"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Maestría en Matemáticas

Problema de Hamiltonización para sistemas dinámicos: algunos enfoques y resultados.

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestro en Matemáticas

Presenta:

Lic. Claudio César García Mendoza

Director de tesis: Dr. Misael Avendaño Camacho.

Hermosillo, Sonora, México, 29 de julio de 2020

SINODALES

Dr. Yuri M. Vorobiev

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Andres Pedroza

Universidad de Colima, Colima, México

Dr. Rubén Flores Espinoza

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. José Crispín Ruiz Pantaleón

Instituto de Matemáticas, UNAM, Ciudad de México, México

Dr. Misael Avendaño Camacho

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Sigue adelante y no dejes
que nada ni nadie te pare.

Índice general

Introducción

Los sistemas Hamiltonianos son sistemas dinámicos que surgen a partir de la formalización matemática de problemas mecánicos para analizar la evolución de un sistema físico, como un sistema planetario ó un electrón en un campo eléctrico. La formulación geométrica de esta clase de sistemas dio origen a la Geometría de Poisson. En los últimos años el estudio de estructuras de Poisson ha tomado una gran relevancia en las áreas de investigación que van desde la geometría diferencial, la mecánica clásica/cuántica, teoría de cuerdas, geometría algebráica, teoría de representaciones, por mencionar algunas.

Una estructura ó corchete de Poisson en una variedad diferencial M es una operación binaria en el $\mathbb{R}-$álgebra $C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\to C^\infty(M),\\ (f,g) &\mapsto \{f,g\}\end{aligned}$$

la cual es bilineal, antisimétrica y satisface las siguientes propiedades:

i) $\{f, gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$, (regla de Leibniz)

ii) $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$. (identidad de Jacobi)

Geométricamente, la existencia de un corchete de Poisson está asociado a la existencia de un bivector Π en M que satisface la condición $[\Pi,\Pi]_{SN} = 0$, la cual, resulta ser equivalente a la identidad de Jacobi. Aquí, $[\cdot,\cdot]_{SN}$ denota el corchete de Shouten-Nijenhuis para multivectores en M. El bivector Π que define un corchete de Poisson en M es llamado bivector de Poisson.

Una variedad de Poisson es una variedad diferencial M equipada con un corchete o bievector de Poisson. La estructura de Poisson en M, ya sea que este dada por un corchete ó un bivector, induce una aplicación $h \mapsto X_h$ del álgebra de funciones $C^\infty(M)$

al espacio de campos vectoriales. Más aún, esta aplicación es un morfismo de álgebras de Lie. El campo vectorial X_h asociado a la función h es llamado campo Hamiltoniano con función Hamiltoniana h. En este contexto se formula el problema principal del cual se trabaja en esta tesis: el *problema de Hamiltonización*. Específicamente, este problema está relacionado con la siguiente pregunta: ¿Son las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico, Hamiltonianas en algún sentido? De forma geométrica, dado un campo vectorial sobre una variedad, ¿ bajo qué condiciones se puede encontrar un bivector de Poisson en la variedad con respecto al cual el campo vectorial sea Hamiltoniano?

El problema de encontrar una formulación Hamiltoniana para un sistema arbitrario de n ecuaciones diferenciales de primer orden es bastante antiguo y desde 1877 se sabe que, al menos localmente, el problema de Hamiltonización tiene una respuesta afirmativa.

El objetivo de esta tesis es presentar algunas condiciones bajos las cuales se tiene una respuesta afirmativa al problema de Hamiltonización de un campo vectorial ó un sistema dinámicos. Unos de los primeros en dar respuesta al problema de Hamiltonización fueron Lie y Kuning. Los estudios de Lie y Kuning se basan en el conocimiento de todas las soluciones del sistema de ecuaciones. Whittaker[5] resumió sus resultados y los expuso en el Teorema de Lie-Kuning. Al igual que ellos, Hojman[12] desarrolló una respuesta al problema de Hamiltonización en la cual, hace uso de la existencia de una función integral primera y un campo vectorial adicional, dicho campo esta relacionado al campo vectorial de inicio mediante unas ecuaciones. Flores[15] presenta una generalización del resultado expuesto por Hojman usando herramientas de la geometría diferencial. Existen otros articulos enfocados a dar respuesta al problema de Hamiltonización en dimensiones bajas, como es el caso de Gümral[8], Gümral y Nutku[9], Gao[6], Kasperczuk[13], Haas y Goedert[10], Hernandez[11], entre otros.

Los resultados de problema de Hamiltonización que aparecen en este trabajo se presentan primero para sistemas dinámicos en $\mathbb{R}^3$ y luego se generalizan para variedades diferenciales de dimensión arbitraria.

Las razones principales de Hamiltonización en $\mathbb{R}^3$ son las siguientes:

a) Las variedades diferenciales de dimensión tres son los ejemplos de dimensión más baja en los que una estructura de Poisson no implica contar con una estructura simpléctica. $\mathbb{R}^3$ es un ejemplo de esta clase de variedades. , por ello, es interesante estudiar como encontrar estructuras de Poisson a partir de un campo vectorial con el cual, este será Hamiltoniano.

b) El problema de Hamiltonización de campos vectoriales no es sencillo de atacar, por lo que resulta natural estudiar este problema en el caso tres dimensional más simple posible: el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^3$. En este espacio se tiene la liberta de hacer uso de sus coordenadas canónicas y de utilizar fórmulas del cálculo vectorial para la formulación de los resultados.

c) Existen una gran cantidad de sistemas dinámicos en $\mathbb{R}^3$ en el área de la física y la biología que son Hamiltonianos, ejemplo de ellos son las ecuaciones de Lotka-Volterra y el modelo SIR.

Originalmente, después del estudio del problema de Hamiltonización en $\mathbb{R}^3$ se tenía contemplado hacer un análisis similar para $\mathbb{R}^4$. Primero generalizando los resultados en $\mathbb{R}^3$ y luego, buscando algunos resultados nuevos. Sin embargo, al poco tiempo de hacer esto, fue evidente que los resultados en $\mathbb{R}^3$ se podían generalizar a variedades diferenciales de dimensión arbitraria. Como se puede constatar de las referencias mencionadas anteriormente, no existen muchos resultados sobre el problema de Hamiltonización y la gran mayoría se refieren al caso tres dimensional. Esto no es más que el reflejo de la complejidad del problema.

Este trabajo esta organizado de la siguiente manera. El Capítulo 1 es una introducción a la geometría de Poisson y campos Hamiltonianos. En este Caítulo se introducen todas las herramientas a utilizar para el estudio de los siguientes capítulos. En el Capítulo 2 se estudia el problema de Hamiltonización en $\mathbb{R}^3$. Se presentan tres situaciones en las cuales se puede dar respuesta afirmativa al problema de Hamiltonización. Estas son las siguientes:

1. El campo admite dos integrales primeras funcionalmente independientes.
2. El campo X admite una integral primera f y existe un campo vectorial W tal que
   - $X \times W \neq 0$,
   - $[X, W] = aX + bW$, $a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$
   - $W \cdot \nabla f \neq 0$.
3. El campo es de divergencia nula.

En las tres situaciones se da una demostración constructiva de la forma particular que tendrá el bivector Π a partir del campo vectorial X y su integral primera f.

En el Capítulo 3 resuelve el problema de Hamiltonización en variedades diferenciales de dimensión finita. Estos resultados generalizan los resultados vistos en el Capítulo 2. Estos resultados presentan tres casos en los cuales el problema de Hamiltonización tiene solución, dichas situaciones son:

1. El campo admite el número máximo de integrales primeras en una variedad orientable.
2. El campo X admite una integral primera f y existe campo W tal que
   - X y W son linealmente independientes,
   - $[X, W] = aX + bW$, $a, b \in C^\infty(M)$
   - $\mathrm{L}_W f \neq 0$.
3. El flujo del campo es periódico.

Los primeros dos casos surgen como una generalización de las situaciones presentadas en $\mathbb{R}^3$. El caso tres es consecuencia del caso dos. Usando el método de promedios se muestra como construir un campo W que satisfaga las condiciones del caso dos si X es un campo con flujo de periódico y con integral primera f. Todos los resultados en esta tesis son ilustrados con una gran cantidad de ejemplos donde se construye explícitamente el bivector a partir de las condiciones iniciales de cada caso, pues todos los resultados expuestos son constructivos.

Capítulo 1

Estructuras de Poisson

En la actualidad, la geometría de Poisson es un campo de investigación activo, pues se corelaciona con otras áreas de la matemática y la física, como son las álgebras de Lie, la mecánica de partículas y medios continuos, sistemas completamente integrables, cuantización semiclásica, entre otros.

En este Capítulo se estudiarán las nociones básicas de las estructuras de Poisson sobre variedades diferenciales.

1.1. Estructuras de Poisson en variedades diferenciales

A lo largo de esta tesis se denotará por M a una variedad diferencial real de dimensión finita m. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}^k(M)$ representa el espacio de multivectores de grado k de M y $\Omega^k(M)$ el espacio de formas diferenciales de grado k definidas en M. Por convención, $\mathfrak{X}^0(M) = \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ donde $C^\infty(M)$ es el espacio de funciones suaves definidas en M. Al álgebra de los multivectores definidos en M será $\mathcal{V}(M)$ y el álgebra de todos las formas diferenciales definidas en M es $\Omega(M)$.

De acuerdo a [3], una estructura de Poisson en M es un operador $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ $\mathbb{R}$-bilineal antisimétrico que satisface:

i) Regla de Leibniz

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h,$$

ii) Identidad de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

para $f, g, h \in C^\infty(M)$. De esta forma, $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ definen un álgebra de Lie, llamada álgebra de Poisson. A la pareja $(M, \{\cdot, \cdot\})$ se le conoce por variedad de Poisson donde $\{\cdot, \cdot\}$ es un corchete de Poisson.

Un ejemplo de una estructura de Poisson es definir el corchete trivial para cualquier variedad diferencial, es decir, para una variedad diferencial M, se toma como corchete $\{f, g\} = 0$, para toda función f, g suave definida en M.

El ejemplo básico no trivial de una estructura de Poisson está definido en $M = \mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas (q, p) en el cual, al corchete se define de la forma:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Dado un corchete de Poisson en M, se puede definir una aplicación entre las funciones suaves y los campos definidos en M, $h \mapsto X_h$ determinado por

$$\mathcal{L}_{X_h} f = \{h, f\}, \forall f \in C^\infty(M).$$

El campo X_h recibe el nombre de *campo Hamiltoniano* asociado a h, y la función h se le conoce como función Hamiltoniana.

Una función K se dice ser de Casimir si $\{K, f\} = 0$ para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir, K es Casimir si $X_K \equiv 0$.

1.1.1. Bivector de Poisson

En esta sección vamos a mostrar como expresar estructuras de Poisson en terminos de bivectores en M. Para este proposito se intruduce el *corchete de Schouten-Nijenhuis* el cual es una operación $\mathbb{R}$-bilineal en el álgebra de multivectores. El corchete de Schouten-Nijenhuis es un operador bilineal

$$[\cdot, \cdot]_{SN} : \mathfrak{X}^p(M) \times \mathfrak{X}^q(M) \to \mathfrak{X}^{p+q-1}(M)$$

que satisface:

- $[P, Q]_{SN} = (-1)^{pq}[Q, P]_{SN}$,
- $[P, Q \wedge R]_{SN} = [P, Q]_{SN} \wedge R + (-1)^{(q+1)p} Q \wedge [P, R]_{SN}$,
- $(-1)^{p(r-1)}[P, [Q, R]] + (-1)^{q(p-1)}[Q, [R, P]] + (-1)^{r(q-1)}[R, [P, Q] = 0$.

Notemos que, gracias al estudio realizado por Marle [14], siempre se puede definir un corchete con estas propiedades.

La acción del corchete de Schouthen-Nijenhuis en elementos descomponibles es:

$$[X_1 \wedge \ldots \wedge X_p, Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_q]_{SN} = \\ (-1)^{p+1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge \ldots \wedge \hat{Y}_j \wedge \ldots \wedge Y_q,$$

donde los elementos $X_i, Y_j \in \mathfrak{X}(M)$ y los campos con el símbolo $\hat{}$ son omitidos. Esta última expresión es útil para calculos locales.

En una variedad de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$, la estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ induce un bivector de Poisson en M por

$$\Pi(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g) := \{f, g\}. \tag{1.1}$$

Es sensillo probar que Π definido por (1.1) es un bivector en M que satisface

$$[\Pi, \Pi]_{SN} = 0. \tag{1.2}$$

Recíprocamente, si Π es un bivector en M tal que cumple (1.2), este induce un corchete de Poisson en M definido por la ecuación (1.1). En resumen, se tiene una correspondencia biunívoca entre estructuras de Poisson en M y bivectores $\Pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ que satisfacen (1.2). Por esta razón, cada bivector Π en M que cumple (1.2) es llamado bivector de Poisson en M y dicha condición resulta ser equivalente a la identidad de Jacobi para $\{\cdot, \cdot\}$.

De esta forma, una variedad de Poisson también se puede definir como un par (M, Π) donde Π es un bivector que satisface (1.2).

De manera similar, un campo Hamiltoniano se puede definir en terminos del bivector de Poisson. Para cada $h \in C^\infty(M)$ se define el campo Hamiltoniano asociado a H por:

$$\mathrm{i}_{\mathrm{d}h}\Pi = X_h.$$

Un campo vectorial X definido en una variedad de Poisson (M, Π) se dice ser Poisson si la derivada de Lie de Π a lo largo de X se anula, es decir, $L_X \Pi = 0$. Dicha condición es equivalente a pedirle

$$[X, \Pi]_{SN} = 0. \tag{1.3}$$

Cuando se toma $X = X_H$ un campo Hamiltoniano, la condición (1.3) se convierte en la identidad de Jacobi, por lo que cualquier campo Hamiltoniano es un campo de Poisson. El reciproco no es cierto, en general, no todo Campo de Poisson es Hamiltoniano, por ejemplo, si se toma la estructura de Poisson trivial, todos los campos vectoriales son de Poisson, pero solo el campo vectorial trivial es Hamiltoniano.

Definición 1.1.1. *Dos bivectores de Poisson Π_1, Π_2 se dicen ser compatibles si el corchete de Schouten-Nijenhuis entre ellos se anula, es decir*

$$[\Pi_1, \Pi_2]_{SN} = 0. \tag{1.4}$$

Una manera equivalente de definir que dos bivectores son compatibles es la siguiente: Dos estructuras de Poisson Π_1, Π_2 se son compatibles si $\Pi_1 + \Pi_2$ es Poisson. Esto pues, $[\Pi_1 + \Pi_2, \Pi_1 + \Pi_2]_{SN} = 2[\Pi_1, \Pi_2]_{SN}$, por lo que la ecuación (1.4) es equivalente a verificar $[\Pi_1 + \Pi_2, \Pi_1 + \Pi_2]_{SN} = 0$.

Notemos que al tener dos estructuras Π_1, Π_2 compatibles se tiene toda una familia de estructuras de Poisson compatibles. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a\Pi_1 + b\Pi_2$ es un bivector de Poisson. Esta familia de bivectores recibe el nombre de *lapiz de Poisson*.

Un ejemplo de bivecores de Poisson compatibles surge si se toman $\Pi_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1}$ y $\Pi_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}$. Es facil probar que $\Pi_1 + \Pi_2 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}$ es Poisson.

Un campo vectorial X sobre una variedad se dice ser un sistema *bi-Hamiltoniano* si es Hamiltoniano respecto a dos estructuras de Poisson compatibles, es decir, existen funciones h_1 y h_2 tales que $\Pi^\sharp(\mathrm{d}h_1) = \Pi^\sharp(\mathrm{d}h_2) = X$.

Definición 1.1.2. *Sean $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ y $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ dos variedades de Poisson. Una función $\phi : M_1 \to M_2$ se dice ser un morfismo de Poisson si*

$$\{\phi^* f, \phi^* g\}_1 = \phi^* \{f, g\}_2$$

pata toda $f, g \in C^\infty(M_2)$, donde $\phi^* : C^\infty(M_2) \to C^\infty(M_1)$ es el operador pull-back.

Una propiedad relevante de este morfismo es que la composición de dos morfismos de Poisson, es otra vez otro morfismo de Poisson. Si un morfismo de Poisson, es un difeomorfismo, entonces este es un isomorfismo de Poisson, es decir, que su operador inverso también es un morfismo de Poisson.

Ejemplo 1.1.1 (Producto directo de variedades de Poisson)**.** *Sean* $\{\cdot,\cdot\}_1)$ *y* $(M_2, \{\cdot,\cdot\}_2)$ *variedades de Poisson. Entonces, a su producto* $M_1 \times M_2$ *se puede dotar de manera natural el siguiente corchete:*

$$\{f(x_1, x_2), g(x_1, x_2)\} = \{f_{x_2}, g_{x_2}\}_1(x_1) + \{f_{x_1}, g_{x_1}\}_2(x_2),$$

donde $h_{x_1}(x_2) = h_{x_2}(x_2) = h(x_1, x_2)$ *para cualquier función* h *definida en* $M_1 \times M_2$*,* $x_1 \in M_1$*,* $x_2 \in M_2$*. Dicho corchete es un corchete de Poisson y a esta estructura lleva el nombre de Estructura producto de Poisson. El operador proyección* $\phi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ *y* $\phi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ *son morfismos de Poisson.*

Ejemplo 1.1.2. *Sea* X *un campo de Poisson definido en una variedad* (M, Π)*. El flujo del campo* X*,* Fl_X^t*, define un pseudo-grupo de difeomorfismos locales en* M *generados por* X*.* Fl_X^t *define un isomorfismo de Poisson en el dominio en el cual este bien definido.*

1.2. Morfismo $\Pi^\sharp$ y distribución caracteristica

Si fijamos una estructura de Poisson Π en M, esta induce un morfismo entre haces vectoriales llamado *morfismo sharp* o *morfismo musical* definido por:

$$\Pi^\sharp : \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
$$\alpha \mapsto \Pi^\sharp(\alpha) = i_\alpha \Pi,$$

donde i_α es el operador inserción de formas diferenciales en multivectores [3]. De esta forma, los campos Hamiltonianos son los campos tales que existe una función h que cumple

$$X_h = i_{\mathrm{d}h}(\Pi) = \Pi^\sharp(\mathrm{d}h).$$

Esta definición de campo Hamiltoniano es la que se estará utilizando en los siguientes capítulos.

Dada una variedad de Poisson (M, Π) se define la *distribución característica* como

$$\mathcal{C}^{\Pi} := \Pi^{\sharp}(T^*M) \subset TM.$$

Notemos que mediante la distribución característica se puede generar la *geometría* que subyace en (M, Π).

Capítulo 2

Problema de Hamiltonización en $\mathbb{R}^3$

En este Capítulo se estudia a detalle el problema de Hamiltonización en $\mathbb{R}^3$. Para ello, primero se estudian propiedades particulares de las estructuras de Poisson en $\mathbb{R}^3$. De igual forma, se presentan tres situaciones en las cuales el problema de Hamiltonización tiene solución. Estas son:

1. El campo admite dos integrales primeras funcionalmente independientes.
2. El campo X admite una integral primera f y existe un campo vectorial W tal que
   - $X \times W \neq 0$,
   - $[X, W] = aX + bW$, $a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$
   - $W \cdot \nabla f \neq 0$.
3. El campo es de divergencia nula.

Cada caso tiene como hipótesis al menos contar con una integral primera f.

Notemos que las pruebas de cada caso son constructivas y todos los bivectores de Poisson que hacen Hamiltoniano a X se pueden escribir en función del campo X y la función f.

2.1. Variedades de Poisson en $\mathbb{R}^3$

Sea $M = \mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)\}$ y

$$\pi = \underset{1,2,3}{\mathfrak{S}} Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad Y_1, Y_2, Y_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \tag{2.1}$$

Aquí, $\mathfrak{S}$ representa la suma cíclica de índices. De la ecuación (2.1), se concluye que es posible definir una relacion biunívoca entre bivectores y campos vectoriales de la forma

$$\begin{gathered} \mathfrak{X}^2(\mathbb{R}^3) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3), \\ \pi = \underset{1,2,3}{\mathfrak{S}} Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} \mapsto Y = (Y_1, Y_2, Y_3), \end{gathered} \tag{2.2}$$

Recordemos que un bivector Π se dice ser de Poisson si cumple con la identidad de Jacobi, es decir, $[\Pi, \Pi]_{SN} = 0$. Para el bivector Π (2.2) tenemos

$$[\pi, \pi]_{SN} = (Y \cdot \mathrm{rot} Y) \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Por lo tanto, el bivector de Poisson Π (2.2) es de Poisson sí y solo si el campo vectorial satisface

$$Y \cdot \mathrm{rot} Y = 0. \tag{2.3}$$

Todo campo vectorial Y que satisface (1.3) es llamado vector de Poisson.

Lema 2.1.1. *Si* $f, \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $Y = \rho(x)\nabla f$ *entonces el bivector* $\pi = \underset{1,2,3}{\mathfrak{S}} Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}$ *es de Poisson.*

Demostración. Para probar este resultado, solo es necesario ver que el campo Y cumpla con la igualdad (2.3), por lo que

$$Y \cdot \mathrm{rot}(Y) = \rho(x)\nabla f \cdot \mathrm{rot}(\rho(x)\nabla f) = \rho(x)\nabla f \cdot (\nabla\rho \times \nabla f + \rho(x)\mathrm{rot}(\nabla f)) = 0.$$

■

Un ejemplo de un bivector en $\mathbb{R}^3$ es $\tilde{\Pi} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}$. Es facil probar que el campo $Y = (x_1, x_2, x_3)$ asociado al bivector $\tilde{\Pi}$ cumple con la igualdad (1.3).

Los bivectores de Poisson en $\mathbb{R}^3$ tienen la notable propiedad de ser *invariantemente conformes.*

Proposición 2.1.2. *Si* Π *es un bivector de Poisson en* $\mathbb{R}^3$ *entonces* $\tilde{\Pi} = f\Pi$ *también es un bivector de Poisson para toda* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Demostración. Dado que Π es Poisson, el campo Y asociado a el cumple que $Y \cdot \mathrm{rot}Y = 0$. Ahora, el campo vectorial asociado a $\tilde{\Pi}$ es de la forma $\tilde{Y} = fY$. Ahora,

$$\tilde{Y} \cdot \mathrm{rot}\tilde{Y} = (fY) \cdot \nabla f \times Y + f^2 Y \mathrm{rot}Y = 0.$$

∎

De manera análoga, también es posible definir la aplicación

$$\begin{gathered} \mathfrak{X}^2(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3), \\ \pi = \underset{1,2,3}{\mathfrak{S}} Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} \mapsto \alpha = \sum_{i=1}^{3} Y_i \mathrm{d}x_i, \end{gathered} \tag{2.4}$$

Por cálculo directo, se tiene que $\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha = (Y \cdot \mathrm{rot}Y) \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}$. Por lo tanto, un bivector Π es de Poisson sí y solo si la $1-$forma α definida por (2.4) satisface

$$\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha = 0. \tag{2.5}$$

Toda $1-$forma α en $\mathbb{R}^3$ que satisface (2.5) es llamada $1-$forma de Poisson. Por el Teorema de Frobenius, si α satisface (2.5), entonces el Kernel de α es una distribución $2-$dimensional integrable en $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_{\mathbf{x}} \neq 0\}$. En consecuencia, el kernel de una $1-$forma de Poisson α resulta ser la foliación característica del bivector de Poisosn Π definido por (2.4).

En particular, toda forma $\alpha = f\beta$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ y β una $1-$forma cerrada es una $1-$forma de Poisson.

2.2. Problema de Hamiltonización en $\mathbb{R}^3$

Recordemos que el problema de Hamiltonización consiste en determinar bajo que condiciones se puede encontrar un bivector de Poisson en la variedad con respecto al cual el campo vectorial sea Hamiltoniano. Una condición necesaria para que exista esta estructura es que el campo tenga al menos una integral primera.

Teorema 2.2.1. *Si X es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y f una integral primera de X, entonces existe un campo vectorial $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ tal que el bivector $\pi = \underset{1,2,3}{\mathfrak{S}} Y_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}$ satisface*

$$\pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X.$$

Más aún, el campo Y es de la forma

$$Y = \kappa(x)\nabla f(x) + \frac{1}{||\nabla f(x)||^2}\nabla f(x) \times X.$$

Demostración. Sea π un bivector en $\mathbb{R}^3$. En coordenadas locales es de la forma

$$\pi = \underset{1,2,3}{\mathfrak{S}} Y_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

donde $Y_1, Y_2, Y_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. La expresión $\pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$, se puede reescribir en terminos vectoriales de la siguiente forma

$$X = Y \times \nabla f, \tag{2.6}$$

donde $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$ y $X = (X_1, X_2, X_3)^T$. A su vez, (2.6) es equivalente a la siguiente ecuación lineal

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix},$$

Por la alternativa de Fredholm se garantiza la existencia del campo Y que satisface esta ecuación. Más aún, es posible expresar el campo Y en términos del campo X y f.

Dado que f es integral primera de X, X es tangente a los conjuntos de nivel regulares de f. Dicho esto, el campo $\tilde{Y}$ debe ser de la forma

$$\tilde{Y} = \lambda \nabla f \times X, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

El valor de λ se encuentra sustituyendo el campo $\tilde{Y}$ en la ecuación (2.6) obteniendo así que $\lambda = \frac{1}{||\nabla f||^2}$, y de esta forma

$$\tilde{Y} = \frac{1}{||\nabla f||^2}\nabla f \times X.$$

El campo $\tilde{Y}$ no es único, ya que la matriz A no es invertible. Si al campo $\tilde{Y}$ le sumamos elementos del kernel de A contamos con una familia de campos que cumplen con la ecuación (2.6). Notemos que $\nabla f \in Ker(A)$, por lo que la familia de campos que cumplen (2.6) es

$$Y = \kappa(x)\nabla f + \frac{1}{||\nabla f||^2}\nabla f \times X.$$

■

Con este resultado se garantiza la existencia de un bivector que satisface las condiciones del teorema, pero dicho bivector no es de Poisson, pues no necesariamente cumple con la condición (2.3). Este teorema no solo dice como construir un bivector, nos brinda toda una familia de de bivectores que varían a partir de una función κ, más aún, Π es bivector de Poisson si y solo si

$$\nabla\kappa \cdot X = \kappa(\mathrm{div}X) - \frac{4\kappa}{||\nabla f||^2}(\mathrm{Hess}f(X)\cdot\nabla f) - \frac{1}{||\nabla f||^4}(DX(\nabla f) - \mathrm{Hess}f(X))\cdot(\nabla f \times X). \tag{2.7}$$

De esta forma, una manera de garantizar la existencia de un bivector de Poisson a partir de un campo y una integral primera es dar las condiciones necesarias para la función κ de tal forma que cumpla con la ecuación (2.7).

Dado un campo Vectorial con integral primera f, existen al menos tres situaciones en las cuales, existe estructura de Poisson con la cual, el campo vectorial es Hamiltoniano, dichas situaciones son las siguientes:

1. El campo admite dos integrales primeras funcionalmente independientes, caso superintegrable.
2. Existe un campo vectorial W que cumple con las siguientes propiedades:
   - $X \times W \neq 0$,
   - $[X, W] = aX + bW$,

- $W \cdot \nabla f \neq 0$.

3. El campo es de divergencia nula.

En todos los casos se utiliza fuertemente el teorema 2.2.1 pues consisten en utilizar la forma particular del campo Y y encontrar una forma de escribir $\kappa(x)$ en función del campo vectorial y las integrales primeras que disponga. A continuación se muestra una explicación detallada cada situación.

Teorema 2.2.2. *Sea X un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. Si X tiene dos integrales distintas f, $h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tales que $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}h \neq 0$ entonces existen dos bivectores de Poisson Π_1, Π_2 compatibles, con respecto a los cuales, X es Hamiltoniano.*

Demostración. Dado que f es integral primera de X, por el teorema 2.2.1 existe un campo $Y = \kappa(x)\nabla f + \frac{1}{||\nabla f(x)||^2}\nabla f \times X$ el cual es ortogonal a X. Por otro lado, dado que ∇f y ∇h son ortogonales a X, existen $\alpha(x), \beta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tales que

$$\frac{1}{||\nabla f||^2}\nabla f \times X = \alpha(x)\nabla f + \beta(x)\nabla h. \tag{2.8}$$

Sustituyendo esta igualdad en la forma del campo Y se tiene que

$$Y = \kappa(x)\nabla f + \alpha(x)\nabla f + \beta(x)\nabla h,$$

como κ es arbitraria, si se toma $\kappa(x) = -\alpha(x)$ se tiene que $Y = \beta(x)\nabla h$ y por 2.1.1 se cumple que el bivector definido a partir del campo Y es de Poisson. Análogamente, si fijamos ∇h como la integral primera y se toma $\kappa = -\beta(\mathbf{x})$ se tiene que $Y = \alpha(\mathbf{x})\nabla f$ define un bivector de Poisson. Para probar que son compatibles, notemos que, en $\mathbb{R}^3$,

$$[\Pi_1, \Pi_2]_{SN} = Y_1 \cdot \mathrm{rot} Y_2 - Y_2 \cdot \mathrm{rot} Y_1, \tag{2.9}$$

donde Y_1 y Y_2 son los campos asociados a Π_1 y Π_2, respectivamente. Ahora, dado que $Y_1 = \beta(\mathbf{x})\nabla h$ y $Y_2 = \alpha(x)\nabla f$, es facil ver que $[\Pi_1, \Pi_2]_{SN} = 0$. ∎

De este resultado se puede decir aún más, ya que se pueden dar de manera explícita los valores de $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ en terminos de X y f. Para ello se crea un sistema 2×2 a partir de multiplicar la igualdad (2.8) con ∇f y ∇h,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(x)||\nabla f||^2 + \beta(x)\nabla f \cdot \nabla h, \\ \frac{1}{||\nabla f||^2}\nabla h \cdot (\nabla f \times X) &= \alpha(x)\nabla f \cdot \nabla h + \beta(x)||\nabla h||^2. \end{aligned}$$

Este sistema se puede reescribir de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{||\nabla f||^2}\nabla h \cdot (\nabla f \times X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||\nabla f||^2 & \nabla f \nabla h \\ \nabla f \nabla h & ||\nabla h||^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix}.$$

De esta forma, si se toma $A = \begin{pmatrix} ||\nabla f||^2 & \nabla f \nabla h \\ \nabla f \nabla h & ||\nabla h||^2 \end{pmatrix}$, la solución para $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -\frac{\nabla h \cdot \nabla f}{\det(A)||\nabla f||^2}\nabla h \cdot (\nabla f \times X), \\ \beta(x) &= \frac{1}{\det(A)}\nabla h \cdot (\nabla f \times X). \end{aligned}$$

A continuación se da una serie de ejemplos en los cuales se ilustran el caso de tener un campo vectorial con dos integrales primeras.

Ejemplo 2.2.1. *(Mapeo Circular) Un ejemplo peculiar de un campo con dos integrales primeras en* $\mathbb{R}^3$ *es tomar el campo que define esferas en* $\mathbb{R}^3$*. Dicho campo esta dado por la ecuación*

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z}.$$

En este caso, las integrales primeras están conformadas por las funciones

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \\ h(x,y,z) &= \frac{1}{y} - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Siguiendo el proceso para encontrar los bivectores de Poisson, obtenemos que

$$\begin{aligned} \Pi_f &= x^2z^2\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} - x^2y^2\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \\ \Pi_h &= -y^2z^2\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + x^2z^2\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

son bivectores de Poisson con los cuales, el campo X *admite una estructura de campo Hamiltoniano.*

Ejemplo 2.2.2 (Ecuaciones de Lotka-Volterra). *Un ejemplo donde se cumplen las condiciones del caso 2 es en las ecuaciones de Lotka-Volterra. En sus inicios, Volterra utilizó estas ecuaciones para modelar interacciones biológicas y con el paso del tiempo se descubrió que dichas ecuaciones se pueden utilizar para resolver problemas en campos como la física, la biología, química y economía. Para el caso en* $\mathbb{R}^3$*, las ecuaciones que describen este sistema son*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(cy + z + \alpha),\\ \dot{y} &= y(az + x + \beta),\\ \dot{z} &= z(bx + y + \gamma),\end{aligned}$$

donde $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. *Como se muestra en los articulos [9] y [13], el sistema cuenta con dos integrales primeras si se toma el caso* $abc = -1$ *y* $\gamma = \beta b - \alpha ab$*, las cuales son*

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= ab\ln(x) - b\ln(y) + \ln(z),\\ h(x, y, z) &= abx + y - az + \gamma\ln(y) - \beta\ln(z).\end{aligned}$$

De esta forma, se pueden construir dos bivectores de Poisson, los cuales son:

$$\begin{aligned}\Pi_f &= -xyz\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z} - xyz\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x} + xyz\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y},\\ \Pi_h &= yz\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z} - xz\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

los cuales dotan de una estructura de campo Hamiltoniano al campo definido por las ecuaciones de Lotka-Volterra.

Ejemplo 2.2.3 (Modelo SIR). *Otro ejemplo que ilustra este caso es el modelo SIR de Kermack y McKendrick estudiado en [9]. Este tipo de modelos representa la dinámica de una enfermedad en una población. La variable* S *representa la población susceptible;* I *representa la población infecciosa, son aquellos que padecen una enfermedad y pueden transmitirla;* R *representa la clase de recuperados. Dicho modelo esta representado por el campo vectorial*

$$X = -rSI\frac{\partial}{\partial S} + (rSI - aI)\frac{\partial}{\partial I} + aI\frac{\partial}{\partial R},$$

donde r *es conocida como la taza de contacto y* a *como la taza de recuperación, ambas son constantes no negativas.*

Este sistema admite dos integrales primeras descritas por las funciones

$$f(S,I,R) = S + I + R,$$
$$h(S,I,R) = R + \frac{a}{r}\log(S),$$

de esta forma, los bivectores

$$\Pi_f = aI\frac{\partial}{\partial I}\wedge\frac{\partial}{\partial R} + rSI\frac{\partial}{\partial S}\wedge\frac{\partial}{\partial I},$$
$$\Pi_h = -rSI\frac{\partial}{\partial I}\wedge\frac{\partial}{\partial R} - rSI\frac{\partial}{\partial R}\wedge\frac{\partial}{\partial S} - rSI\frac{\partial}{\partial S}\wedge\frac{\partial}{\partial I}.$$

definen una estructura de Poisson en la cual, el campo X *es Hamiltoniano.*

Teorema 2.2.3. *Sea* X *un campo vectorial en* $\mathbb{R}^3$ *y* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ *una integral primera del campo* X*. Supongamos que existe un abierto* $U \subset \mathbb{R}^3$ *y un campo* $W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ *tal que*

i) El campo X *y* W *son linealmente independientes, es decir*

$$X \times W \neq 0.$$

ii) X *y* W *son compatibles, en el sentido*

$$[X,W] = aX + bW,$$

donde $a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

iii) La función f *no es integral primera de* W *en* U*, esto es*

$$W \cdot \nabla f \neq 0.$$

Entonces, existe bivector de Poisson Π *en* U *tal que* $\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$.

Demostración. Si X y W son campos vectoriales que satisfacen i), ii) entonces el campo vectorial $\tilde{Y} = X \times W$ define un bivector $\tilde{\Pi}$ el cual es de Poisson. Esto se sigue de la siguiente identidad:

$$\mathrm{rot}(X \times W) = \mathrm{div}(W)X - \mathrm{div}(X)W - [X,W].$$

Por el Teorema 2.2.1 el bivector $\Pi = \underset{1,2,3}{\mathfrak{S}} Y_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}$ con Y de la forma

$$Y = \kappa(x)\nabla f(x) + \frac{1}{||\nabla f(x)||^2}\nabla f(x) \times X. \tag{2.10}$$

satisface $\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$. Dado que X y W son linealmente independientes, el conjunto $\{X(\mathbf{x}), W(\mathbf{x}), (X \times W)(\mathbf{x})\}$ forman una base para $\mathbb{R}^3$. Por tanto, existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tales que

$$\nabla f = \lambda_1 X + \lambda_2 W + \lambda_3 (X \times W).$$

en consecuencia,

$$\nabla f \times X = \lambda_2 (W \times X) + \lambda_3 (||X||^2 W - (X \cdot W)X).$$

Sustituyendo en (2.10), se obtiene

$$Y = \left(\kappa\lambda_1 - \frac{\lambda_3(X \cdot W)}{||\nabla f||^2}\right) X + \left(\kappa\lambda_2 + \frac{\lambda_3||X||^2}{||\nabla f||^2}\right) W + \left(\kappa\lambda_3 - \frac{\lambda_2}{||\nabla f||^2}\right) X \times W. \tag{2.11}$$

Como f es integral primera de X, se tiene

$$0 = X \cdot \nabla f = \lambda_1 ||X||^2 + \lambda_2 X \cdot W,$$

entonces λ_1 se tiene que $\lambda_1 = \frac{-\lambda_2 X \cdot W}{||X||^2}$. Al sustituir en (2.11), se tiene

$$Y = \left(-\frac{\kappa\lambda_2 X \cdot W}{||X||^2} - \frac{\lambda_3(X \cdot W)}{||\nabla f||^2}\right) X + \left(\kappa\lambda_2 + \frac{\lambda_3||X||^2}{||\nabla f||^2}\right) W + \left(\kappa\lambda_3 - \frac{\lambda_2}{||\nabla f||^2}\right) X \times W.$$

Como κ es arbitraria, si se toma $\kappa = -\frac{\lambda_3||V||^2}{\lambda_2||\nabla f||^2}$ el vector Y se reduce a

$$Y = -\left(\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2||X||^2}{\lambda_2||\nabla f||^2}\right) X \times W.$$

Y como $\tilde{Y} = X \times W$ define un bivector de Poisson, el bivector que define el campo Y es Poisson. Notemos que la condición iii) garantiza que $\lambda_2 \neq 0$, esto pues

$$\lambda_2 = \frac{(W \cdot \nabla f)||X||^2}{||W||^2||X||^2(X \cdot W)^2}$$

■

Campos vectoriales homogéneos en $\mathbb{R}^3$**.** Un caso particular se verifican las condiciones del Teorema 2.2.3 es concíderar $W = E = (x_1, x_2, x_3)$ el campo de Euler y X cualquier campo vectorial homogéneo. Si X admite una integral primera f, se mostrará como resolver el problema de Hamiltonización para campos homogéneos en dominios abiertos adecuados. Una función f se dice ser homogénea de orden k sí y solo si

$$\mathrm{L}_E f = kf.$$

De manera similar, un campo vectorial X se dice ser homogéneo de orden k sí y solo si

$$[E, X] = -(k-1)X.$$

Proposición 2.2.4. *Un campo vectorial homogéneo X con integral primera f es Hamiltoniano en el dominio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathrm{L}_E f \neq 0\}$.*

Demostración. Dado que X es homogéneo, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$[E, X] = -(k-1)X.$$

Por la forma particular del campo E, existe entorno $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathrm{L}_E f \neq 0\}$ tal que

- $X \times E \neq 0$ en U,
- $[E, X] = -(k-1)X$,
- $E \cdot \nabla f \neq 0$.

Por el Teorema 2.2.3, si se toma $W = E$ el bivector

$$\Pi = \left(\frac{1}{\mathrm{L}_E f}\right) E \times X$$

es Poisson y cumple $\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$. ∎

Un ejemplo para esta situación esta dado por el campo

$$X = x(z-y)\frac{\partial}{\partial x} + y(x-z)\frac{\partial}{\partial y} + z(y-x)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Este campo tiene como integral primera a la función

$$f(x, y, z) = xyz.$$

Notemos que este campo es homogéneo de orden 2, pues $[E, X] = X$. De esta forma, después de desarrollar el procedimiento del Teorema 2.2.3, se obtiene que el bivector

$$\Pi = \frac{y+z-2x}{3x}\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x+z-2y}{3y}\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x+y-2z}{3z}\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

es Poisson y cumple la igualdad $\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$.

Campo vectorial Lineal

Un caso particular de los campos homogéneos son los campo lineales. De manera general, un campo vectorial X se dice ser *lineal* si existe una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $X = Ax$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Notemos que un campo vectorial lineal siempre es homogéneo de orden 1, pues $[E, X] = 0$. De esta forma para el caso de campos lineales en $\mathbb{R}^3$, siguiendo el Teorema 2.2.3, para probar que un campo vectorial lineal con integral primera f es Hamiltoniano se toma $W = E$, y se sigue que el campo

$$Y = (\frac{1}{\mathrm{L}_E f})E \times Ax,$$

define un bivector de Poisson en el dominio $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \nabla f \neq 0\}$ con el cual, el campo X es Hamiltonianoen U.

Ejemplo 2.2.4. *Tomemos el campo lineal descrito por la ecuación*

$$X = (x+y)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - 2z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Este campo tiene como integral primera a la función

$$f(x, y, z) = ay^2 z$$

donde a es un número no nulo. El bivector de Poisson con el cual el campo X es Hamiltoniano con función Hamiltoniana $f(x, y, z)$ es

$$\Pi = \frac{1}{ay}\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} - \frac{y+3x}{3ay^2}\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3az}\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

Ejemplo 2.2.5. *Tomemos el campo lineal descrito por la ecuación*

$$X = 4x\frac{\partial}{\partial x} - 6y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Este campo tiene como integral primera a la función

$$f(x, y, z) = axyz$$

donde a *es un número no nulo. El bivector de Poisson con el cual el campo* X *es Hamiltoniano con función Hamiltoniana* $f(x, y, z)$ *es*

$$\Pi = -\frac{8}{3ax}\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2}{3ay}\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + \frac{10}{3az}\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ejemplo 2.2.6. *Tomemos el campo lineal que se expresa de la siguiente forma*

$$X = (x + z)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Este campo tiene como integral primera

$$f(x, y, z) = \frac{y^2 - 2xz}{2z^2} + \log|z|.$$

El bivector de Poisson con el cual el campo X *es Hamiltoniano con función Hamiltoniana* $f(x, y, z)$ *es*

$$\Pi = z^2\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} - yz\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

Gorbuzov y Pranevich en su articulo, [7], presentan una forma de construir integrales primeras para campos vectoriales lineales a partir los valores y vectores propios asociados a la transpuesta de la matriz A. Los resultados de la construcción de integrales primeras se pueden resumir en la siguiente tabla

Usando estos resultados se puede construir integrales primeras para todo sistema lineal en $\mathbb{R}^3$. Notemos que las integrales primeras que se pueden construir a partir de la tabla 2.1, no necesariamente serán globales, pero si están bien definidas para un abierto denso.

Ejemplo 2.2.7. *Tomemos en consideración el siguiente campo vectorial lineal:*

$$X = (x - y + 4z)\frac{\partial}{\partial x} + (3x + 2y - z)\frac{\partial}{\partial y} + (2x + y - z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Valores y vectores propios de A^T	Forma de la integral primera
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ valores propios reales y $v_1 \neq v_2$ vectores propios.	$f(\mathbf{x}) = \lvert v_1 \cdot \mathbf{x}\rvert^{h_1} \lvert v_2 \cdot \mathbf{x}\rvert^{h_2}$ con $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 = 0$ y $\lvert h_1\rvert + \lvert h_2\rvert \neq 0$.
λ valor propio real, v_1 y v_2 vectores propios.	$f(\mathbf{x}) = \dfrac{v_1 \cdot \mathbf{x}}{v_2 \cdot \mathbf{x}}$.
$\lambda = 0$ valor propio y v su vector propio asociado.	$f(\mathbf{x}) = v \cdot \mathbf{x}$.
$\lambda = a + bi$ valor propio complejo y $v = v_1 + v_2 i$ vector propio.	$f(\mathbf{x}) = ((v_1 \cdot \mathbf{x})^2 + (v_2 \cdot \mathbf{x})^2) \exp\left(-2\dfrac{a}{b} \arctan\left(\dfrac{v_2 \cdot \mathbf{x}}{v_1 \cdot \mathbf{x}}\right)\right)$

Tabla 2.1: Construcción de Integrales primeras para campos vectoriales lineales a partir de valores y vectores propios.

Siguiendo el proceso de la tabla 2.1, se tiene que las siguientes dos funciones son integrales primeras

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= |x+z|^2|x+y-3z|^3, \\ h(x,y,z) &= |x-2y+3z|^2|x+y-3z|. \end{aligned}$$

De esta forma, el bivector de Poisson que hace Hamiltoniano a este campo es

$$\begin{aligned} \Pi_f = {} & \frac{z-x}{4(z+x)(x+y-3z)^2|x+y-3z|} \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \\ & + \frac{x+2y-5z}{4(z+x)(x+y-3z)^2|x+y-3z|} \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} \\ & + \frac{9z-4y-x}{4(z+x)(x+y-3z)^2|x+y-3z|} \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}, \\ \Pi_h = {} & \frac{5x+2y-3z}{12(x-2y+3z)|x+y-3z|} \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + \frac{3(x+z)}{12(x-2y+3z)|x+y-3z|} \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} \\ & - \frac{7x-2y+15z}{12(x-2y+3z)|x+y-3z|} \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

2.3. Campo con divergencia Nula

Un caso un poco distinto a los que se presenta en esta tesis, en el cual se cumple el problema de Hamiltonización es cuando el campo X cuenta con $\mathrm{div}X = 0$. Para este caso, sea X un campo vectorial sobre una variedad M, tres dimensional, orientable con forma volumen σ. Recordemos que en una variedad, la *divergencia* de un campo vectorial se define como la función que cumple con

$$\mathrm{L}_X\sigma = \mathrm{div}_\sigma(X)\sigma.$$

de esta forma, si se toma como hipótesis que el campo X tiene divergencia nula, y gracias a la formula mágica de Cartan, se cumple que

$$\mathrm{L}_X\sigma = \mathrm{d}(\mathrm{i}_X\sigma) = 0.$$

De lo anterior, se puede concluir que $\mathrm{i}_X\sigma$ es una $2-$forma cerrada.

Supongamos que estas condiciones se cumplen en un dominio abierto y simplemente conexo U. Por el Lema de Poincare, se cumple que toda forma cerrada en $\mathbb{R}^3$ es exacta, por lo que existe $\theta \in \Omega^1(M)$ tal que $\mathrm{i}_X\sigma = \mathrm{d}\theta$ en U.

Con todo esto dicho, podemos formular el siguiente Teorema:

Teorema 2.3.1. *Sea X un campo vectorial tal que $\mathrm{div}_\sigma(X) = 0$. X es Hamiltonizable en U si existe una función $\mu \in C^\infty(M)$ no nula tal que*

$$\mathrm{d}(\mu\theta) = 0. \tag{2.12}$$

Demostración. Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad (2.12), se obtiene

$$\mathrm{d}(\mu\theta) = \mathrm{d}\mu \wedge \theta + \mu \mathrm{d}\theta = 0 \tag{2.13}$$

Por lo que si esta igualdad se le aplica producto cuña con θ:

$$\theta \wedge \mathrm{d}(\mu\theta) = \mu(\theta \wedge \mathrm{d}\theta) = 0.$$

Ahora bien, dado que μ es una función no nula, se cumple que

$$\theta \wedge \mathrm{d}\theta = 0. \tag{2.14}$$

Ahora, dado que existe un isomorfismo entre formas y multivectores, el bivector π asociado a la $1-$forma θ es Poisson. Para verificar que X es Hamiltoniano, se debe probar que existe función $f \in C^\infty(M)$ tal que $\mathrm{i}_X\sigma = -\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\theta$. Para ello, dado que X es de divergencia nula, se cumple que

$$\mathrm{i}_X\sigma = \mathrm{d}\theta.$$

Despejando $\mathrm{d}\theta$ de (2.13), se obtiene que

$$\mathrm{i}_X\sigma = -\frac{1}{\mu}\mathrm{d}\mu \wedge \theta = -\mathrm{d}(\ln|\mu|) \wedge \theta.$$

por lo que si se toma $f = \ln|\mu|$, X es Hamiltonizable. ■

Corolario 2.3.1. *μ es integral primera de X. Más aún, existe bivector de Poisson $\tilde{\Pi}$ tal que*

$$\tilde{\Pi}^\sharp(\mathrm{d}\mu) = X.$$

Demostración. Recordemos que siempre se puede construir un bivector a partir de la forma volumen y una $1-$forma de la forma

$$\mathrm{i}_{\tilde{\Pi}}\sigma = \gamma,$$

este bivector es único y si se desea que ese bivector sea Poisson, la $1-$forma debe de cumplir $\gamma \wedge \mathrm{d}\gamma = 0$. Tomando $\gamma = \frac{1}{\mu}\theta$ se cumple dicha condición y $\tilde{\Pi} = \frac{1}{\mu}\Pi$, de esta forma se obtiene

$$\tilde{\Pi}^\sharp(\mathrm{d}\mu) = X,$$

y por ende, μ es integral primera. ■

Ejemplo 2.3.1. *Tomemos en consideración el siguiente campo vectorial:*

$$X = x(z-y)\frac{\partial}{\partial x} + y(x-z)\frac{\partial}{\partial y} + z(y-x)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Es fácil verificar que, fijando la forma volumen en $\mathbb{R}^3$, $\sigma = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, se cumple que $\mathrm{div}_\sigma(X) = 0$. Notemos que, para $\theta = xyz\mathrm{d}x + xyz\mathrm{d}y + xyz\mathrm{d}z$ se cumple que la condición $i_X\sigma = \theta$. Más aún, si se toma $\mu = \frac{1}{xyz}$ se cumple que $d(\mu\theta) = 0$. Por lo que, siguiendo la construcción del Corolario 2.3.1, obtenemos que el bivector Π de la forma $\Pi = x^2yz\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + xy^2z\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + xyz^2\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$ es Poisson y cumple $\Pi^\sharp(\mathrm{d}\mu) = X$.

Capítulo 3

Problema de Hamiltonización en variedades

En este Capítulo se presentan generalizaciones de algunos resultados presentados en el Capítulo 2 respecto al problema de Hamiltonización. Se estudiará dicho problema en variedades diferenciales de dimensión arbitraria. Este trabajo de investigación estará dividido en dos casos:

1. (M, σ) una variedad diferencial orientable de dimensión m y forma volumen σ. Supongamos que X es un campo vectorial en M y posee $m-1$ integrales primeras, $H_1, H_2, \ldots, H_{m-1}$ funcionalmente independientes.

2. M una variedad diferencial y X un campo vectorial con integral primera f. Supongamos que existe un campo vectorial W tal que

   - X, W son linealmente independientes,
   - X, W son compatibles, es decir $[X, W] = aX + bW$.
   - f no es integral primera de W.

En ambos casos se dan condiciones para los cuales existe una estructura de Poisson con la cual, el campo X es Hamiltoniano. El estudio del primer caso surge como motivación del estudio de F. Petalidou y P. Damianou en [2] y el segundo caso surge del articulo publicado por J. Hernandez, R. Alvarado y M. Agüero en [15].

3.1. Problema de Hamiltonización en variedades orientables

En esta sección se prueba un resultado sobre el problema de Hamiltonización en variedades de Poisson orientables el cual establece que para todo campo vectorial X en una variedad $m-$dimensional M que posea $m-1$ integrales primeras funcionalmente independientes en un domino abierto, existen $m-1$ estructuras de Poisson en M con respecto a las cuales, X es Hamiltoniano. Más aún, dichas estructuras de Poisson son compatibles por pares.

Para presentar este resultado se introduce el concepto de producto interno entre el álgebra de formas diferenciales y multivectores. Esta noción aunada a una forma volumen fija en la variedad permite definir estructuras de Poisson y campos Hamiltonianos usando el lenguaje de formas diferenciales.

Definición 3.1.1. *Sea $A \in \mathfrak{X}^p(M)$ y ω una $r-$forma diferencial. El producto interno de ω con A es la única función tal que*

$$\langle \mathrm{i}_X \omega, Y \rangle = \langle \omega, X \wedge Y \rangle,$$

donde Y es un $(p-r)-$campo vectorial.

En coordenadas locales, si $A = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p} \dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \dfrac{\partial}{\partial x_{i_p}}$ y $\alpha = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} \alpha_{i_1 \ldots i_q} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \mathrm{d}x_{i_q}$ la inserción de α con A es $\langle \alpha, X \rangle = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} X_{i_1 \ldots i_q} \alpha_{i_1 \ldots i_q}$.

Sea (M, Π) una variedad $m-$dimensional orientable, es decir existe una $m-$forma diferencial σ que no se anula. Usando el producto interior con σ se puede definir un morfismo del algebra $\mathcal{V}(M)$ sobre $\Omega(M)$. Para cada $p = 0, 1, 2, \ldots, m$ se define

$$\begin{aligned} \sigma^\flat \quad &: \quad \mathfrak{X}^p(M) \to \Omega^{m-p}(M), \\ & \quad \sigma^\flat(X) := \mathrm{i}_X \sigma. \end{aligned}$$

Como σ es una forma volumen, $\sigma^\flat$ es un isomorfismo $C^\infty(M)-$lineal entre el espacio de $p-$campos vectoriales y las $(m-p)-$formas diferenciales. La aplicación inversa de $\sigma^\flat$ se le denota por $\sigma^\sharp : \Omega^{m-p}(M) \to \mathfrak{X}^p(M)$.

Definición 3.1.2. *Se define el operador traza como el operador* $D_\sigma : \mathfrak{X}^p(M) \to \mathfrak{X}^{p-1}(M)$, *tal que* $D_\sigma = \sigma^\sharp \circ \mathrm{d} \circ \sigma^\flat$.

Esta definición nos permite crear el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}^m(M) \arrow[r, "D_\sigma"] \arrow[d, "\sigma^\flat"] & \cdots \arrow[r, "D_\sigma"] & \mathfrak{X}^p(M) \arrow[r, "D_\sigma"] \arrow[d, "\sigma^\flat"] & \mathfrak{X}^{p-1}(M) \arrow[r, "D_\sigma"] \arrow[d, "\sigma^\flat"] & \cdots \arrow[r, "D_\sigma"] & C^\infty(M) \arrow[r, "D_\sigma"] \arrow[d, "\sigma^\flat"] & 0 \\
C^\infty(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^{m-p}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^{p+1}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^m(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & 0
\end{tikzcd}$$

Una propiedad del operador traza es que opera como derivación, es decir, $D_\sigma \circ D_\sigma = 0$, esto pues, al operarse se llega a $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

Variedad sea Poisson orientables. Sea (M, σ) una variedad orientable m-dimensional con orientación σ. Para cada bivector $\Pi \in \mathfrak{X}^2(M)$, consideremos la $(m-2)$-forma ω definida por

$$\sigma^\flat(\Pi) = \omega. \tag{3.1}$$

Proposición 3.1.3. *Un bivector* $\Pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ *es de Poisson si y solo si la* $(m-2)$*-forma* ω *definida por* (3.1) *satisface*

$$2\mathrm{i}_\Pi \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\mathrm{i}_\Pi \omega) \tag{3.2}$$

Para la prueba de esta proposición se hace uso del siguiente lema:

Lema 3.1.4. *si* $A \in \mathfrak{X}^a(M)$ *y* $B \in \mathfrak{X}^b(M)$, *entonces*

$$\mathrm{i}_{[A,B]} = (-1)^{(a-1)(b-1)} \mathrm{i}_A \circ \mathrm{d} \circ \mathrm{i}_B - \mathrm{i}_B \circ \mathrm{d} \circ \mathrm{i}_A + (-1)^a \mathrm{i}_{A\wedge B} \circ \mathrm{d} + (-1)^b \mathrm{d} \circ \mathrm{i}_{A\wedge B}.$$

La prueba de este lema se puede encontrar en [3].

Demostración (Proposición 1.3.4). Por el Lema 3.1.4 con $A = B = \Pi$,, se tiene

$$\mathrm{i}_{[\Pi,\Pi]}\sigma = -2\mathrm{i}_\Pi(\mathrm{d}(\mathrm{i}_\Pi\sigma)) + \mathrm{d}(\mathrm{i}_{\Pi\wedge\Pi}\sigma) = -2\mathrm{i}_\Pi \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(\mathrm{i}_\Pi(\mathrm{i}_\Pi\sigma)) = -2\mathrm{i}_\Pi \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(\mathrm{i}_\Pi\omega) \tag{3.3}$$

Si Π es Poisson, la ecuación (3.3) se reduce a $0 = -2\mathrm{i}_\Pi \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(\mathrm{i}_\Pi\omega)$ y ω satisface la condición (3.2). Por otro lado, si ω satisface la condición (3.2), entonces $\mathrm{i}_{[\Pi,\Pi]}\sigma = 0$, y dado que σ es la forma volumen, se cumple que $[\Pi, \Pi] = 0$. ∎

Si Π es un bivector de Poisson y ω la $(m-2)$-forma definida por (3.1), el campo Hamiltoniano asociado a la función suave h satisface la siguiente relación

$$\mathrm{i}_{X_h}\sigma = \mathrm{d}h \wedge \omega. \tag{3.4}$$

Estructuras de Poisson de rango 2. Usando la ecuación (3.1) es posible definir una estructura de Poisson en M con rango a lo más dos. Sean $C_1, C_2, \ldots, C_{m-2}$ $m-2$ funciones funcionalmente independientes en un conjunto abierto de M. Sea Π el bivector definido por

$$\mathrm{i}_\Pi\sigma = \mathrm{d}C_1 \wedge \mathrm{d}C_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}C_{m-2}. \tag{3.5}$$

Proposición 3.1.5. *El bivector Π definido por (3.5) tiene las siguientes propiedades:*

(i) *Π es de Poisson.*

(ii) *Las funciones $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{m-2}$ son funciones de Casimir para Π. En consecuencia, el rango de Π es a lo más dos.*

(iii) *Π es invariantemente conforme es decir, para cada $f \in C^\infty(M)$ el bivetor $f\Pi$ también es de Poisson.*

Para la prueba de este Teorema, se hace uso del siguiente Lema:

Lema 3.1.6. *Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ $1-$formas diferenciales, entonces*

$$\mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r) = \sum_{1\leq i<j\leq r} (-1)^{i+j-1}(\mathrm{i}_{\alpha_i\wedge\alpha_j}\Pi)\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha_i} \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha_j} \wedge \ldots \wedge \alpha_r.$$

Demostración. Se procederá por inducción para r. Si se toma $r = 3$, se sigue que

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3), X\rangle &= \langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3, \Pi \wedge X\rangle = \langle \alpha_1 \wedge \alpha_2, (\mathrm{i}_{\alpha_3\Pi}) \wedge X + (\mathrm{i}_\alpha X)\Pi\rangle \\ &= \langle \alpha_1, (\mathrm{i}_{\alpha_2\wedge\alpha_3}\Pi)X - (\mathrm{i}_{\alpha_2}X)\mathrm{i}_{\alpha_3}\Pi + (\mathrm{i}_{\alpha_3}X)\mathrm{i}_{\alpha_2}\Pi\rangle \\ &= \langle (\mathrm{i}_{\alpha_2\wedge\alpha_3}\Pi)\alpha_1 - (\mathrm{i}_{\alpha_1\wedge\alpha_3}\Pi)\alpha_2 + (\mathrm{i}_{\alpha_1\wedge\alpha_2}\Pi)\alpha_3, X\rangle\end{aligned}$$

De esta forma

$$\mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) = (\mathrm{i}_{\alpha_2\wedge\alpha_3}\Pi)\alpha_1 - (\mathrm{i}_{\alpha_1\wedge\alpha_3}\Pi)\alpha_2 + (\mathrm{i}_{\alpha_1\wedge\alpha_2}\Pi)\alpha_3$$

Supongamos que, para $r = k$ se cumple

$$\mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) = \sum_{1\le i<j\le k} (-1)^{i+j-1}(\mathrm{i}_{\alpha_i\wedge\alpha_j}\Pi)\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha_i} \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha_j} \wedge \ldots \wedge \alpha_k.$$

Se proseguirá a demostrar que para $r = k+1$ se cumple

$$\mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k+1}) = \sum_{1\le i<j\le k+1} (-1)^{i+j-1}(\mathrm{i}_{\alpha_i\wedge\alpha_j}\Pi)\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha_i} \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha_j} \wedge \ldots \wedge \alpha_{k+1}. \quad (3.6)$$

Notemos que, la igualdad (3.6) se puede dividir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k+1}) = &\sum_{1\le i<j\le k} (-1)^{i+j-1}(\mathrm{i}_{\alpha_i\wedge\alpha_j}\Pi)\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha_i} \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha_j} \wedge \ldots \wedge \alpha_{k+1}\\ &+ \sum_{1\le i\le k} (-1)^{i+r}(\mathrm{i}_{\alpha_i\wedge\alpha_{r+1}}\Pi)\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha_i} \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_{k+1}.\end{aligned}$$

Dicho esto,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k+1}), A\rangle &= \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k+1}, \Pi \wedge A\rangle\\ &= \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, \mathrm{i}_{\alpha_{k+1}}\Pi \wedge A\rangle + \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, \Pi \wedge \mathrm{i}_{\alpha_{k+1}}A\rangle.\end{aligned}$$

Por un lado,

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, \Pi \wedge \mathrm{i}_{\alpha_{k+1}}A\rangle &= \langle \mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k), \mathrm{i}_{\alpha_{k+1}}A\rangle\\ &= \langle \mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) \wedge \alpha_{k+1}, A\rangle.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, \mathrm{i}_{\alpha_{k+1}}\Pi \wedge A\rangle &= \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-1}, (\mathrm{i}_{\alpha_k\wedge\alpha_{k+1}}\Pi)A - \mathrm{i}_{\alpha_{k+1}}\Pi \wedge \mathrm{i}_{\alpha_k}A\rangle\\ &= \langle (\mathrm{i}_{\alpha_k\wedge\alpha_{k+1}}\Pi)\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-1}, A\rangle\\ &\quad - \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-1}, \mathrm{i}_{\alpha_{k+1}}\Pi \wedge \mathrm{i}_{\alpha_k}A\rangle\end{aligned}$$

Continuando este proceso $k-2$ veces, se obtiene que

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k+1}), A\rangle = &\langle \mathrm{i}_\Pi(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) \wedge \alpha_{k+1}, A\rangle\\ &+ \langle \sum_{1\le i\le k} (-1)^{i+r}(\mathrm{i}_{\alpha_i\wedge\alpha_{r+1}}\Pi)\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha_i} \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_{k+1}, A\rangle\end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción se cumple que

$$\begin{aligned} \mathrm{i}_\Pi(\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_{k+1}) = &\sum_{1\le i<j\le k}(-1)^{i+j-1}(\mathrm{i}_{\alpha_i\wedge\alpha_j}\Pi)\alpha_1\wedge\ldots\wedge\hat{\alpha}_i\wedge\ldots\wedge\hat{\alpha}_j\wedge\ldots\wedge\alpha_{k+1}\\ &+\sum_{1\le i\le k}(-1)^{i+r}(\mathrm{i}_{\alpha_i\wedge\alpha_{r+1}}\Pi)\alpha_1\wedge\ldots\wedge\hat{\alpha}_i\wedge\ldots\wedge\hat{\alpha}_{k+1}. \end{aligned}$$

∎

Demostración(Proposición 3.1.5.) Llamemos $\omega = \mathrm{d}C_1\wedge\mathrm{d}C_2\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}C_{m-2}$ por la Proposición (3.1.3) para que Π sea Poisson, ω debe cumplir $2\mathrm{i}_\Pi\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\mathrm{i}_\Pi\omega)$. Como ω es cerrada, el lado izquierdo de la igualdad es cero, por lo que se debe probar que $\mathrm{d}(\mathrm{i}_\Pi\omega) = 0$, para ello, se probará que $\mathrm{i}_\Pi\omega = 0$.

De esta forma, por el Lema 3.1.6 si se toma $\alpha_i = \mathrm{d}C_i$, se obtiene que

$$\mathrm{i}_\Pi\mathrm{d}C_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}C_{m-2} = \sum_{1\le i<j\le m-2}(-1)^{i+j-1}(\mathrm{i}_{\mathrm{d}C_i\wedge\mathrm{d}C_j}\Pi)\mathrm{d}C_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\hat{C}_i\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\hat{C}_j\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}C_{m-2}.$$

Ahora,

$$\mathrm{i}_{\mathrm{d}C_i\wedge\mathrm{d}C_j}\Pi = \Pi(\mathrm{d}C_i,\mathrm{d}C_j) = \langle\mathrm{d}C_j,\Pi^\sharp(\mathrm{d}C_i)\rangle = 0. \tag{3.7}$$

De esta forma, $\mathrm{i}_\Pi\omega = 0$ y por ende, Π es Poisson. Para la prueba de ii) se verificará que las funciones $C_1, C_2, \ldots, C_{m-2}$ son Casimir, para ello, para ello se probará que el campo Hamiltoniano asociado a ellas es cero. Utilizando la igualdad (3.4), se sigue que

$$\mathrm{i}_{X_{C_i}}\sigma = \mathrm{d}C_i\wedge\mathrm{d}C_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}C_{m-2} = 0.$$

Y dado que σ es forma volumen, el campo Hamiltoniano asociado a C_i es el cero, por lo tanto son funciones Casimires respecto a Π. Más aún, por el bivector Π es de rango, a lo más, dos.

Para probar iii), sea f una función suave de M. Por la Proposición 3.1.3, el bivector $f\Pi$ debe cumplir la igualdad $2\mathrm{i}_{f\Pi}\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\mathrm{i}_{f\Pi}\omega)$ para ser Poisson. Dado que ω es cerrada, el lado izquierdo de la igualdad es cero, entonces

$$\mathrm{d}(\mathrm{i}_{f\Pi}\omega) = \mathrm{d}(f)\mathrm{i}_\Pi\omega + \mathrm{d}(\mathrm{i}_{f\Pi}\omega)$$

∎

La ecuación (3.5) nos dice como construir una estructuras de Poisson de rango a lo más dos con $m-2$ funciones Casimir dadas. Es decir, si fijamos $m-2$ funciones funcionalmente independientes (sobre un abierto denso) en una variedad orientable M, la ecuación (3.5) define un bivector de Poisson que tiene a esas $m-2$ funciones como sus Casimires; el número máximo de Casimires que una estructura de Poisson puede tener. Una generalización de este resultado aparece en el artículo [2] de Daminau y Petalidou. El resultado principal de [2] es el siguiente: sea M una variedad diferencial de dimensión m y σ una forma volumen en M. Para dadas $(m-2k)$ funciones $C_1, \ldots, C_{m-2k}$ funcionalmente independientes en un abierto denso, existe un bivector de Poisson Π en M cuyos Casimires son las funciones $C_1, \ldots, C_{m-2k}$. Más aún, demuestran que existe una $2k$-forma Φ tal que el bivector Π está determinado por la siguiente ecuación

$$\mathrm{i}_{\Pi}\sigma = \Phi \wedge \mathrm{d}C_1 \wedge \mathrm{d}C_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}C_{m-2k}.$$

Teorema 3.1.7. *Sea (M, σ) una variedad orientada $m-$dimensional de dimensión m con forma volumen σ. Si X es un campo vectorial en M con $H_1, H_2, \ldots, H_{m-1}$ integrales primeras funcionalmente independientes, entonces existen $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{m-1}$ estructuras de Poisson compatibles con respecto a las cuales X es Hamiltoniano.*

Demostración. Sea $\tilde{\Pi}_1$ bivector definido por $\mathrm{i}_{\tilde{\Pi}_1}\sigma = \mathrm{d}H_2 \wedge \mathrm{d}H_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}H_{m-1}$. Por la Proposición 3.1.5, $\tilde{\Pi}_1$ es Poisson. Sea X_{H_1} el campo Hamiltoniano con respecto a $\tilde{\Pi}_1$ y función Hamiltoniana H_1, es decir,

$$\mathrm{i}_{X_{H_1}}\sigma = -\mathrm{d}H_1 \wedge \mathrm{i}_{\Pi_1}\sigma.$$

Por la Proposición 3.1.5, $H_2, H_3, \ldots, H_{m-1}$ son Casimires de $\tilde{\Pi}_1$. En consecuencia, X_{H_1} tiene como integrales primeras a $H_1, H_2, \ldots, H_{m-1}$. Como X y X_{H_1} tienen las mismas integrales primeras, existe $\rho \in C^\infty(M)$ tal que $X = \rho_1 X_{H_1}$. Por cálculo directo, se tiene

$$\mathrm{i}_X\sigma = \mathrm{i}_{\rho_1 X_{H_1}}\sigma = \rho_1(\mathrm{d}H_1 \wedge \mathrm{i}_{\tilde{\Pi}_1}\sigma) = \mathrm{d}H_1 \wedge \mathrm{i}_{\rho_1\tilde{\Pi}_1}\sigma. \tag{3.8}$$

Por la Proposición 3.1.5, $\Pi_1 = \rho_1\tilde{\Pi}_1$ es Poisson, y en consecuencia X es Hamiltoniano con respecto a Π_1.

Repitiendo los argumentos anteriores, se tiene que X es Hamiltoniano con respecto a los bivectores $\Pi_i = \rho_i\tilde{\Pi}_i$ para $i = 2, 3, \ldots, m-1$, ρ_i y $\tilde{\Pi}_i$ estan definidos por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}_{\tilde{\Pi}_i}\sigma &= \mathrm{d}H_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\hat{H}_i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}H_{m-1},\\
\mathrm{i}_{X_i}\sigma &= \mathrm{d}H_i \wedge \mathrm{i}_{\tilde{\Pi}_i}\sigma,
\end{aligned}$$

Por último, probemos que los bivectores $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{m-1}$ son compatibles. El Lema 1.8.4 del libro de Dufour [3] nos dice

Lema 3.1.8. *Si $A \in \mathfrak{X}^p(M)$ y $B \in \mathfrak{X}^q(M)$, entonces*

$$\mathrm{d}_{[A,B]_{SN}} = (-1)^{(p-1)(q-1)}\mathrm{i}_A \circ \mathrm{d} \circ \mathrm{i}_B - \mathrm{i}_B \circ \mathrm{d} \circ \mathrm{i}_A + (-1)^p \mathrm{i}_{A\wedge B} \circ \mathrm{d} + (-1)^q \mathrm{d} \circ \mathrm{i}_{A\wedge B}.$$

Si se toma $A = \Pi_i$ y $B = \Pi_j$ con $i \neq j$ se obtiene que

$$\mathrm{i}_{[\Pi_i,\Pi_j]_{SN}}\sigma = -\mathrm{i}_{\Pi_i} \circ \mathrm{d} \circ \mathrm{i}_{\Pi_j}\sigma - \mathrm{i}_{\Pi_j} \circ \mathrm{d} \circ \mathrm{i}_{\Pi_i}\sigma - \mathrm{i}_{\Pi_i\wedge\Pi_j} \circ \mathrm{d}\sigma - \mathrm{d} \circ \mathrm{i}_{\Pi_i\wedge\Pi_j}\sigma = 0.$$

■

Notemos que, el Teorema 2.2.2 es un caso particular de este Teorema, pues si tomamos la forma volumen en canónica en R^3 se obtiene dicho caso.

Caso $M = \mathbb{R}^4$ Para un estudio más a fondo de este problema se recomienda revisar el articulo de Esen[4] . Consideremos $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3_{\mathbf{x}} \times \mathbb{R}_y$. En estas coordenadas los bivectores Π definidos en $\mathbb{R}^4$ se pueden caracterizar de la forma

$$\Pi = \underset{1,2,3}{\mathfrak{S}} \Psi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y}, \quad \Psi_i, \Phi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^4). \tag{3.9}$$

Si se toma $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ y $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ se puede identificar al bivector Π con la pareja (Ψ, Φ) y escribir (3.9) con una notación más simple de la siguiente forma

$$\Pi = \Psi\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + \Phi\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.10}$$

Al igual que en $\mathbb{R}^3$, la condición de Jacobi para que un bivector sea Poisson se puede reescribir en función de la forma particular que toman los bivectores, en este caso, dicha condición se traduce en que el par (Ψ, Φ) cumplan

$$\begin{aligned} \Psi \cdot (\mathrm{rot}\Psi + \frac{\partial \Phi}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\Psi \cdot \Phi)\,, \\ \Phi \times \left(\mathrm{rot}\Psi + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + (\mathrm{div}\Phi)\Psi = \nabla(\Psi \cdot \Phi). \end{aligned} \tag{3.11}$$

De manera similar, si se desea expresar el operador $\Pi^\sharp$ evaluado en una 1-forma $\alpha = A\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y$ es el campo

$$\Pi^\sharp(\alpha) = (\Psi \times A - b\Phi)\frac{\partial}{\partial x} + A \cdot \Phi \frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.12}$$

Usando la Proposición 3.1.5 se puede construir un bivector de Poisson en $\mathbb{R}^4$ a partir de dos funciones funcionalmente independientes. De esta forma, se obtine el siguiente Teorema:

Teorema 3.1.9. *Si X es un campo vectorial en $\mathbb{R}^4$ con tres integrales primeras H_1, H_2, H_3 globales, entonces existen tres estructuras de Poisson compatibles con respecto a las cuales X es campo Hamiltoniano.*

Demostración. La prueba se basa en partir de dos funciones $H_1, H_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ funcionalmente independientes y contruir una pareja (Ψ, Φ) que sea solución de (3.11). Si se toma $\sigma = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}y$ forma volumen en $\mathbb{R}^4$, se tiene

$$\mathrm{i}_\Pi \sigma = \underset{1,2,3}{\mathfrak{S}} \Phi_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \sum_{i=1}^{3} \Psi_i \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y. \tag{3.13}$$

Por otra parte,

$$\mathrm{d}H_1 \wedge \mathrm{d}H_2 = \underset{1,2,3}{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_i}\frac{\partial H_2}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x_i}\frac{\partial H_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y. \tag{3.14}$$

Igualando (3.13) y (3.14) se obtiene que

$$\Psi = \frac{\partial H_2}{\partial y}\nabla_x H_1 - \frac{\partial H_1}{\partial y}\nabla_x H_2, \quad \Phi = \nabla_x H_1 \times \nabla_x H_2. \tag{3.15}$$

Es facil notar que $\Psi \cdot \Phi = 0$ lo cual es consecuencia de que el rango de Π sea a lo más dos.

Dicho esto, siguiendo como caso particualar del Teorema 3.1.7, se puede enunciar el siguiente resultado. Por el Teorema 3.1.7, Si X es un campo vectorial en $\mathbb{R}^4$ con tres integrales primeras H_1, H_2, H_3, entonces existen tres estructuras de Poisson compatibles con respecto a las cuales X es campo Hamiltoniano.

Se construirán de manera explícita uno de los bivectores Π_i que definen las integrales primeras H_1, H_2, H_3 del campo X. Consideremos el bivector $\tilde{\Pi}_3$ definido por la pareja (Ψ, Φ) de (3.15). Definamos

$$\begin{aligned} Z = \Pi^\sharp(\mathrm{d}H_3) = &\left(\frac{\partial H_2}{\partial y} \nabla_x H_1 \times \nabla_x H_3 + \frac{\partial H_1}{\partial y} \nabla_x H_3 \times \nabla_x H_2 + \frac{\partial H_3}{\partial y} \nabla_x H_2 \times \nabla_x H_1 \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &+ \nabla_x H_1 \cdot \nabla_x H_2 \times \nabla_x H_3 \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Sea $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ tal que $X = \mu Z$. Tomemos $\Pi_3 = \mu \tilde{\Pi}_3$ el cual es un bivector de Poisson que satisface $\Pi_3^\sharp(\mathrm{d}H_3) = X$.

De manera análoga, se pueden encontrar bivectores Π_1 y Π_2 con respecto a los cuales X es Hamiltoniano. ∎

Ejemplo 3.1.1. *Consideremos $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x_1, x_2, x_3, y), el campo vectorial*

$$X = (x_1 - 2x_2 - y)\frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_1 + 4x_2 - x_3 + 2y)\frac{\partial}{\partial x_2} + (2x_2 + x_3 + y)\frac{\partial}{\partial x_3} + (2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2y)\frac{\partial}{\partial y}$$

En el articulo [7] se calcula que dicho campo cuenta con tres integrales primeras

$$\begin{aligned} H_1(x_1, x_2, x_3, y) &= x_2 + y - (x_1 + x_3), \\ H_2(x_1, x_2, x_3, y) &= \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 + y}{x_1 + x_3}, \\ H_3(x_1, x_2, x_3, y) &= \frac{(2x_1 + 2x_2 + x_3 + y)^2}{2x_2 + y}. \end{aligned}$$

Estas funciones son funcionalmente independientes en el abierto denso $N = \{(x_1, x_2, x_3, y) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 \neq 0$ y $2x_2 + y \neq 0\}$. De esta forma, se pueden construir el bivector

$$\begin{aligned} \Pi_{12} = &\left(-\frac{2x_3 - 2x_2 + x_1 - y}{(x_3 + x_1)^2}, -\frac{1}{x_3 + x_1}, -\frac{x_3 - 2x_2 - y}{(x_3 + x_1)^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial x} \\ &+ \left(\frac{2x_3 - 2x_2 + x_1 - y}{(x_3 + x_1)^2}, -\frac{1}{x_3 + x_1}, \frac{3x_3 - 2x_2 + 2x_1 - y}{(x_3 + x_1)^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

el cual, es Poisson y cumple con la igualdad $\Pi^\sharp(\mathrm{d}h) = X$.

Campos vectoriales compatibles

Sean X, W dos campos vectoriales linealmente independientes en una variedad diferencial M. Consideremos el bivector de la forma

$$\Pi = W \wedge X. \tag{3.16}$$

Si se calcula el corchete de Schouten-Nijenhuis de Π consigo mismo, se obtiene

$$[\Pi, \Pi]_{SN} = 2W \wedge [W, X] \wedge X. \tag{3.17}$$

Recordemos que los campos vectoriales X, W, se dicen ser *compatibles* si

$$[X, W] = aX + bW, \quad a, b \in C^\infty(M).$$

Lema 3.1.10. *i) El bivector Π definido por (3.16) es Poisson sí y solo si X y W son campos vectoriales compatibles.*

ii) Si X y W son compatibles, entonces Π definido por (3.16) es invariantemente conforme.

Demostración. La prueba de i) se sigue inmediatamente de la identidad (3.17). Para ii), sea $f \in C^\infty(M)$. De (3.17) se sigue

$$[f\Pi, f\Pi]_{SN} = (2f^2)W \wedge [W, X] \wedge X.$$

Si W, X son compatibles, entonces $f\Pi$ es Poisson. ■

A partir del análisis previo, se obtiene el siguiente resultado de Hamiltonización.

Teorema 3.1.11. *Sea M variedad diferencial y X un campo vectorial en M con f integral primera. Supongamos que existe un abierto U y un campo vectorial W tal que:*

i) X, W son linealmente independientes en U,

ii) X, W son compatibles, es decir $[X, W] = aX + bW$,

iii) f no es integral primera de W en U.

Entonces el bivector $\Pi = \left(\frac{1}{\mathrm{L}_W f}\right) W \wedge X$ es Poisson en U y cumple $\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$.

Demostración. Por el Lema (3.1.10) las condiciones i) - iii) implican que $\Pi = \left(\frac{1}{\mathrm{L}_W f}\right) W \wedge X$ es bivector de Poisson en U. Por último, verifiquemos que X es Hamiltoniano con respecto a Π. Por calculo directo, se tiene

$$\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = \left(\frac{1}{\mathrm{L}_W f}\right) \mathrm{i}_{\mathrm{d}f}(W \wedge X) = X.$$

■

Campos Homogéneos en $\mathbb{R}^n$ Un caso particular que cumple con las condiciones del Teorema 3.1.11 es tomar $W = E = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ el campo de Euler en $\mathbb{R}^n$ y X un campo homogéneo. Este caso surge como una generalización del caso en $\mathbb{R}^3$ y consiste en describir la construcción de un bivector Π y un abierto U a partir de un campo homogéneo X y una integral primera f.

De forma general, un campo vectorial X en $\mathbb{R}^n$ se dice ser *homogéneo* de orden k sí y solo si

$$[E, X] = -(k-1)X.$$

Proposición 3.1.12. *Un campo vectorial homogéneo X con integral primera f es Hamiltoniano en el dominio abierto $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{L}_E f \neq 0\}$*

Demostración. Dado que X es homogéneo, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$[E, X] = -(k-1)X.$$

Por la forma particular del campo E, existe entorno $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{L}_E f \neq 0\}$ tal que

- $X \times E \neq 0$ en U,
- $[E, X] = -(k-1)X$,
- $X \cdot \nabla f \neq 0$.

Por el Teorema 3.1.11, si se toma $W = E$ el bivector

$$\Pi = \left(\frac{1}{\mathrm{L}_E f}\right) E \times X$$

es Poisson y cumple $\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$. ■

Caso lineal Un caso particular de los campos homogéneos son los campos lineales. Recordemos que a los campos vectoriales lineales los podemos asociar a una matriz cuadrada $n \times n$. Una propiedad particular de los campos vectoriales es que son homogéneos de orden 1. Siguiendo el Teorema 3.1.11 los campos vectoriales lineales con integral primera f son Hamiltonianos si se toma $W = E$, por lo que el bivector

$$\Pi = \left(\frac{1}{\mathrm{L}_E f} \right) E \times X$$

es Poisson y cumple $\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$.

Ejemplo 3.1.2. *Sea $\mathbb{R}^5$ con coordenadas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. El campo vectorial*

$$X = (4x_1, -6x_2, 2x_3, x_1 - 2x_2 + 2x_5, -2x_1 + 4x_4 + 2x_5),$$

tiene como integral primera a la función $f(\boldsymbol{x}) = x_1x_2x_3$. Notemos que el campo $E = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ cumple con las condiciones i), ii) y iii) del Teorema 3.1.11, por lo que el bivector descrito por

$$\begin{aligned}
\Pi = &- \frac{4x_1 + 6x_2}{x_1x_2x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{6x_2 + 2x_3}{x_1x_2x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_5}{x_1x_2x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} \\
&+ \frac{-3x_1 + 2x_2 + 4x_4}{x_1x_2x_3} \frac{\partial}{\partial x_4} \wedge \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{3x_1 + 2x_2 - 2x_5}{x_1x_2x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4} \\
&+ \frac{-2x_1 + 6x_2 + 4x_4 + 2x_5}{x_1x_2x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{4x_1 - 2x_3}{x_1x_2x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} \\
&- \frac{x_1 + 4x_2 + 2x_5}{x_1x_2x_3} \frac{\partial}{\partial x_4} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{2x_1 + 2x_3 - 4x_4 - 2x_5}{x_1x_2x_3} \frac{\partial}{\partial x_5} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} \\
&+ \frac{6x_1 - 4x_4 - 2x_5}{x_1x_2x_3} \frac{\partial}{\partial x_5} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1}.
\end{aligned}$$

Es un bivector de Poisson que cumple con la igualdad $\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$.

Notemos que al igual que en $\mathbb{R}^3$, la tabla 2.1 describe una forma de como construir integrales primeras a partir de los valores y vectores propios de la matriz asociada al campo vectorial lineal.

3.2. Problema de Hamiltonización para campos de flujo periódico

El problema de Hamiltonización para campos vectoriales con flujo periódico surge como caso particular del Teorema 3.1.11. En este Capítulo se da una pequeña introducción al método de promedios, el cual se utiliza para construir un campo vectorial W que satisfaga las condiciones del Teorema 3.1.11.

Definición 3.2.1. *Sea X un campo vectorial en M. Se dice que X es un campo con flujo periódico si existe $T \in C^\infty(M)$, $T > 0$ tal que*

$$\mathrm{Fl}_X^{t+T(x)}(x) = \mathrm{Fl}_X^t(x),$$

para todo $x \in M$.

De esta forma, la función T recibe el nombre de *periodo*. La función periodo nos permite definir la función *frecuencia*, $\omega(x) := \frac{2\pi}{T(x)}$. A partir de la función frecuencia y la función periodo, se construye el campo

$$\Upsilon := \frac{1}{\omega} X,$$

el cual, es un campo de flujo periódico, con periodo 2π. El campo υ y su flujo permite definir una acción en $\mathbb{S}^1 = \frac{2\pi}{\mathbb{Z}}$, la acción $\Phi : \mathbb{S}^1 \times M \to M$ dada por

$$\Phi(\theta, x) := \mathrm{Fl}_\Upsilon^\theta(x). \tag{3.18}$$

La acción (3.18) es una acción periódica con periodo constante 2π.

A partir de un campo en M de flujo periódico, la acción en $\mathbb{S}^1$ se utiliza para definir un *operador de promedio*, el cuál será denotado por $\langle\cdot\rangle$.

Definición 3.2.2. *Para un campo tensorial $R \in \Gamma\mathrm{T}_r^s(M)$ el operador de promedio de R con respecto a la acción en $\mathbb{S}^1$ inducida por X, es el campo tensorial (del mismo grado de R) definido por*

$$\langle R\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{Fl}_\Upsilon^t)^* R dt. \tag{3.19}$$

El operador promedio tiene las siguientes propiedades: para todo $R \in \Gamma\mathrm{T}_r^s(M)$ se cumple

i) R es $\mathbb{S}^1$-invariante ($(\mathrm{Fl}_\Upsilon^t)^* R = R$) si y solo si $\langle R\rangle = R$.

ii) $\mathrm{L}_\Upsilon \langle R \rangle = 0$, es decir $\langle R \rangle$ es $\mathbb{S}^1-$invariante.

iii) Si $g \in C^\infty(M)$ es una función $\mathbb{S}^1-$invariante, entonces $\langle \mathrm{L}_V g \rangle = \mathrm{L}_{\langle V \rangle} g$.

La prueba de estas propiedades se pueden encontrar en el artículo [1].

A continuación, se presentará el resultado de Hamiltonización para campos con flujo periódico.

Teorema 3.2.3. *Si X es un campo vectorial en M con integral primera f y de flujo periódico, entonces X es Hamiltoniano en un dominio abierto U de M.*

Demostración. Notemos que f es $\mathbb{S}^1-$invariante, esto pues

$$\mathrm{L}_\Upsilon f = \mathrm{L}_{\frac{1}{\omega}X} f = \frac{1}{\omega}\mathrm{L}_X f = 0.$$

Sea V un campo vectorial en M tal que $\mathrm{L}_V f \neq 0$, y $\langle V \rangle \neq 0$. Tomemos $U = \{\mathbf{x} \in M \mid \mathrm{L}_V f \neq 0\}$ y $W = \langle V \rangle$. En consecuencia $\mathrm{L}_W f \neq 0$ en U. Como W es $\mathbb{S}^1-$invariante, se tiene que

$$[X, W] = [W, \omega\Upsilon] = (\mathrm{L}_W \omega)\Upsilon = (\mathrm{L}_W \ln \omega) X.$$

Por lo tanto, X y W son compatibles. Como f no es integral primera de W, se sigue que X y W son linealmente independientes. Por el Teorema 3.1.11, se sigue que el campo vectorial X es Hamiltoniano en U con respecto al bivector de Poisson

$$\Pi = \frac{1}{\mathrm{L}_{\langle V \rangle} f}\langle V \rangle \wedge X.$$

■

Ejemplo 3.2.1. *Consideremos el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ descrito por la siguiente ecuación*

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z},$$

el cual, cuenta con la siguiente integral primera

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Este es campo es un ejemplo de un campo de flujo periódico, pues su flujo es descrito por

$$Fl_X^t(x, y, z) = (x\cos t - y\sin t, y\cos t + x\sin t, x(\cos t - 1) - y\sin t + z).$$

Esta función es periódica de periodo 2π, por lo que, se le puede aplicar el Teorema 3.2.3. El bivector de Poisson que hace Hamiltoniano a X es

$$\Pi = -\frac{xz+y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z} - \frac{yz-xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}.$$

Ejemplo 3.2.2 (El cilindro)**.** *El cilindro es una variedad dos dimensional representada por la variedad producto $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ con coordenadas (θ, x) donde $\theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi$ y $x \in \mathbb{R}$. Se X*

$$X = \omega(x)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

un campo vectorial en M con $\omega \in M$ función suave tal que $\dfrac{\partial\omega}{\partial\theta} = 0$ y $\omega(x) > 0$. Notemos que el campo X tiene flujo periódico con función de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega(x)}$, por lo que el campo $\Upsilon = \frac{1}{\omega(x)}X = \frac{\partial}{\partial\theta}$ tiene periodo $T = 2\pi$. Por lo tanto, podemos definir el operador de promedios usando el flujo de Υ por la fórmula (3.19). Sea $g(\theta, x)$ una función suave en M (2π-periódica en θ). Entonces, el promedio de g de calcula por

$$\langle g\rangle(\theta, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\circ \mathrm{Fl}^t_\Upsilon(\theta, x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t, x)\mathrm{d}t.$$

De esta forma, la función $f(\theta, x) = \langle g\rangle(\theta, x)$ siempre es integral primera del campo X y además cumple $\frac{\partial f}{\partial\theta} = 0$. Ahora, sea $V = v_1(\theta, x)\dfrac{\partial}{\partial\theta} + v_2(\theta, x)\dfrac{\partial}{\partial x}$ un campo vectorial con v_1, v_2 funciones suaves en M. Como $\left[X, \dfrac{\partial}{\partial\theta}\right] = \left[X, \dfrac{\partial}{\partial x}\right] = 0$, el promedio del campo V se obtiene por

$$\langle V\rangle(\theta, x) = \langle v_1\rangle(x)\frac{\partial}{\partial\theta} + \langle v_2\rangle(x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Aplicando el Teorema 3.2.3, vamos construir un estructura de Poisson en M, con respecto a la cual X será un campo Hamiltoniano. Fijemos una función f en M con promedio distinto de cero y un campo vectorial V. Tomemos $W = \langle V\rangle$ y definamos $U = \{(\theta, x) \in M \mid \mathrm{L}_W f(\theta, x) \neq 0\}$. Por el Teorema 3.2.3, el bivector

$$\Pi = \frac{1}{\mathrm{L}_W f} W\wedge X = -\frac{\omega(x)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial}{\partial x}$$

es Poisson y cumple que $\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$.

Ejemplo 3.2.3 (El Toro)**.** $M = \mathbb{T}^2$, $\overline{\omega}(\varphi_1, \varphi_2) := 1 + \cos^2(\omega_2\varphi_1 - \omega_1\varphi_2)$ *y definamos*

$$X = \overline{\omega}(\varphi_1, \varphi_2)\omega_1\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \overline{\omega}(\varphi_1, \varphi_2)\omega_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}.$$

Donde ω_1, ω_2 *son números enteros positivos y el máximo común divisor entre ellos es* 1. *Notemos que el campo* X *tiene periodo* $T = \frac{2\pi}{\varpi}$, *por lo que el campo*

$$\Upsilon = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

es periódico con periodo $T = 2\pi$. *Si* $g \in C^\infty(\mathbb{T})$ *es una función* $2\pi-$*periódica en cada entrada, entonces*

$$\langle g \rangle(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t\omega_1 + \varphi_1, t\omega_2 + \varphi_2) \mathrm{d}t.$$

En particular, si se toma $g(\varphi_1, \varphi_2) = -\cos(\omega_2 \varphi_1) \sin(\omega_1 \varphi_2)$, *se puede definir la función*

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \langle g \rangle(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2} \sin(\omega_2 \varphi_1 - \omega_1 \varphi_2).$$

la cual es integral primera para Υ. *Ahora, siguiendo el procedimiento del Teorema 3.2.3, sea* $V = \cos(\omega_2 \varphi_1) \cos(\omega_1 \varphi_2) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \sin(\omega_2 \varphi_1) \sin(\omega_1 \varphi_2) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}$ *entonces, tomemos*

$$W = \langle V \rangle = \frac{1}{2} \cos(\omega_2 \varphi_1 - \omega_1 \varphi_2) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} \cos(\omega_2 \varphi_1 - \omega_1 \varphi_2) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

Notemos que $\mathrm{L}_W f = \frac{1}{4}(\omega_1 + \omega_2) \cos^2(\omega_2 \varphi_1 - \omega_1 \varphi_2)$. *Si se toma* $U = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T} \mid \varphi_2 \neq \frac{\omega_2}{\omega_1} \varphi_1 - \dfrac{\pi}{2\omega_1}\}$ *el bivector*

$$\Pi = 2\varpi \sec(\omega_2 \varphi_1 - \omega_1 \varphi_2) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi_2}$$

es Poisson y cumple que $\Pi^\sharp(\mathrm{d}f) = X$.

Ejemplo 3.2.4 (El toro general). *Consideremos la variedad diferencial* $M = \mathbb{T}^2$ *con coordenadas cíclicas* (φ_1, φ_2), *es decir,* $\varphi_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. *Fijemos* m, n *enteros primos relativos y definamos el campo vectorial*

$$\Upsilon = m \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + n \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

Notemos que Υ *es un campo con flujo* 2π*-periódico en* $\mathbb{T}^2$, *por lo que podemos un definir operador de promedios en* $\mathbb{T}^2$ *otra vez usando la fórmula* (3.19). *Si se toma una función* $\omega(\varphi_1, \varphi_2) = G(n\varphi_1 - m\varphi_2)$, *con* $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ *y* $2\pi-$*periódica, el campo vectorial definido por*

$$X := \omega(\varphi_1, \varphi_2) \Upsilon$$

tiene flujo periódico en el conjunto $U = \{\omega(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0\}$ *con función de frecuencia* $|\omega(\varphi_1, \varphi_2)|$. *Como las funciones invariantes con respecto a la* $\mathbb{S}^1$*-acción inducida por el campo* Υ *son integrales primeras del campo* X, *entonces toda integral primera de* X *es de la forma* $f(\varphi_1, \varphi_2) = F(n\varphi_1 - m\varphi_2)$ *con* $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ *y* $2\pi-$*periódica. Para cada integral primera* $f(\varphi_1, \varphi_2)$ *de* X *el campo vectorial* V *definido por*

$$V = \frac{r}{F'(n\varphi_1 - m\varphi_2)}\frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{s}{F'(n\varphi_1 - m\varphi_2)}\frac{\partial}{\partial \varphi_2},$$

con r, s *enteros tales que* $rn - sm = 1$, *satisface las siguientes condiciones*

- $L_V f = 1$ *(siempre que* $df \neq 0$*),*
- V *es* $\mathbb{S}^1$*-invariante.*

Por el Teorema (3.2.3), el campo vectorial X *es un campo Hamitoniano respecto al bivector*

$$\Pi = V \wedge X = \frac{\omega(\varphi_1, \varphi_2)}{F'(n\varphi_1 - m\varphi_2)}\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi_2},$$

en todos los puntos no singulares de f. *En particular, si* $\displaystyle\int_0^{2\pi} G(t)dt = 0$, *podemos tomar una integral primera* $f(\varphi_1, \varphi_2) = F(n\varphi_1 - m\varphi_2)$ *con* F *una antiprimitiva de* G. *En este caso,* X *es un campo Hamiltoniano con respecto a la estructura de Poisson canónica* $\pi = \dfrac{\partial}{\partial \varphi_1} \wedge \dfrac{\partial}{\partial \varphi_2}$ *en todo* $\mathbb{T}^2$.

Oscilador armónico en $\mathbb{R}^3$

Consideremos el siguiente campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Podemos notar que este campo cuenta con las siguientes propiedades:

- Cuenta con dos integrales primeras, las cuales son
  1. $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$,
  2. $h(x, y, z) = z$.
- Es lineal.

- Tiene flujo periódico.

En consecuencia, este campo cumple con nuestra hipótesis para el problema de Hamiltonización por lo que se le pueden aplicar todos los resultados de este capítulo. De manera ilustrativa se le aplicará todos los métodos desarrollados anteriormente para encontrar la estructura de Poisson que hace Hamiltoniano al campo X.

Empezando por el orden de aparición en la tesis, dado que se cuenta con dos integrales primeras para un mismo campo, podemos aplicar el Teorema 2.2.2. Los bivectores que buscamos son:

$$\begin{aligned}\Pi_f &= -\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}\\ \Pi_h &= x\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}+y\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que el campo es lineal, se le puede aplicar el Teorema 2.2.3 y los bivectores que se obtienen son:

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_f &= \frac{xz}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}+\frac{yz}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y},\\ \tilde{\Pi}_h &= x\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}+y\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x}-\frac{x^2+y^2}{z}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Por último, el campo cuenta con flujo periódico, por lo que, al aplicarle el Teorema 3.2.3, y tomando el campo $W=(x,y,z)$ los bivectores resultantes son:

$$\begin{aligned}\Pi_{(E,f)} &= -\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}\\ \Pi_{(E,h)} &= x\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}+y\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

Cada bivector es de Poisson y cumplen que $\Pi^{\sharp}_{(E,f)}(\mathrm{d}f)=X$ y $\Pi^{\sharp}_{E,h}(\mathrm{d}h)=X$.

Ahora bien, si tomamos $W=(x^3,y^3,z^3)$, los bivectores que obtenemos son

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_{(W,f)} &= \frac{4xz^3}{3(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}+\frac{4yz^3}{3(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y},\\ \hat{\Pi}_{(W,f)} &= x\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z}+y\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x}+\frac{3(x^2+y^2)^2}{z^3}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] M Avendaño-Camacho, J A Vallejo, and Yu Vorobjev. A simple global representation for second-order normal forms of hamiltonian systems relative to periodic flows. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(39), Sep 2013. ISSN 1751-8121. doi: 10.1088/1751-8113/46/39/395201. 41

[2] Pantelis A. Damianou and Fani Petalidou. Poisson brackets with prescribed casimirs. *Canadian Journal of Mathematics*, 64(5):991–1018, Oct 2012. ISSN 1496-4279. doi: 10.4153/cjm-2011-082-2. 27, 33

[3] Jean Dufour and Tien Zung Nguyen. Poisson structures and their normal forms. *Progress in mathematics, v.242 (2005)*, page 321, 01 1997. doi: 10.1007/b137493. 5, 9, 29, 34

[4] Oğul Esen, Anindya Ghose Choudhury, Partha Guha, and Hasan Gümral. Superintegrable cases of four-dimensional dynamical systems. *Regular and Chaotic Dynamics*, 21(2):175–188, Mar 2016. ISSN 1468-4845. doi: 10.1134/s1560354716020039. 34

[5] Whitaker E.T. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Point Particles and Rigid Bodies*. Cambridge: Cambridge University Press. USA, 1999. 2

[6] Puyun Gao. Hamiltonian structure and first integrals for the lotka–volterra systems. *Physics Letters A*, 273:85–96, 08 2000. doi: 10.1016/S0375-9601(00)00454-0. 2

[7] V. Gorbuzov and Andrei Pranevich. First integrals of ordinary linear differential systems. 01 2012. 23, 36

[8] H. Gumral. Existence of hamiltonian structure in 3d, 2010. 2

[9] Hasan Gümral and Yavuz Nutku. Poisson structure of dynamical systems with three degrees of freedom. *Journal of Mathematical Physics*, 34:5691–5723, Dic 1993. doi: 10.1063/1.530278. 2, 18

[10] Fernando Haas and J. Goedert. On the generalized hamiltonian structure of 3d dynamical systems. *Physics Letters A*, 199, 11 2002. doi: 10.1016/0375-9601(95) 00113-H. 2

[11] Benito Hernández-Bermejo and Víctor Fairén. A constant of motion in 3d implies a local generalized hamiltonian structure. *Physics Letters A*, 234(1):35–40, Sep 1997. ISSN 0375-9601. doi: 10.1016/s0375-9601(97)00558-6. 2

[12] Sergio A Hojman. The construction of a poisson structure out of a symmetry and a conservation law of a dynamical system. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(3):667–674, feb 1996. doi: 10.1088/0305-4470/29/3/017. 2

[13] Stanislaw Kasperczuk. On algebraic structures of dynamical systems. 2008. 2, 18

[14] Charles-Michel Marle. The schouten-nijenhuis bracket and interior products. *Journal of Geometry and Physics*, 23(3):350 – 359, 1997. ISSN 0393-0440. 7

[15] J. Hernández Dávila R. Alvarado Flores and M. Agüero Granados. Local hamiltonization and foliation: A new solution to the hamiltonization problem. *Electromagnetic Phenomena*, 6, 2006. 2, 27