \\
&\leq 3^{\frac{np}{p-1}} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|M_c^w\|_{L^{p'}(w) \rightarrow L^{p'}(w)}^{\frac{1}{p-1}} \left\| (M_c^\sigma (|f| \sigma^{-1}))^{p-1} w^{-1} \right\|_{L^{p'}(w)}^{\frac{1}{p-1}} \\
&= 3^{\frac{np}{p-1}} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|M_c^w\|_{L^{p'}(w) \rightarrow L^{p'}(w)}^{\frac{1}{p-1}} \|M_c^\sigma (|f| \sigma^{-1})\|_{L^p(\sigma)} \\
&\leq 3^{\frac{np}{p-1}} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|M_c^w\|_{L^{p'}(w) \rightarrow L^{p'}(w)}^{\frac{1}{p-1}} \|M_c^\sigma\|_{L^p(\sigma) \rightarrow L^p(\sigma)} \|f \sigma^{-1}\|_{L^p(\sigma)} \\
&= 3^{\frac{np}{p-1}} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|M_c^w\|_{L^{p'}(w) \rightarrow L^{p'}(w)}^{\frac{1}{p-1}} \|M_c^\sigma\|_{L^p(\sigma) \rightarrow L^p(\sigma)} \|f\|_{L^p(w)}.
\end{aligned}$$

La desigualdad (5.3) se obtiene si probamos que

$$\|M_c^w\|_{L^q(w) \rightarrow L^q(w)} \leq C_{q,n} < \infty \quad (5.4)$$

para todo $1 < q < \infty$ y cualquier peso w . Obtendremos esta estimación uniforme haciendo uso del teorema de interpolación de Marcinkiewicz. Para $q = \infty$ se tiene $C_{\infty,n} = 1$ pues

$$M_c^w(f)(x) = \sup_{\delta > 0} \frac{1}{w(Q(x;\delta))} \int_{Q(x;\delta)} |f| w dy \leq \|f\|_\infty.$$

Si probamos que M_c^w es de tipo débil (1,1) en $L^1(w)$ con una constante que solo depende de n , se seguirá (5.4).

Sea $f \in L^1(w)$, mostraremos primero que el conjunto $E_\lambda = \{M_c^w(f) > \lambda\}$ es abierto. Sea $r > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, por teorema de convergencia dominada tenemos que si $x_n \rightarrow x_0$ entonces $w(Q(x_n; r)) \rightarrow w(Q(x_0; r))$ y también

$$\int_{Q(x_n; r)} |f| w dy \rightarrow \int_{Q(x_0; r)} |f| w dy,$$

por lo que la función

$$x \mapsto \frac{1}{w(Q(x; r))} \int_{Q(x; r)} |f| w dy$$

es continua y dado que $M_c^w(f)$ es el supremo de funciones continuas, obtenemos que $M_c^w(f)$ es semicontinua inferiormente y así E_λ es abierto.

Dado un subconjunto compacto K de E_λ , para cada $x \in K$ seleccionamos un cubo abierto Q_x centrado en x tal que

$$\frac{1}{w(Q_x)} \int_{Q_x} |f| w dy > \lambda.$$

Por el teorema de cubrimiento de Besicovitch, existe una subfamilia $\{Q_{x_j}\}_{j=1}^m$ tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m Q_{x_j},$$

y para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\sum_{j=1}^m \chi_{Q_{x_j}}(y) \leq 24^n.$$

Por lo cual

$$w(K) \leq \sum_{j=1}^m w(Q_{x_j}) \leq \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda} \int_{Q_{x_j}} |f| w dy \leq \frac{24^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| w dy.$$

Ahora tomamos el supremo sobre todos los subconjuntos compactos K de E_λ y usamos la regularidad de w , para deducir que M_c^w es de tipo débil en $L^1(w)$ con constante a lo mas 24^n . ■

En virtud de la estimación (5.4) podemos establecer el siguiente resultado.

Corolario 5.4 *Sea $1 < p < \infty$. Para cualquier peso w (no necesariamente en A_p), la norma del operador maximal M_c^w en $L^p(w)$ está acotada por una constante que solo depende de p y de la dimensión n .*

Es importante destacar este resultado, pues al igual que en el caso sin pesos, podemos obtener una estimación para la norma de la función maximal centrada que solo depende del exponente p y de la dimensión n (ver Teorema 1.18 y Teorema 1.20). De hecho, puede demostrarse un resultado similar al Corolario 5.4 para cualquier tipo de medida de Borel μ regular en \mathbb{R}^n y no necesariamente duplicante. Esto puede consultarse en [7].

CONCLUSIONES

Los principales resultados de este trabajo fueron dar condiciones necesarias o suficientes para que se cumplan las desigualdades:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p u(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \quad (1)$$

y

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx, \quad (2)$$

donde u y w son pesos, $1 \leq p < \infty$, y T representa el operador maximal de Hardy-Littlewood o un operador integral singular.

Para el operador maximal de Hardy-Littlewood M , la desigualdad de tipo débil (p, p) con respecto a (u, w) , es decir,

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx,$$

es equivalente a la condición A_p , esto es, existe una constante C , tal que para todo cubo Q

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C, \text{ para } 1 < p < \infty.$$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \sup_{es_Q} (w^{-1}) \leq C, \text{ para } p = 1.$$

Además, la condición A_p no es suficiente para garantizar que M sea acotado con respecto a (u, w) . Mas sin embargo, si $u = w$, la condición A_p es una condición necesaria y suficiente para que M satisfaga (1).

Por otra parte, si T es un operador Calderón-Zygmund, en virtud del “control” que el operador maximal de Hardy-Littlewood ejerce sobre T , la condición $w \in A_p$ es suficiente para garantizar las desigualdades: (1) para $1 < p < \infty$, y (2) para $p = 1$.

Finalmente, mostramos que la norma en $L^p(w)$ del operador maximal centrado de Hardy-Littlewood puede estimarse por el producto de una constante que depende de p y de la dimensión, y una potencia apropiada de la constante A_p del peso w , esto es

$$\|M_c\|_{L^p(w) \rightarrow L^p(w)} \leq C_{n,p} [w]_{A_p}^{1/(p-1)},$$

desigualdad cuya prueba nos condujo a obtener una estimación uniforme en el peso para la norma del operador maximal centrado respecto a la medida con dicho peso.

En esta tesis hemos hecho una reseña de los resultados más básicos de la teoría de pesos A_p . Una excelente exposición de estos tópicos puede encontrarse en [9] y [5]. Además, como lo hemos comentado previamente, la teoría de pesos A_p continúa siendo en la actualidad una línea muy activa de investigación. Para el lector interesado en ampliar este panorama, le sugerimos consultar [14], [18] y [19].

APÉNDICE A

Dado un espacio de medida (X, μ) y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, la función de distribución de f está dada por

$$d_f(t) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}).$$

Teorema 5.5 Teorema de interpolación de Marcinkiewicz

Sean (X, μ) y (Y, ν) espacios de medida, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, y sea T un operador sublineal definido en $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ que toma valores en el espacio de funciones medibles definidas en Y y que además es de tipo débil (p_0, p_0) y de tipo débil (p_1, p_1) . Entonces T es de tipo fuerte (p, p) para $p_0 < p < p_1$.

Prueba. Sea $f \in L^p(\mu)$, $p_0 < p < p_1$, y $t > 0$. Definamos

$$f_0 = f \chi_{\{x: |f(x)| > ct\}}, \quad f_1 = f - f_0,$$

donde la constante $c > 0$ la escogeremos en el transcurso de la prueba. Notemos que $f_0 \in L^{p_0}(\mu)$, pues

$$\int |f_0|^{p_0} d\mu = \int |f_0|^p |f_0|^{p_0-p} d\mu \leq t^{p_0-p} \int |f| d\mu,$$

ya que $p_0 - p \leq 0$. Similarmente tenemos que $f_1 \in L^{p_1}(\mu)$. Puesto que $|Tf| \leq |Tf_0| + |Tf_1|$ entonces $d_{Tf}(t) \leq d_{Tf_0}(t/2) + d_{Tf_1}(t/2)$. Por hipótesis tenemos que

$$d_{Tf_i}(t/2) \leq \left(\frac{2A_i \|f_i\|_{p_i}}{t} \right)^{p_i}, \quad i = 0, 1$$

entonces

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p &\leq p \int_0^\infty t^{p-1-p_0} (2A_0)^{p_0} \int_{\{x: |f(x)| > ct\}} |f(x)|^{p_0} d\mu dt \\ &\quad + p \int_0^\infty t^{p-1-p_0} (2A_1)^{p_0} \int_{\{x: |f(x)| \leq ct\}} |f(x)|^{p_1} d\mu dt \\ &= \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0} \frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p} \frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}} \right) \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Hemos establecido el teorema excepto para el caso $p_1 = \infty$. Hasta el momento no hemos hecho alguna elección de la constante $c > 0$. Elíjase ahora $c = 1/2A_1$, donde A_1 es la constante para la cual $\|Tg\|_\infty \leq A_1 \|g\|_\infty$. Esta desigualdad implica que $d_{Tf_1}(t/2) = 0$. Ahora utilizamos la desigualdad de tipo débil (p_0, p_0)

$$d_{Tf_0}(t/2) \leq \left(\frac{2A_0 \|f_0\|_{p_0}}{t} \right)^{p_0},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p &\leq p \int_0^\infty t^{p-1-p_0} (2A_0)^{p_0} \int_{\{x:|f(x)|>ct\}} |f(x)|^{p_0} d\mu dt \\ &\leq p (2A_0)^{p_0} \int |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f(x)|/c} t^{p-1-p_0} dt du \\ &= \frac{p}{p-p_0} (2A_0)^{p_0} (2A_1)^{p-p_0} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

■

APÉNDICE B

Lema 5.6 Lema de cubrimiento de Vitali

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y \mathcal{F} una colección de bolas abiertas en \mathbb{R}^n centradas en puntos de E , tal que todo punto de E es el centro de alguna bola en \mathcal{F} . Entonces existe una subcolección $\{B_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{F}$, con $m \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, tal que

$$B_j \cap B_k = \emptyset \text{ para } j \neq k, \quad (5.5)$$

y

$$E \subset \bigcup_{j=1}^m 3B_j \quad (5.6)$$

Prueba. Si los radios de las bolas en \mathcal{F} no son acotados, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $E \subset B$, ya que E es acotado.

Supongamos que los radios de las bolas en \mathcal{F} son acotados. Definamos

$$d_1 = \sup \{rad(B) : B \in \mathcal{F}\}$$

y elijamos B_1 tal que $d_1/2 < rad(B_1)$. Recursivamente definamos

$$d_n = \sup \left\{ rad(B) : B \in \mathcal{F} \text{ y } B \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k = \emptyset \right\}.$$

Si no existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k = \emptyset$ entonces el proceso recursivo termina y $m = n - 1$. De otro modo se elige $B_n \in \mathcal{F}$ tal que

$$\frac{d_n}{2} < rad(B_n) \text{ y } B_n \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k = \emptyset.$$

Por construcción se tiene (5.5). Para demostrar (5.6), sea $x \in E$, consideremos $B \in \mathcal{F}$ tal que x es el centro de B . Sea $\rho = rad(B)$.

Afirmamos que existe j_0 tal que $B \cap B_{j_0} \neq \emptyset$. De otro modo, si $B \cap B_j = \emptyset$ para toda k , entonces $m = \infty$ y $\rho \leq d_k$ para $k = 1, 2, 3, \dots$, esto implicaría que

$$\text{rad}(B_k) > \frac{d_k}{2} \geq \frac{\rho}{2} > 0.$$

Pero esto es imposible, pues

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right| = \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$$

la cual es una serie divergente, mientras que $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ es acotado.

Como B interseca a algún B_k existirá el mínimo k_0 para el que $B \cap B_{k_0} \neq \emptyset$. Por lo tanto

$$B \cap \bigcup_{k=1}^{k_0-1} B_k = \emptyset$$

y concluimos que $\rho \leq d_{k_0} < 2\text{rad}(B_{k_0})$.

Sea $y \in B \cap B_{k_0}$. Si z es el centro de B_{k_0} entonces

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < \rho + \text{rad}(B_{k_0}) < 3\text{rad}(B_{k_0}),$$

por lo tanto $x \in 3B_{k_0}$. ■

BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. M. Buckley, *Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities*, Transactions of the American Mathematical Society **340** (1), (1993), pp. 253-272.

- [2] M. Christ, *Lectures on singular integral operators*, CBMS, Vol. 77, American Mathematical Society Publications, 1990.

- [3] R. R. Coifman, C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Mathematica **51**, (1974), pp. 241-250.

- [4] R. R. Coifman, R. Rochberg, *Another characterization of BMO*, Proceedings of the American Mathematical Society 79 (1980), pp. 249-254.

- [5] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell, C. Pérez, *Weights, Extrapolation and the Theory of Rubio de Francia*, Series: Operator theory: advances and applications, Vol. 215, Springer Basel, 2011.

- [6] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 29, American Mathematical Society Publications, 2001.

- [7] R. Fefferman, *Strong differentiation with respect to measures*, American Journal of Mathematics **103** (1), (1981), pp. 33-40.

- [8] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, 1999.
- [9] J. García-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North Holland Mathematics Studies, Vol. 116, North Holland, 1985.
- [10] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 249, Springer, 2008.
- [11] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 250, Springer, 2009.
- [12] F. Jones, *Lebesgue Integration on Euclidean Space*, Jones and Bartlett Publishers, 2001.
- [13] C. E. Kenig, *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*, CBMS, Vol. 83, American Mathematical Society Publications, 1994.
- [14] M. Lacey, *The linear bound in A_2 for Calderón-Zygmund operators: a survey*, Banach Center Publications **95** (2011), pp. 97-114.
- [15] A. K. Lerner, *An elementary approach to several results on the Hardy-Littlewood maximal operator*, Proceedings of the American Mathematical Society **136** (8), (2008), pp. 2829-2833.
- [16] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Transactions of the American Mathematical Society **165** (1972), pp. 207-226.
- [17] B. Muckenhoupt, R. Hunt, R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the con-*

- jugate function and the Hilbert transform*, Transactions of the American Mathematical Society **176** (1973), pp. 227-251.
- [18] C. Pérez, *The growth of the A_p constant on classical estimates*, Revista de la Unión Matemática Argentina **50** (2), (2009), pp. 119-135.
- [19] C. Pérez, *A course on singular integrals and weights*, Advanced Courses in Mathematics-CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2011.
- [20] J. L. Rubio de Francia, *Factorization theory and A_p weights*, American Journal of Mathematics **106** (3), (1984), pp. 533-547.
- [21] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1986.
- [22] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability property of functions*, Princeton University Press, 1970.
- [23] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton University Press, 1971.
- [24] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, 1993.