"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Posgrado en Matemáticas

Clasificación de Álgebras de Lie de Campos Vectoriales y Sistemas de Lie-Hamilton en el Plano

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Gabriel Alejandro Orozco Casillas

Director de Tesis: Dr. Guillermo Dávila Rascón
Codirector: Dr. Misael Avendaño Camacho

Hermosillo, Sonora, México.   2 de Septiembre de 2015.

SINODALES

Dr. Rubén Flores Espinoza
Universidad de Sonora.

Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez
Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Dr. Misael Avendaño Camacho
Universidad de Sonora.

Dr. Guillermo Dávila Rascón
Universidad de Sonora.

Dedicatoria

Esta tesis la dedico a mis padres.

Su apoyo incondicional me ha permitido lograr una meta más en mi vida.

Gracias.

Agradecimientos

Agradezco a todos mis maestros del Departamento de Matemáticas por sus valiosas enseñanzas durante mi estancia en la Maestría en Matemáticas, sin duda cada uno de sus enseñanzas me han ayudado a seguir adelante en mi formación. Agradezco a mi asesor el Dr. Guillermo Dávila Rascón por su gran apoyo y sus enseñanzas como mi profesor en la Maestría en matemáticas y durante el período de elaboración de este proyecto de tesis. También agradezco al Dr. Misael Avendaño Camacho por su valiosa ayuda y colaboración durante este trabajo de tesis.

A mis maestros sinodales, Dr. Rubén Flores Espinoza, Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez, Dr. Misael Avendaño Camacho y Dr. Guillermo Dávila Rascón, por sus importantes críticas y observaciones las cuales me fueron de gran ayuda para mejorar este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por apoyarme en mi estancia en la Maestría en Matemáticas como becario de su institución.

A mi familia y amigos que siempre me han apoyado a lo largo de mi vida.

Índice

Introducción

Nuestro objetivo principal en esta tesis es utilizar la lista de álgebras de Lie de campos vectoriales en el plano para estudiar y clasificar los sistemas de Lie-Hamilton en el plano. La clasificación de las álgebras de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ fue realizada por Lie y posteriormente completada por Olver [6], quienes realizaron la clasificación alrededor de puntos genéricos, la clasificación de los sistemas de Lie-Hamilton que aquí presentaremos también se hará alrededor de puntos genéricos ya que de esta manera solo basta auxiliarnos en la clasificación de Lie y Olver y ver que álgebras de Lie en esta clasificación son Hamiltonianas, otra ventaja es que todo campo Hamiltoniano definido en un entorno de un punto genérico es Hamiltoniano con respecto a una forma simpléctica en $\mathbb{R}^2$.
La manera en que se organiza este trabajo es la siguiente:

En el primer capítulo se introducen conceptos preliminares básicos que estaremos usando a lo largo de esta tesis, primero empezaremos por estudiar las variedades diferenciables, los grupos de Lie y las álgebras de Lie, veremos su definición general así como las distintas caracterizaciones de un álgebra de Lie, ya sea como el conjunto de los campos invariantes por la izquierda (o por la derecha) en $\mathfrak{X}(G)$ o como el espacio tangente a la identidad del grupo de Lie G. También estudiaremos las constantes de estructura para un álgebra de Lie y la forma de Killing, posteriormente abordaremos el tema variedades de Poisson estudiando su definición general, el tensor de Poisson y rango del tensor de Poisson.

En el segundo capítulo estudiaremos los grupos de transformaciones. Primero veremos su definición general, es decir, introduciremos una definición de grupo de transformaciones global y otra para grupo de transformaciones local, estudiaremos propiedades y proporcionaremos varios ejemplos de naturaleza global así como local, aunque en este trabajo estamos interesados en los grupos de transformaciones locales. Posteriormente estudiaremos acciones infinitesimales y probaremos que si V es un álgebra de Lie de campos vectoriales finito dimensional en una variedad M y G su grupo de Lie entonces existe una única acción local y efectica de G en M cuya álgebra de generadores infinitesimales es isomorfa a V. Por último veremos tres ejemplos de grupos de transformaciones en $\mathbb{R}$ que de hecho Lie probó que son los únicos salvo difeomorfismos sobre la variedad $\mathbb{R}$.

En el tercer capítulo clasificaremos todas las álgebras de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}$ las cuales son las que abordamos como ejemplos en el capítulo dos. Posteriormente daremos un esquema general de la clasificación de álgebras de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$, las cuales son 28 en total, salvo cambios analíticos de coordenadas. En esta lista existen dos clases de álgebras de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$: las imprimitivas, que son en total 8, y las imprimitivas que son 20, esta división será importante a la hora de estudiarlas.

En el capítulo cuatro adordamos los sistemas de Lie-Hamilton y el concepto de sistema generador modular el cual nos será de utilidad para determinar que álgebras de la clasificación en el plano no son de campos vectoriales Hamiltonianos. Para cerrar utilizaremos la clasificación de álgebras de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ para clasificar los sistemas de Lie-Hamilton en el plano, esta prueba se hará mediante un análisis caso por caso y además calcularemos las formás simplécticas y encontraremos las funciones Hamiltonianas con respecto a las cuales los campos vectoriales de las álgebras son Hamiltonianos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se establecen algunas de las propiedades más conocidas de los grupos y álgebras de Lie. Este es material estándar que es posible consultar en cualquier texto sobre esta materia, ver por ejemplo [13], [4].

1.1 Variedades diferenciables, grupos y álgebras de Lie

Comenzaremos abordando brevemente el concepto de una variedad diferenciable para posteriormente abordar el tema de grupos y álgebras de Lie.

Una *variedad topológica* de dimensión m es un espacio topológico M, Hausdorff, localmente euclidiano y con una base numerable de tal modo que para cada $x \in M$, existe un abierto $U \subset M$ y un homeomorfismo $\varphi : U \to O$, donde $O = \varphi(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$. Cada par (U, φ), se llama una *carta coordenada.* Si $x \in U$, entonces

$$\varphi(x) = (x^1(x), x^2(x), \ldots, x^m(x)) \in \mathbb{R}^m,$$

y a cada función $x^i : U \to \mathbb{R}$ se le denomina la $i-$*ésima función coordenada.* Al conjunto $\{x^i\}_{i=1}^m$ se le llama *sistema de coordenadas* asociado a (U, φ).

Sean (U, φ), (V, ψ) dos cartas coordenadas en M, con $U \cap V \neq \emptyset$. La función

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m,$$

es un homeomorfismo con inversa $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$.

En este caso, si $\{x^i\}_{i=1}^m$ y $\{y^i\}_{i=1}^m$ son las coordenadas locales asociadas a (U, φ) y (V, ψ), respectivamente, entonces es claro que mediante $\psi \circ \varphi^{-1}$

$$(x^1, \ldots, x^m) \longmapsto \big(y^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, y^m(x^1, \ldots, x^m)\big).$$

Las cartas (U, φ), (V, ψ) se dicen $C^\infty-$*compatibles* si $\psi \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi \circ \psi^{-1}$ son funciones suaves, es decir de clase C^∞, en sus respectivos dominios.

Una *estructura diferenciable* (o de clase C^∞) en la variedad topológica M es una familia $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de cartas coordenadas tales que

1. $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M.$

2. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son $C^\infty-$compatibles.

3. Cada carta coordenada (V, ψ) que sea $C^\infty-$compatible con todas las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, pertenece a la familia, esto es, $(V, \psi) \in \mathcal{U}$.

Una *variedad diferenciable* (o *variedad suave*) es una variedad topológica M provista de una estructura diferenciable $\mathcal{U}$.

Una función $D_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ se dice que es una *derivación* de $C^\infty(M)$ en el punto $p \in M$ si

1. $D_p(f + \lambda g) = D_p(f) + \lambda D_p(g)$

2. $D_p(f \cdot g) = D_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot D_p(g)$,

llamaremos *espacio tangente* a la variedad M en el punto $p \in M$ al espacio vectorial $Der(C^\infty(M), p)$ y lo denotaremos por T_pM. El *haz tangente* de la variedad M, $TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM$ es una variedad suave de dimensión $2m$.

Un campo vectorial suave en M es una *sección* del haz tangente, es decir, una función suave $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = \mathrm{id}$, donde $\pi : TM \to M$ es la proyección natural. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de los campos vectoriales suaves en M.

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son dos campos vectoriales en M, se define su suma $X + Y$ como el campo vectorial que opera sobre funciones de $C^\infty(M)$ de la manera usual:

$$(X + Y)(f)(p) = X_p(f) + Y_p(f).$$

Aquí, $p \in M$ y $f \in C^\infty(M)$, por lo que $(X + Y)(f) : M \to \mathbb{R}$, es una función suave. Definimos también el campo vectorial fX como un campo vectorial que opera sobre las funciones de $C^\infty(M)$ por medio de la siguiente regla:

$$(fX)(g)(p) = f(p)X_p(g).$$

Es claro que para cada $g \in C^\infty(M)$, $(fX)(g) : M \to \mathbb{R}$ es una función suave.

Sean X, Y dos campos vectoriales suaves en M. Entonces existe un único campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para toda función $f \in C^\infty(M)$. Al campo Z se le llama el *corchete de Lie* de los campos X e Y y se denota por $[X, Y]$. Se tiene así que $\big(\mathfrak{X}(M), [\,,\,]\big)$ es un álgebra de Lie, infinito dimensional, donde el producto del álgebra es, precisamente el corchete de campos vectoriales. Ver [13] para una prueba de esto.

Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una función. Diremos que f es diferenciable si para cada $x \in M$ existe una carta coordenada (U, φ) y una carta coordenada (V, ψ) de $y = f(x)$, con $f(U) \subset V$, tales que

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi\big\downarrow & & \big\downarrow\psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{F} & \psi(V) \end{array}$$

la función $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$ es diferenciable entre abiertos de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$.

Vamos a construir a partir de f una función $f_* : TM \to TN$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\ \pi_M \big\downarrow & & \big\downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

sea conmutativo, esto es, $\pi_N \circ f_* = f \circ \pi_M$.

En efecto, sea $v \in TM$, v debe ser de la forma $v_p \in T_pM$, para algún $p \in M$. Entonces f_*v_p es el elemento de $T_{f(p)}N$ dado por su actuación sobre una $\varphi \in C^\infty(N)$ por medio de

$$(f_*v_p)(\varphi) \overset{\text{def}}{=} v_p(\varphi \circ f).$$

Veamos que efectivamente $f_*v_p \in T_{f(p)}N$. Para ello observemos que es $\mathbb{R}-$lineal, es decir, si $\varphi, \tau \in C^\infty(N)$ y $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (f_*v_p)(a\varphi + b\tau) &= v_p((a\varphi + b\tau) \circ f) \\ &= v_p(a\varphi \circ f + b\tau \circ f) \\ &= av_p(\varphi \circ f) + bv_p(\tau \circ f) \\ &= af_*v_p(\varphi) + bf_*v_p(\tau) \end{aligned}$$

Dado que $\varphi \circ f, \tau \circ f \in C^\infty(M)$ y como v_p $\mathbb{R}-$lineal. Además f_*v_p es una derivación puntual en $f(p)$:

$$\begin{aligned} (f_*v_p)(\varphi \cdot \tau) &= v_p((\varphi \cdot \tau) \circ f) \\ &= v_p((\varphi \circ f) \cdot (\tau \circ f)) \\ &= v_p(\varphi \circ f) \cdot (\tau \circ f)(p) + (\varphi \circ f)(p) \cdot v_p(\tau \circ f) \\ &= (f_*v_p)(\varphi) \cdot \tau(f(p)) + \varphi(f(p)) \cdot (f_*v_p)(\tau). \end{aligned}$$

De esta manera,

$$(\pi_N \circ f_*)(v_p) = \pi_N(f_*v_p) = f(p) = (f \circ \pi_M)(v_p), \quad \forall v_p \in T_pM,$$

es decir,

$$\pi_N \circ f_* = f \circ \pi_M$$

por otra parte, si denotamos $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ la restricción f_* a la subvariedad regular T_pM, resulta que f_{*p} es $\mathbb{R}-$lineal: para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $u_p, v_p \in T_pM$ y $\varphi \in C^\infty(N)$:

$$\begin{aligned} (f_{*p})(au_p + bv_p)(\varphi) &= (au_p + bv_p)(\varphi \circ f) \\ &= (au_p)(\varphi \circ f) + (bv_p)(\varphi \circ f) \\ &= a(f_{*p}u_p)(\varphi) + b(f_{*p}v_p)(\varphi), \end{aligned}$$

y por tanto $(f_{*p})(au_p + bv_p) = a(f_{*p}u_p) + b(f_{*p}v_p)$.

A f_* se le denomina la *diferencial* de $f : M \to N$ o, a veces el *push-forward* de f.

Un *grupo de Lie* G es una variedad diferenciable sobre la que se ha definido una estructura de grupo (algebraico) de tal manera que las funciones

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto \mu(g,h) \stackrel{\text{def}}{=} gh \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} inv : G &\to G \\ g &\mapsto inv(g) \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1} \end{aligned}$$

son diferenciables.

Por otro lado, el *álgebra de Lie* de un grupo de Lie G se define como el espacio tangente a la variedad G, en la identidad $e \in G$, T_eG.

Otra manera de definir el álgebra de Lie del grupo de Lie G, equivalente a la anterior, es como el álgebra de los campos vectoriales invariantes por la izquierda en la variedad G, $\mathfrak{X}_L(G)$, la cual es una subálgebra de $\mathfrak{X}(G)$. En lo que sigue, veremos la equivalencia de estos dos enfoques.

Sea G un grupo de Lie y $g \in G$ un elemento fijo. Definimos la *traslación por la izquierda* en el grupo G como

$$\begin{aligned} L_g : G &\to G \\ h &\mapsto L_g(h) = gh. \end{aligned}$$

Asimismo, definimos la *traslación por la derecha* en el grupo G como

$$\begin{aligned} R_g : G &\to G \\ h &\mapsto R_g(h) = hg. \end{aligned}$$

Se sigue directamente, de estas definiciones, que

$$L_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2} \circ L_{g_1}$$

para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$. Además, L_g y R_g son difeomorfismos, con

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}, \qquad (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}},$$

ya que el producto del grupo G y la asignación de inverso son funciones suaves.

Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ se dice ser *invariante por la izquierda* si

$$(\mathrm{d}_h L_g)(X(h)) = X(gh) \qquad \forall\, g, h \in G. \tag{1.1}$$

Notemos que $X(h) \in T_hG$ por lo que $\mathrm{d}_h L_g : T_hG \to T_{gh}G$.

Sea

$$\mathfrak{X}_L(G) = \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid X(gh) = d_h L_g(X(h))\}.$$

Es claro que la suma de dos campos invariantes por la izquierda es de nuevo un campo invariante por la izquierda. Además, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathfrak{X}_L(G)$, se sigue directamente que $\lambda X \in \mathfrak{X}_L(G)$. Por lo tanto, $\mathfrak{X}_L(G)$ es un espacio vectorial real.

Otra manera de escribir (1.1) es por medio del *pull-back* del campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ bajo el difeomorfismo L_g. Así, $X \in \mathfrak{X}(G)$ es invariante por la izquierda si y sólo si

$$L_g^* X = X,$$

donde

$$(L_g^* X)(h) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{d}_{gh} L_{g^{-1}})(X(L_g(h))) = (\mathrm{d}_{gh} L_{g^{-1}})(X(gh)) = \big(\mathrm{d}_h L_g\big)^{-1}(X(gh)).$$

Una propiedad importante de los campos vectoriales invariantes por la izquierda es que su corchete es también un campo vectorial invariante por la izquierda. En efecto, si $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$, entonces

$$L_g^*[X, Y] = [L_g^* X, L_g^* Y] = [X, Y]. \tag{1.2}$$

De esto, se sigue que $(\mathfrak{X}_L(G), [\,,\,])$ es un *álgebra de Lie*, ver [4].

Veamos ahora cómo identificar al espacio de los campos vectoriales invariantes por la izquierda con el espacio T_eG.

Si $v \in T_eG$, definimos el campo vectorial $X_v \in \mathfrak{X}(G)$ por

$$X_v(g) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{d}_e L_g)(v) \in T_gG. \tag{1.3}$$

Notemos que para cualquier elemento h que pertenezca a una vecindad de $g \in G$, se cumple:

$$(\mathrm{d}_g L_h)(X_v(g)) = (\mathrm{d}_g L_h) \circ (\mathrm{d}_e L_g)(v) = (\mathrm{d}_e L_{hg})(v) = X_v(hg).$$

Esto nos dice que el campo vectorial X_v definido en (1.3) es invariante por la izquierda. Más aún, si $X \in \mathfrak{X}_L(G)$, se tiene que $X(e) \in T_eG$ por lo que la correspondencia

$$\begin{aligned} T_eG &\to \mathfrak{X}_L(G) \\ v &\mapsto X_v, \end{aligned}$$

donde X_v está definido por (1.3), es una biyección, como se probará en lo que sigue. De hecho, demostraremos que $\mathfrak{X}_L(G)$ y T_eG son espacios vectoriales isomorfos. En efecto, se define la función

$$\begin{aligned} \Phi : T_eG &\to \mathfrak{X}_L(G) \\ v &\mapsto \Phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} X_v \end{aligned}$$

donde X_v es el campo vectorial invariante por la izquierda definido en (1.3). Es claro que Φ es lineal, ya que si $v, w \in T_eG$, entonces $\Phi(v + w) = X_{v+w}$ y se tiene

$$X_{v+w}(g) = (d_e L_g)(v + w) = d_e L_g(v) + d_e L_g(w) = X_v(g) + X_w(g),$$

esto es, $\Phi(v+w)=\Phi(v)+\Phi(w)$. Además, $\Phi(\lambda v)=X_{\lambda v}$ y se tiene

$$X_{\lambda v}(g)=(d_eL_g)(\lambda v)=\lambda(d_eL_g)(v),$$

por lo que $\Phi(\lambda v)=\lambda\Phi(v)$. Por otra parte, notemos que

$$\ker\Phi=\{v\in T_eG|\Phi(v)=0\}=\{v\in T_eG|X_v=0\},$$

lo cual nos dice que $X_v(g)=0$, para toda $g\in G$. Luego, $\ker(d_eL_g)=\{0\}$ y se sigue que Φ es inyectiva. Para probar que Φ es sobreyectiva, sea $X\in\mathfrak{X}_L(G)$ un campo arbitrario y consideremos su valor en la identidad $e\in G$, digamos que $w=X(e)\in T_eG$. Como X es invariante por la izquierda, se tiene que para todo $g\in G$, $(\mathrm{d}_gL_h)(X(g))=X(hg)$; en particular, si $g=e$, entonces de esto último y de (1.3) se obtiene

$$X_w(h)=(\mathrm{d}_eL_h)(w)=(\mathrm{d}_eL_h)(X(e))=X(h).$$

Como w es arbitrario, se sigue que $X_w=X$ y $\Phi(w)=X_w=X$. Así, hemos demostrado que Φ es sobre y, por lo tanto, es un isomorfismo lineal. Luego, los espacios vectoriales T_eG y $\mathfrak{X}_L(G)$ son isomorfos; en particular, $\mathfrak{X}_L(G)$ es de dimensión finita.

En lo que sigue, utilizaremos las dos caracterizaciones anteriores para referirnos al álgebra de Lie de un grupo de Lie: Como el espacio tangente a la identidad o como el espacio de campos vectoriales invariantes por la izquierda en G.

Si G es un grupo de Lie, denotaremos por $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Así,

$$\mathfrak{g}\equiv T_eG\equiv\mathfrak{X}_L(G), \tag{1.4}$$

y pasaremos de una caracterización a otra, según sea más conveniente.

Análogamente, un campo vectorial $X\in\mathfrak{X}(G)$ se dice ser *invariante por la derecha* si

$$(\mathrm{d}_hR_g)(X(h))=X(hg)\qquad\forall\, g,h\in G. \tag{1.5}$$

El razonamiento y los resultados anteriores se pueden reproducir de manera similar para campos vectoriales invariantes por la derecha, por ello de ahora en adelante podremos utilizar campos invariantes por la izquierda o por la derecha, entonces de igual forma tendremos que

$$\mathfrak{g}\equiv T_eG\equiv\mathfrak{X}_L(G)\equiv\mathfrak{X}_R(G). \tag{1.6}$$

La identificación (1.6) nos permite definir una operación en $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}[\,,\,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}&\to\mathfrak{g},\\ (u,v)&\mapsto[u,v],\end{aligned}$$

donde

$$[u,v]\overset{\text{def}}{=}[X_u,X_v](e). \tag{1.7}$$

Notemos que la operación en (1.7) está bien definida ya que se tienen las identificaciones $T_eG\ni u\equiv X_u\in\mathfrak{X}_L(G)$ y $T_eG\ni v\equiv X_v\in\mathfrak{X}_L(G)$.

A la operación definida por (1.7) se le llama el *corchete de Lie* del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y satisface las siguientes propiedades:

1. Bilinealidad:
$$[\lambda u + \mu v, \xi w + \zeta z] = \lambda\xi[u, w] + \lambda\zeta[u, z] + \mu\xi[v, w] + \mu\zeta[v, z],$$
para cualesquiera $u, v, w, z \in \mathfrak{g}$, $\lambda, \mu, \xi, \zeta \in \mathbb{R}$.

2. Antisimetría:
$$[u, v] = -[v, u].$$

3. Identidad de Jacobi:
$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Estas propiedades del corchete de Lie permiten definir, en abstracto, el concepto de álgebra de Lie y estudiarlas sin necesidad de hacer referencia a los grupos de Lie.

Consideremos una álgebra de Lie de dimensión finita, digamos $\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}) = n$ y fijemos una base $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ para $\mathfrak{g}$. Podemos calcular el corchete de Lie para cualesquiera dos elementos de esta base y ya que $[e_i, e_j] \in \mathfrak{g}$. Del álgebra lineal sabemos que cada vector $[e_i, e_j]$ se puede expresar de manera única como una combinación lineal de elementos de la base β, esto es:

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{ij}^s e_s$$

para $i, j = 1, \ldots, n$. A las constantes λ_{ij}^s les llamaremos *constantes de estructura.*

Si usamos la propiedad de antisimetría y la identidad de Jacobi, se obtienen las siguientes identidades:

$$\lambda_{ij}^s = -\lambda_{ji}^s, \tag{1.8}$$

$$\sum_{s=1}^{n} (\lambda_{ij}^s \lambda_{sk}^l + \lambda_{jk}^s \lambda_{si}^l + \lambda_{ki}^s \lambda_{sj}^l) = 0, \tag{1.9}$$

para cada $l = 1, 2, \ldots, n$.

Al analizar la primera identidad nos damos cuenta que al momento de calcular las constantes de estructura para un álgebra de Lie no es necesario hacer todos los cálculos ya que las constantes en las cuales $i \geq j$ las podemos obtener de las que satisfacen $i < j$.

Mediante las constantes de estructura podemos determinar fácilmente cuando dos álgebras de Lie son isomorfas, así dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\tilde{\mathfrak{g}}$ son isomorfas si y solo si existe una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ para $\mathfrak{g}$ y una base $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ para $\tilde{\mathfrak{g}}$ tales que las correspondientes constantes de estructura coinciden, esto es,

$$\lambda_{ij}^s = \tilde{\lambda}_{ij}^s,$$

con $i, j, s = 1, \ldots, n$.

A continuación presentaremos una herramienta muy útil ya que nos relaciona un álgebra de Lie con un espacio vectorial mediante un operador lineal.

Una *representación* del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial V es una transformación lineal

$$\begin{aligned}\varphi : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{gl}(V)\\ x &\mapsto \varphi(x),\end{aligned}$$

el cual es un homomorfismo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el álgebra general lineal $\mathfrak{gl}(V)$.

La representación φ se dice *fiel* si $Ker\varphi = 0$, es decir la representación es fiel si es un monomorfismo; y si $Ker\varphi = \mathfrak{g}$ entonces la representación se dice ser *trivial.*

Diremos que un subespacio $W \subset V$ es *invariante* con respecto a φ si se tiene que

$$\varphi(W) \subseteq W.$$

En tal caso, existe una *representación inducida* en el espacio cociente V/W.

Consideremos un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un campo $\mathbb{F}$. Para cada $x \in \mathfrak{g}$ definimos la función $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dada por

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y].$$

Sean $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie podemos realizar los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{x+y}(z) &= [x + y, z] = [x, z] + [y, z]\\ \mathrm{ad}_{\alpha x}(y) &= [\alpha x, y] = \alpha[x, y].\end{aligned}$$

Por lo tanto, ad_x es un operador lineal en $\mathfrak{g}$. En el estudio de las álgebras de Lie este operador resulta ser muy importante y le llamaremos el *operador adjunto.*

Para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{g}$ se tiene que

$$[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]},$$

donde $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x$.

Con este resultado concluimos que la correspondencia $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dada por

$$x \mapsto \mathrm{ad}_x,$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, a la que llamaremos *representación adjunta.*

Ahora podemos definir una nueva álgebra de Lie la cual vendrá dada por la imagen de $\mathfrak{g}$ bajo la adjunta. A esta álgebra de Lie se le conoce como el *álgebra adjunta* la cual denotaremos por

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \{\mathrm{ad}_x | x \in \mathfrak{g}\}.$$

El centro del álgebra de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ viene dado por

$$Z(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})) = \{w \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) : [w, v] = 0, \forall v \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})\}.$$

Consideremos la función $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, además notemos que $\mathrm{Ker}(\phi) = Z(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))$. De esta manera, vemos que la función ϕ es un isomorfismo de álgebras de Lie cuando

$\mathrm{Ker}(\phi) = 0$; esto es, un álgebra de Lie es isomorfa a su álgebra adjunta cuando $Z(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})) = 0$.

Recordemos que una derivación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un operador lineal $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisface la siguiente ecuación:

$$D([x,y]) = [Dx, y] + [x, Dy],$$

y al conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$ lo denotamos por $Der(\mathfrak{g})$.

Ahora probaremos que la ad_x es una derivación de $\mathfrak{g}$, usando la definición de ad_x y la identidad de Jacobi podemos realizar los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_x[y,z] &= [x,[y,z]] \\ &= -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] \\ &= [[x,y],z] + [y,[x,z]] \\ &= [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)]\end{aligned}$$

A este tipo de derivación le llamaremos *derivación interior*.

Consideremos un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita, a partir de la adjunta podemos definir una nueva función

$$\begin{aligned}\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathbb{R} \\ \kappa(x,y) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y),\end{aligned} \tag{1.10}$$

a la cual llamaremos la *forma de Killing* de $\mathfrak{g}$.

Notemos que usando la bilinealidad de la adjunta y mediante sencillos cálculos vemos que la forma de Killing es una forma bilineal y simétrica pero no necesariamente es no-degenerada.

Fijemos una base $\{e_1, \dots e_n\}$ para $\mathfrak{g}$ y denotemos por Ax y Ay las matrices de representación para ad_x y ad_y relativas a esta base, entonces la forma de Killing vendrá dada por

$$\kappa(x,y) = \mathrm{tr}\left((Ax)(Ay)\right).$$

Otro concepto que utilizaremos frecuentemente en lo que sigue es el de subgrupo 1-paramétrico. Consideremos el grupo de Lie, abeliano, $(\mathbb{R},+)$ y sea G un grupo de Lie arbitrario. Un homomorfismo de grupos de Lie

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\to G \\ t &\mapsto \gamma(t)\end{aligned}$$

se llama *subgrupo 1-paramétrico* en G. Así, $\gamma(t+s) = \gamma(t)\cdot\gamma(s)$ y se sigue que $\gamma(0) = e$ y $\gamma(-t) = (\gamma(t))^{-1}$.

Cada subgrupo 1-paramétrico $\gamma : \mathbb{R} \to G$ define un campo vectorial invariante por la izquierda en G. En efecto, si definimos $v \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma\Big|_{t=0} \in T_eG$, entonces, de (1.3), se tiene que al vector tangente v le corresponde un campo vectorial invariante por la izquierda X_v, el cual satisface $X_v(g) = (\mathrm{d}_e L_g)(v)$. Además, como $\gamma(t+s) = \gamma(t) \cdot \gamma(s) = L_{\gamma(t)}\gamma(s)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\gamma(t+s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(L_{\gamma(t)}\gamma(s))\Big|_{s=0} = (\mathrm{d}_{\gamma(s)}L_{\gamma(t)})\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(s)\Big|_{s=0} \\ &= (\mathrm{d}_e L_{\gamma(t)})\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}(0) = (\mathrm{d}_e L_{\gamma(t)})(v) = X_v(\gamma(t)).\end{aligned}$$

Esto nos muestra que dado el subgrupo 1-paramétrico $\gamma : \mathbb{R} \to G$, existe un campo vectorial invariante por la izquierda, X_v, tal que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t) &= X_v(\gamma(t)) \\ \gamma(0) &= e,\end{aligned}$$

es decir, $\gamma = \gamma(t)$ es una *curva integral* del campo vectorial X_v

Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Sea $X \in \mathfrak{g}$, entonces existe un único subgrupo 1-paramétrico

$$\exp_X : \mathbb{R} \to G$$

tal que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_X(t) = X.$$

Definimos la función exponencial

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

por

$$\exp(X) = \exp_X(1).$$

1.2 Álgebras de Lie semisimples

Sea $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ un álgebra de Lie. Recordemos que una *subálgebra* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es un subespacio que satisface $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$. Asimismo, un subespacio $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ es un *ideal* si se cumple $[\mathfrak{b}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{b}$. Notemos que todo ideal de un álgebra de Lie es también una subálgebra.

La terminología siguiente es muy conocida en la teoría de álgebras de Lie:

1. Si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, se dice que $\mathfrak{g}$ es *abeliana.*

2. El *centro* de $\mathfrak{g}$ es el conjunto

   $$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0, \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g}\},$$

   el cual es un ideal de $\mathfrak{g}$.

3. Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ son también ideales.

4. Dado un ideal $\mathfrak{a}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, el conjunto

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \{X + \mathfrak{a} \mid X \in \mathfrak{g}\},$$

es de nuevo un álgebra de Lie con el corchete

$$[X + \mathfrak{a}, Y + \mathfrak{a}] = [X, Y] + \mathfrak{a}.$$

5. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie y $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo de álgebras. Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal tal que $\mathfrak{a} \subset \ker\varphi$, entonces existe un homomorfismo $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to \mathfrak{h}$ y se tiene una factorización de φ por medio del homomorfismo canónico $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

6. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice ser *simple* si $\mathfrak{g}$ no es abeliana y no contiene ideales propios distintos del ideal $\{0\}$.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie finito-dimensional. Se definen las siguientes familias de ideales de $\mathfrak{g}$:

(i) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad \mathfrak{g}^{j+1} = [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j], \ldots$

(ii) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad \mathfrak{g}_{j+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j], \ldots$

Notemos que en (i), cada $\mathfrak{g}^j$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y la sucesión descendente de ideales

$$\mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \cdots \tag{1.11}$$

es la llamada *serie derivada* de $\mathfrak{g}$. Se dice que $\mathfrak{g}$ es *soluble* si $\mathfrak{g}^j = 0$ para algún j.

Similarmente, en (ii), cada $\mathfrak{g}_j$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y la sucesión de ideales

$$\mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \cdots \tag{1.12}$$

es llamada la *serie central descendente*. Si $\mathfrak{g}_j = 0$ para algún j, se dice que $\mathfrak{g}$ es *nilpotente*.

Es claro que $\mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{g}^j$ para cada j, por lo que si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces es soluble. Además, otro hecho muy conocido es que si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales solubles de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ es también soluble. Por lo tanto, existe un único ideal maximal de $\mathfrak{g}$ el cual es soluble. Este ideal es llamado el *radical* de $\mathfrak{g}$ y se denota $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$.

Definición 1.1 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimenión finita. Se dice que $\mathfrak{g}$ es* semisimple *si no contiene ideales solubles distintos del ideal trivial $\{0\}$.*

Los siguientes hechos no son difíciles de demostrar:

1. Si $\mathfrak{g}$ es simple, entonces es semisimple.

2. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonces $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

3. Para cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, de dimensión finita, se tiene que $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ es semisimple.

Una proposición importante, que usaremos en el Capítulo 3, es la siguiente:

Proposición 1.2 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathfrak{g}$ *es semisimple.*

(ii) La forma de Killing en $\mathfrak{g}$ *es no-degenerada.*

(iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$, *donde cada* $\mathfrak{g}_j$ *es un ideal simple de* $\mathfrak{g}$ *para* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. *Esta descomposición de* $\mathfrak{g}$ *es única, salvo por el orden en que aparecen los ideales y los únicos ideales de* $\mathfrak{g}$ *son sumas directas de los ideales* $\mathfrak{g}_j$.

La demostración de estos resultados se puede encontrar en la mayoría de los libros de álgebras de Lie, por ejemplo [8].

1.3 Variedades de Poisson

En esta sección presentaremos las definiciones y propiedades básicas que son necesarias para introducirse al estudio de la geometría de Poisson y a la geometría simpléctica.

1.3.1 Definiciones generales

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $C^\infty(M)$ el álgebra de las funciones $f : M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞. Una estructura de Poisson en M queda definida por media de una función

$$\begin{aligned} \{\,,\,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\to C^\infty(M), \\ (f, g) &\mapsto \{f, g\}, \end{aligned}$$

la cual es llamada corchete de Poisson y satisface las siguientes propiedades para cualesquiera funciones $f, g, h \in C^\infty(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Bilinealidad:

$$\{af + bg, h\} = a\{f, h\} + b\{g, h\}$$

(ii) Antisimetría:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

(iii) Identidad de Jacobi:

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \tag{1.13}$$

(iv) Regla de Leibniz:

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h. \tag{1.14}$$

Si M es una variedad en la que se tiene definido un corchete de Poisson $\{\ ,\ \}$ con las propiedades anteriores, diremos que $(M,\{\ ,\ \})$ es una variedad de Poisson.

Notemos que las primeras tres condiciones definen una estructura de álgebra de Lie en el álgebra de funciones $C^\infty(M)$. Además, la bilinealidad del corchete de Poisson y la regla de Leibniz definen una derivación en esta álgebra. Luego, podemos decir que $(M,\{\ ,\ \})$ es una variedad de Poisson si:

1.- $(C^\infty(M),\{\ ,\ \})$ es un álgebra de Lie.

2.- Para cualesquiera $f,g\in C^\infty(M)$, las funciones

$$\{f,\cdot\}:C^\infty(M)\to C^\infty(M) \quad y \quad \{\cdot,g\}:C^\infty(M)\to C^\infty(M),$$

son derivaciones.

Esta última propiedad es fundamental ya que el hecho de que la función $h\mapsto\{f,h\}$ sea una derivación para cada $f\in C^\infty(M)$ fija, nos garantiza la existencia de un único campo vectorial $X_f\in\mathfrak{X}(M)$, tal que para toda $h\in C^\infty(M)$ se cumple

$$X_f(h)=\{f,h\}. \tag{1.15}$$

Notemos que la ecuación (1.15) podemos escribirla como

$$X_f(h)=\{f,h\}=L_{X_f}(h), \tag{1.16}$$

donde L_{X_f} denota la *derivada de Lie* con respecto al campo X_f.

El campo vectorial X_f asociado a la función f que satisface (1.16) se llama un *campo vectorial Hamiltoniano.*

Sean $(x^1,\dots,x^n)$ coordenadas locales en un abierto $U\subset M$. El campo vectorial X_f, en cada punto $x\in U$, se expresa como

$$X_f(x)=\sum_{j=1}^n a^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

donde $a^j:U\to\mathbb{R}$ son funciones suaves para cada $j\in\{1,2,\dots,n\}$. Si $g\in C^\infty(M)$, entonces

$$\{f,g\}(x)=X_f(g)(x)=\sum_{j=1}^n a^j(x)\frac{\partial g}{\partial x^j} \tag{1.17}$$

En particular, para las funciones coordenadas x^j se tiene

$$\{f,x^j\}(x)=X_f(x^j)=a^j. \tag{1.18}$$

Sea $X_j=\sum_{i=1}^n b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ el campo vectorial Hamiltoniano que corresponde a la función coordenada x^j, donde $b^i:U\to\mathbb{R}$ son funciones suaves. Se tiene así que

$$\{f,x^j\}=-\{x^j,f\}=-X_j(f)=\sum_{i=1}^n -b^i\frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{1.19}$$

de lo cual se obtiene

$$\{x^i,x^j\}=-X_j(x^i)=-b^i, \tag{1.20}$$

De esta manera, de (1.18), (1.19) y (1.20), se obtiene la siguiente expresión para el corchete (1.17), en coordenadas locales:

$$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \{x^i, x^j\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \tag{1.21}$$

Una consecuencia directa de la expresión (1.21) para el corchete de Poisson es la forma que debe adoptar el campo Hamiltoniano X_f asociado a la función f. En efecto, dado que

$$X_f(g)(h) = \{f,g\}(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \{x^i, x^j\}(h) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\{x^i, x^j\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \right)(h),$$

se obtiene

$$X_f = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\{x^i, x^j\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{1.22}$$

Proposición 1.3 *Sea* $(M, \{\,,\,\})$ *una variedad de Poisson de dimensión* n. *Si* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función suave y* $f, g \in C^\infty(M)$, *entonces*

$$\{F \circ f, g\} = F'\{f,g\}. \tag{1.23}$$

Demostración. Si X_g es el campo Hamiltoniano asociado a g, entonces

$$L_{X_g}(F \circ f) = \{g, F \circ f\}. \tag{1.24}$$

Por otro lado, si $U \subset M$ es un abierto con coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$, entonces para todo $x \in U$ se tiene

$$\begin{aligned} L_{X_g}(F \circ f)(x) &= X_g(F \circ f)(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (X_g)_i(x) \frac{\partial (F \circ f)}{\partial x^i}(x) \\ &= F'(f(x)) \sum_{i=1}^{n} (X_g)_i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \\ &= F'(f(x)) L_{X_g}(f)(x), \end{aligned}$$

de donde se obtiene la fórmula

$$L_{X_g}(F \circ f) = F' L_{X_g}(f) = F'\{g, f\}. \tag{1.25}$$

Finalmente, de (1.24) y (1.25) se sigue (1.23). ∎

1.3.2 El tensor de Poisson

Sea $(M, \{\ ,\ \})$ una variedad de Poisson de dimensión n. En coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$ en un abierto $U \subset M$, las $n(n-1)/2$ funciones $\{x^i, x^j\}$, con $i < j$, definen, para cada punto $x \in U$, las componentes de un $2-$tensor contravariante

$$\Psi_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \psi^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{1.26}$$

cuyas componentes son funciones en $C^\infty(U)$ definidas por

$$\psi^{ij}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x^i, x^j\}(x), \tag{1.27}$$

y satisfacen $\psi^{ij} = -\psi^{ji}$, por lo que $\psi^{ii} = 0$.

Para probar que (1.26) es efectivamente un $2-$tensor contravariante, solo basta demostrar que sus componentes se transforman adecuadamente bajo cambios de coordenadas. Así, supongamos que $(y^1, \ldots, y^n)$ son coordenadas en U y se tiene la relación

$$x(y) = (x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)). \tag{1.28}$$

Luego, podemos expresar el tensor Ψ en estas nuevas coordenadas como

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{\psi}^{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} \wedge \frac{\partial}{\partial y^j},$$

donde $\tilde{\psi}^{ij} = \{y^i, y^j\}$. Aplicando la fórmula (1.23) en cada argumento de la función $\{x^i(y), x^j(y)\} = \{x^i \circ y, x^j \circ y\}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\{x^i \circ y, x^j \circ y\} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^k}(y) \{y^k, x^j(y)\} \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^k}(y) \frac{\partial x^j}{\partial y^l}(y) \{y^k, y^l\} \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{\psi}^{kl} \frac{\partial x^i}{\partial y^k}(y) \frac{\partial x^j}{\partial y^l}(y),
\end{aligned}$$

por lo que las componentes del tensor Ψ se transforman bajo el cambio de coordenadas (1.28) por medio de la regla

$$\psi^{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{\psi}^{kl} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l}$$

la cual prueba que Ψ es un $2-$tensor contravariante. A Ψ se le llama el *tensor de Poisson* de la variedad de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$ y también se acostumbra denotar esta variedad por (M, Ψ).

Por otra parte, si aplicamos la identidad de Jacobi (1.13) a las funciones coordenadas x^i, x^j y x^k se tiene

$$\{\{x^i, x^j\}, x^k\} + \{\{x^j, x^k\}, x^i\} + \{\{x^k, x^i\}, x^j\} = 0, \tag{1.29}$$

donde cada sumando en esta identidad es posible expresarlo, por medio de (1.21) y (1.27), en los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
\{\{x^j, x^k\}, x^i\} &= \sum_{l,m=1}^{n} \psi^{lm} \frac{\partial \{x^j, x^k\}}{\partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x^m} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \psi^{li} \frac{\partial \psi^{jk}}{\partial x^l} \\
&= -\sum_{l=1}^{n} \psi^{il} \frac{\partial \psi^{jk}}{\partial x^l}.
\end{aligned}$$

De esto último y de (1.29) se tiene una expresión local para la identidad de Jacobi:

$$\sum_{l=1}^{n} \left(\psi^{kl} \frac{\partial \psi^{ij}}{\partial x^l} + \psi^{il} \frac{\partial \psi^{jk}}{\partial x^l} + \psi^{jl} \frac{\partial \psi^{ki}}{\partial x^l} \right) = 0, \tag{1.30}$$

la cual es una manera sucinta de expresar la identidad de Jacobi en términos del tensor de Poisson Ψ.

Por otro lado, en coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$ en el abierto U, los vectores tangentes $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1}^n$ son una base para T_xM y las $1-$formas duales $\left\{dx^i\right\}_{i=1}^n$ son una base para $T_x{}^*M \equiv (T_xM)^*$. Además, $(T_x{}^*M)^* = T_xM$, por lo que

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta^i_j x \frac{\partial}{\partial x^k} \left(dx^l \right) = \delta^l_k.$$

De esta manera, se tiene que el tensor de Poisson Ψ, al ser una función bilineal, se puede representar por una matriz de $n \times n$ en la base local $\left\{dx^i\right\}$. Las componentes de esta matriz son precisamente las funciones componentes ψ^{ij}, ya que

$$\begin{aligned}
\Psi_x(dx^i, dx^j) &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \psi^{kl}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \wedge \frac{\partial}{\partial x^l} \right) (dx^i, dx^j) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \psi^{kl}(x) \left[\frac{\partial}{\partial x^k}(dx^i) \frac{\partial}{\partial x^l}(dx^j) - \frac{\partial}{\partial x^k}(dx^j) \frac{\partial}{\partial x^l}(dx^i) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \psi^{kl}(x) (\delta^i_k \delta^j_l - \delta^j_k \delta^i_l) \\
&= \frac{1}{2} (\psi^{ij}(x) - \psi^{ji}(x)) \\
&= \psi^{ij}(x),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\Psi(dx^i, dx^j) = \psi^{ij} = \{x^i, x^j\}. \tag{1.31}$$

Así, dadas las 1−formas

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i dx^i \quad y \quad \beta = \sum_{j=1}^{n} \beta^j dx^j,$$

donde $\alpha^i, \beta^j \in C^\infty(U)$ para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene

$$\Psi_x(\alpha,\beta) = (\alpha^1\alpha^2 \ldots \alpha^n)(x) \begin{pmatrix} 0 & \psi^{12} & \psi^{13} & \cdots & \psi^{1n} \\ \psi^{21} & 0 & \psi^{23} & \cdots & \psi^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi^{n1} & \psi^{n2} & \cdots & \psi^{nn-1} & 0 \end{pmatrix} (x) \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} (x),$$

lo cual escribimos como

$$\Psi_x(\alpha,\beta) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^i(x)\psi^{ij}(x)\beta^j(x), \tag{1.32}$$

y por otra parte obtenemos:

$$\begin{aligned} \Psi_x(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \psi^{ij}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}\right)(\alpha,\beta)_x \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \psi^{ij}(x)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha)\frac{\partial}{\partial x^j}(\beta) - \frac{\partial}{\partial x^i}(\beta)\frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha)\right]_x \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \psi^{ij}(x)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha^k dx^k\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sum_{l=1}^{n}\beta^l dx^l\right)\right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{l=1}^{n}\beta^l dx^l\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha^k dx^k\right)\right]_x \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \psi^{ij}(x)\left[\alpha^i(x)\beta^j(x) - \beta^i(x)\alpha^j(x)\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^i(x)\psi^{ij}(x)\beta^j(x). \end{aligned}$$

La relación (1.33) simplemente la abreviamos como

$$\Psi(\alpha,\beta) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^i\psi^{ij}\beta^j. \tag{1.33}$$

Además de (1.21) y (1.31) se tiene

$$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \psi^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}, \tag{1.34}$$

por lo que el campo vectorial Hamiltoniano X_f asociado a la función f, se expresa en términos del tensor de Poisson como

$$X_f = \sum_{i,k=1}^{n} \left(\psi^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)\frac{\partial g}{\partial x^i}. \tag{1.35}$$

1.3.3 Rango del tensor de Poisson

Consideremos ahora la variedad de Poisson (M, Ψ). Se define la función

$$\begin{aligned} \Psi^\sharp : T^*M &\to TM \\ \alpha &\mapsto \Psi^\sharp(\alpha) \end{aligned}$$

como el único morfismo de haces vectoriales que satisface

$$\langle \beta, \Psi^\sharp(\alpha) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(\alpha, \beta), \tag{1.36}$$

para cualesquiera $1-$formas $\alpha, \beta \in T^*M$, donde $\langle\, , \rangle$ es el pareamiento usual entre vectores y covectores. $\Psi^\sharp$ está bien definido y es lineal por fibras.

Por otro lado, $\Psi^\sharp(dx^i) \in T_xM$, por lo que podemos expresarlo en coordenadas locales como

$$\Psi^\sharp(dx^i) = \sum_{k=1}^{n} c^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{1.37}$$

para funciones suaves c^{ik} definidas en una vecindad del punto $x \in M$. De esta manera, se tiene que

$$\langle dx^j, \Psi^\sharp(dx^i) \rangle = \left\langle dx^j, \sum_{k=1}^{n} c^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} c^{ik} dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = c^{ij}. \tag{1.38}$$

Por otra parte, de la definición de $\Psi^\sharp$ y de (1.31), se obtiene

$$\langle dx^j, \Psi^\sharp(dx^i) \rangle = \Psi(dx^i, dx^j) = \psi^{ij}, \tag{1.39}$$

por lo que, de (1.38) y (1.39) se tiene la identidad

$$c^{ij} = \psi^{ij}.$$

Por lo tanto,

$$\Psi^\sharp(dx^i) = \sum_{k=1}^{n} \psi^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.40}$$

lo cual nos muestra que en cada fibra, la matriz de la transformación lineal $\Psi^\sharp$ con respecto a las bases locales $\{dx^i\}$ de T^*M y $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ de T_xM es $(\psi^{ij})^T$, por lo que dada una $1-$forma $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k dx^k$, se tiene

$$\begin{aligned} \Psi^\sharp(\alpha) &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \psi^{k1} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \psi^{k2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \psi^{kn} \right) \frac{\partial}{\partial x^n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \psi^{ki} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

la cual abreviaremos por medio de la fórmula

$$\Psi^\sharp(\alpha) = \left\langle (\psi^{ij})^T (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)^T, \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right\rangle. \tag{1.41}$$

Definición 1.4 *Se define el rango del tensor de Poisson Ψ en el punto $x \in M$ como el rango de la función lineal $\Psi^\sharp : T_x{}^*M \to T_xM$.*

Sean $h \in C^\infty(M)$ y X_h el campo vectorial Hamiltoniano asociado a la función h. Así, dh es una $1-$forma y se tiene

$$\begin{aligned}\Psi^\sharp(dh) &= \Psi^\sharp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x^k} dx^k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x^k} \Psi^\sharp(dx^k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x^k}\left(\sum_{i=1}^{n} \psi^{ki} \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\ &= -\sum_{i,k=1}^{n}\left(\psi^{ik}\frac{\partial h}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^i},\end{aligned}$$

por lo que, de (1.35), se obtiene

$$X_h = \Psi^\sharp(dh) = -\sum_{i,k=1}^{n}\left(\psi^{ik}\frac{\partial h}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{1.42}$$

Una función no constante $K \in C^\infty(M)$ se llama una función de Casimir si para toda $f \in C^\infty(M)$ se cumple

$$\{K, f\} = 0.$$

Proposición 1.5 *Sean $K, f \in C^\infty(M)$, K función de Casimir, entonces $\{K,f\}=0$ si y sólo si $\Psi^\sharp(dK) = 0$.*

Demostración. Si suponemos que $\{K, f\} = 0$, entonces

$$\{K, f\} = \sum_{i,j=1}^{n} \psi^{ij}\frac{\partial K}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} = 0, \tag{1.43}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$. Además, como K no es constante, se tiene que $\frac{\partial K}{\partial x^i} \neq 0$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. En particular, si tomamos $f = x^m$ en (1.43) se tiene

$$0 = \{K, x^m\} = \sum_{i,j=1}^{n} \psi^{ij}\frac{\partial K}{\partial x^i}\frac{\partial x^m}{\partial x^j} = \psi^{im}\frac{\partial K}{\partial x^i},$$

por lo que $\psi^{im} = 0$ para toda i y para toda m. ■

1.3.4 Hojas simplécticas

Dada una variedad de Poisson (M, Ψ), denotemos por $\mathrm{Ham}(M, \Psi)$ el álgebra de Lie de todos los campos vectoriales Hamiltonianos en M relativos a Ψ. Consideremos la *distribución característica* $\mathcal{D}$ de la estructura de Poisson Ψ que se define por

$$\mathcal{D}_y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Im}\Psi_y^\sharp \equiv \mathrm{Span}\{X_F(y) \mid F \in C^\infty(M)\}. \tag{1.44}$$

Es claro que el flujo de cualquier campo vectorial Hamiltoniano X_F preserva el tensor de Poisson y, en consecuencia, $\mathcal{D}$ es X_F-invariante. Luego, aplicando el Teorema de Stefan-Sussmann [10] al conjunto $\mathrm{Ham}(M, \Psi)$ se tiene que la distribución característica $\mathcal{D}$ es integrable. Sea $B = B_y$ la variedad integrable maximal de $\mathcal{D}$ que pasa por el punto $y \in M$,

$$T_y B = \mathrm{Im}\Psi_y^\sharp.$$

De esto concluimos que existe una única 2-forma ω_B en B que satisface la condición de compatibilidad

$$\omega_B(X_{F_1}, X_{F_2}) = \{F_1, F_2\} \qquad (\text{en } B), \tag{1.45}$$

para cualesquiera $F_1, F_2 \in C^\infty(M)$. Se puede demostrar que ω_B es cerrada y no-degenerada [10, 11], por lo que define una estructura simpléctica en B. La variedad simpléctica (B, ω_B) se llama una *hoja simpléctica* de la variedad de Poisson $\big(M, \Psi\big)$. Se sigue que el rango de Ψ es constante a lo largo de B, $\mathrm{rank}_y(\Psi) = \dim B$, para todo $y \in B$.

De este modo, toda variedad de Poisson puede ser caracterizada como la unión ajena de hojas simplécticas (que son, en general, de dimensiones distintas), las cuales se "pegan" de una manera suave. De acuerdo a las anteriores definiciones, se pueden distinguir dos tipos de hojas simplécticas: *regulares* y *singulares*.

Capítulo 2

Grupos de transformaciones y generadores infinitesimales

2.1 Grupos de transformaciones: Definición, propiedades y ejemplos.

En muchas ocasiones los grupos no se nos presentan en forma abstracta, más bien se nos presentan como una familia de transformaciones que actúan en un espacio. En el caso de los grupos de Lie, la manera más natural de presentarse es como grupos de transformaciones actuando suavemente en una variedad. En esta sección, veremos las nociones básicas de los grupos de transformaciones, esto será de gran importancia en el siguiente capítulo donde estudiaremos la clasificación de álgebras de Lie de campos vectoriales ya que clasificar acciones de grupos es equivalente a clasificar álgebras de Lie de campos vectoriales, [11], [12].

Definición 2.1 *Un grupo de transformaciones que actúa en una variedad suave M está determinado por un grupo de Lie G y una función suave $\varphi : G \times M \to M$, denotada por $\varphi(g, x)$, la cual satisface para todo $x \in M$, $g \in G$*

1. $\varphi(e, x) = x$,

2. $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$.

Por la condición 2, $g \in G$ induce un difeomorfismo de M en M por:

$$\begin{aligned} \varphi_g &: M \to M \\ \varphi_g(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi(g, x), \end{aligned}$$

con inversa $\varphi_{g^{-1}}$.

En la definición anterior se asume que la acción del grupo es global, es decir, $\varphi_g(x)$ está definida para todo $g \in G$ y todo $x \in M$. Sin embargo, esto no siempre ocurre, lo que da origen a la noción de grupo local de transformaciones.

Definición 2.2 *Un grupo local de transformaciones que actúa en M es una función $\varphi : A \times M \to M$, donde A es un conjunto abierto en G que contiene al elemento identidad, tal que*

1. $\varphi(e,x) = x$,

2. Si $g, h \in A$ *y* $gh \in A$ *entonces* $\varphi(g, \varphi(h,x)) = \varphi(gh, x)$ *para todo* $x \in M$.

A continuación ilustraremos las definiciones anteriores con algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3 *La esfera* $\mathbb{S}^1$ *define un grupo de transformaciones en* $\mathbb{C}$ *por la función:*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ \varphi(\theta, z) &= e^{i\theta} z. \end{aligned}$$

Si tomamos $0 \in \mathbb{S}^1$ *, tenemos* $\varphi(0,z) = e^{i(0)}z = z$, *y además si* $\theta, \alpha \in \mathbb{S}^1$, *tenemos*

$$\varphi(\theta, \varphi(\alpha, z)) = e^{i\theta}(e^{i\alpha}z) = e^{i(\theta+\alpha)}z = \varphi(\theta+\alpha, z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.4 *El grupo afín* $A(n)$ *está definido como el grupo de las transformaciones afines*

$$x \mapsto Ax + a$$

en $\mathbb{R}^n$. *Así, el grupo afín está parametrizado por un par* (A, a) *que consiste de una matriz invertible* $A \in GL(n)$ *y un vector* $a \in \mathbb{R}^n$. *El grupo afín* $A(n)$ *tiene dimensión* $n(n+1)$, *y es isomorfo, como una variedad, al producto cartesiano* $GL(n) \times \mathbb{R}^n$. *Sin embargo,* $A(n)$ *no es el producto cartesiano de* $GL(n)$ *y* $\mathbb{R}^n$ *ya que la ley de multiplicación del grupo está dada por*

$$(A,a)(B,b) = (AB, a + Ab).$$

La acción φ *de este grupo de transformaciones está definida por:*

$$\begin{aligned} \varphi : A(n) \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \varphi((A,a),x) &= Ax + a \end{aligned}$$

Es claro que se cumple la Definición (2.1) ya que si $(I, 0) \in A(n)$, *se tiene*

$$\varphi((I,0),x) = Ix + 0 = x,$$

y si $(A,a),(B,b) \in A(n)$, *se tiene*

$$\begin{aligned} \varphi((A,a), \varphi((B,b),x)) &= A(Bx+b) + a = ABx + a + Ab = \varphi((AB, a+Ab), x) \\ &= \varphi((A,a)(B,b), x). \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

El grupo afín se puede ver como un subgrupo de $GL(n+1)$ *identificando el elemento de grupo* (A,a) *con la matriz* $\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *de* $(n+1) \times (n+1)$.

Los anteriores son ejemplos de grupos globales de transformaciones, a continuación veremos algunos ejemplos de grupos locales de transformaciones.

Ejemplo 2.5 *Sea v un campo vectorial en M. El flujo del campo v define un grupo local 1-paramétrico de transformaciones en M, el cual es un ejemplo de un grupo local de transformaciones.*

Ejemplo 2.6 *Consideremos $G = \mathbb{R}$ y $M = \mathbb{R}^2$ y la función dada por*

$$\begin{aligned} &\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &\varphi(\epsilon, (x, y)) = \left(\frac{x}{1 - \epsilon x}, \frac{y}{1 - \epsilon x} \right), \end{aligned}$$

la cual está definida únicamente para $V = \{(\epsilon, (x, y)) : \epsilon < \frac{1}{x} \quad \text{para} \quad x > 0, \text{ó} \quad \epsilon > \frac{1}{x} \quad \text{para} \quad x < 0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Y probamos que en efecto es una acción:

Si $0 \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\varphi(0, (x, y)) = \left(\frac{x}{1 - 0(x)}, \frac{y}{1 - 0(x)} \right) = (x, y) ,$$

y si $(\delta, (x, y)), (\epsilon, (x, y)) \in V$, se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(\delta, \varphi(\epsilon, (x, y))) &= \varphi \left(\delta, \left(\frac{x}{1 - \epsilon x}, \frac{y}{1 - \epsilon x} \right) \right) \\ &= \left(\frac{x/(1 - \epsilon x)}{1 - \delta x/(1 - \epsilon x)}, \frac{y/(1 - \epsilon x)}{1 - \delta x/(1 - \epsilon x)} \right) \\ &= \left(\frac{x}{1 - (\delta + \epsilon) x}, \frac{y}{1 - (\delta + \epsilon) x} \right) \\ &= \varphi(\delta + \epsilon, (x, y)). \end{aligned}$$

Definición 2.7 *Dada una acción de un grupo de Lie G en una variedad M, el subgrupo de isotropía o subgrupo estabilizador de un punto $x \in M$ es*

$$G_x = \{g \in G | \varphi(g, x) = x\} \subset G.$$

Este subgrupo consiste de todos los elementos del grupo G los cuales fijan a x. En particular, $G_x = G$ si y solo si x es un punto fijo de la acción de grupo.

Definición 2.8 *Un grupo de transformaciones actúa libremente en M si los subgrupos de isotropía son todos triviales, esto es, $G_x = \{e\}$ para todo $x \in M$.*

Si un grupo de transformaciones actúa libremente en M implica que si $g \neq e$ entonces la transformación φ_g no tiene puntos fijos.

Un grupo de transformaciones actúa localmente libre en M si los subgrupos de isotropía G_x son subgrupos discretos de G para todo $x \in M$.

Definición 2.9 *Un grupo de transformaciones actúa efectivamente si diferentes elementos de grupo tienen diferentes acciones, esto es,* $\varphi(g, x) = \varphi(h, x)$ *para todo* $x \in M$ *si y sólo si* $g = h$.

Esto es equivalente a que el único elemento de grupo actuando como la transformación identidad es el elemento identidad de G.

Ahora definiremos un concepto que servirá para medir la efectividad de un grupo de transformaciones.

Definición 2.10 *El subgrupo global de isotropía se define por*

$$G_M = \bigcap_{x \in M} G_x.$$

Por lo tanto, un grupo de transformaciones actúa efectivamente si y sólo si $G_M = \{e\}$.

En este punto es importante establecer la relación entre acciones libres y efectivas. Un grupo de transformaciones que actúa libremente también lo hace efectivamente. Sin embargo, el recíproco no es cierto.

Si $\varphi : G \times M \to M$ es una acción de G en M, definimos una relación de equivalencia en G por: $g \sim h$ si y solo si $\varphi_g = \varphi_h$. Denotamos por $[g]$ la clase de equivalencia de G.

Definición 2.11 *La acción de un grupo de Lie G se dice que es localmente efectiva si* G_M *es un subgrupo discreto de* G*, lo cual es equivalente a la existencia de una vecindad* U *de la identidad* e *tal que* $G_M \cap U = \{e\}$.

Proposición 2.12 *Supongamos que* G *es un grupo de transformaciones que actúa en una variedad* M*. Entonces el subgrupo global de isotropía* G_M *es un subgrupo de Lie normal de* G*. Más aún, la acción* $\psi : G/G_M \times M \to M$*, definida por* $\psi([g], x) = \varphi(g, x)$ *actúa efectivamente.*

Como consecuencia del resultado anterior, si un grupo de tranformaciones G no actúa efectivamente en M, el grupo cociente G/G_M actúa efectivamente, y en el mismo modo que G. Si una acción es localmente efectiva, el grupo cociente G/G_M es un grupo de Lie que tiene la misma dimensión, y la misma estructura local de G.

Definición 2.13 *Un grupo actúa efectivamente libre si y sólo si* G/G_M *actúa libremente; esto es equivalente a que todo subgrupo local de isotropía es igual a el subgrupo global de isotropía:* $G_x = G_M$, $x \in M$.

La órbita del elemento $x \in M$ es el conjunto

$$O_x = \{y \in M | \varphi(g, x) = y, g \in G\} = \varphi(G, x).$$

Es claro que $O_x \neq \emptyset$. Cuando se tiene una acción de G sobre M, queda definida una relación de equivalencia en M: Para $x, y \in M$, $x \sim y$ si y sólo si $\varphi(g, x) = y$,

para algún $g \in G$. Notemos que las clases de equivalencia bajo esta relación son precisamente, las órbitas de la acción. Por lo tanto, el espacio M se parte en clases de equivalencia (órbitas) cuya unión es todo M. Es fácil probar que para cada $x \in M$ se tiene una biyección entre O_x y el conjunto de clases laterales izquierdas G/G_x. El conjunto de órbitas se denota por M/G y es un espacio cociente con la topología cociente.
Se dice que la acción

$$\begin{aligned} \varphi : G \times M &\to M \\ (g, x) &\mapsto \varphi(g, x) \end{aligned}$$

es propia si la función

$$\begin{aligned} \psi : G \times M &\to M \times M \\ (g, x) &\mapsto (\varphi(g, x), x) \end{aligned}$$

es una función propia, esto es, una función cuya imagen inversa de conjuntos compactos es un conjunto compacto. En el caso de la acción de un grupo de Lie compacto sobre una variedad suave M, se tiene que la acción es propia.

2.2 Generadores Infinitesimales

Supongamos que $\varphi : G \times M \to M$ es una acción del grupo de Lie G en M y sea $\mathfrak{g} = T_eG$ el álgebra de Lie de G. En esta sección vamos a mostrar como se puede construir mediante la acción, un morfismo de álgebras de Lie entre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo y un álgebra de Lie finito dimensional de campos vectoriales en M. Esta álgebra es llamada el álgebra de generadores infinitesimales de la acción.

Primero, recordemos que existe un isomorfismo de álgebras de Lie entre el álgebra de Lie del grupo $\mathfrak{g}$ y el álgebra de campos vectoriales en G invariantes por la izquierda,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\to \mathfrak{X}_L(M) \\ \xi &\mapsto X_\xi(g) := \mathrm{d}_e L_g(\xi), \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

Sea $\exp : \mathfrak{g} \to G$ la función exponencial. Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ fijo la curva $\exp(t\xi)$ es una curva integral del campo vectorial X_ξ que satisface: $\exp(0) = e$ y $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi) = \xi$.
Definamos la función $\Psi^\xi : \mathbb{R} \times M \to M$ por

$$\Psi^\xi(t, x) = \varphi(\exp(t\xi), x),$$

La función Ψ^ξ tiene las siguientes propiedades

$$\Psi^\xi(0, x) = \varphi(\exp(0), x) = x$$

y

$$\begin{aligned} \Psi^\xi(t + \tau, x) &= \varphi(\exp(t + \tau)\xi, x) = \varphi(\exp(t\xi) \exp(\tau\xi), x) \\ &= \varphi(\exp(t\xi), \varphi(\exp(\tau\xi), x)) = \Psi^\xi(t, \Psi^\xi(\tau, x)) \end{aligned}$$

para todo $t, \tau \in \mathbb{R}$, $x \in M$. En otras palabras, $\varphi_{\exp(t\xi)} : M \to M$ es un grupo uniparamétrico de transformaciones en M. Por tanto, existe un campo vectorial X en M cuyo flujo es precisamente Ψ^{ξ}. Tal campo vectorial es llamado el generador infinitesimal de ξ.

Definición 2.14 *Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ el campo vectorial en M definido por*

$$\xi_M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(\exp(t\xi), x)$$

es llamado el generador infinitesimal *de la acción correspondiente a ξ.*

A continuación veremos un ejemplo en el que dada la acción de un grupo G en una variedad M obtendremos su generador infinitesimal.

Ejemplo 2.15 *Sea $G = \mathbb{S}^1$ y $M = \mathbb{R}^n$, definimos la siguiente acción*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(\theta, (x, y)) = (\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y), \end{aligned}$$

derivando respecto a θ y evaluando en $\theta = 0$ obtenemos

$$X(x, y) = \left.\frac{d\varphi^{\theta}(x, y)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = (-\sin\theta x - \cos\theta y, \cos\theta x - \sin\theta y)|_{\theta=0} = (-y, x).$$

El conjunto de generadores infinitesimales de una acción de G en M es un álgebra de Lie finito dimensional. Antes de poder probar este hecho, vamos a desarrollar algunos conceptos y resultados relevantes.

Sea G un grupo de Lie. Para cada $g \in G$, definimos el operador de conjugación por:

$$\begin{aligned} I_g :& G \to G \\ I_g(h) =& ghg^{-1}. \end{aligned}$$

Esta función es un difeomorfismo de G ya que $I_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$. Diferenciando la función conjugación en e, obtenemos la representación adjunta de G en $\mathfrak{g} = T_eG$:

$$\mathrm{Ad}_g \stackrel{\text{def}}{=} d_eI_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Notemos que $\mathrm{Ad}_g = d_e(R_{g^{-1}} \circ L_g)$. Con la noción de representación adjunta se define una acción de G en $\mathfrak{g}$ por

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G \times \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ (g, \xi) &\mapsto \mathrm{Ad}_g(\xi) \end{aligned}$$

Esta acción es llamada la acción adjunta.

Lema 2.16 *(a) Si $c(t)$ es una curva en G tal que $c(0) = e$ y $c'(0) = \xi$ entonces*

$$\xi_M(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(c(t), x) = d_e\varphi^x(\xi).$$

(b) Para cada $g \in G$ y $\xi \in \mathfrak{g}$

$$(\mathrm{Ad}_g(\xi))_M(x) = \varphi^*_{g^{-1}}\xi_M(x)$$

Demostración. Primero probemos (a). Si $\xi \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
\xi_M(x) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(\exp(t\xi), x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi^x(\exp(t\xi)) \\
&= \left.\left[d_{\exp(t\xi)}\varphi^x\left(\frac{d}{dt}\exp(t\xi)\right)\right]\right|_{t=0} = d_e\varphi^x(\xi),
\end{aligned}$$

por otra parte,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(c(t), x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi^x(c(t)) = \left.\left[d_{c(t)}\varphi^x\left(c'(t)\right)\right]\right|_{t=0} = d_e\varphi^x(\xi),$$

por tanto se tiene

$$\xi_M(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(c(t), x) = d_e\varphi^x(\xi).$$

Ahora probemos (b)

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}_g(\xi))_M(x) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(\exp(t\mathrm{Ad}_g(\xi)), x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(g(\exp(t\xi))g^{-1}, x) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_g \circ \varphi_{\exp(t\xi)} \circ \varphi_{g^{-1}}(x) \\
&= \left.\left[d_{\varphi_{\exp(t\xi)}\circ\varphi_{g^{-1}}(x)}\varphi_g\left(\frac{d}{dt}\varphi(\exp(t\xi), \varphi_{g^{-1}}(x))\right)\right]\right|_{t=0} \\
&= d_{\varphi_{g^{-1}}(x)}\varphi_g\left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(\exp(t\xi), \varphi_{g^{-1}}(x))\right] = d_{\varphi_{g^{-1}}(x)}\varphi_g\xi_M(\varphi_{g^{-1}}(x)) \\
&= (\varphi^*_{g^{-1}}\xi_M)(x)
\end{aligned}$$

∎

Proposición 2.17 *El conjunto de generadores infinitesimales es un álgebra de Lie finito dimensional de campos vectoriales en M.*

(i) $(\lambda\xi + \eta)_M = \lambda\xi_M + \eta_M$

(ii) $[\xi, \eta]_M = [-\xi_M, \eta_M]$

Demostración. Probemos (i). Sean $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Por el inciso (a) del lema (2.16) tenemos $\xi_M(x) = d_e\varphi^x(\xi)$ y $\eta_M(x) = d_e\varphi^x(\eta)$, entonces

$$\lambda\xi_M(x) + \eta_M(x) = \lambda d_e\varphi^x(\xi) + d_e\varphi^x(\eta) = d_e\varphi^x(\lambda\xi + \eta).$$

Y de nuevo por el inciso (a) del lema (2.16)

$$d_e\varphi^x(\lambda\xi + \eta) = (\lambda\xi + \eta)_M(x).$$

Ahora probemos (ii). Para ξ, η definimos su corchete por

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta] &\overset{\text{def}}{=} [X_\xi, X_\eta](e) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (R^*_{\exp(t\xi)} X_\eta(e)) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left[d_{\exp(t\xi)} R_{\exp(-t\xi)}(X_\eta(\exp(t\xi)))\right] \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left[d_{\exp(t\xi)} R_{\exp(-t\xi)}(d_e L_{\exp(t\xi)}(\eta))\right] \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left[d_e[R_{\exp(-t\xi)} \circ L_{\exp(t\xi)}](\eta)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left[d_e I_{\exp(t\xi)}(\eta)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}(\eta)\right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Por otro lado, si $\eta_M, \xi_M \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos que $\varphi_{\exp(-t\xi)}(x)$ es el flujo de $\xi_M(x)$. Entonces

$$[-\xi_M, \eta_M] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\varphi^*_{\exp(-t\xi)}\xi_M).$$

Por el inciso (b) del lema (2.16)

$$[-\xi_M, \eta_M] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}\eta)_M. \tag{2.2}$$

Combinando (2.1) y (2.2) tenemos $-[\xi_M, \eta_M] = [\xi, \eta]_M$ ■

Corolario 2.18 *Si la acción del grupo G en M es efectiva entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G es isomorfa como álgebra de Lie al álgebra de generadores infinitesimales de la acción.*

El siguiente resultado será de gran importancia en el siguiente capítulo.

Proposición 2.19 *Supongamos que un grupo de Lie G actúa en una variedad M. Si la acción de G no tiene puntos fijos entonces los generadores infinitesimales de la acción no se anulan simultáneamente.*

Demostración. Supongamos que los campos vectoriales en $\mathfrak{g}$ se anulan en el punto x y recordemos la siguiente igualdad

$$\xi_M(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(\exp(t\xi), x)$$

como $\xi_M(x) = 0$, se obtiene que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(\exp(t\xi), x) = 0$$

y de aquí

$$\varphi(\exp(t\xi), x) = x$$

en particular para $t = 0$

$$\varphi(\exp(0), x) = x$$

y de aquí que los campos en $\mathfrak{g}$ no se anulan simultáneamente en algún punto. ■

2.3 Acciones locales de grupos con álgebra de generadores infinitesimales preasignada

En la sección anterior se vio que cada grupo de transformaciones en M, tiene asociada un álgebra de Lie de campos vectoriales finito dimensional en M la cual se conoce como el álgebra de generadores infinitesimales de la acción. Surge entonces la pregunta de si el recíproco de este hecho es cierto, es decir, si dada un álgebra de Lie de campos vectoriales en M existe un grupo de Lie G que actúa en M cuyos generadores de la acción sean precisamente esta álgebra de campos vectoriales. Esta última afirmación es cierta bajo ciertas condiciones como estableceremos en el siguiente teorema.

Teorema 2.20 *Sea V un álgebra de Lie finito fimensional de campos vectoriales en una variedad M. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ isomorfa a V. Entonces, existe una única acción local y efectiva de G en M cuya álgebra de generadores infinitesimales coincide con V.*

La importancia de este resultado para el estudio de la clasificación de grupos de transformaciones radica en el hecho de que podemos restringirnos a la clasificación de álgebras de Lie finito dimensionales de campos vectoriales en M y después ver que grupo de Lie le corresponde a esa álgebra, y el teorema anterior asegura que existe una acción local y efectiva de este grupo en M.

Demostración del teorema (2.20)

Sea $p \in M$ y tomemos una carta coordenada (U, ψ) de M en x.

$$\psi : U \to \mathbb{R}^k$$
$$\psi(p) = x = (x_1, \ldots, x_k).$$

Sea $X_1, \dots, X_n$ una base del álgebra de Lie V. Sea $c^i_{jk} \in C^\infty(U)$ las constantes de estructura de V,

$$[X_j(x), X_k(x)] = c^i_{jk}(x) X_\gamma(x) \tag{2.3}$$

Supongamos que los campos de la base de V tienen la siguiente representación local

$$X_i = \lambda^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Luego si los campos vectoriales λ y μ pertenecen a V, entonces el campo vectorial $\alpha\lambda + \beta\mu$ también pertenece a V. Por lo tanto V es un espacio vectorial bajo la suma. Sean $\lambda = \lambda(x), \mu = \mu(x) \in P$ el conmutador de λ y μ viene dado por

$$[\lambda(x), \mu(x)]^i = \frac{\partial \lambda^i(x)}{\partial x^\gamma} \mu^\gamma(x) - \frac{\partial \mu^i(x)}{\partial x^\gamma} \lambda^\gamma(x). \tag{2.4}$$

y esta ecuación es equivalente a

$$\frac{\partial \lambda^i_j(y)}{\partial y^\alpha} \lambda^\alpha_k(y) - \frac{\partial \lambda^i_k(y)}{\partial y^\alpha} \lambda^\alpha_i(y) = c^\beta_{jk} \lambda^i_\beta(y). \tag{2.5}$$

Por otra parte, tomemos una carta coordenada $(V, \tilde{\psi})$ de G en e, tal que

$$\begin{aligned} &\psi : V \to \mathbb{R}^n \\ &\psi(g) = (g^1, \dots, g^n), \quad g^i : V \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

tal que $\psi(e) = (0, \dots, 0)$ si y solo si $g^i(e) = 0$.

Queremos encontrar una funcón $\varphi : V \times U \to M$ que sea una acción local. Para cada $g \in V, x \in U$, llamemos $y = \varphi(g, x)$ con $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Esta relación se convierte en forma coordenada en:

$$y^i = \varphi^i_g(x) = \varphi^i(g, x) = \varphi^i(g^1, \dots, g^r; x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.6}$$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sea G el grupo conexo que tiene a $\mathfrak{g}$ como su álgebra de Lie. Tomemos $\xi \in \mathfrak{g}$ y $c(t)$ una curva en G tal que $c(0) = e$ y $c'(0) = \xi$. El punto $\varphi(c(t), x)$ debe describir para un x fijo una curva en la variedad M. El vector tangente a la curva $\varphi^i(g, x)$ en el punto $t = 0$ no depende de la curva $c(t)$, por lo que debe estar definida por el vector ξ. Sea $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ los coeficientes del vector ξ en una base fija. Denotamos este vector tangente por $\psi(\xi, x)$. Diferenciando la relación (2.6) con respecto a t al sustituir $g = c(t)$, obtenemos

$$\frac{d\varphi^i(c(t), x)}{dt} = \frac{\partial \varphi^i(g, x)}{\partial c^\alpha} \frac{dc^\alpha}{dt}.$$

Para $t = 0$, tenemos

$$\frac{d\varphi^i(c(0), x)}{dt} = \frac{\partial \varphi^i(e, x)}{\partial c^\alpha} \left(\left. \frac{dc^\alpha}{dt} \right|_{t=0} = \xi^\alpha \right).$$

Por tanto en forma coordenada este vector $\psi(\xi, x)$ se puede expresar como:

$$\psi^i(\xi, x) = \lambda^i_\alpha(x) \xi^\alpha = \lambda^i_\alpha(x^1, \dots, x^n) \xi^\alpha, \tag{2.7}$$

donde

$$\lambda^i_j(x) = \frac{\partial \varphi^i(g,x)}{\partial g^j} \quad para \quad g = e. \tag{2.8}$$

La función $y = \varphi(g,x)$ tomada como una función de g para x fijo se puede definir por un sistema de ecuaciones diferenciales el cual vamos a determinar a continuación. Sea $g \in V$, y llamemos $x = \psi(g)$. Tomemos $\Delta x \in \psi(V)$ y llamemos $h = \psi^{-1}(x + \Delta x)$. Es claro que $h \to g$ si $\Delta x \to 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(h,x) =& \varphi((h)g^{-1}g, x)\\
=& \varphi(hg^{-1}, \varphi(g,x))\\
=& \varphi(p,y)
\end{aligned}$$

ahora calculamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\varphi^i(h,x) - \varphi^i(g,x) =& \varphi^i(p,y) - \varphi^i(g,x)\\
=& \varphi^i(\mu(h,g^{-1}),y) - y^i\\
=& \varphi^i(\mu(h,g^{-1}),y) - \varphi^i(\mu(g,g^{-1}),y)
\end{aligned}$$

Dividimos ambos lados por Δx^j y obtenemos el límite cuando $\Delta x^j \to 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{\varphi^i(h,x) - \varphi^i(g,x)}{\Delta x^j} &= \lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{\varphi^i(\mu(h,g^{-1}),y) - \varphi^i(\mu(g,g^{-1}),y)}{\Delta x^j}\\
\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} &= \lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{\varphi^i(\mu^1(h,g^{-1}),\ldots,\mu^r(h,g^{-1}),y) - \varphi^i(0,\ldots,0,y)}{\Delta x^j}\\
\frac{\partial y^i}{\partial x^j} &= \sum_\alpha \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}
\end{aligned}$$

de aquí se sigue que $\varphi = \varphi(g,x)$ está definida por el sistema

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \lambda^i_\alpha(y) v^\alpha_j(x). \tag{2.9}$$

El sistema tiene solución si y solo si $\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j}$. Diferenciamos (2.9):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} =& \frac{\partial(\lambda^i_\alpha(y)v^\alpha_j(x))}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial(\lambda^i_\alpha(y)v^\alpha_j(x))}{\partial x^k}\\
=& \frac{\partial(\lambda^i_\alpha(y))}{\partial y^\gamma} v^\alpha_j(x)\lambda^\gamma_\beta(y)v^\beta_k(x) + \lambda^i_\alpha(y)\frac{\partial v^\alpha_j(x)}{\partial x^k}
\end{aligned}$$

haciendo uso de que $\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j}$ y reacomodando términos tenemos

$$\frac{\partial \lambda^i_\alpha(y)}{\partial y^\gamma} v^\alpha_j(x)\lambda^\gamma_\beta(y)v^\beta_k(x) - \frac{\partial \lambda^i_\beta(y)}{\partial y^\gamma} v^\beta_k(x)\lambda^\gamma_\alpha(y)v^\alpha_j(x) + \lambda^i_\delta(y)\left(\frac{\partial v^\delta_j(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial v^\delta_k(x)}{\partial x^j}\right) = 0$$

Podemos escribir la última relación en la forma

$$\left(\frac{\partial \lambda^i_\alpha(y)}{\partial y^\gamma}\lambda^\gamma_\beta(y) - \frac{\partial \lambda^i_\beta(y)}{\partial y^\gamma}\lambda^\gamma_\alpha(y) - \lambda^i_\delta(y)c^\delta_{\alpha\beta}\right) v^\alpha_j(x) v^\beta_k(x) = 0. \tag{2.10}$$

Como el determinante de la matriz $\left(v^\alpha_j(x)\right)$ es distinto de cero, llegamos a que

$$\frac{\partial \lambda^i_j(y)}{\partial y^\alpha}\lambda^\alpha_k(y) - \frac{\partial \lambda^i_k(y)}{\partial y^\alpha}\lambda^\alpha_i(y) = c^\beta_{jk}\lambda^i_\beta(y). \tag{2.11}$$

Ahora consideramos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \lambda^i_\alpha(y) v^\alpha_j(x) \tag{2.12}$$

con respecto a una función desconocida y del elemento g. Este sistema es del mismo tipo que (2.9), por lo tanto sus condiciones de integrabilidad son de la forma (2.11). Podemos ver que (2.3) es otra forma de (2.11), por tanto el sistema (2.12) es integrable. Denotamos por $\varphi(g, x)$ la solución del sistema (2.12) el cual satisface la condición inicial

$$\varphi(e, x) = x. \tag{2.13}$$

De esta manera asociamos con cada elemento $g \in G$ una transformación φ_g de la variedad M la cual transforma el punto $x \in M$ en el punto $y = \varphi_g(x) = \varphi(g, x) \in M$. Probaremos que las condiciones acción se cumplen aquí.

Sean g y h dos elementos de G. Consideramos h como fijo y g como variable. Sean

$$f = gh, \quad y = \varphi(h, x), \quad z^* = \varphi(g, y), \quad z = \varphi(f, x).$$

Para probar que $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$ mostraremos que $z^* = z$. Para hacer esto probaremos que las funciones z^* y z del elemento g satisfacen el mismo sistema de ecuaciones diferenciales con las mismas condiciones iniciales $z^*(e) = z(e) = y$. Tenemos

$$\frac{\partial z^{*i}}{\partial x^j} = \lambda^j_\alpha(z^*) v^\alpha_j(x). \tag{2.14}$$

Denotamos por $\left(u^i_j(x)\right)$ la matriz inversa de la matriz $\left(v^i_j(x)\right)$. Entonces tenemos la ecuación

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} = u^\alpha_\beta(f) v^\beta_j(x). \tag{2.15}$$

De la relación (2.15) tenemos

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \frac{\partial z^i}{\partial f^\alpha}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} = \lambda^i_\gamma(z) v^\gamma_\alpha(f) u^\alpha_\beta(f) v^\beta_j(x) = \lambda^i_\alpha(z) v^\alpha_j(x). \tag{2.16}$$

Pero los sistemas (2.14) y (2.16) coinciden. Por lo tanto de la unicidad de las soluciones del sistema, satisfaciendo condiciones iniciales, tenemos $z^* = z$.

Ahora probaremos que φ es efectiva, supongamos que no lo es. Entonces existe un subgrupo normal N del grupo G de todos los elementos que corresponde a la transformación identidad de la variedad M. Podemos concluir de esto que existe un subgrupo $1-$paramétrico $\gamma(t)$ cuyos elementos corresponden a las transformaciones identidad de la variedad M, y el cual tiene vector dirección ξ distinto de cero.

Sustituyendo $\gamma(t)$ por t en la relación (2.12), multiplicando $\mathrm{d}\gamma^j(t)/\mathrm{d}t$ y sumando, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t} = \lambda^j_\alpha(y)v^\alpha_\beta(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\gamma^\beta(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda^i_\alpha(y)\xi^\alpha \tag{2.17}$$

Como $y(t)$ es un punto fijo, el lado izquierdo de la relación (2.17) se hace cero, y obtenemos la identidad

$$\lambda^i_\alpha(x)\xi^\alpha = 0.$$

Esto muestra que los campos vectoriales λ^x_k, $k = 1, \ldots, r$, son linealmente dependientes, lo cual contradice nuestra hipótesis.

■

2.4 Tres grupos de transformaciones en $\mathbb{R}$

En esta sección veremos tres álgebras de Lie de campos vectoriales, las cuales Lie probó que son precisamente las únicas álgebras de Lie de campos vectoriales de dimensión finita salvo difeomorfismos sobre la variedad $\mathbb{R}$, además obtendremos los grupos de Lie de estas álgebras para los cuales existe una acción local cuyos generadores infinitesimales son isomorfos con las álgebras de Lie dadas.

Traslación. Consideremos el álgebra de Lie generada por el único campo vectorial

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

ahora, calculamos el flujo de este campo vectorial. La ecuación diferencial asociada a este campo es:

$$\dot{x} = 1$$

que al resolverla para la condición inicial $x(0) = x_0$ obtenemos el flujo de X_1, dado por

$$\varphi(t, x) = t + x.$$

El grupo de Lie de esta álgebra de Lie es $G = \mathbb{R}$ y actúa sobre la variedad $M = \mathbb{R}$ por la traslación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \varphi(t, x) &= t + x, \end{aligned}$$

que en efecto es una acción ya que si $0 \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\varphi(0, x) = 0 + x = x,$$

y si $t, \tau \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\varphi(t, \varphi(\tau, x)) = t + (\tau + x) = (t + \tau) + x = \varphi(t + \tau, x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Afín. Consideremos el álgebra de Lie generada por los campos

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x},$$

el flujo del campo vectorial X_1 ya lo hemos calculado en el ejemplo anterior, ahora calculamos el flujo del campo vectorial X_2, la ecuación diferencial asociada a X_2 es:

$$\dot{x} = x$$

que al resolverla para la condición inicial $x(0) = x_0$ obtenemos el flujo de X_2, dado por

$$\varphi(t, x) = xe^t.$$

Notemos que

$$\left[X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x} = X_1,$$

por lo tanto esta álgebra de Lie de campos vectoriales es isomorfa a las matrices de 2×2 generadas por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
El grupo de Lie de esta álgebra de Lie es el grupo de matrices triangulares superiores de la forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde $\alpha > 0$.
Por tanto, el grupo de Lie de esta álgebra de Lie es el grupo afín $A(1)$, el cual es el caso particular cuando $n = 1$ del grupo en el ejemplo (2.4), la acción de este grupo en $\mathbb{R}$ viene dada por la función

$$\varphi : A(1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\varphi((\alpha, \beta), x) = \alpha x + \beta,$$

y que en efecto para $(1, 0) \in A(1)$, se tiene

$$\varphi((1, 0), x) = x + 0 = x,$$

y si $(\alpha, \beta), (a, b) \in A(1)$

$$\varphi((\alpha, \beta), \varphi((a, b), x)) = \alpha(ax + b) + \beta = \alpha ax + \beta + \alpha b = \varphi((\alpha a, \beta + \alpha b), x) = \varphi((\alpha, \beta)(a, b), x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proyección. Consideremos el álgebra de Lie generada por los campos vectoriales

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x},$$

en los ejemplos anteriores ya calculamos el flujo de los campos vectoriales X_1 y X_2, ahora calculemos el flujo de X_3, la ecuación diferencial asociada a este campo es:

$$\dot{x} = x^2$$

que al resolverla para la condición inicial $x(0) = x_0$ obtenemos el flujo de X_3, dado por

$$\varphi(t, x) = \frac{x}{1 - tx}.$$

Si reemplazamos X_3 por $-X_3 = -x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ y calculamos los corchetes de X_1, X_2, X_3 vemos que el álgebra de Lie generada por estos campos es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ que tiene por base

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además sabemos que el grupo de Lie del álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ es $SL(2, \mathbb{R})$, por tanto el grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$ actúa localmente en $\mathbb{R}$ por la función

$$\begin{aligned} \varphi : V =& \{(A, x) | cx + d \neq 0\} \subset SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \varphi(A, x) =& \frac{ax + b}{cx + d}, \end{aligned}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$.

Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, se tiene

$$\varphi(I, x) = \frac{x + 0}{0x + 1} = x$$

y si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ se cumple

$$\varphi(A, \varphi(B, x)) = \frac{a \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right) + b}{c \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right) + d} = \frac{(a\alpha + b\gamma)(x) + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)(x) + c\beta + d\delta} = \varphi(AB, x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Clasificación de álgebras de Lie de campos vectoriales en la recta y el plano

El propósito de este capítulo es presentar la clasificación de álgebras de Lie de campos vectoriales en variedades de dimensiones 1 y 2. Recordemos que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie finito dimensional de campos vectoriales en M cuyo grupo de Lie es G entonces existe una acción local de G cuyos generadores infinitesimales generan un álgebra de Lie isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de campos vectoriales. En este sentido, clasificar acciones de grupos de Lie locales es equivalente a clasificar álgebras de Lie de campos vectoriales.

Lie probó que en variedades de dimensión 1 hay exactamente 3 álgebras de Lie de campos vectoriales: el álgebra de traslaciones, el álgebra afín y el álgebra proyectiva, las cuales abordamos como ejemplos en el capítulo anterior. Sin embargo, en variedades de dimensión 2 hay 28 álgebras de Lie de campos vectoriales: 8 primitivas y 20 imprimitivas.

Diremos que dos álgebras de Lie de campos vectoriales definidas en un subconjunto abierto de R^m son equivalentes si existe un difeomorfismo local en $\mathbb{R}^m$ el cual nos lleve de un álgebra de Lie en la otra.

El problema general de clasificación fue investigado con gran detalle por Lie, quien en algún tiempo vio esto como la meta principal de su carrera matemática. El logró clasificar completamente todas las acciones no singulares de grupos de Lie en dimensiones 1 y 2, determinando una lista completa de formas canónicas (locales) de álgebras de Lie de campos vectoriales en variedades de dimensión 1 y 2. Lie afirmó en el tercer volumen de su tratado Grupos de transformaciones que logró completar la clasificación en dimensión 3 pero desafortunadamente el dijo que los resultados eran demasiado largos para incluirlos en el libro. La completa clasificación en dimensión 3 nunca fue publicada por Lie y hasta la fecha permanece desconocida. En la siguiente sección probaremos la clasificación en variedades de dimensión 1, para otra lectura sobre la clasificación de acciones de grupos de Lie en dimensión 1 se puede consultar [12].

3.1 Álgebras de Lie de campos vectoriales en la recta

En esta sección desarrollaremos la prueba de clasificación de acciones de grupos de Lie locales en variedades reales o complejas de dimensión 1, este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Sea G un grupo de Lie conexo finito dimensional que actúa localmente efectivamente en una variedad real o compleja de dimensión 1, sin puntos fijos. Entonces localmente la acción de G es equivalente a alguna de las siguientes acciones de grupo:*

	Acción	*Grupo*	*Generadores*
Traslación	$x \mapsto x + \beta$	$\mathbb{R}$	$\frac{\partial}{\partial x}$
Afín	$x \mapsto \alpha x + \beta$	$A(1)$	$\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x}$
Proyección	$x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$	$SL(2)$	$\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x}$

Antes de proceder a la prueba de este teorema veremos algunos resultados que nos serán de utilidad. Recordemos que si la acción del grupo unidimensional G no tiene puntos fijos entonces para cada $x \in G$ existe un campo vectorial v en el álgebra de campos invariantes por la izquierda $\mathfrak{g}$ tal que $v(x) = 0$. Fijamos un punto $x_0 \in M$ y elegimos $v_1 \in \mathfrak{g}$ tal que $v_1|_{x_0} \neq 0$. Por el teorema de rectificación podemos introducir una coordenada local x cerca de x_0 tal que $v_1 = \frac{\partial}{\partial x}$. Cualquier otro generador infinitesimal en $\mathfrak{g}$ localmente tiene la forma $v_f = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ para alguna función $f(x)$.

Proposición 3.2 *Sea $\mathcal{F} = \{f(x)|v_f = f(x)\frac{\partial}{\partial x}, v_f \in \mathfrak{g}\}$. El espacio vectorial $\mathcal{F}$ tiene las siguientes propiedades:*

(i) $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial finito dimensional (real ó complejo).

(ii) Si $f \in \mathcal{F}$, entonces $f' \in \mathcal{F}$.

(iii) $\mathcal{F}$ es el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria lineal homogenea con coeficientes constantes de orden n.

Demostración.

(i) $\mathcal{F}$ es finito ya que $\mathfrak{g}$ lo es.

(ii) Tomemos $f \in \mathcal{F}$. Entonces, el campo vectorial $v_f = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ está en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Calculando el corchete de v_1 y v_f tenemos

$$[v_1, v_f] = f'(x)\frac{\partial}{\partial x},$$

por tanto $f' \in \mathcal{F}$.

(iii) Como $\mathcal{F}$ es de dimensión finita, podemos elegir una base $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ para $\mathcal{F}$, dado que cada derivada $f_i{}'(x) \in \mathcal{F}$, por lo tanto cada derivada la podemos expresar como una combinación lineal de elementos de la base, es decir,

$$f_i^{'}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Definamos $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Así, tenemos que el sistema lineal de primer orden (3.1) se transforma en el sistema

$$F' = AF. \tag{3.2}$$

Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de A,

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0, \quad b_i \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton sabemos que cada matriz A satisface su propio polinomio característico, esto es,

$$p(A) = b_nA^n + b_{n-1}A^{n-1} + \ldots + b_1A + b_0I = 0.$$

Multiplicando ésta igualdad por la derecha con el vector F y tomando en cuenta que $\frac{d^nF}{dx^n} = A^nF$ tenemos:

$$b_n\frac{d^nF}{dx^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}} + \ldots + b_1\frac{dF}{dx} + b_0F = 0.$$

De esta ecuación se deduce que cada función f_i de la base de $\mathcal{F}$ debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria homogenea

$$b_n\frac{d^ny}{dx^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + b_1\frac{dy}{dx} + b_0y = 0. \tag{3.4}$$

■

Corolario 3.3 *Sobre $\mathbb{C}$, el espacio vectorial $\mathcal{F}$ tiene una base de funciones de la forma*

$$x^ie^{\lambda x}, \quad i = 0, 1, \ldots, n_\lambda,$$

donde λ es un valor propio del polinomio característico (3.3) y n_λ es su multiplicidad.

Corolario 3.4 *Sobre $\mathbb{R}$, el espacio vectorial $\mathcal{F}$ tiene una base de funciones de la forma*

$$x^ie^{\alpha x}\cos\beta x, x^ie^{\alpha x}\sin\beta x \quad i = 0, 1, \ldots, n_\lambda,$$

donde $\lambda = \alpha + i\beta$ es un valor propio del polinomio característico (3.3) y n_λ es su multiplicidad.

A continuación probaremos el teorema de clasificación de acciones de grupos en dimensión 1.

Demostración del Teorema (3.1)
Vamos a presentar la prueba para el caso de que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sea compleja.

El caso real se hace de manera análoga. Por el corolario (3.3) el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tiene una base de campos vectoriales de la forma:

$$x^i e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x},$$

con λ raíces del polinomio característico (3.3) e $i = 0, 1, \ldots, n_\lambda$. Sea S el conjunto de los valores propios del polinomio característico. Primero, veamos cuales son todas las posibilidades para el conjunto S, tomando en cuenta que cada $\lambda \in S$ genera un campo vectorial en $\mathfrak{g}$. S es distinto del vacío, ya que $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{g}$, lo cual implica que $0 \in S$. Tomemos $\lambda, \mu \in S$ y calculemos el corchete de los campos $x^i e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}, x^j e^{\mu x} \frac{\partial}{\partial x}, 0 \leq i, j \leq n_\lambda$:

$$\begin{aligned}
\left[x^i e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}, x^j e^{\mu x} \frac{\partial}{\partial x}\right] &= \left(x^i e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}(x^j e^{\mu x}) - x^j e^{\mu x} \frac{\partial}{\partial x}(x^i e^{\lambda x})\right) \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \left(x^i e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}[(x^j)(\mu e^{\mu x}) + (j x^{j-1})(e^{\mu x})] - x^j e^{\mu x}[(x^i)(\lambda e^{\lambda x}) \right. \\
&\left. +(i x^{i-1})(e^{\lambda x})]\right) \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \left[\mu x^{i+j} e^{(\lambda+\mu)x} + j x^{i+j-1} e^{(\lambda+\mu)x} - \lambda x^{i+j} e^{(\lambda+\mu)x} \right. \\
&\left. - i x^{i+j-1} e^{(\lambda+\mu)x}\right] \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \left[(\mu x^{i+j} + j x^{i+j-1} - \lambda x^{i+j} - i x^{i+j-1}) e^{(\lambda+\mu)x}\right] \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \left[((\mu - \lambda) x^{i+j} + (j - i) x^{i+j-1}) e^{(\lambda+\mu)x}\right] \frac{\partial}{\partial x} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Como siempre podemos tomar $i = j = 0$, esta ecuación se reduce a

$$\left[e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}, e^{\mu x} \frac{\partial}{\partial x}\right] = (\mu - \lambda) e^{(\lambda+\mu)x} \frac{\partial}{\partial x}. \qquad (3.6)$$

Si $\lambda \neq \mu, \mu \neq -\lambda$ y $\mu, \lambda \neq 0$, la ecuación (3.6) implica que $\lambda + \mu \in S$. Por lo que obtenemos un nuevo elemento de S. Esto a su vez implica que S es infinito, lo cual es una contradicción, ya que solo puede tener n elementos como máximo. Por lo tanto el conjunto S solo puede tener alguna de las siguientes formas:

- S={0}

- $S = \{0, \lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

- $S = \{0, \lambda, -\lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

Analizemos primero el caso $S = \{0\}$. Entonces $\mathfrak{g}$ está generada por campos de la forma $x^i \frac{\partial}{\partial x}$ para $0 \leq i \leq n_0$. Tomando $i = n_0, j = n_0 - 1$ y sustituyendo en (3.5) tenemos $x^{2n_0-2} \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{g}$, lo cual implica que $2n_0 - 2 \leq n_0$. Por tanto $n_0 \leq 2$.

Analizando los casos $n_0 = 0, 1, 2$, obtenemos los generadores de las álgebras de las tres acciones del Teorema.

Si $S = \{0, \lambda\}$, entonces $\mathfrak{g}$ está generada por campos de la forma $x^i \frac{\partial}{\partial x}$, $x^i e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}$ para $0 \leq i \leq n_\lambda$. De la ecuación (3.5), tenemos que los corchetes de estos campos son:

$$\begin{aligned}\left[x^i e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}, x^j e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}\right] =&(j-i) x^{i+j-1} e^{2\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}\\ \left[x^i \frac{\partial}{\partial x}, x^j e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}\right] =& \left[(\lambda x^{i+j} + (j-i) x^{i+j-1}) e^{\lambda x}\right] \frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned}$$

como el corchete tiene que estar en $\mathfrak{g}$, esto implica que $j = i$. Además, $0 \leq i, j \leq n_\lambda$. Si $j \neq 0$, el álgebra $\mathfrak{g}$ tiene los siguientes campos $e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}, x e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}, \ldots, x^j e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}$, cuyos corchetes entre ellos no necesariamente están en $\mathfrak{g}$. Por tanto, $n_\lambda = 0$. Por la ecuación (3.5)

$$\left[x^i \frac{\partial}{\partial x}, e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}\right] = \left(\lambda x^i - i x^{i-1}\right) e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}$$

con $n_0 = 0, 1, 2$. Si $n_0 = 0$, la ecuación anterior se reduce a

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}\right] = \lambda e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x},$$

el cual está en $\mathfrak{g}$. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ está generada por los campos $\frac{\partial}{\partial x}, e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}$, la cual es isomorfa al álgebra afín.

Si $S = \{0, \lambda, -\lambda\}$, entonces $\mathfrak{g}$ está generada por los campos $\frac{\partial}{\partial x}, e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}$ y $x^k e^{-\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}$ para $0 \leq k \leq n_{-\lambda}$. Calculando el corchete de $e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}$ y $x^k e^{-\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}$, obtenemos:

$$\left[e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}, x^k e^{-\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}\right] = \left(-2\lambda x^k + k x^{k-1}\right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

De esta ecuación concluimos que el corchete está en $\mathfrak{g}$ solo cuando $k = 0$, lo que a su vez implica que $n_{-\lambda} = 0$. Calculando los corchetes de los campos vectoriales $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}$ y $X_3 = e^{-\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}$ obtenemos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}\right] = \lambda X_2, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x}, e^{-\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}\right] = -\lambda X_3, \quad \left[e^{\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}, e^{-\lambda x} \frac{\partial}{\partial x}\right] = -2\lambda X_1,$$

por lo tanto $\mathfrak{g}$ es isomorfa al álgebra proyectiva. ∎

3.2 Álgebras de Lie de campos vectoriales en el plano

En la búsqueda de grupos de simetrías de ecuaciones diferenciales, Lie se dio cuenta de que requería tener una lista de álgebras de Lie para aplicarlas a su teoría. Esto lo llevó a plantearse el problema de clasificación de álgebras de Lie de campos vectoriales en la recta real, en el plano y en el espacio. En los dos primeros casos tuvo éxito y, aunque aseguraba que también tenía el caso de tres dimensiones, dijo que la prueba era muy extensa para escribirla.

En esta sección vamos a presentar un esquema general de la clasificación de las álgebras de Lie de campos vectoriales en el plano, siguiendo a [7, 6].

La clasificación de las álgebras de Lie de campos vectoriales en la recta real y en el plano fue publicada por Lie en un artículo que apareció en 1880 bajo el título "Theorie der Transformationsgruppen I" en *Mathematische Annlen* (Vol. 6), la cual era una de las revistas matemáticas más prestigiadas en esa época.

El principal resultado que se presenta en este artículo es la clasificación de todas aquellas álgebras de Lie, finito dimensionales, que pueden actuar en variedades de dimensión dos.

La clasificación de las álgebras de Lie de campos vectoriales en el plano, bajo difeomorfismos locales, se lleva a cabo para puntos genéricos (no-singulares) y se basa en distinguir dos tipos de álgebras: las primitivas y las imprimitivas. Esta distinción, como se verá más adelante, resulta ser crucial en la demostración.

3.2.1 Álgebras de Lie de campos vectoriales: generalidades

Sea M una variedad suave de dimensión m y $\mathfrak{X}(M)$ el álgebra de Lie (infinito-dimensional) de los campos vectoriales suaves en M. Un sistema $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ de campos vectoriales definidos en un abierto $U \subset M$ se dice ser *involutivo* si

$$[Y_i, Y_j] \in \operatorname{Span}\big(\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}\big),$$

para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Otra manera de expresar lo anterior es requiriendo que $[\mathcal{Y}, \mathcal{Y}] \subset \mathcal{Y}$.

Una *distribución* de dimensión r en M es una familia $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p\}$ de subespacios r-dimensionales $\mathcal{D}_p \subset T_pM$, para cada $p \in M$, los cuales varían suavemente con p en el sentido de que cada subespacio $\mathcal{D}_p$ está generado por una familia de campos vectoriales $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\} \subset \mathfrak{X}(M)$ definidos en una vecindad U de p que sea lo suficientemente pequeña. Diremos, en este caso, que los campos $X_1, X_2, \ldots, X_r$ forman una base local para $\mathcal{D}$ en la vecindad U. Además, la distribución $\mathcal{D}$ se dice ser *integrable* si para cada $p \in M$ existe una subvariedad $N \subset M$ tal que $\mathcal{D}_p = T_pN$.

El Teorema de Frobenius nos garantiza que una distribución $\mathcal{D}$ en M es integrable si y sólo si es involutiva. En este caso, se tiene una descomposición de la variedad M en subvariedades que forman una *foliación* de M de tal manera que cada *hoja* de la foliación es una subvariedad maximal conexa y las hojas pegan de manera suave.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de campos vectoriales en M y supongamos que $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ es un sistema involutivo de campos vectoriales en M. La foliación de M que define la distribución integrable $\mathcal{D}_p = \operatorname{Span}(\mathcal{X})$ se dice ser *invariante* bajo la acción de $\mathfrak{g}$ en M si se satisface la condición

$$[\mathfrak{g}, \mathcal{X}] \subset \mathcal{X}.$$

Sea $q \in M$ un punto arbitario. El conjunto

$$\mathfrak{g}(q) = \{X(q) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

es un subespacio de T_qM, por lo que $\dim \mathfrak{g}_q \leq m = \dim M$.

Así, en el caso $M = \mathbb{R}^2$ y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$, entonces dado un punto arbitrario $q \in \mathbb{R}^2$ y $X \in \mathfrak{g}$, se tiene que $X(q) \in T_q\mathbb{R}^2$ y el conjunto $\mathfrak{g}(q)$ es un subespacio vectorial del espacio tangente $T_q\mathbb{R}^2$. Luego, su dimensión puede ser 0, 1 ó 2.

En lo que sigue, $\mathfrak{g}$ denotará un álgebra de Lie de campos vectoriales en un subconjunto abierto de $M = \mathbb{R}^2$. Como se vio anteriormente, esta álgebra tiene asociado un grupo de Lie de transformaciones (local), el cual se denotará por $\mathcal{G}$. De esta manera, el grupo de transformaciones $\mathfrak{G}$ está caracterizado por la Definición (2.1) y cada elemento de $\mathcal{G}$ es, en realidad, un difemorfismo

$$\psi_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \tag{3.7}$$

$$\psi_g(p) = g \cdot p, \qquad \text{para } p \in \mathbb{R}^2. \tag{3.8}$$

Luego, la diferencial

$$D_p\psi_g : T_p\mathbb{R}^2 \to T_{g\cdot p}\mathbb{R}^2, \tag{3.9}$$

es una transformación lineal entre espacios vectoriales. Cuando no haya lugar a confusiones, en vez de escribir $\psi_g \in \mathcal{G}$ para un elemento de este grupo de transformaciones, escribiremos simplemente $g \in \mathcal{G}$, en el entendido de que se trata de una transformación en el sentido de (3.7), (3.8).

De esta manera, con esta convención, podemos escribir (3.9) como

$$D_p(g) : T_p\mathbb{R}^2 \to T_{g\cdot p}\mathbb{R}^2, \tag{3.10}$$

para denotar la diferencial de la transformación en $\mathcal{G}$ definida por el elemento g.

Por otra parte, recordemos que si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$, el *espacio proyectivo* $\mathbb{P}(V)$ que induce V es el conjunto de todos los subespacios de V, de dimensión 1 y $\dim\big(\mathbb{P}(V)\big) = \dim(V) - 1$. De esta manera, un subespacio $W \subset V$ tal que $\dim(W) = 1$, es generado por un vector $w \in W$, con $w \neq 0$, y podemos identificar $\mathbb{P}(V)$ con el conjunto de clases de equivalencia de la relación de equivalencia "$\sim$" en $V \setminus \{0\}$, donde $x \sim y$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, tal que $x = \lambda y$. Denotamos la clase de equivalencia de x por $[x]$.

La *transformación proyectiva* generada por (3.10) se define por

$$\psi_g^{(1)} : \mathbb{P}\big(T_p\mathbb{R}^2\big) \to \mathbb{P}\big(T_{g\cdot p}\mathbb{R}^2\big), \tag{3.11}$$

$$\psi_g^{(1)}([v]) = [D_p\psi_g \cdot v], \qquad \forall\, v \in T_p\mathbb{R}^2,\ v \neq 0. \tag{3.12}$$

La función (3.11) está estrechamente relacionada con la noción de *primera prolongación* de una transformación ψ_g. De hecho, si $\psi_g = (g_1, g_2)$, $p = (x, y)$ y

$$v = (\dot{x}, \dot{y}) \in T_p\mathbb{R}^2$$

es un vector no vertical, entonces la coordenada de $[v] \in \mathbb{P}(T_p\mathbb{R}^2)$ está dada por

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

y $\psi_g^{(1)}$ está dada por

$$\tilde{y}' = \frac{\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)y'}{\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)y'}. \tag{3.13}$$

La primera prolongación de ψ_g en (x, y, y') está definida por

$$pr^{(1)}g(x,y,y') = (g(x,y), \tilde{y}').$$

Como se mencionó antes, la clasificación de las álgebras de Lie finito dimensionales de campos vectoriales en el plano distingue dos casos, que el propio Lie realizó por lo que se definen a continuación los dos tipos.

Definición 3.5 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie finito-dimensional de campos vectoriales definidos en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie* primitiva *(en U) si no existe alguna foliación 1-dimensional de U que sea invariante bajo la acción de grupo de transformaciones $\mathcal{G}$. En caso contrario, se dirá que $\mathfrak{g}$ es* imprimitiva. *Finalmente, $\mathfrak{g}$ es* localmente primitiva *si es primitiva en todo subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.*

Notemos que en términos de la transformación lineal (3.9), (3.10), el concepto de primitividad de la Definición 3.5 es equivalente a pedir que no exista una distribución $\mathcal{D}$, de dimensión 1, que sea invariante bajo (3.9), (3.10).

Definición 3.6 *Se dice que $p \in \mathbb{R}^2$ es un* punto genérico *para el álgebra de Lie de campos vectoriales $\mathfrak{g}$ si existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}^2$ del punto p de tal manera que $\dim \mathfrak{g}(q)$ es constante para todo $q \in U$.*

Notemos que la Definición 3.6 es equivalente a decir que todas las órbitas del grupo local de transformaciones $\mathcal{G}$, del álgebra $\mathfrak{g}$, tienen dimensión constante en la vecindad U del punto p.

Si todas las órbitas de $\mathcal{G}$ en un subconjunto abierto U son de dimensión dos, $\mathcal{G}$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice que son *transitivas* en U; de lo contrario son *instransitivas* en U.

Una condición necesaria y suficiente para que $\mathfrak{g}$ sea transitiva en una vecindad de $p \in \mathbb{R}^2$ es que

$$\mathfrak{g}(p) = T_p\mathbb{R}^2.$$

Notemos que si un álgebra de Lie de campos vectoriales $\mathfrak{g}$ es intransitiva, entonces $\mathfrak{g}$ es imprimitiva en una vecindad de todo punto genérico.

Por otra parte, denotaremos por $\mathcal{G}_p < \mathcal{G}$ el *subgrupo de isotropía* de $\mathcal{G}$ en p, definido por

$$\mathcal{G}_p = \{g \in \mathcal{G} \mid g \cdot p = p\}. \tag{3.14}$$

Similarmente, la *subálgebra de isotropía* se define por

$$\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g} \mid X(p) = 0\}. \tag{3.15}$$

El caso cuando $g \in \mathcal{G}_p$ es importante ya que $T_{g\cdot p}\mathbb{R}^2 \equiv T_p\mathbb{R}^2$, por lo que cada $g \in \mathcal{G}_p$ define un operador lineal $T_p\mathbb{R}^2 \to T_p\mathbb{R}^2$, esto es se tiene una representación. Por medio de la transformación lineal (3.9) es posible definir la siguiente acción:

$$\sigma : \mathcal{G}_p \times T_p\mathbb{R}^2 \to T_p\mathbb{R}^2 \tag{3.16}$$

$$(g, v) \mapsto \sigma(g, v) \equiv \sigma_g(v), \tag{3.17}$$

donde

$$\sigma_g : T_p\mathbb{R}^2 \to T_p\mathbb{R}^2, \tag{3.18}$$

está definida por

$$\sigma_g(v) = D_p\psi_g(v). \tag{3.19}$$

Aquí debemos entender la representación de $\mathcal{G}_p$ como un subgrupo de $GL(T_p\mathbb{R}^2)$.

La representación (3.16) - (3.19) induce la representación

$$\rho : \mathfrak{g}_p \times T_p\mathbb{R}^2 \to T_p\mathbb{R}^2, \tag{3.20}$$

de la subálgebra de isotropía $\mathfrak{g}_p$, como subálgebra de $\mathfrak{gl}(T_p\mathbb{R}^2)$, donde

$$\rho(X, v) \equiv X \cdot v = \frac{d}{d\,t}\Big|_{t=0} \sigma(\gamma(t), v), \tag{3.21}$$

donde $\{\gamma(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{G}_p$ es el subgrupo 1-paramétrico que genera el campo vectorial X.

La acción de $\mathcal{G}_p$ en $T_p\mathbb{R}^2$ definida por (3.16) - (3.19), induce una acción, $\widetilde{\sigma}$, de $\mathcal{G}_p$ en $\mathbb{P}\big(T_p\mathbb{R}^2\big)$ de la forma siguiente:

$$\psi_g \in \mathcal{G}_p \mapsto \psi_g^{(1)}. \tag{3.22}$$

Similarmente, esta acción induce una acción, $\widetilde{\rho}$, de $\mathfrak{g}_p$ en $\mathbb{P}\big(T_p\mathbb{R}^2\big)$, la cual está dada por

$$\widetilde{\rho}\big(X, [v]\big) \equiv \widetilde{\rho}(X) \cdot [v] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(\widetilde{\sigma}(\gamma(t), p) \cdot [v]\big). \tag{3.23}$$

Si $X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$ y tomando en cuenta (3.13) la última acción la podemos expresar de una manera más explícita en la forma

$$X \cdot [v] = (ay'^2 + by' + c)\frac{\partial}{\partial y'}, \tag{3.24}$$

donde

$$a = -\frac{\partial\xi}{\partial y}(p), \quad b = \frac{\partial\eta}{\partial y}(p) - \frac{\partial\xi}{\partial x}(p), \quad c = \frac{\partial\eta}{\partial x}(p).$$

Como era de esperarse con el hecho análogo para $\psi_g^{(1)}$, $\widetilde{\rho}(X)$ se relaciona con la primera prolongación $\mathrm{pr}^{(1)}$ del campo vectorial X; de hecho, se tiene

$$\mathrm{pr}^{(1)}X(x, y, y') = X(x, y) \oplus \widetilde{\rho}(X, [v]).$$

En otras palabras, $\widetilde{\rho}(X, [v])$ es la componente y' de $\mathrm{pr}^{(1)}X$ en (x, y, y'). Una propiedad importante de $\widetilde{\rho}$ que vale la pena señalar es que $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$ es un álgebra de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{P}(T_p\mathbb{R}^2)$ y usando la fórmula (3.24) se prueba directamente que $\widetilde{\rho}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, esto es,

$$[\widetilde{\rho}(X), \widetilde{\rho}(Y)] = \widetilde{\rho}([X, Y]),$$

y además

$$[\mathrm{pr}^{(1)}(X), \mathrm{pr}^{(1)}(Y)] = \mathrm{pr}^{(1)}([X, Y]).$$

A continuación, introduciremos el concepto de *orden* de un campo vectorial en un punto, el cual jugará un papel importante en lo que sigue.

Definición 3.7 *Sean M una variedad y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de campos vectoriales en M. Diremos que el campo vectorial $X \in \mathfrak{g}$ se* anula *en el punto $p \in M$ si $X(f)(p) = 0$ para toda $f \in C^\infty(M)$. Similarmente, se dirá que X se* anula en segundo orden *en p si $[Z, X]$ se anula en p para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$. En general, el campo X se* anula en k-ésimo orden *en p si $[W, X]$ se anula en $(k-1)$-ésimo orden en p para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$.*

Si consideramos un sistema de coordenadas locales $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en M, de tal manera que el punto $p \in M$ tenga coordenadas $(0, 0, \ldots, 0)$, entonces el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se escribe como

$$X = \sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

y es claro que X se anula de k-ésimo orden si y sólo si las componentes f^i del campo se anulan de orden k en $p = (0, 0, \ldots, 0)$, lo cual significa que son de la forma

$$f^i = \sum_{j_s} a^i_{j_1 \ldots j_r}\, x^{j_1} \cdots x^{j_r}.$$

Si p es un punto genérico para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}_p^0 = \mathfrak{g}\\
&\mathfrak{g}_p^1 = \{X \in \mathfrak{g} \mid X \text{ se anula en } p\}\\
&\mathfrak{g}_p^2 = \{X \in \mathfrak{g} \mid X \text{ se anula en segundo orden en } p\}\\
&\quad\vdots\\
&\mathfrak{g}_p^n = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Z, X] \text{ se anula en } (n-1)\text{-ésimo orden en } p.\ \forall\ Z \in \mathfrak{X}(M)\},
\end{aligned}$$

Más aún, de las ecuaciones

$$[\mathfrak{g}_p^j, \mathfrak{g}_p^k] \subset \mathfrak{g}_p^{j+k-1} \qquad (j^2 + k^2 > 0), \tag{3.25}$$

se sigue que $\mathfrak{g}_p^j$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ para todo j, y que $\mathfrak{g}_p^j$ es un ideal de $\mathfrak{g}_p^k$ para todo $1 \leq k \leq j$.

Así, se tiene la filtración

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p^0 \supset \mathfrak{g}_p^1 \supset \mathfrak{g}_p^2 \supset \cdots \tag{3.26}$$

de $\mathfrak{g}$.

Por otra parte, dado que $\mathfrak{g}_p^2$ es un ideal de $\mathfrak{g}_p$, el espacio cociente

$$\mathfrak{g}_p/\mathfrak{g}_p^2 = \{X + \mathfrak{g}_p^2 \mid X \in \mathfrak{g}_p\},$$

es un álgebra de Lie con el corchete de Lie

$$[X + \mathfrak{g}_p^2, Y + \mathfrak{g}_p^2] = [X, Y] + \mathfrak{g}_p^2.$$

Denotaremos por

$$\mathscr{L}_p(\mathfrak{g}) \equiv \mathfrak{g}_p/\mathfrak{g}_p^2$$

la parte lineal de $\mathfrak{g}$ en p, ya que este espacio se puede identificar con los campos vectoriales en $\mathfrak{g}$ cuyo orden en p es 1 y descartando los términos de orden 2 o superior. Para hacer esto un poco más preciso, sea $\mathscr{L}$ un álgebra de Lie de campos vectoriales lineales en $\mathbb{R}^2$, y definimos una función

$$\varphi : \mathscr{L}_p(\mathfrak{g}) \to \mathscr{L}$$

por

$$\varphi(X) = \text{ parte lineal de } X \text{ en } p\,.$$

Ejemplo 3.8 *Si* $p = (0,0)$ *y* $X = (x - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(2y)\frac{\partial}{\partial y}$ *entonces aplicando el teorema de Taylor a las componentes de* X *tenemos*

$$\varphi(X) = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Es fácil ver que $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ es isomorfa a la subálgebra de campos vectoriales lineales $\varphi(\mathscr{L}_p(\mathfrak{g}))$.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$. Sea $p \in \mathbb{R}^2$. Recordemos que

$$\mathfrak{g}^k(p) = \{X \in \mathfrak{g} \mid X \,\text{es de orden}\, k\}.$$

Así, $\mathfrak{g}^k(p)$ es un ideal de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0(p)$ y se tiene la filtración (3.26) con la propiedad (3.25). En particular, $\mathfrak{g}^1(p)$ el ideal de los campos vectoriales de orden 1 en $\mathfrak{g}$ y este ideal coincide con la llamada *subálgebra de isotropía* de p,

$$\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g} \mid X(p) = 0\},$$

es decir,

$$\mathfrak{g}_p \equiv \mathfrak{g}^1(p),$$

En adelante, en lugar de escribir $\mathfrak{g}^k(p)$ para referirnos a los campos de $\mathfrak{g}$ de orden k simplemente escribiremos $\mathfrak{g}^k$ para este ideal, sin que haya lugar a confusiones. Así, dado que $\mathfrak{g}^2$ es un ideal de $\mathfrak{g}_p$, se tiene que $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_p/\mathfrak{g}^2$ es un álgebra de Lie, a la cual le llamaremos la *parte lineal* de $\mathfrak{g}$ en el punto p y la denotaremos por

$$\mathscr{L}_p(\mathfrak{g}) \equiv \mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}_p/\mathfrak{g}^2.$$

Es claro que los elementos de $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ pueden identificarse con aquellos campos en $\mathfrak{g}$ que son de orden 1 en p y de los cuales se descartan los términos de orden 2 o superiores.

Sea $\mathscr{L}$ el álgebra de Lie de los campos vectoriales lineales en $\mathbb{R}^2$:

$$\mathscr{L} = \left\{ Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) \mid Z = f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y} \right\},$$

donde $f = f(x,y)$ y $g = g(x,y)$ son funciones lineales en $\mathbb{R}^2$.

Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{L}_p(\mathfrak{g}) &\to \mathscr{L} \\ X &\mapsto \Phi(X), \end{aligned}$$

donde

$$\Phi(X) = \text{parte lineal de } X.$$

Es claro que para un campo $X \in \mathfrak{g}_p$ se tiene que $X = X_L + Z$, donde $X_L \in \mathfrak{g}^1 - \mathfrak{g}^2$ y $Z \in \mathfrak{g}^2$, por lo que

$$\Phi(X) = X_L.$$

Además, en el cociente $\mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2$ se tiene que

$$X + \mathfrak{g}^2 = X_L + \mathfrak{g}^2.$$

De esta manera, $\Phi(\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})) \subsetneq \mathscr{L}$ y Φ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Además,

$$\operatorname{Ker}(\Phi) = \{X \in \mathscr{L}_p(\mathfrak{g}) \mid \Phi(X) = 0\} = \{X \in \mathscr{L}_p(\mathfrak{g}) \mid X_L = 0\} = \mathfrak{g}^2.$$

De esto se concluye que

$$\mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2 \cong \Phi(\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})).$$

Por otra parte, sabemos que el grupo de transformaciones $\mathcal{G}$ induce una representación

$$\rho : \mathfrak{g}_p \to T_p(\mathbb{R}^2)$$

de tal manera que para cada $X \in \mathfrak{g}_p$ se tiene que $\rho(X) \in \operatorname{End}(T_p(\mathbb{R}^2))$ y dado $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$,

$$\rho(X)(Z(p)) = [X,Z](p),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\rho) &= \{X \in \mathfrak{g}_p \mid \rho(X) = 0\} = \{X \in \mathfrak{g}_p \mid [X,Z](p) = 0,\ \forall Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)\} \\ &= \mathfrak{g}^2(p). \end{aligned} \tag{3.27}$$

De esta manera, al pasar al álgebra cociente $\mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2$ se tiene,

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}: \mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2 &\to \mathrm{End}(T_p(\mathbb{R}^2)) \\ X + \mathfrak{g}^2 &\mapsto \rho(X). \end{aligned}$$

De (3.27) se sigue que $\mathrm{Ker}(\widehat{\rho}) = 0$; esto es $\widehat{\rho}$ es inyectiva. Esto nos permite probar el siguiente resultado:

Proposición 3.9 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y $p \in \mathbb{R}^2$ es un punto genérico, entonces* $\dim(\mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2) \leq 4$.

Demostración. La prueba es inmediata ya que

$$\dim(\mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2) = \dim(\mathrm{Ker}(\widehat{\rho})) + \dim\big(\widehat{\rho}(\mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2)\big) = \dim\big(\widehat{\rho}(\mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2)\big).$$

Dado que $\widehat{\rho}(\mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2) \subset \mathrm{End}(T_p(\mathbb{R}^2))$, se demuestra la afirmación. ■

Esta última proposición es importante ya que nos dice que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$, entonces en una vecindad de un punto genérico $p \in \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{g}$ contiene, a lo más, 4 campos vectoriales linealmente independientes que se anulan en p. Sin embargo, en coordenadas (x, y) de $\mathbb{R}^2$, es claro que los siguientes campos se anulan de orden 1 en $p = (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} X_1 &= (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + \cdots \\ X_2 &= (y - y_0)\frac{\partial}{\partial x} + \cdots \\ X_3 &= (x - x_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots \\ X_4 &= (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots \end{aligned}$$

donde los puntos indican términos de orden 2 o mayores que involucran a $(x - x_0)$ o $(y - y_0)$.

Por otra parte, siguiendo a Lie en [7], se tiene que hay dos casos esencialmente diferentes:

- $(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots \in \mathfrak{g}$,
- $(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots \notin \mathfrak{g}$.

En el segundo caso, los campos vectoriales independientes de $\mathfrak{g}$ que se anulan de primer orden en p, son de la forma:

$$Y_1 = X_3 + \alpha Y = (x - x_0)\frac{\partial}{\partial y} + \alpha Y, \tag{3.28}$$

$$Y_2 = X_2 + \beta Y = (y - y_0)\frac{\partial}{\partial x} + \beta Y, \tag{3.29}$$

$$Y_3 = (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} - (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} + \gamma Y, \tag{3.30}$$

donde $Y \in \mathfrak{g}^2$ y α, β, γ, escalares. Dado que $\mathfrak{g}^1$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, calculando los corchetes

$$[Y_1, Y_2], \qquad [Y_1, Y_3], \qquad [Y_2, Y_3],$$

se obtienen, respectivamente, los valores $\beta = 0$, $\alpha = 0$ y $\gamma = 0$. Esta discusión se resume en el resultado siguiente.

Proposición 3.10 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ que contiene tres campos independientes de primer orden que se anulan en $p = (x_0, y_0)$ y ninguno es de la forma $(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots$, entonces deben der de la forma*

$$(x - x_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \qquad (y - y_0)\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \qquad (x - x_0)\frac{\partial}{\partial y} - (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots,$$

3.3 Álgebras de Lie primitivas de campos vectoriales

Para empezar a clasificar las álgebras de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$, revisaremos un poco el trabajo de Lie en esa dirección y luego estudiaremos algunos criterios para caracterizar la primitividad, que serán de utilidad en este trabajo.

3.3.1 Algunas anotaciones del trabajo de Lie sobre la clasificación

En su búsqueda de criterios para caracterizar la invarianza de familias de curvas (foliaciones) en abiertos de $\mathbb{R}^2$, Lie desarrolla un método que aquí describimos brevemente y que nos permite clasificar las álgebras de Lie de campos vectoriales en el plano, aunque en el caso primitivo, Lie sólo obtuvo las tres álgebras de la Tabla 3.1, las cuales, son las mismas en el caso real que en el caso complejo. Sin embargo, en [6] se obtienen cinco álgebras de Lie primitivas en el plano, que no tienen su contraparte en el caso complejo. De esta manera, la clasificación completa de álgebras de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ es la dada por la Tabla 4.1.

Consideremos el campo vectorial

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.31}$$

en $\mathbb{R}^2$, donde $\xi = \xi(x, y)$ y $\eta = \eta(x, y)$. En este caso, podemos considerar al campo X como una función definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y que toma valores en $\mathbb{R}^2$. Sea $\phi(x, y) = a$ una familia de curvas en U, que inducen una foliación de dimensión 1 en U y que bien pueden representar, localmente, las curvas solución de una ecuación diferencial en U.

De esta manera, dado un campo vectorial suave $X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$, el cual es un generador infinitesimal de la acción de un grupo de transformaciones $\mathcal{G}$ en el plano, se tiene que $\phi(x, y) = a$ es invariante bajo la acción del grupo si y sólo si

$$X(\phi) = \xi\frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \phi}{\partial y} = \Omega(\phi), \tag{3.32}$$

para una cierta función suave Ω en $\mathbb{R}^2$.

Si la familia de curvas $\phi(x,y)=a$ está determinada por una ecuación diferencial $F(x,y,y')=0$, la condición de invarianza bajo el campo X se lee

$$\mathrm{pr}^{(1)}X(F)=0 \quad \text{si y sólo si} \quad F=0.$$

La anterior discusión es útil ya que nos permite establecer los siguientes hechos:

1. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathfrak{g}=\mathrm{Span}(X)$, donde X está dado por (3.31, entonces este campo admite una infinidad de familias de curvas invariantes $\phi(x,y)=a$ pues basta tomar una función arbitraria Ω en (3.32) y

2. Si $\mathfrak{g}=\mathrm{Span}\{X_1,X_2\}$ entonces

$$[X_1,X_2]=\mu_1X_1+\mu_2X_2, \tag{3.33}$$

para escalares μ_1 y μ_2. Supongamos que μ_1, μ_2 no son ambos iguales a cero. En este caso, si ψ es cualquier solución de la ecuación $X_1(f)=0$, entonces de (3.33) se tiene

$$X_1(X_2(\psi))-X-2(X_1(\psi))=\mu_1X_1(\psi)+\mu_2X_2(\psi)=\mu_2X_2(\psi),$$

por lo que

$$X_1(X_2(\psi))=\mu_2X_2(\psi).$$

Como cualquier función de ψ es también una solución de $X_1(f)=0$, se tiene que $X_1(X_2(\psi))=0$. Por lo tanto, $X_2(\psi)=0$ y la familia de curvas $\psi=a$ admite los dos campos vectoriales X_1 y X_2, por lo que es invariante bajo $\mathfrak{g}$.

3. En el caso en que el álgebra $\mathfrak{g}$ está generada por tres campos, digamos

$$\mathfrak{g}=\mathrm{Span}\{X_1,X_2,X_3\},$$

veremos que también admite una (y sólo una) familia de curvas invariantes.

El análisis de este caso es algo extenso pero vale la pena ver algunos detalles. En efecto, supongamos que $X_i=\xi_i\frac{\partial}{\partial x}+\eta_i\frac{\partial}{\partial y}$ y consideremos la función

$$\Delta=\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \mathrm{pr}^{(1)}X_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \mathrm{pr}^{(1)}X_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \mathrm{pr}^{(1)}X_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial\eta_1}{\partial x}+y'\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial y}-\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right)-(y')^2\frac{\partial\xi_1}{\partial y}\\ \xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial\eta_2}{\partial x}+y'\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial y}-\frac{\partial\xi_2}{\partial x}\right)-(y')^2\frac{\partial\xi_2}{\partial y}\\ \xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial\eta_3}{\partial x}+y'\left(\frac{\partial\eta_3}{\partial y}-\frac{\partial\xi_3}{\partial x}\right)-(y')^2\frac{\partial\xi_3}{\partial y}\end{vmatrix} \tag{3.34}$$

En este caso, $\Delta=0$ es una ecuación diferencial y es invariante bajo la acción de $\mathfrak{g}$ (o bien, es invariante bajo la acción del grupo de transformaciones $\mathcal{G}$, cuyos generadores infnitesimales son los campos X_1, X_2 y X_3).

La condición de invarianza (ver por ejemplo [3, 11]), nos dice que $\mathrm{pr}^{(1)}X_k(\Delta) = 0$ si y sólo si $\Delta = 0$. Así, por ejemplo, es claro que si tomamos $k = 2$ y hacemos

$$\zeta_i = \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right) - (y')^2\frac{\partial \xi_i}{\partial y},$$

entonces

$$\mathrm{pr}^{(1)}X_2(\Delta) = \begin{vmatrix} \mathrm{pr}^{(1)}X_2\xi_1 & \mathrm{pr}^{(1)}X_2\eta_1 & \mathrm{pr}^{(1)}X_2\zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \mathrm{pr}^{(1)}X_2\xi_2 & \mathrm{pr}^{(1)}X_2\eta_2 & \mathrm{pr}^{(1)}X_2\zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \mathrm{pr}^{(1)}X_2\xi_3 & \mathrm{pr}^{(1)}X_2\eta_3 & \mathrm{pr}^{(1)}X_3\zeta_3 \end{vmatrix}.$$

Realizando los cálculos involucrados en la expresión anterior, Lie llega a la siguiente fórmula:

$$\mathrm{pr}^{(1)}X_2(\Delta) = \left(c + d + 2\frac{\partial \eta_2}{\partial x} - 2y'\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right)\Delta,$$

para ciertas constantes c y d, lo que lo que prueba invarianza de Δ bajo $\mathrm{pr}^{(1)}X_2$. Dado que lo mismo se cumple para $\mathrm{pr}^{(1)}X_1$ y $\mathrm{pr}^{(1)}X_3$, se tiene que la ecuación diferencial $\Delta = 0$ admite los tres campos que generan el álgebra $\mathfrak{g}$ y, por lo tanto, se tiene familias de curvas invariantes en este caso, lo que muestra que $\mathfrak{g}$ es imprimitiva.

En general, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Span}\{X_1, X_2, \ldots, X_r\},$$

con $X_i = \xi_i\partial/\partial x + \eta_i\partial/\partial y$, entonces una familia de curvas $\phi(x, y) = a$ que admite tres generadores infinitesimales X_i, X_j y X_k de $\mathfrak{g}$, ϕ debe ser una solución de la ecuación diferencial

$$\Delta_{ijk} = \xi_i\eta_j\left[\frac{\partial \eta_k}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial y} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x}\right) - (y')^2\frac{\partial \xi_k}{\partial y}\right] = 0,$$

la cual se obtiene de (3.34). Por lo tanto, Lie demuestra que si la familia de curvas $\phi(x, y) = a$ admite todos los campos vectoriales $X_1, X_2, \ldots, X_r$, entonces ϕ debe ser solución de todas las ecuaciones diferenciales Δ_{ijk}. Lo recíproco también es válido, por lo que se tiene un criterio para saber cuando un álgebra de Lie es imprimitiva.

Si aplicamos ese criterio a álgebras de campos vectoriales de la forma

$$\mathfrak{g} = \{X_1, X_2, Y_1, \ldots, Y_r\},$$

donde

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \cdots,$$

$$Y_k = \left[a_k(x - x_0) + b_k(y - y_0)\right]\frac{\partial}{\partial x} + \left[c_k(x - x_0) + d_k(y - y_0)\right]\frac{\partial}{\partial y} + \cdots,$$

con $k = 1, \ldots, r$, entonces sólo se requieren obtener las ecuaciones correspondientes a Δ_{12k}:

$$\Delta_{12k} = c_k + (d_k - a_k)y' - b_k(y')^2 = 0.$$

De esta manera, el álgebra $\mathfrak{g}$ deja invriante una familia de curvas si y sólo si las r ecuaciones

$$c_k + (d_k - a_k)y' - b_k(y')^2 = 0, \tag{3.35}$$

se satisfacen para algún valor de y'.

En particular, si

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} = \operatorname{Span}\Big\{ &\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \frac{\partial}{\partial y} + \cdots, (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, (y - y_0)\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \\ &(x - x_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots, (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \Big\},\end{aligned} \tag{3.36}$$

las ecuaciones que resultan de (3.35) son

$$-y' = 0, \qquad -(y')^2 = 0, \qquad 1 = 0, \qquad y' = 0,$$

lo cual es una contradicción, por lo que en este caso no existen soluciones para (3.35). Por lo tanto, un álgebra de Lie de la forma (3.36) es primitiva.

De manera análoga, si aplicamos este mismo criterio para un álgebra de Lie de la forma

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} = \operatorname{Span}\Big\{ &\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \frac{\partial}{\partial y} + \cdots, (x - x_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots, (y - y_0)\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \\ &(x - x_0)\frac{\partial}{\partial y} - (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \Big\},\end{aligned} \tag{3.37}$$

las ecuaciones que resultan son

$$1 = 0, \qquad -2y' = 0, \qquad -(y')^2 = 0,$$

lo cual es imposible, por lo que no existen soluciones para (3.35) en este caso. Así, el álgebra (3.37) es primitiva.

Por otra parte, en el caso en que el álgebra $\mathfrak{g}$ contiene tres generadores infinitesimales independientes, de primer orden, uno de los cuales es de la forma

$$(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots,$$

la ecuación (3.35) siempre tiene solución, por lo que $\mathfrak{g}$ es imprimitiva [7].

De la misma manera, si se tiene un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ la cual contiene dos generadores infnitesimales independientes, de primer orden, ninguno de los cuales es de la forma

$$(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} + \cdots,$$

entonces, siempre es posible encontrar una solución para la ecuación (3.35), por lo que, en este caso, $\mathfrak{g}$ es imprimitiva [7].

Concluimos esta discusión con el siguiente resultado de Lie (ver [7]):

Teorema 3.11 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ que no deja invariante a familia alguna de curvas $\phi(x,y)=a$, entonces o bien $\mathfrak{g}$ contiene cuatro campos vectoriales independientes de primer orden de la forma*

$$(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+\cdots, \quad (y-y_0)\frac{\partial}{\partial x}+\cdots, \quad (x-x_0)\frac{\partial}{\partial y}+\cdots, \quad (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}+\cdots,$$

o bien, $\mathfrak{g}$ contiene tres campos vectoriales independientes de la forma

$$(x-x_0)\frac{\partial}{\partial y}+\cdots, \quad (y-y_0)\frac{\partial}{\partial x}+\cdots, \quad (x-x_0)\frac{\partial}{\partial y}-(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}+\cdots$$

Es claro que la discusión anterior es válida si se supone que el punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ es el origen $(0,0)$, por lo que las álgebras en (3.36) y (3.37) vienen a ser, respectivamente,

$$\operatorname{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x}+\cdots,\frac{\partial}{\partial y}+\cdots,x\frac{\partial}{\partial x}+\cdots,y\frac{\partial}{\partial x}+\cdots,x\frac{\partial}{\partial y}+\cdots,y\frac{\partial}{\partial y}+\cdots,\right\} \tag{3.38}$$

y

$$\operatorname{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x}+\cdots,\frac{\partial}{\partial y}+\cdots,x\frac{\partial}{\partial y}+\cdots,y\frac{\partial}{\partial x}+\cdots,x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial y}+\cdots,\right\}, \tag{3.39}$$

las cuales, como ya vimos, son primitivas.

Continuando con su programa de clasificación y partiendo de las dos álgebras primitivas, (3.38) y (3.39), Lie se pregunta en su famoso trabajo de 1880 si existen otras álgebras que contengan campos vectoriales de orden mayor a 1, las cuales contengan a las anteriores. Así, Lie prueba que en todo caso, no pueden existir álgebras primitivas cuyos campos vectoriales sea de orden mayor que 2 (ver [7]).

En cualquiera de los casos (3.38) y (3.39), es claro que en el álgebra siempre se tendrán campos de primer orden de la forma

$$x\frac{\partial}{\partial y}+\cdots, \qquad y\frac{\partial}{\partial x}+\cdots, \qquad x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial y}+\cdots. \tag{3.40}$$

Lie demuestra que, invariablemente, esta álgebra deberá contener campos de orden 2 de la forma

$$x^2\frac{\partial}{\partial x}+(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)\frac{\partial}{\partial y}+\cdots \tag{3.41}$$

A partir de aquí, calculando directamente el corchete de un campo de la forma (3.41) con los campos (3.40), es fácil llegar a que $\gamma=0$, $\alpha=0$ y $\beta=1$, por lo que el álgebra debe contener campos vectoriales de la forma

$$x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}+\cdots, \qquad xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}+\cdots$$

Por lo tanto, si un álgebra de Lie primitiva de campos vectoriales contiene campos de orden 2, ésta debe ser de la forma

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} = \operatorname{Span}\Big\{ &\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \frac{\partial}{\partial y} + \cdots, x\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, y\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \\ &x\frac{\partial}{\partial y} + \cdots, y\frac{\partial}{\partial y} + \cdots, x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + \cdots, xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} + \cdots \Big\}\end{aligned} \tag{3.42}$$

Una vez encontradas las álgebras primitivas (3.38), (3.39) y (3.42), Lie demuestra que éstas son isomorfas, respectivamente, a las álgebras

$$\mathfrak{g}_1 = \operatorname{Span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_2 = \operatorname{Span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial y} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_3 = \operatorname{Span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

Estas son las tres álgebras de Lie primitivas encontradas originalmente por Lie.

3.3.2 Otros resultados importantes

En esta parte se prueban varios resultados importantes que caracterizan a las álgebras de Lie, tanto primimtivas como imprimitivas.

Definición 3.12 *Se dice que la acción de $\mathcal{G}_p$ en $T_p\mathbb{R}^2$ es* reducible *si existe un subespacio propio de $T_p\mathbb{R}^2$ que sea invariante bajo $\mathcal{G}_p$. Análogamente, la acción de $\mathfrak{g}_p$ en $T_p\mathbb{R}^2$ es* reducible *si existe un subespacio propio de $T_p\mathbb{R}^2$ que sea invariante bajo $\mathfrak{g}_p$.*

Notemos que de existir tal subespacio propio que sea invariante bajo la acción, este debe ser, necesariamente, de dimensión 1 (pues no se considera el caso trivial).

Un resultado que será de mucha utilidad en lo que sigue y que caracteriza la imprimitividad del álgebra $\mathfrak{g}$ por medio de la acción del grupo de isotropía $\mathcal{G}_p$, es el siguiente:

Proposición 3.13 *Sea p un punto genérico del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

(1) $\mathfrak{g}$ es imprimitiva en una vecindad de p.

(2) La acción de $\mathcal{G}_p$ en $T_p\mathbb{R}^2$ es reducible.

Demostración. Veamos que (1) $\Rightarrow$ (2): Sea U una vecindad de p y supongamos que $\mathfrak{g}$ es imprimitiva en U. Luego, existe una distribución $\mathcal{D}$, de dimensión 1, que es invariante bajo la acción del grupo $\mathcal{G}$. Esto significa, ver (3.16)-(3.19), que

$$\sigma(g) \cdot L = \sigma(g) \cdot \mathcal{D}(p) = \mathcal{D}(g(p)), \qquad \forall\, g \in \mathcal{G}.$$

y

$$\mathcal{D}(g(p)) = \mathcal{D}(p) = L,$$

para todo $g \in \mathcal{G}_p$, por lo que $\mathcal{D}(p)$ es un subespacio propio de $T_p\mathbb{R}^2$, invariante bajo la acción de $\mathcal{G}_p$. Por lo tanto, de la Definición 3.12, se sigue que la acción de $\mathcal{G}_p$ en $T_p\mathbb{R}^2$ es reducible.

Probaremos ahora que (2) $\Rightarrow$ (1): Supongamos ahora que $p \in \mathbb{R}^2$ es un punto genérico y que existe un subespacio propio $L \subset T_p\mathbb{R}^2$, tal que L es invariante bajo la acción de $\mathcal{G}_p$: $\mathcal{G}_p \cdot L = L$. Como $\dim(L) = 1$, $L = \langle v \rangle$, con $v \in T_p\mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ y la invarianza significa que

$$\sigma_g \cdot v = \lambda_{(g,v)} v \in L, \qquad \forall g \in \mathcal{G}_p,\ v \in L.$$

Se tienen así dos casos:
Caso I. $\mathcal{G}$ es intransitivo en una vecindad de $U \subset \mathbb{R}^2$ de p. En este caso, las órbitas de $\mathcal{G}$ en U no pueden ser todas de dimensión 2 (al menos existe una órbita invariante 1-dimensional) y la acción no puede ser primitiva. Esto termina la prueba.
Caso II. La acción de $\mathcal{G}$ es transitiva en una vecindad $U \subset \mathbb{R}^2$ de p. Si $q \in U$, existe al menos una transformación $g_q \in \mathcal{G}$, tal que

$$g_q(p) = q,$$

esto es, $g \cdot p = q$. Consideremos ahora la distribución $\mathcal{D}$ de dimensión uno definida por

$$\mathcal{D}(q) = Dg_q(p) \cdot L.$$

La distribución $\mathcal{D}$ está bien definida y no depende de la transformación g_q. En efecto, si $h \in \mathcal{G}$ es tal que $h(p) = q$, entonces

$$h = g_q g_p,$$

donde $g_p \in \mathcal{G}_p$. Así,

$$Dh(p) \cdot L = Dg_q(p) Dg_p(p) \cdot L = Dg_q(p)(\sigma(g_p) \cdot L) = Dg_q(p) \cdot L.$$

Finalmente, la distribución $\mathcal{D}$ acabada de definir es invariante bajo la acción de $\mathcal{G}_p$ ya que

$$Dg(q) \cdot \mathcal{D}(q) = Dg(q) Dg_q(p) \cdot L = D(g \circ g_q)(p) \cdot L = \mathcal{D}((g \circ g_q)(p)) = \mathcal{D}(g(q)),$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. ■

Notemos que los siguientes enunciados son equivalentes a (1) y (2) de la Proposición 3.13:

(3) La acción de $\mathfrak{g}_p$ en $T_p\mathbb{R}^2$ es reducible.

(4) La acción de $\mathcal{G}_p$ en $\mathbb{P}(T_p\mathbb{R}^2)$ tiene al menos un punto fijo.

(5) $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$ se anula en al menos un punto de $\mathbb{P}(T_p\mathbb{R}^2)$.

Lo anterior es claro ya que (3) y (5) son las versiones infinitesimales de (2) y (4), respectivamente. Por otro lado, la equivalencia de (2) y (4) se sigue directamente de las Definición 3.12 y de la forma en que se construye $\mathbb{P}(T_p\mathbb{R}^2)$.

Corolario 3.14 *Si existe un punto genérico $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\widetilde{\sigma}(\mathcal{G}_p)$ es la totalidad del grupo proyectivo de $\mathbb{P}(T_p\mathbb{R}^2)$, entonces $\mathfrak{g}$ es primitiva en una vecindad de p.*

Demostración. Como el grupo proyectivo de $\mathbb{P}(T_p\mathbb{R}^2)$ no tiene puntos fijos, entonces por la equivalencia de (4) y (1) en la proposición (3.13) se tiene que $\mathfrak{g}$ es primitiva. ■

Lie probó que, salvo cambios analíticos de coordenadas, solo existen tres álgebras de Lie localmente primitivas de campos vectoriales en $\mathbb{C}^2$, las cuales son las siguientes:

$\mathrm{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ x\frac{\partial}{\partial x},\ y\frac{\partial}{\partial x},\ x\frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial y},\ x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}\right\}$
$\mathrm{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ x\frac{\partial}{\partial x},\ y\frac{\partial}{\partial x},\ x\frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial y},\right\}$
$\mathrm{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y},\ x\frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial x}\right\}.$

Tabla 3.1: Algebras de Lie de primitivas en el plano

Los siguientes dos resultados son de gran importancia para la clasificación de álgebras de Lie primitivas.

Proposición 3.15 *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ es localmente equivalente a una de las álgebras de la Tabla 3.1 si y solo si existe un punto genérico $p \in \mathbb{R}^2$ tal que*

$$\dim \widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p) = 3. \tag{3.43}$$

Demostración. Primero veremos que para cada una de las álgebras de la Tabla 3.1 se tiene que $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$ es de dimensión 3 para el punto genérico $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, es fácil ver que el álgebra de isotropía en el punto $p = (0,0)$ de la primer álgebra en la Tabla (3.1) es

$$\mathrm{Span}\left\{x\frac{\partial}{\partial x},\ y\frac{\partial}{\partial x},\ x\frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial y},\ x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

mediante la relación

$$\widetilde{\rho}\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y'-\frac{\partial\xi}{\partial y}y'^2\right)$$

podemos calcular $\widetilde{\rho}(X)$ para cada $X \in \mathfrak{g}_p$, es claro que en el punto $p=(0,0)$ tenemos tres campos vectoriales linealmente independientes, por tanto $\dim\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)=3$. Análogamente para la segunda y tercera álgebra en la tabla(3.1) llegamos a que $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$ es de dimensión tres. Recíprocamente, si $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$ es de dimensión tres entonces $\mathfrak{g}$ es primitiva en una vecindad de p por el corolario (3.14). Más aún se puede probar que cuando (3.43) se satisface, los cálculos de Lie en el caso primitivo complejo funcionan sin modificación para el caso primitivo real. ∎

Proposición 3.16 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie localmente primitiva de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ que no es equivalente bajo un cambio analítico real de coordenadas a alguna de las álgebras de la Tabla 3.1, entonces*

$$\dim\big(\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)\big)=1, \tag{3.44}$$

para todo punto genérico p.

Demostración. Por la proposición anterior lo único que resta probar es que $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$ no puede ser cero ni de dimensión 2 en un punto genérico p. Probaremos esto caso por caso. Es claro que $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$ no puede ser cero en un punto genríco p, ya que de serlo se cumpliría el enunciado (5) de la proposición (3.13) y esto sería equivalente a que $\mathfrak{g}$ es imprimitiva en una vecindad de p.

Supongamos ahora que la dimensión de $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$ es dos en un punto genérico p, y sea

$$U=(ay'^2+by'+c)\frac{\partial}{\partial y'},\quad V=(\alpha y'^2+\beta y'+\gamma)\frac{\partial}{\partial y'}$$

una base para $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$. Probaremos que estos dos campos tienen un cero común, y de nuevo por la equivalencia de los enunciados (1) y (5) en la proposición (3.13) esto implicaría que $\mathfrak{g}$ es imprimitiva en una vecindad de p.

Sin pérdida de generalidad podemos reemplazar el campo vectorial U por la combinación lineal $U-\frac{c}{\gamma}V$, por tanto podemos suponer de antemano que $c=0$.

Haremos la prueba en dos casos, cuando $a=0$ y cuando $a\neq 0$.

(i) a=0.

Podemos hacer $b=1$ en U y además podemos reemplazar V por la combinación lineal $V-\beta U$ de tal modo que en el nuevo campo $\beta=0$, con estas consideraciones al calcular el corchete de U y V obtenemos

$$[U,V]=(\alpha y'^2-\gamma)\frac{\partial}{\partial y'},$$

el cual es una combinación lineal de U y V si y solo si $\alpha\gamma = 0$, es decir, si V toma alguna de las dos formas

$$V = y'^2 \frac{\partial}{\partial y'} \quad o \quad V = \frac{\partial}{\partial y'}.$$

En el primer caso tanto U como V se anulan en $y' = 0$. En el segundo caso mediante el cambio de coordenadas en $\mathbb{P}(T_p\mathbb{R}^2)$

$$x' = \frac{1}{y'},$$

los campos toman la forma

$$U = -x' \frac{\partial}{\partial x'}, \quad V = -x'^2 \frac{\partial}{\partial y'},$$

los cuales se anulan en $x' = 0$.

(ii) $a \neq 0$

Podemos tomar $a = 1$ y suponer de antemano que $\alpha = 0$ ya que podemos reemplazar el campo V por el campo $V - \alpha U$ en el cual $\alpha = 0$. Si $\gamma = 0$ entonces los campos U y V se anulan en $y' = 0$, si $\gamma \neq 0$, podemos suponer que $\gamma = 1$ y al calcular el corchete de U y V obtenemos

$$[U, V] = -(\beta y'^2 + 2y' + b) \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Este campo es una combinación lineal de U y V si y solo si

$$b\beta = 1,$$

es decir, si y solo si los campos toman la forma

$$U = (y'^2 + by') \frac{\partial}{\partial y'}, \quad V = (y' + b) \frac{\partial}{\partial y'},$$

los cuales se anulan en $y' = -b$.

■

De aquí en adelante usando la proposición anterior determinaremos la forma, salvo términos de orden dos o superior, de todas las álgebras de Lie localmente primitivas de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ que no son equivalentes a alguna de las álgebras de Lie en la Tabla (3.1).

Ahora calculemos $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ para todas las álgebras de Lie localmente primitivas no equivalentes a alguna de las álgebras de la Tabla (3.1) bajo un cambio real analítico de coordenadas locales. Para hacer esto notemos que

$$\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p^2) = 0.$$

La función $\widetilde{\rho}$ pasa a el cociente, es decir, podemos definir una función (también llamada $\widetilde{\rho}$)

$$\widetilde{\rho} : \mathscr{L}_p(\mathfrak{g}) \to \widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$$

por

$$\widetilde{\rho}(X + \mathfrak{g}_p^2) = \widetilde{\rho}(X).$$

Del álgebra lineal tenemos

$$\dim \mathscr{L}_p(\mathfrak{g}) = \dim \ker\widetilde{\rho} + \dim \widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p) = \dim \ker\widetilde{\rho} + 1,$$

donde la última igualdad se sigue de la proposición (3.16). Finalmente, supongamos que

$$X + \mathfrak{g}_p^2 \in \ker\widetilde{\rho}.$$

Esto implica que

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}(p) = \frac{\partial \eta}{\partial x}(p) = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(p) = \frac{\partial \eta}{\partial y}(p)$$

y por tanto X debe ser de la forma

$$X = \lambda \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right) + \cdots ,$$

donde $\lambda = \frac{\partial \xi}{\partial x}(p)$ y los puntos denotan términos de orden 2 o superior en p. Así, vemos que el $\ker\widetilde{\rho}$ es cero o de dimensión uno. Lo anterior se resume en la siguiente:

Proposición 3.17 *Si $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie localmente primitiva de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ que no es equivalente a un álgebra de la tabla 3.1, entonces su parte lineal $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ en un punto genérico p es, o bien, de dimensión 1, o bien de dimensión 2. Más aún, $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ es de dimensión 2 si y solo si $\mathfrak{g}$ contiene un campo vectorial que concuerda con $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, salvo por términos de orden 2 o superiores, en p.*

A continuación encontraremos formas normales para $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$. De acuerdo a la proposición anterior, solo hay dos casos a considerar:

(i) $\dim \mathscr{L}_p(\mathfrak{g}) = 1$.

En este caso, sea X el generador de $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$, y consideremos la parte lineal de X,

$$X_L = (ax + by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.45}$$

Entonces

$$\widetilde{\rho}(X) = [c + (d-a)y' - by'^2]\frac{\partial}{\partial y'},$$

y ya que $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$ es de dimensión uno, debe ser generada por este campo. Pero por la equivalencia de (1) y (5) en la proposición (3.13), este campo vectorial no tiene ceros en $\mathbb{P}(T_p\mathbb{R}^2)$, lo cual solo es posible si

$$(d-a)^2 + 4bc < 0.$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d, \end{pmatrix}$ es la matriz de los coeficientes del campo vectorial X_L, entonces la última igualdad es equivalente a

$$(\mathrm{tr} A)^2 < 4 \det A.$$

Entonces la forma real canónica de A es

$$M^{-1}AM = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Haciendo el cambio lineal de coordenadas

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = M \cdot (x, y) \tag{3.46}$$

entonces obtenemos

$$X = \alpha \left(\tilde{x}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{y}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) + \left(\tilde{y}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - \tilde{x}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) + \cdots , \tag{3.47}$$

donde los puntos representan términos de orden dos o superior y además hemos quitado el factor irrelevante λ. Ya que el orden de un campo vectorial en un punto p no depende de las coordenadas elegidas alrededor de p, las nuevas coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y})$ son tan buenas como las viejas. Por tanto hemos demostrado que cuando $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ es de dimensión uno existe un sistema de coordenadas alrededor de p en el cual $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ toma la forma

$$X = \alpha \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \right) + \cdots .$$

(ii) $\dim \mathscr{L}_p(\mathfrak{g}) = 2$.

Antes que nada de la proposición anterior sabemos que uno de los deneradores para $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ es de la forma

$$Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \cdots ,$$

donde los puntos representan términos de orden dos o superior en $p = (0, 0)$. Sea X el segundo generador, con $\varphi(X)$ dado por (3.45). Como

$$\widetilde{\rho}(Y) = 0,$$

vemos que $\widetilde{\rho}(\mathfrak{g}_p)$ está nuevamente generado por $\widetilde{\rho}(X)$. Por tanto, al igual como en el caso anterior, existe un cambio lineal de coordenadas (3.46) bajo el cual X toma la forma (3.47). Por otra parte, cualquier cambio lineal de coordenadas no altera al campo Y salvo por el uso de las tildes. Si se elige Y y $X - \alpha Y$ como la nueva base para $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ y al olvidar las tildes, entonces tenemos que $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ está generada por los campos vectoriales

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \cdots , \quad y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \cdots .$$

Teorema 3.18 *Si $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie localmente primitiva de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$, que no es localmente equivalente a alguna de las álgebras de la Tabla 3.1, entonces existe un sistema local de coordenadas para $\mathfrak{g}$, alrededor de un punto genérico p, tal que $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}^2$ está generada por*

$$\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \quad \alpha\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \cdots \tag{3.48}$$

o por

$$\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \quad y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \cdots \tag{3.49}$$

En este teorema, los puntos que aparecen en cada campo vectorial represetan términos de orden mayor o igual a 2 en $(x, y) = (0, 0)$.

Demostración. Antes que nada, como $\mathfrak{g}$ es transitiva, $\mathfrak{g}$ contiene dos campos vectoriales linealmente independientes en p. Tomando combinaciones lineales adecuadas para estos dos campos vectoriales, vemos que $\mathfrak{g}$ contiene los campos vectoriales

$$\frac{\partial}{\partial x} + \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial y} + \cdots,$$

donde los puntos significan términos de orden uno o superior en p. Estos campos son una base para los campos de orden cero en p, esto es, sus clases de equivalencia módulo $\mathfrak{g}_p$ son una base para $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p$. Finalmente, como

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p^2 = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{g}_p/\mathfrak{g}_p^2 \equiv \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p \oplus \mathcal{L}_p(\mathfrak{g}),$$

y sustituyendo los dos casos analizados para $\mathscr{L}_p(\mathfrak{g})$ obtenemos las dos álgebras de Lie del teorema. ■

3.3.3 Álgebras localmente primitivas no-semisimples

En esta subsección determinaremos todas las clases de equivalencia de álgebras de Lie localmente primitivas no-semisimples de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$. El siguiente teorema juega un papel importante en esta clasificación.

Teorema 3.19 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie localmente primitiva de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$, la cual es no-semisimple, y si p es un punto genérico de $\mathfrak{g}$, entonces existe un ideal abeliano $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, de dimensión 2, tal que:*

(i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{a}$*;*

(ii) $\mathfrak{g}_p$ *actúa fielmente e irreducible en* $\mathfrak{a}$*, es decir,*

(a) Si $X \in \mathfrak{g}_p$ y $[X, \mathfrak{a}] = 0$, entonces $X = 0$,

(b) Si $Y \in \mathfrak{a}$ y $[X, Y] = \lambda(X)Y$ para todo $X \in \mathfrak{g}_p$, entonces $Y = 0$.

Teorema 3.20 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie localmente primitiva de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ no-semisimple y no equivalente a alguna de la tabla 3.1. Entonces existen coordenadas locales (x, y) en las cuales*

(i) $\mathfrak{g} = \operatorname{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}) + y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right\}$ *para algún $\alpha \in \mathbb{R}$,*

o bien,

(ii) $\mathfrak{g} = \operatorname{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right\}.$

Demostración. Sea p un punto genérico para $\mathfrak{g}$, y elijamos coordenadas tal que $p = (0, 0)$. Por el teorema anterior,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{a},$$

donde $\mathfrak{a}$ es un ideal abeliano de $\mathfrak{g}$. Por la transitividad de $\mathfrak{g}$ alrededor de p sabemos que

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p \simeq \mathbb{R}^2,$$

por tanto se tiene

$$\dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p = 2.$$

Más aún, de lo anterior se sigue que

$$\dim \mathfrak{a}(p) = \dim \mathfrak{g}(p) = 2.$$

Además del hecho de que $\mathfrak{a}$ es abeliano, podemos elegir coordenadas alrededor de p de tal modo que $p = (0, 0)$ y

$$\mathfrak{a} = \operatorname{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}.$$

De hecho, como $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, tenemos $[\mathfrak{g}_p^2, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, y además $[\mathfrak{g}_p^2, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g}_p$, de estas dos últimas contenciones se sigue

$$[\mathfrak{g}_p^2, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g}_p \cap \mathfrak{a} = \{0\},$$

por tanto por la parte (ii)(1) del teorema anterior tenemos

$$\mathfrak{g}_p^2 = \{0\}.$$

De este hecho y del teorema (3.18), podemos concluir que $\mathfrak{g}$ está generada en una vecindad de p por

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + U$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, o bien por

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + D, \quad y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + R,$$

donde U, D y R son campos vectoriales de orden dos o mayor en $(0,0)$. Imponiendo las condiciones de que $\operatorname{Span}\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, llegamos a que

$$U = D = R = 0.$$

Finalmente, el álgebra (3.20)(ii) es localmente primitiva. Para el álgebra (3.20)(i) es suficiente notar que la acción de $\mathfrak{g}_p$ en $T_p\mathbb{R}^2$ está dada por la multiplicación por la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Como la matriz no tiene valores propios reales, la proposición (3.13) implica que (3.20)(i) es localmente primitiva.

Ya que el álgebra (3.20)(i) con parámetro $-\alpha$ se relaciona con el álgebra con parámetro α por el cambio de coordenadas

$$(x,y) \mapsto (-x,y),$$

podemos restringir α en (3.20)(i) para asumir únicamente valores no negativos. Si hacemos esto, entonces no hay dos álgebras del tipo (3.20)(i) que sea equivalentes bajo un cambio local de variables. En efecto, supongamos que (3.20)(i) se transforma en el álgebra de Lie

$$\operatorname{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}, \quad \beta\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right) + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}\right\}$$

por un cambio local de variables

$$(u,v) = \phi(x,y). \tag{3.50}$$

Sean

$$\phi(0,0) = (a,b)$$

las $(u,v)-$coordenadas del punto p, el álgebra de isotropía está generada por el campo vectorial

$$\beta\left(\xi\frac{\partial}{\partial u} + \eta\frac{\partial}{\partial v}\right) + \eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}, \tag{3.51}$$

donde $\xi = u-a, \eta = v-b$. Como (3.51) y $\alpha(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}) + y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ generan la subálgebra de isotropía $\mathfrak{g}_p$, tenemos

$$\beta\left(\xi\frac{\partial}{\partial u} + \eta\frac{\partial}{\partial v}\right) + \eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v} = \lambda\left[\alpha\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right] \tag{3.52}$$

para algún $\lambda \neq 0$. Ahora la acción de (3.51) en $T_p\mathbb{R}^2$ está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix};$$

de (3.3.3), (3.50) y (3.52) obtenemos

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix} = \lambda M \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} M^{-1}$$

con

$$M = D\phi(0,0).$$

En particular, si igualamos la traza y el determinante de ambos lados de la igualdad anterior obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\beta = \lambda\alpha,$$
$$1+\beta^2 = \lambda^2(1+\alpha^2).$$

De esto deducimos que

$$\alpha^2 = \beta^2,$$

lo cual establece nuestra afirmación. ■

3.3.4 Álgebras localmente primitivas semisimples

Para finalizar nuestra clasificación de álgebras de Lie localmente primitivas en $\mathbb{R}^2$, salvo cambios de coordenadas locales, solamente nos falta clasificar las álgebras de Lie semisimples, para hacer esto abordaremos algunas definiciones y resultados preliminares. En esta subsección $\mathfrak{g}$ será un álgebra de Lie localmente primitiva semisimple de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$.

Sea

$$\kappa(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}Y)$$

la forma de Killing en $\mathfrak{g}$, donde $\mathrm{ad}X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ está definida por

$$\mathrm{ad}X = [X, \cdot].$$

Un resultado muy conocido es que $\mathfrak{g}$ es semisimple si y solo si κ es no-degenerada, esto es, $\kappa(X,Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$ si y solo si $X = 0$.

Lema 3.21 *Para todo punto genérico p tenemos*

$$\mathfrak{g}_p^3 = \{0\}.$$

Demostración. Si $A \in \mathfrak{g}$ y $B \in \mathfrak{g}_p^3$, tenemos

$$\mathrm{ad}B \cdot \mathfrak{g}_p^j \subset \mathfrak{g}_p^{j+2},$$

y también

$$(\mathrm{ad}A \cdot \mathrm{ad}B) \cdot \mathfrak{g}_p^j \subset \mathfrak{g}_p^{j+1}.$$

Ahora, como

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\geq 0} \mathfrak{g}_p^j / \mathfrak{g}_p^{j+1},$$

podemos construir una base de $\mathfrak{g}$ añadiendo las bases de cada uno de los subespacios $\mathfrak{g}_p^j/\mathfrak{g}_p^{j+1}$. En esta base se tiene

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}A \cdot \mathrm{ad}B) = 0,$$

equivalentemente

$$\kappa(\mathfrak{g}, B) = 0.$$

y como κ es no-degenerada entonces $B = 0$. ■

Proposición 3.22 *$\mathfrak{g}_p^2$ es abeliana en todo punto genérico p.*

Demostración. Notemos que

$$[\mathfrak{g}_p^2, \mathfrak{g}_p^2] \subset \mathfrak{g}_p^3 = \{0\},$$

donde la última igualdad es cero por el lema anterior. ■

Proposición 3.23 *Si p es un punto genérico para $\mathfrak{g}$, entonces*

$$\dim \mathfrak{g}_p^2 \leq 2.$$

Demostración. El complemento ortogonal $\mathfrak{g}_p^{2,\perp}$ de $\mathfrak{g}_p^2$ con respecto a K está dado por

$$\mathfrak{g}_p^{2,\perp} = \{X \in \mathfrak{g} | \kappa(X, \mathfrak{g}_p^2) = 0\}.$$

Por un argumento análogo al lema (3.21), se tiene

$$\mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}_p^{2,\perp}.$$

Como κ es no-degenerada, tenemos

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_p^2 + \dim \mathfrak{g}_p^{2,\perp},$$

manipulando esta igualdad

$$\begin{aligned}
\dim \mathfrak{g}_p^2 &= \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_p^{2,\perp} \\
&\leq \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_p \\
&= \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p = \dim T_p\mathbb{R}^2 = 2.
\end{aligned}$$

■

Del lema (3.21) se sigue que

$$\begin{aligned}
\dim \mathfrak{g} &= \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p + \dim \mathfrak{g}_p/\mathfrak{g}_p^2 + \dim \mathfrak{g}_p^2 \\
&= 2 + \dim \mathfrak{g}_p/\mathfrak{g}_p^2 + \dim \mathfrak{g}_p^2.
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que

$$1 \leq \dim \mathfrak{g}_p/\mathfrak{g}_p^2 \leq 2,$$

y la proposición anterior concluimos que

$$3 \leq \dim \mathfrak{g} \leq 6.$$

Sobre complexificación, obtenemos

$$3 \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \leq 6.$$

Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces también lo será su complexificación $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, de los resultados anteriores y de la clasificación de álgebras de Lie semisimples complejas [9], se sigue que

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = A_1 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

o

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = A_1 \oplus A_1 = \mathfrak{so}(4, \mathbb{C}).$$

Ya que A_1 tiene dos formas reales, la discución anterior se resume en el siguiente:

Teorema 3.24 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie localmente primitiva semisimple de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ no equivalente a alguna de la Tabla 3.1, entonces tenemos las siguientes alternativas:*

(i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$*;*

(ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$*;*

(iii) $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ *.*

En los primeros dos casos, $\mathfrak{g}^2 = \{0\}$ en todo punto genérico p, mientras que en el tercer caso $\mathfrak{g}^2$ es abeliana y $\dim \mathfrak{g}^2 = 2$.

En las siguientes subsecciones, determinaremos todas las clases de equivalencia de las álgebras de Lie localmente primitivas semisimples de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ mediante un análisis caso por caso de las tres posibilidades del teorema anterior.

3.3.5 Álgebras de Lie localmente primitivas isomorfas a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

En esta sección determinaremos todas las clases de equivalencia de álgebras de Lie localmente primitivas semisimples de campos vectoriales en el plano real isomorfas a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Sea $\{X_1, X_2, X_3\}$ una base para $\mathfrak{g}$ la cual satisface la relaciones de conmutación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$$[X_1, X_2] = X_2, \quad [X_1, X_3] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = -2X_1. \tag{3.53}$$

Elegimos coordenadas locales (x, y) tal que

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{3.54}$$

en una vecindad de $(0, 0)$. Si imponemos la condición $[X_1, X_3] = -X_3$, se sigue que X_1 debe ser de la forma

$$X_1 = (x + \xi(y))\frac{\partial}{\partial x} + \eta(y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.55}$$

La última expresión se puede simplificar sin alterar (3.54) por medio de un cambio de variable de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + \varphi(y)\\ \tilde{y} &= \psi(y),\end{aligned}$$

donde $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}\eta\psi' &= \psi\\ \eta\varphi' &= \varphi - \xi,\end{aligned}$$

entonces los campos X_3 y X_1 se transforman en

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}}, \quad X_1 = \tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} + \tilde{y}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}.$$

Por lo tanto podemos sustituir $\xi = 0$ y $\eta = y$ y reetiquetar las variables x e y. Imponemos ahora la condición $[X_2, X_3] = -2X_1$, y obtenemos

$$X_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + \gamma(y)\frac{\partial}{\partial x} + \beta(y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Finalmente, usando la relación $[X_1, X_2] = X_2$ llegamos al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en las funciones desconocidas $\beta(y)$ y $\gamma(y)$:

$$y\beta' - 2\beta = y\gamma' - 2\gamma = 0,$$

por lo cual

$$\beta = 2c_1y^2, \quad \gamma = c_2y^2.$$

Así tenemos que

$$X_2 = (x_2 + c_2y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2y(x + c_1y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.56}$$

Un cambio final de variables

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + c_1y\\ \tilde{y} &= |{c_1}^2 + c_2|^{1/2}y,\end{aligned}$$

transforma el campo (3.56) en

$$X_2 = (\tilde{x}^2 \pm \tilde{y}^2)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} + 2\tilde{x}\tilde{y}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}$$

sin afectar a X_1 y X_3. Esto prueba que existen a lo más dos clases de equivalencia de álgebras de Lie localmente primitivas de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ isomorfas a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, generadas por los campos vectoriales

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$$

o

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.57}$$

De estas dos álgebras de Lie de campos vectoriales, solamente la primera es localmente primitiva. Mediante cálculo directo podemos ver que el álgebra de isotropía de estas dos álgebras en un punto genérico $p = (a, b)$ $(b \neq 0)$ está generada por el campo vectorial

$$\frac{1}{2b}(X_2 - 2aX_1 + X_3) = \pm\eta\frac{\partial}{\partial x} + \xi\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.58}$$

donde el símbolo $'+'$ corresponde a (3.57), y $\xi = x - a, \eta = y - b$. La acción de (3.58) en $T_p\mathbb{R}^2$ está dada por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. De lo anterior y de la proposición (3.13) se sigue que solo la primer álgebra es localmente primitiva. Así hemos probado lo siguiente:

Teorema 3.25 *Existe, salvo difeomorfismos locales, exactamente una clase de equivalencia de álgebras de Lie localmente primitivas de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Un representante de esta clase de equivalencia es el álgebra de Lie dada por*

$$\mathit{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}\right\}.$$

3.3.6 Álgebras de Lie localmente primitivas isomorfas a $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$

Es esta subsección probaremos que existe exactamente una clase de equivalencia de álgebras de Lie localmente primitivas de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ isomorfas a $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$. Además, encontraremos una representación de esta clase de equivalencia cuya expresión es particularmente simple en coordenadas locales apropiadas.

Elijamos una base $\{X_1, X_2, X_3\}$ de $\mathfrak{g}$ que satisfaga las relaciones de conmutación de $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$,

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

Ahora, elijamos coordenadas locales (θ, r) tal que

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{3.59}$$

en algún conjunto abierto. Es fácil ver que las relaciones de conmutación de X_1 con X_2 y X_3 implican que estos campos son de la forma

$$X_2 = \cos\theta A(r) + \sin\theta B(r), \tag{3.60}$$

$$X_3 = -\sin\theta A(r) + \cos\theta B(r), \tag{3.61}$$

con

$$A(r) = a_1(r)\frac{\partial}{\partial \theta} + a_2(r)\frac{\partial}{\partial r},$$

$$B(r) = b_1(r)\frac{\partial}{\partial \theta} + b_2(r)\frac{\partial}{\partial r}. \tag{3.62}$$

Podemos simplificar la forma de los campos vectoriales (3.60) sin alterar X_1 mediante un cambio de variable de la forma

$$\Theta = \theta + \varphi(r), \quad R = f(r). \tag{3.63}$$

Bajo este cambio de variable los campos vectoriales A y B se transforman en

$$A(r) = \big[(a_1 + \varphi' a_2)\cos\varphi - (b_1 + \varphi' b_2)\sin\varphi\big]\frac{\partial}{\partial\Theta} + (a_2\cos\varphi - b_2\sin\varphi)f'\frac{\partial}{\partial R},$$
$$B(r) = \big[(a_1 + \varphi' a_2)\sin\varphi - (b_1 + \varphi' b_2)\cos\varphi\big]\frac{\partial}{\partial\Theta} + (a_2\sin\varphi - b_2\cos\varphi)f'\frac{\partial}{\partial R},$$

Podemos siempre elegir la función $\varphi(r)$ en (3.63) de tal modo que el coeficiente de $\frac{\partial}{\partial R}$ en B se anule. Regresándonos a las coordenadas (θ, r), vemos que esto equivale al ajuste

$$b_2 = 0$$

en (3.62). Calculando ahora el corchete de Lie de X_2 con X_3 obtenemos

$$[X_2, X_3] = (a_2 b_1' - a_1^2 - b_1^2)\frac{\partial}{\partial\theta} - a_1 a_2\frac{\partial}{\partial r},$$

e igualando a X_1 finalmente llegamos a las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,\\ a_2 b_1' &= 1 + b_1^2. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Reescalando la coordenada radial r, podemos ajustar, sin pérdida de generalidad,

$$a_2(r) = \frac{1}{2}(1 + r^2).$$

Con esta elección de a_2, la solución completa de (3.64) es

$$b_1(r) = \frac{1 + 2cr - r^2}{c(1 - r^2) - 2r}, \quad c \in \mathbb{R},$$

o

$$b_1(r) = \frac{2r}{1 - r^2},$$

la singular solución correspondiente a $c = \infty$. Finalmente, elegimos f en la ecuación (3.63) como

$$f(r) = \frac{r - \gamma}{1 + \gamma r} \quad o \quad f(r) = \frac{r - 1}{1 + r},$$

donde , en el primer caso, γ es cualquiera de las dos raíces reales de la ecuación

$$c\gamma^2 - 2\gamma - c = 0.$$

Es fácil ver que X_2 y X_3 se transforman en

$$X_2 = \frac{1}{2}(1 + R^2)\cos\theta\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{2}(R - R^{-1})\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{3.65}$$
$$X_3 = -\frac{1}{2}(1 + R^2)\sin\theta\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{2}(R - R^{-1})\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{3.66}$$

Por tanto existe exactamente una clase de equivalencia de álgebras de Lie localmente primitivas de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ isomorfa a $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, cuya base está dada por (3.59), (3.65) y (3.66) en coordenadas locales apropiadas (θ, R). Una expresión más simple para estos tres campos se obtiene regresando a las coordenadas cartesianas

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta;$$

salvo factores constantes irrelevantes, los campos toman la forma

$$\begin{aligned} X_1 &= x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_2 &= (1 + x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}, \\ X_3 &= 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (1 + y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba el siguiente:

Teorema 3.26 *Todas las álgebras de Lie localmente primitivas de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ isomorfas a $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ son equivalentes bajo un cambio local de coordenadas al álgebra de Lie*

$$span\left\{x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad (1 + x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (1 + y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

3.3.7 Álgebras de Lie localmente primitivas con complexificación isomorfa a $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$

En esta subsección únicamente presentaremos todas las álgebras de Lie de dimensión seis cuya complexificación es isomorfa al álgebra de Lie compleja $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$. Estas álgebras de Lie se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.27 *Toda álgebra de Lie localmente primitiva de campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ cuya complexificación es isomorfa a $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$ es equivalente, bajo un cambio local de coordenadas, al álgebra de Lie generada por los campos vectoriales*

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}, \quad y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}, \quad (x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x}+2xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2xy\frac{\partial}{\partial x}+(y^2-x^2)\frac{\partial}{\partial y}.$$

En particular, todas estas álgebras son isomorfas a $\mathfrak{so}(3,1)$.

3.4 Álgebras de Lie de campos vectoriales imprimitivas

Sea M una variedad de dimensión 2 y sea $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(M)$ un álgebra de Lie finito dimensional de campos vectoriales en M. En la sección anterior ya hemos clasificado todas las álgebras de Lie de dimensión finita de campos vectoriales en M las cuales son primitivas, en esta sección daremos un esquema general de la clasificación de álgebras de Lie imprimitivas de campos vectoriales en M.

El planteamiento general es el siguiente. Sean M y N variedades diferenciables tal que $\dim M = 2$ y $\dim N = 1$. Sea $\pi : M \to N$ una submersión. Consideremos un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ finito dimensional de campos vectoriales en M y $\mathfrak{a}$ un álgebra de Lie finito dimensional de campos vectoriales en N. Supongamos que:

$$\pi_*(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}.$$

Sea

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \pi_*(X) = 0\}.$$

Entonces, $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, y

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

Geometricamente, $\mathfrak{h}$ consiste de los campos vectoriales en $\mathfrak{g}$ los cuales son tangentes a las fibras de π. Decimos que $\mathfrak{g}$ es una *extensión* de $\mathfrak{a}$ por $\mathfrak{h}$.

De la clasificación de campos vectoriales en variedades de dimensión 1 sabemos que:

$$\dim \mathfrak{a} = 0, 1, 2, 3.$$

Denotemos por x una coordenada para N. No haremos distinción de notación entre la coordenada x y $\pi^*(x)$. Así, si y es una función en M tal que

$$(x, y) \equiv (\pi^*(x), y)$$

es un sistema de coordenadas para M, y se puede ver como un sistema de coordenadas para las fibras de π. A x se le llama la *coordenada de la base.*

El esquema para clasificar las álgebras de Lie imprimitivas finito dimensionales de campos vectoriales en M es analizar todas las posibilidades para $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tomando en cuenta la estructura algebraica del álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

$\mathfrak{h}$ abeliana y $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 0$

Este es el caso más sencillo. Otra forma de decir que $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 0$ es que:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h},$$

esto es, cada campo vectorial en $\mathfrak{g}$ es tangente a las fibras de π.

Definición 3.28 *Un sistema de coordenadas (x, y) para M se dice que es* adaptado *a $\mathfrak{h}$ si cada campo vectorial $X \in \mathfrak{h}$ es de la forma*

$$X = f(x)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.67}$$

Teorema 3.29 *Si $\mathfrak{h} \neq 0$, x es una coordenada para N y y es un sistema de coordenadas para las fibras de π, entonces localmente existe un sistema de coordenadas adaptado a $\mathfrak{h}$.*

Demostración. Sea $B \in \mathfrak{h}$ un campo vectorial distinto de cero. Podemos elegir un sistema de coordenadas (x, y) en el cual B toma la forma

$$B = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Entonces B es tangente a las fibras de π y ya que estas fibras son de dimensión 1, cada campo $A \in \mathfrak{h}$ es de la forma

$$A = f(x, y)B.$$

Pero, la condición

$$[A, B] = 0$$

implica que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

por tanto A es de la forma (3.67) ∎

Así, existe una función lineal

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{h} &\to C^\infty(N) \\ X &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

tal que

$$X = f(x)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.68}$$

para todo $X \in \mathfrak{h}$. Examinemos las condiciones para que dos álgebras de Lie $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ de la forma (3.68) sean equivalentes. Supongamos que $\mathfrak{h}'$ está dada en términos de las coordenadas adaptadas

$$(x', y').$$

Entonces, si x es una función solamente de x' y y es una función de (x, y'). Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'} \\ &= 0 + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}. \end{aligned}$$

Para que este cambio de variables transforme $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{h}'$, y' debe tener la forma:

$$y' = f(x)y + g(x).$$

Definición 3.30 *Decimos que dos funciones lineales $\alpha : \mathfrak{h} \to C^\infty(N)$ y $\alpha' : \mathfrak{h}' \to C^\infty(N)$ son* equivalentes *si existe una función distinta de cero $f \in C^\infty(N)$ y un isomorfismo lineal*

$$\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$$

tal que

$$\alpha(X) = f\alpha'(\phi(X))$$

para todo $X \in \mathfrak{h}$.

El siguiente resultado es de gran importancia.

Teorema 3.31 *Las clases de equivalencia de álgebras de Lie abelianas de dimensión n de campos vectoriales en M las cuales son tangentes a las fibras de π están en correspondencia uno a uno con las clases de equivalencia de funciones lineales*

$$\alpha : \mathbb{R}^n \to C^\infty(N).$$

Propiedades algebraicas generales de álgebras de Lie de campos vectoriales imprimitivas

Sean M y N variedades de dimensión arbitraria, y

$$\pi : M \to N$$

una submersión. $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie finito dimensional de campos vectoriales en M y $\mathfrak{a}$ un álgebra de Lie finito dimensional de campos vectoriales en N, tal que:

$$\pi_*(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}.$$

$\mathfrak{h}$ es el kernel de π_*, y consiste de los campos vectoriales en $\mathfrak{g}$ los cuales son tangentes a las fibras de π.

Definición 3.32 *Sea K un álgebra de Lie. Sea*

$$K_1 = [K, K], \quad K_2 = [K_1, K_1], \quad \dots,$$

se dice que K es $n-$soluble si

$$K_n = 0.$$

Teorema 3.33 *Supongamos que $\mathfrak{h}$ restringida a cada fibra de π es $n-$soluble. Entonces $\mathfrak{h}$ es $n-$soluble.*

Demostración. Sea x un punto de N, y sea

$$Y(x) = \pi^{-1}(x)$$

la fibra de π. $Y(x)$ es una subvariedad de M, por definición de $\mathfrak{h}$ cada campo vectorial en $\mathfrak{h}$ es tangente a $Y(x)$.

Sea $\mathfrak{h}(x)$ el conjunto de campos vectoriales en $Y(x)$, que se obtiene de restringir los campos vectoriales en $\mathfrak{h}$ a $Y(x)$. Entonces tenemos:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}](x) = [\mathfrak{h}(x), \mathfrak{h}(x)],$$

es decir,

$$\mathfrak{h}_1(x) = (\mathfrak{h}(x))_1.$$

Si $\mathfrak{h}(x)$ es $n-$soluble para cada $x \in N$, vemos que los campos vectoriales en $\mathfrak{h}_n$ son cero cuando nos restringimos a cada fibra de π. Esto implica (ya que $\pi_*(\mathfrak{h}) = 0$) que

$$\mathfrak{h}_n = 0,$$

es decir, $\mathfrak{h}$ es $n-$soluble. ■

Corolario 3.34 *Si las fibras de π son de dimensión 1, y si $\mathfrak{h}$ restringida a las fibras de π no es simple, entonces $\mathfrak{h}$ es $2-$soluble.*

Teorema 3.35 *Si $\mathfrak{h}$ es $n-$soluble, y si $\mathfrak{a}$ es $m-$soluble, entonces $\mathfrak{g}$ es $(n+m)-$soluble.*

Demostración. Como $\mathfrak{a}_m = 0$, tenemos:

$$\pi_*(\mathfrak{g}_m) = 0,$$

esto es, $\mathfrak{g}_m \subset \mathfrak{h}$. Por tanto,

$$\mathfrak{g}_{m+n} = (\mathfrak{g}_m)_n \subset \mathfrak{h}_n = 0.$$

■

Teorema 3.36 *Supongamos que $\mathfrak{h}$ restringida a cada fibra de π es semisimple. Entonces $\mathfrak{h}$ es semisimple.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{h}$ no es semisimple, entonces contiene un ideal abeliano A distinto de cero. Pero, para cada $x \in N$, $A(x)$ es un ideal de $\mathfrak{h}(x)$, por tanto es cero ya que $\mathfrak{h}(x)$ es semisimple, entonces

$$A = 0,$$

lo cual es una contradicción. ■

$\mathfrak{h}$ abeliana y $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = 1$

Sea (x, y) un sistema de coordenadas adaptado a $\mathfrak{h}$, y sea B un elemento de $\mathfrak{g}$ el cual no está en $\mathfrak{h}$. Podemos suponer que x es la base coordenada elegida de tal modo que:

$$\pi_*(B) = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Por tanto, B es de la forma:

$$B = \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Cada $A \in \mathfrak{h}$ es de la forma:

$$A = a(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Por tanto,

$$[A, B] = \frac{da}{dx}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Como este corchete debe estar en $\mathfrak{h}$, esto implica que $\frac{\partial b}{\partial y}$ es una función solamente de x. Por tanto, B tiene la forma:

$$B = \frac{\partial}{\partial x} + (b(x)y + b_1(x))\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.69}$$

Si tomamos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= f(x)y + g(x) \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = f\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} \\ &= \left(\frac{df}{dx}y + \frac{dg}{dx}\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (3.69) obtenemos:

$$B = \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{df}{dx}y + \frac{dg}{dx} + f(by + b_1)\right)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Podemos elegir f y g del tal modo que la componente de $\frac{\partial}{\partial v}$ se anule. Lo anterior se resume en el siguiente:

Teorema 3.37 *Sea $\mathfrak{g}$ tal que $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = 1$, y $\mathfrak{h}$ es abeliana. Entonces existe un sistema de coordenadas (x, y) para M tal que:*

a) x es la coordenada en el espacio base N.

b) Cada $A \in \mathfrak{h}$ es de la forma

$$a(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

c) Como espacio vectorial, $\mathfrak{g}$ es la suma directa de $\mathfrak{h}$ y $\frac{\partial}{\partial x}$.

$\mathfrak{h}$ soluble, no abeliana, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$

Como $\mathfrak{h}$ es soluble y no abeliana entonces es $2-$soluble. Se puede mostrar que existe un sistema de coordenadas (x, y) para M, adaptado a la foliación definida por las fibras π, tal que, cada $A \in \mathfrak{h}$, se puede escribir de la forma

$$A = (a(x) + b(x)y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Así, $\mathfrak{h}$ como un álgebra de Lie de campos vectoriales en M la cual es tangente a las fibras de la foliación π, está determinada por un subespacio vectorial de dimensión n de

$$C^\infty(N) \oplus C^\infty(N),$$

donde

$$n = \dim \mathfrak{h}.$$

Sin embargo, no todo subespacio vectorial puede aparecer de esta forma. Para determinar que condiciones se deben satisfacer supongamos que

$$A' = (a' + b'y)\frac{\partial}{\partial y}$$

es otro elemento de $\mathfrak{h}$, con $(a', b') \in C^\infty(N) \oplus C^\infty(N)$. Entonces

$$[A, A'] = (a'b - ba')\frac{\partial}{\partial y}.$$

En particular, supongamos que

$$b' = 0.$$

Entonces,

$$[A, A'] = ba'\frac{\partial}{\partial y}.$$

Por tanto,

$$(\mathrm{ad}A)^n(A') = (b^n a')\frac{\partial}{\partial y}.$$

Ahora utilizamos el hecho de que $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita. El teorema de Cayley-Hamilton afirma que ad$A$ actuando en $\mathfrak{h}$ satisface una ecuación polinomial. Entonces, existe una relación de la siguiente forma:

$$b^n a' + \lambda_{n-1} b^{n-1} a' + \cdots + \lambda_0 a' = 0 \tag{3.70}$$

para alguna elección de constantes reales $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Podemos elegir A' de tal modo que a' no es identicamente cero, así podemos factorizar a' de (3.70) y obtenemos una ecuación polinomial para b, con coeficientes constantes. Esto solo es posible si:

$$b = \mathit{constante}.$$

Resumimos la discución anterior en el siguiente:

Teorema 3.38 *Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie de dimensión finita, soluble, no abeliana, de campos vectoriales en M, la cual es tangente a las fibras de π. Entonces, existe un sistema de coordenadas (x, y) para M adaptado a la foliación definida por las fibras de π, y funciones lineales*

$$a : \mathfrak{h} \to C^\infty(N), \quad b : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$$

tal que:

$$A = (a(A) + b(A)y)\frac{\partial}{\partial y}$$

para todo $A \in \mathfrak{h}$.

a y b debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. $b([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$
2. $a([A, B]) = a(A)b(B) - a(B)b(A)$ para $A, B \in \mathfrak{h}$

Podemos usar estas condiciones para encontrar una estructura algebraica de $\mathfrak{h}$ en una forma más útil, notemos que la relación 1 significa que b es un homomorfismo del álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ álgebra de Lie abeliana $\mathbb{R}$. Sea

$$K = \ker(b),$$

entonces K es un ideal de $\mathfrak{h}$. Podemos elegir un sistema de coordenadas adaptado (x, y) tal que:

$$y\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{h},$$

esto es,

$$b\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right) = 1, \quad a\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right) = 0,$$

entonces $\mathfrak{h}$ es una suma directa (como espacio vectorial) de K y el subespacio de dimensión 1 generado por $\frac{\partial}{\partial y}$. Por tanto, $\mathfrak{h}$ tiene una base de la forma:

$$b_1(x)\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, b_n(x)\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Capítulo 4

Clasificación de sistemas de Lie-Hamilton en el plano

En este capítulo utilizaremos la lista de álgebras de Lie de campos vectoriales finito-dimensionales en el plano para estudiar y clasificar los sistemas de Lie-Hamilton.

Un sistema de Lie-Hamilton es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x} = X_t(x), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

donde $X_t(x)$ es un campo vectorial dependiente del tiempo y que toma valores en un álgebra de Lie real finito-dimensional de campos vectoriales Hamiltonianos en el plano con respecto a alguna estructura de Poisson, [2].

4.1 Sistemas de Lie-Hamilton en el plano

En esta sección definiremos de manera formal y precisa los sistemas de Lie-Hamilton en el plano. Después, formularemos el problema de clasificación local de sistemas de Lie-Hamilton alrededor de puntos genéricos, que como veremos más adelante, simplifica el análisis del problema.

Definición 4.1 *Sea $(V, [\,,\,])$ un álgebra de Lie real y $W \subset V$ un subconjunto. Definimos por Lie $(W, V, [\,,\,])$ a la subálgebra de Lie de V más pequeña que contiene a W.*

Cuando en el contexto sea claro usaremos V en lugar de $(V, [\,,\,])$ y $Lie(W)$ en lugar de $Lie\,(W, V, [\,,\,])$

Definición 4.2 *Un campo vectorial en una variedad M dependiente de t es una función*

$$X : \mathbb{R} \times M \to TM$$

tal que $\tau \circ X = \pi$, donde $\pi : (t, x) \in \mathbb{R} \times M \mapsto x \in M$ y $\tau : TM \to M$.

Todo campo vectorial X_t dependiente de t, da origen a una familia $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de campos vectoriales en M definida por

$$X_t(x) \overset{\text{def}}{=} X(t, x)$$

Definición 4.3 *La mínima álgebra de Lie de un campo vectorial X_t dependiente del tiempo se define como la subálgebra de Lie real de $\mathfrak{X}(M)$ más pequeña que contiene a $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$,*

$$V^{X_t} = Lie\left(\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \mathfrak{X}(M), [\,,\,]\right)$$

Definición 4.4 *Un sistema de Lie es un campo vectorial X_t dependiente de t tal que V^{X_t} es finito-dimensional.*

Veamos un ejemplo de un sistema de Lie.

Ejemplo 4.5 *Consideremos el sistema no autónomo en $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned} \dot{x} =& a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)(x^2 - y^2), \\ \dot{y} =& a_1(t)y + a_2(t)2xy, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $a_0(t), a_1(t), a_2(t)$ son funciones reales suaves dependientes de t. El sistema (4.1) es un caso particular de la ecuación de Riccati en el plano complejo

$$\frac{dz}{dt} = a_0(t) + a_1(t)z + a_2(t)z^2, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

Si tomamos $z = x+iy$, y tenemos en cuenta que $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ el sistema (4.1) se transforma en la ecuación de Riccati (4.2). Toda solución particular $(x(t), y(t))$ del sistema (4.1) que satisface $y(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, satisface que $y(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En este caso, $x(t)$ es una solución particular de la ecuación real de Riccati. Lo cual sugiere restringir el análisis del sistema (4.1) al dominio abierto denso $\mathbb{R}^2_{y\neq 0} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y)|y \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Vamos a probar que el sistema (4.1) es un sistema de Lie en $\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$. Consideremos los campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$$

donde sus corchetes son

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3.$$

De estas relaciones de conmutación tenemos que

$$\mathfrak{g} = span\{X_1, X_2, X_3\} \simeq \mathfrak{sl}(2). \tag{4.3}$$

El sistema (4.1) está determinado por el campo vectorial dependiente de t

$$\begin{aligned} X_t =& \left[a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)(x^2 - y^2)\right]\frac{\partial}{\partial x} + \left[a_1(t)y + a_2(t)2xy\right]\frac{\partial}{\partial y} \\ =& a_0(t)\frac{\partial}{\partial x} + a_1(t)\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right] + a_2(t)\left[(x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ =& a_0(t)X_1 + a_1(t)X_2 + a_3(t)X_3. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por lo tanto, $\{X_t\} \subset \mathfrak{g}$ la cual es un álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$. Esto demuestra que V^{X_t}, con $V^{X_t} = span\{X_1, X_2, X_3\}$, es un álgebra de Lie finita.

Definición 4.6 *Un campo vectorial X_t dependiente de t en una variedad M se dice ser un sistema de Lie-Hamilton si V^{X_t} es finito dimensional y existe un bivector de Poisson Π en M tal que V^{X_t} es una subálgebra de campos Hamiltonianos.*

Definición 4.7 *Una estructura de Lie-Hamilton es una tripleta (M, Π, h) donde Π es un bivector de Poisson en una variedad M y*

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R} \\ h_t(x) &\stackrel{\text{def}}{=} h(t, x) \end{aligned}$$

es una función suave tal que:

$$H_\Pi \stackrel{\text{def}}{=} Lie\{\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}, C^\infty(M), \{\,,\,\}_\Pi\}$$

es finito dimensional.

El siguiente resultado establece la relación que existe entre los sistemas y las estructuras de Lie-Hamilton.

Proposición 4.8 *Un campo vectorial X_t dependiente de t es un sistema de Lie-Hamilton si y solo si existe una estructura de Lie-Hamilton (M, Π, h) tal que X_t, es un campo Hamiltoniano con función de Hamilton h_t.*

Si X_t es un sistema de Lie-Hamilton entonces la subálgebra $(H_\Pi, \{\,,\,\}_\Pi)$ asociada a X_t es llamada el álgebra de Lie-Hamilton de X_t.

Problema de clasificación de sistemas de Lie-Hamilton. Sean $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ dos álgebras de Lie reales de campos vectoriales en M finito-dimensionales. Supongamos que $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son álgebras de campos Hamiltonianos con respecto a los bivectores de Poisson Π_1 y Π_2, respectivamente. Decimos que $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son equivalentes como álgebras de Lie-Hamilton si existe un difeomorfismo local de Poisson $\varphi : U \subset M \to M$ tal que $\varphi_*\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$.

El problema de clasificación de sistemas de Lie-Hamilton en el plano consiste en encontrar todas las álgebras de Lie finito-dimensionales de campos Hamiltonianos en $\mathbb{R}^2$ que no sean equivalentes.

La clasificación de sistemas de Lie-Hamilton en el plano que estudiaremos será alrededor de puntos genéricos, que como veremos a continuación nos proporciona dos importantes ventajas:

1. El estudio de los sistemas de Lie-Hamilton se reducirá únicamente a estudiar que álgebras de Lie de campos vectoriales en el plano de la clasificación de GKO (González, Kamran, Olver) son Hamiltonianas.

2. Todos los campos Hamiltonianos definidos en un entorno de un punto genérico son Hamiltonianos relativos a una forma simpléctica en $\mathbb{R}^2$.

Vamos a analizar el punto 2 con más detalle. Recordemos que si V es un álgebra de Lie finito dimensional de campos vectoriales en M entonces $\xi_0 \in M$ es un punto genérico de V si el rango de

$$D_\xi^V = \{X(\xi)|X \in V\}$$

es localmente constante alrededor de ξ_0.

Lema 4.9 *Sea V un álgebra de Lie finito dimensional de campos Hamiltonianos respecto a una estructura de Poisson Π en $\mathbb{R}^2$. Sea $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ un punto genérico de V. Entonces existe un abierto $U \ni \xi_0$ tal que $V|_U$ es un álgebra de Lie de campos vectoriales Hamiltonianos con respecto a una estructura simpléctica.*

Demostración. Si $\dim D_{\xi_0}^V = 0$, entonces existe $U \ni \xi_0$ tal que $\dim D_\xi^V = 0$. Como $D_\xi^V = \{X(\xi)|X \in V\}$, se tiene que $V|_U = \{0\}$ y $X|_U \equiv 0$ es Hamiltoniano con respecto a $\omega = dx \wedge dy$.

Supongamos ahora que $\dim D_{\xi_0}^V \neq 0$. Por hipótesis los campos en V son Hamiltonianos con respecto a Π. De esto se sigue que la distribución D_ξ^V está contenida en la distribución característica de Π, es decir,

$$D_\xi^V \subset D_\xi^\Pi = \{X(\xi)|X \quad es \quad Hamiltoniano\}.$$

Como ξ_0 es genérico entonces la $\dim D_\xi^V > 0$ en un entorno U de ξ_0, de aquí que si $D_\xi^V \subset D_\xi^\Pi$ entonces

$$0 < \dim D_\xi^V < \dim D_\xi^\Pi.$$

Como el rango del bivector de Poisson Π en $\mathbb{R}^2$ es par, entonces D^Π es par en cada punto de $\mathbb{R}^2$ y $D_\xi^V \subset D_\xi^\Pi$ para cada $\xi \in U$, por tanto el rango de D^Π es dos en U. Así, Π proviene de una estructura simpléctica en U y $V|_U$ es un álgebra de Lie de campos vectoriales Hamiltonianos relativos a ω. ∎

El lema anterior nos dice que cualquier sistema de Lie-Hamilton X_t en $\mathbb{R}^2$ alrededor de cada punto genérico de V^{X_t} es una familia de campos Hamiltonianos con respecto a una estructura simpléctica ω en $\mathbb{R}^2$. Si el conjunto de puntos genéricos de V^{X_t} es denso en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$, entonces X_t es Hamiltoniano con respecto a la forma simpléctica ω en todo D.

Toda forma simpléctica ω en $\mathbb{R}^2$ es de la forma $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$, con $f(x,y) \neq 0$ y $dx \wedge dy$ la forma de volumen canónica en $\mathbb{R}^2$.

A continuación, presentaremos un resultado que nos será de utilidad para determinar cuando un campo vectorial X en $\mathbb{R}^2$ es Hamiltoniano con respecto a la forma $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$.

Recordemos que si X es un campo vectorial en una variedad M, la derivada de Lie de X es una derivación de las $p-$formas en M, es decir, $L_X : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ es un operador $\mathbb{R}-$lineal tal que si $f \in C^\infty(M)$ y $\alpha \in \Omega^p(M)$ se cumple que :

$$L_X(f\alpha) = (L_X f)\alpha + f L_X \alpha,$$

[1]. Sea Ω una forma de volumen en M y $X \in \mathfrak{X}(M)$, como las $n-$formas en M son un espacio vectorial de dimensión 1, se define la divergencia de X relativa a Ω como la única función $div_\Omega X : M \to \mathbb{R}$ que satisface

$$L_X\Omega = (div_\Omega X)\Omega.$$

En nuestro caso $M = \mathbb{R}^2$ con las coordenadas canónicas usuales. Fijaremos la forma canónica $\Omega = dx \wedge dy$ y denotaremos $div_\Omega \overset{\text{def}}{=} div$. Si $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ se expresa en coordenadas locales como

$$X = g(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + h(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

entonces

$$divX = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Lema 4.10 *Consideremos la forma de volumen $\Omega = dx \wedge dy$ en $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto contractible y X un campo vectorial en U. Entonces, X es un campo Hamiltoniano con respecto a la forma simpléctica $\omega = f\Omega$ en U si y solo si X y f satisfacen la ecuación*

$$L_X f = -f divX \tag{4.5}$$

en U.

Demostración. Supongamos que X es Hamiltoniano con respecto a ω en U, es decir, existe $H \in C^\infty(U)$ tal que $i_X\omega = -dH$. Ahora si calculamos la derivada de Lie de ω a lo largo de X tenemos

$$L_X\omega = L_X f\Omega = (L_X f)\Omega + fL_X\Omega = (L_X f)\Omega + (fdivX)\Omega = (L_X f + fdivX)\Omega \tag{4.6}$$

Por otra parte, la fórmula mágica de Cartan nos lleva a

$$L_X\omega = d(i_X\omega) + i_X d\omega = d(i_X\omega), \tag{4.7}$$

como X es Hamiltoniano tenemos que $L_X\omega = d(i_X\omega) = -d^2H = 0$. Comparando esto con (4.6) tenemos $L_X f + fdivX = 0$.

Para probar el recíproco supongamos que $L_X f + fdivX = 0$. Por (4.6) tenemos $L_X\omega = 0$. Si comparamos esto con (4.7) tenemos que $d(i_X\omega) = 0$. Es decir, $i_X\omega$ es una $1-$forma cerrada. Como U es contractible por el lema de Poincaré existe una función $H \in C^\infty(U)$ tal que $i_X\omega = -dH$. De esto se sigue que X es Hamiltoniano en U. ∎

Ejemplo 4.11 *Consideremos el sistema (4.1)*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)(x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= a_1(t)y + a_2(t)2xy \end{aligned}$$

en el dominio $\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$*. De cálculos anteriores sabemos que este sistema es un sistema de Lie y que* $V^{X_t} \simeq \mathfrak{sl}(2)$*, ver ejemplo (4.5). Vamos a probar que este sistema de Lie también es un sistema de Lie-Hamilton con respecto a alguna estructura simpléctica. Redordemos que una base para* V^{X_t} *está dada por los campos vectoriales*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Como $X_t = a_0(t)X_1 + a_1(t)X_2 + a_2(t)X_3$*,* X_t *es Hamiltoniano con respecto a* ω *si y solo si* X_1, X_2, X_3 *lo son. Por el lema (4.10)* X_1, X_2, X_3 *son Hamiltonianos con respecto a* $\omega = f dx \wedge dy$ *si y solo si* f *satisface la ecuación:*

$$L_{X_i} f + f div X_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.8}$$

Para X_1*, tenemos que* $f = f(y)$ *cumple la ecuación (4.8). Para* X_2*,*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0 \tag{4.9}$$

Por último, para el campo X_3 *la función* f *que cumple (4.8) debe satisfacer la ecuación*

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 4xf = 0. \tag{4.10}$$

Resolvamos estas ecuaciones para encontrar f*. Tomando en cuenta que* $f = f(y)$ *las ecuaciones (4.9) y (4.10) se reducen a*

$$y\frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0 \quad y \quad 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 4xf = 0$$

como estas dos ecuaciones son la misma salvo el factor $2x$ *tenemos que los campos* X_1, X_2, X_3 *con localmente Hamiltonianos relativos a la forma* $f(x, y)dx \wedge dy$ *si y solo si* f *satisface la ecuación diferencial ordinaria*

$$y\frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0,$$

cuyas soluciones están dadas por $f = \frac{c}{y^2}$*. Por lo tanto, los campos vectoriales* X_1, X_2, X_3 *son Hamiltonianos con respecto a la familia de formas simplécticas* $\omega = \frac{c}{y^2}dx \wedge dy$*.*

Tomando $c = 1$*, tenemos la forma*

$$\omega = \frac{1}{y^2}dx \wedge dy \quad en \quad \mathbb{R}^2_{y\neq 0}. \tag{4.11}$$

Usando la relación $i_X\omega = -dh$ *que satisface todo campo Hamiltoniano, vamos a encontrar funciones* h_i *con respecto a las cuales los campos* X_i *son Hamiltonianos. Por cálculo directo, tenemos*

$$i_{X_1}\omega = i_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{1}{y^2}dx \wedge dy = \frac{1}{y^2}dy = -d\left(\frac{1}{y}\right),$$

$$i_{X_2}\omega = i_{x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{y^2}dx\wedge dy = \frac{x}{y^2}dy - \frac{1}{y}dx = -d\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$i_{X_3}\omega = i_{(x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x}+2xy\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{y^2}dx\wedge dy = \frac{x^2-y^2}{y^2}dy - \frac{2x}{y}dx = -d\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right).$$

De esto se sigue que $h_1 = \frac{1}{y}, h_2 = \frac{x}{y}$ *y* $h_3 = \frac{x^2+y^2}{y}$ *son las funciones Hamiltonianas de los campos* X_1, X_2, X_3*, respectivamente. De esta forma,* $h_t = a_0(t)h_1 + a_1(t)h_2 + a_2(t)h_3$ *es la función de Hamilton del sistema de Lie-Hamilton (4.1). Determinemos ahora el álgebra de Lie-Hamilton. Si* $\{\cdot,\cdot\}_\omega : C^\infty(\mathbb{R}^2_{y\neq 0}) \times C^\infty(\mathbb{R}^2_{y\neq 0}) \to C^\infty(\mathbb{R}^2_{y\neq 0})$ *es el corchete de Poisson inducido por* ω*, calculando los corchetes de las funciones* h_i *tenemos:*

$$\{h_1,h_2\}_\omega = \frac{\frac{\partial(\frac{1}{y})}{\partial x}\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial y} - \frac{\partial(\frac{1}{y})}{\partial y}\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial x}}{f} = \frac{1}{y} = h_1,$$
$$\{h_1,h_3\}_\omega = \frac{\frac{\partial(\frac{1}{y})}{\partial x}\frac{\partial(\frac{x^2+y^2}{y})}{\partial y} - \frac{\partial(\frac{1}{y})}{\partial y}\frac{\partial(\frac{x^2+y^2}{y})}{\partial x}}{f} = \frac{2x}{y} = 2h_2,$$
$$\{h_2,h_3\}_\omega = \frac{\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial x}\frac{\partial(\frac{x^2+y^2}{y})}{\partial y} - \frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial y}\frac{\partial(\frac{x^2+y^2}{y})}{\partial x}}{f} = \frac{x^2+y^2}{y} = h_3.$$

De estas relaciones vemos que el álgebra de Lie-Hamilton $(\langle h_1,h_2,h_3\rangle, \{\cdot,\cdot\}_\omega)$ *es isomorfa a* $\mathfrak{sl}(2)$*, como álgebra de Lie.*

4.2 Sistema generador modular

En esta sección desarrollaremos resultados técnicos que nos serán de utilidad para la clasificación de sistemas de Lie-Hamilton en el plano.

Definición 4.12 *Sea* V *un espacio vectorial de campos vectoriales en* U*. Se dice que* V *admite un sistema generador modular* $(U_1, X_1, \ldots, X_p)$*, si* U_1 *es un abierto denso en* U *tal que* $V|_{U_1}$ *es un* $C^\infty(U_1)-$*módulo finitamente generado con* $X_1, \ldots, X_p$ *como sus generadores. Es decir,*

$$X|_{U_1} = \sum_{i=1}^{p} g_i X_i|_{U_1}$$

para ciertas funciones $g_i \in C^\infty(U_1)$*.*

Ejemplo 4.13 *En* $U = \mathbb{R}^2$ *el espacio vectorial* $V = span\{X_1, X_2, X_3\}$ *donde*

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = (1+x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (1+y^2-x^2)\frac{\partial}{\partial y},$$

admite un sistema generador modular. Tomemos $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$ *el cual es un abierto denso de* $\mathbb{R}^2$*. Notemos que*

$$X_3|_{U_1} = g_1 X_1|_{U_1} + g_2 X_2|_{U_1}$$

donde $g_1 = \frac{x^2+y^2-1}{x}, g_2 = \frac{y}{x} \in C^\infty(U_1)$. *Sea* $X \in V$ *de la forma* $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. *Si nos restringimos a* U_1, *tenemos*

$$X|_{U_1} = \alpha_1 \left. X_1\right|_{U_1} + \alpha_2 \left. X_2\right|_{U_1} + \alpha_3 \left. X_3\right|_{U_1} = (\alpha_1 + \alpha_3 g_1) \left. X_1\right|_{U_1} + (\alpha_2 + \alpha_3 g_2) \left. X_2\right|_{U_1}.$$

Por tanto, (U_1, X_1, X_2) *forma un sistema generador modular para* V.

Proposición 4.14 *Sea* V *un álgebra de Lie en* $U \subset \mathbb{R}^2$ *y supongamos que* V *admite un sistema generador modular* $(U_1, X_1, \ldots, X_p)$. *Tenemos las siguientes afirmaciones:*

1. V *consiste de un álgebra de campos Hamiltonianos relativos a una forma simpléctica en* U *si y solo si se cumplen las siguientes condiciones*
   i) Si
   $$X|_{U_1} = \sum_{i=1}^{p} g_i X_i|_{U_1} \quad \textit{entonces} \quad divX|_{U_1} = \sum_{i=1}^{p} g_i divX_i|_{U_1}.$$
   ii) Existe una función $f \in C^\infty(U)$ *distinta de* 0 *tal que* $L_{X_i} f = -f divX_i$ *en* U *para* $i = 1, \ldots, p$.
2. *Si el rango* D^V *es dos en* U *entonces la forma simpléctica es única salvo un factor distinto de cero.*

Demostración. Primero probaremos 2), supongamos que los campos en V son Hamiltonianos con respecto a $\omega_1 = f_1 dx \wedge dy$ y $\omega_2 = f_2 dx \wedge dy$. Vamos a demostrar que $\frac{f_1}{f_2} = constante$. Como $\{g, h\}_{\omega_1} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1(X_g, X_h)$ es no degenerado entonces las únicas funciones Casimires son las funciones constantes. Si $g \in C^\infty(U)$ y $k = \frac{f_1}{f_2}$, tenemos

$$\{g, k\}_{\omega_1} = L_{X_g} k = L_{X_g}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{(L_{X_g} f_1) f_2 - f_1 (L_{X_g} f_2)}{f_2^2} \tag{4.12}$$

Si X_g es Hamiltoniano con respecto a ω_1 y ω_2, el lema (4.10) implica que

$$L_{X_g} f_1 = -f_1 divX_g, \quad L_{X_g} f_2 = -f_2 divX_g.$$

Sustituyendo en (4.12), obtenemos

$$L_{X_g}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_1 f_2 divX_g - f_1 f_2 divX_g}{f_2^2} = 0.$$

Por lo tanto $\frac{f_1}{f_2} = constante$.

Ahora probemos la parte 1). La parte (ii) es consecuencia directa del lema (4.10). Supongamos que V es un álgebra de campos Hamiltonianos relativos a $\omega = f(x, y) dx \wedge dy$. Si $X \in V$, existen funciones $g_i \in C^\infty(U_1)$ tales que

$$X|_{U_1} = \sum_{i=1}^{p} g_i X_i|_{U_1}. \tag{4.13}$$

Por el lema (4.10) $L_X f = -f divX$. Si nos restringimos a U_1, por la ecuación (4.13) tenemos

$$-f divX|_{U_1} = L_{X|_{U_1}} f = \sum_{i=1}^{p} g_i L_{X_i|_{U_1}} f = -f \sum_{i=1}^{p} g_i divX_i|_{U_1}.$$

La última igualdad se tiene también por el lema (4.10). De esto obtenemos

$$f(divX|_{U_1} - \sum_{i=1}^{p} g_i divX_i|_{U_1}) = 0.$$

Ya que $f \neq 0$, por ser ω simpléctica, tenemos

$$divX|_{U_1} - \sum_{i=1}^{p} g_i divX_i|_{U_1} = 0.$$

Con esto hemos probado la condición (i). Supongamos ahora que V es un álgebra de Lie con las propiedades (i), (ii). Por el lema (4.10), los campos $X_1, \ldots, X_p$ son Hamiltonianos con respecto a $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$. Sea $X \in V$, como V admite un sistema generador modular

$$X|_{U_1} = \sum_{i=1}^{p} g_i X_i|_{U_1}$$

para $g_i \in C^\infty(U_1)$. Por (i) tenemos

$$divX|_{U_1} = \sum_{i=1}^{p} g_i divX_i|_{U_1},$$

Probaremos que X es Hamiltoniano usando, otra vez, el lema (4.10). Por cálculo directo, tenemos

$$L_{X|_{U_1}} f = \sum_{i=1}^{p} g_i L_{X_i|_{U_1}} f = -f \sum_{i=1}^{p} g_i div\ X_i|_{U_1} = -f div\ X|_{U_1},$$

como U_1 es denso en U la igualdad anterior es cierta en todo U. ■

Corolario 4.15 *Si el álgebra V es Hamiltoniana con respecto a una forma simpléctica y admite un sistema generador modular de V cuyos elementos tienen divergencia 0, entonces cualquier elemento de V tiene divergencia 0.*

Demostración. De la parte (i) del punto 1) tenemos que para todo $X \in V$, $div\ X|_{U_1} = 0$. Como $divX$ es una función continua y U_1 es denso entonces $divX = 0$ ■

4.3 Clasificación local de sistemas de Lie-Hamilton en el plano

Recordemos que nuestro propósito es clasificar los sistemas de Lie-Hamilton alrededor de puntos genéricos. Por otro lado, la clasificación de GKO dice que existen 8 álgebras de Lie primitivas y 20 álgebras de Lie imprimitivas en el plano, únicas salvo difeomorfismos locales.

Por lo que el problema de clasificación de sistemas de Lie-Hamilton se reduce a estudiar la clasificación de GKO y ver cuales de ellas son Hamiltonianas con respecto a alguna estructura simpléctica.

Como primer resultado, mostraremos cuáles álgebras de Lie de la clasificación GKO no pueden ser álgebras de Lie de campos Hamiltonianos.

Proposición 4.16 *Las álgebras de Lie primitivas* $P_1^{\alpha\neq 0}, P_4, P_6 - P_8$ *y las imprimitivas* $I_2, I_3, I_6, I_7, I_8^{\alpha\neq -1}, I_9 - I_{11}, I_{13}, I_{15}, I_{16}^{\alpha\neq -1}, I_{17} - I_{20}$ *no son álgebras de Lie de campos vectoriales Hamiltonianos en algún* $U \in \mathbb{R}^2$*.*

Demostración. Excepto las álgebras de Lie I_7 e I_{15}, todas las álgebras en la proposición se descartan usando el corolario (4.15). Se puede probar que éstas álgebras de Lie admiten los sistemas generadores que se indican en la siguiente tabla:

Álgebra	Base del álgebra	Sistema generador modular	Divergencia de campos de la base
$P_1^{\alpha\neq 0}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = \alpha\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$ $+y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1, X_1, X_2), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1} = (\alpha x + y)X_1 + (\alpha y - x)X_2$	$divX_1 = divX_2 = 0$ $divX_3 = 2\alpha$
P_4	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ $X_4 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1, X_1, X_2), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1} = xX_1 + yX_2$ $X_4\|_{U_1} = yX_1 - xX_2$	$divX_1 = divX_2 = 0$ $divX_3 = 2$ $divX_4 = 0$
P_6	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}, X_4 = y\frac{\partial}{\partial x}$ $X_5 = x\frac{\partial}{\partial y}, X_6 = y\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1, X_1, X_2), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1} = xX_1,\ X_4\|_{U_1} = yX_1$ $X_5\|_{U_1} = xX_2,\ X_5\|_{U_1} = yX_2$	$divX_1 = divX_2 = 0$ $divX_3 = 1, divX_4 = 0$ $divX_5 = 0, divX_6 = 1$
P_7	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ $X_4 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ $X_5 = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$ $X_6 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1, X_1, X_2), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1} = xX_1 + yX_2$ $X_4\|_{U_1} = yX_1 - xX_2$ $X_5\|_{U_1} = (x^2 - y^2)X_1 + 2xyX_2$ $X_6\|_{U_1} = 2xyX_1 + (x^2 - y^2)X_2$	$divX_1 = divX_2 = 0$ $divX_3 = 2, divX_4 = 0$ $divX_5 = 4x, divX_6 = 0$
P_8	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}, X_4 = y\frac{\partial}{\partial x}$ $X_5 = x\frac{\partial}{\partial y}, X_6 = y\frac{\partial}{\partial y}$ $X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$ $X_8 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1, X_1, X_2), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1} = xX_1,\ X_4\|_{U_1} = yX_1$ $X_5\|_{U_1} = xX_2,\ X_6\|_{U_1} = yX_2$ $X_7\|_{U_1} = x^2X_1 + 2xyX_2$ $X_8\|_{U_1} = 2xyX_1 + (y^2 - x^2)X_2$	$divX_1 = divX_2 = 0$ $divX_3 = 1, divX_4 = 0$ $divX_5 = 0, divX_6 = 1$ $divX_7 = 4x, divX_8 = 4y$
I_2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = x\frac{\partial}{\partial x},$	$(U_1, X_1), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_2\|_{U_1} = xX_1$	$divX_1 = 0$ $divX_2 = 1$
I_3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = x\frac{\partial}{\partial x},$ $X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x}$	$(U_1, X_1), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_2\|_{U_1} = xX_1$ $X_3\|_{U_1} = x^2X_1$	$divX_1 = 0, divX_2 = 1$ $divX_3 = 2x$
I_6	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}$ $X_4 = x^2\frac{\partial}{\partial x}$	$(U_1, X_1, X_2), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1} = xX_1$ $X_4\|_{U_1} = x^2X_1$	$divX_1 = divX_2 = 0$ $divX_3 = 1$ $divX_4 = 2x$
$I_8^{\alpha\neq -1}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1, X_1, X_2), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1} = xX_1 + \alpha yX_2$	$divX_1 = divX_2 = 0$ $divX_3 = 1 + \alpha$
I_9	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}$ $X_4 = y\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1, X_1, X_2), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1} = xX_1$ $X_4\|_{U_1} = yX_2$	$divX_1 = divX_2 = 0$ $divX_3 = 1$ $divX_4 = 1$
I_{10}	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}$ $X_4 = y\frac{\partial}{\partial y}$ $X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x}$	$(U_1, X_1, X_2), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1} = xX_1$ $X_4\|_{U_1} = yX_2$ $X_5\|_{U_1} = x^2X_1$	$divX_1 = divX_2 = 0$ $divX_3 = 1$ $divX_4 = 1$ $divX_5 = 2x$
I_{11}	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}$ $X_4 = y\frac{\partial}{\partial y}$ $X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x}$ $X_6 = y^2\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1, X_1, X_2), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1} = xX_1$ $X_4\|_{U_1} = yX_2$ $X_5\|_{U_1} = x^2X_1$ $X_6\|_{U_1} = y^2X_2$	$divX_1 = divX_2 = 0$ $divX_3 = 1$ $divX_4 = 1$ $divX_5 = 2x$ $divX_6 = 2y$
I_{13}	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = y\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = \xi_1(x)\frac{\partial}{\partial y},...,$ $X_{r+2} = \xi_r(x)\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1, X_1), \quad U_1 = \mathbb{R}^2$ $X_2\|_{U_1} = yX_1$ $X_3\|_{U_1} = \xi_1(x)X_1,...$ $X_{r+2}\|_{U_1} = \xi_r(x)X_1$	$divX_1 = 0, divX_2 = 1$ $divX_3 = ... = divX_{r+2} = 0$

Álgebra	Base del álgebra	Sistema generador modular	Divergencia de campos de la base
$I_{16}^{\alpha\neq-1}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, X_2=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial}{\partial y}$ $X_4=x\frac{\partial}{\partial y}$,... $X_{r+3}=x^r\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1,X_1,X_2),\quad U_1=\mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1}=xX_1+\alpha yX_2$ $X_4\|_{U_1}=xX_2$,... $X_{r+2}\|_{U_1}=x^rX_2$	$divX_1=divX_2=0$ $divX_3=1+\alpha$ $divX_4=...=divX_{r+3}=0$
I_{17}	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, X_2=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=x\frac{\partial}{\partial x}+(ry+x^r)\frac{\partial}{\partial y}$ $X_4=x\frac{\partial}{\partial y}$,... $X_{r+2}=x^{r-1}\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1,X_1,X_2),\quad U_1=\mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1}=xX_1+(ry+x^r)X_2$ $X_4\|_{U_1}=xX_2$,... $X_{r+2}\|_{U_1}=x^{r-1}X_2$	$divX_1=divX_2=0$ $divX_3=1+r$ $divX_4=...=divX_{r+2}=0$
I_{18}	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, X_2=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=x\frac{\partial}{\partial x}$ $X_4=y\frac{\partial}{\partial y}$ $X_5=x^2\frac{\partial}{\partial y}$,... $X_{r+4}=x^r\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1,X_1,X_2),\quad U_1=\mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1}=xX_1$ $X_4\|_{U_1}=yX_2$ $X_5\|_{U_1}=x^2X_2$,... $X_{r+4}\|_{U_1}=x^rX_2$	$divX_1=divX_2=0$ $divX_3=1$ $divX_4=1$ $divX_5=...=divX_{r+4}=0$
I_{19}	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, X_2=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=x\frac{\partial}{\partial x}$ $X_4=2x\frac{\partial}{\partial x}+ry\frac{\partial}{\partial y}$ $X_5=x^2\frac{\partial}{\partial x}+rxy\frac{\partial}{\partial y}$ $X_6=x^2\frac{\partial}{\partial y}$,... $X_{r+4}=x^r\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1,X_1,X_2),\quad U_1=\mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1}=xX_1$ $X_4\|_{U_1}=2xX_1+ryX_2$ $X_5\|_{U_1}=x^2X_1+rxyX_2$ $X_6\|_{U_1}=x^2X_2$,... $X_{r+4}\|_{U_1}=x^rX_2$	$divX_1=divX_2=0$ $divX_3=1$ $divX_4=2+r$ $divX_5=(2+r)x$ $divX_6=...=divX_{r+4}=0$
I_{20}	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, X_2=\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3=x\frac{\partial}{\partial x}$ $X_4=x\frac{\partial}{\partial y}$ $X_5=y\frac{\partial}{\partial y}$ $X_6=x^2\frac{\partial}{\partial x}+rxy\frac{\partial}{\partial y}$ $X_7=x^2\frac{\partial}{\partial y}$,... $X_{r+5}=x^r\frac{\partial}{\partial y}$	$(U_1,X_1,X_2),\quad U_1=\mathbb{R}^2$ $X_3\|_{U_1}=xX_1$ $X_4\|_{U_1}=xX_2$ $X_5\|_{U_1}=yX_2$ $X_6\|_{U_1}=x^2X_1+rxyX_2$ $X_7\|_{U_1}=x^2X_2$,... $X_{r+5}\|_{U_1}=x^rX_2$	$divX_1=divX_2=0$ $divX_3=1$ $divX_4=0$ $divX_5=1$ $divX_6=(2+r)x$ $divX_7=...=divX_{r+4}=0$

De la tabla anterior podemos notar que en todos los casos enlistados los vectores que forman el sistema generador modular tienen divergencia cero. Y además, en cada caso, al menos un vector de la base tiene un vector con divergencia distinta de cero. Por lo que éstas álgebras no pueden ser álgebras de campos Hamiltonianos con respecto a alguna forma simpléctica ya que esto contradice el corolario (4.15).

Álgebra I_7. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, X_2=y\frac{\partial}{\partial y}, X_3=x\frac{\partial}{\partial x}, X_4=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}$$

y no admite un sistema generador modular. Sin embargo, $X_4=xX_2+xX_3$. Calculando las divergencias de los campos básicos, tenemos $divX_1=0, divX_2=1, divX_3=1$ y $divX_4=3x$. Como $divX_4\neq xdivX_2+xdivX_3$ el álgebra I_7 no es un álgebra de Lie de campos vectoriales Hamiltonianos.

Álgebra I_{15}. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, X_2=y\frac{\partial}{\partial y}, X_3=\eta_1(x)\frac{\partial}{\partial y},\ldots,X_{r+2}=\eta_r(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

y no admite un sistema generador modular. Las divergencias de X_2 y X_3 son $divX_2=1$ y $divX_3=0$. Además $X_3=\frac{\eta_1(x)}{y}X_2$. Como $0=divX_3\neq\frac{\eta_1(x)}{y}divX_2=\frac{\eta_1(x)}{y}$, I_{15} no es un álgebra de Lie de campos vectoriales Hamiltonianos. ∎

En lo que sigue mostraremos que todas las álgebras de Lie de la clasificación GKO que no están listadas en la proposición (4.16) admiten una estructura simpléctica respecto a la cual todos los campos del álgebra son Hamiltonianos. Además, obtendremos la estructura algebraica para todas las álgebras de Lie-Hamilton de los sistemas de Lie-Hamilton que admiten tales álgebras de Lie minimales.

Teorema 4.17 *Las siguientes álgebras de Lie de la clasificación GKO son Hamiltonianas con respecto a alguna forma simpléctica en el plano:*

Álgebras	*Funciones Hamiltonianas de campos básicos*	ω
$P_1^{\alpha=0}$	$-y, x, -\frac{x^2+y^2}{2}, 1$	$dx \wedge dy$
P_5	$-y, x, -xy, -\frac{y^2}{2}, \frac{x^2}{2}, 1$	
I_8	$-y, x, -xy, 1$	
I_{14A}	$-y, \int \eta_j(x)dx, 1 \notin < \eta_j >$	
I_{14B}	$-y, x, \int \eta_j(x)dx, 1$	
$I_{16}^{\alpha=-1}$	$-y, x, -xy, \frac{x^{j+1}}{j+1}, 1$	
P_2	$\frac{1}{y}, \frac{x}{y}, \frac{x^2+y^2}{y}$	$\frac{dx\wedge dy}{y^2}$
P_3	$\frac{1}{2(1+x^2+y^2)}, -\frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x}{1+x^2+y^2}, 1$	$\frac{dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}$
I_1	$-\int f(y)dy$	$f(y)dx \wedge dy$
I_4	$-\frac{1}{x-y}, -\frac{x+y}{2(x-y)}, -\frac{xy}{x-y}$	$\frac{dx\wedge dy}{(x-y)^2}$
I_5	$\frac{1}{2y^2}, \frac{x}{y^2}, \frac{x^2}{2y^2}$	$\frac{dx\wedge dy}{y^3}$
I_{12}	$\int f(x)dx, \int f(x)\epsilon_j(x)dx$	$f(x)dx \wedge dy$

Demostración. La prueba de este resultado se sigue de cálculos directos y argumentos análogos a los del ejemplo (4.11).

Álgebra $P_1^{(\alpha=0)}$. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos vectoriales

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},$$

y los corchetes para cada par de campos vienen dados por

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = X_1,$$

y admite un sistema de Lie-Hamilton con respecto a la forma simpléctica $\omega = dx\wedge dy$, ya que los campos de la base tienen divergencia cero. Calculemos las funciones Hamiltonianas de los campos en la base:

$$\begin{aligned}
&i_{X_1} dx \wedge dy = i_{\frac{\partial}{\partial x}} dx \wedge dy = dy = -(-dy),\\
&i_{X_2} dx \wedge dy = i_{\frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = -dx,\\
&i_{X_3} dx \wedge dy = i_{y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = ydy + xdx = -d\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, las funciones Hamiltonianas de los campos básicos son $h_1 = -y, h_2 = x$ y $h_3 = -\frac{x^2+y^2}{2}$. Ahora calculamos los corchetes de las funciones h_i usando el corchete de Poisson usual

$$\{h_1, h_2\}_\omega = 1 \equiv h_0, \quad \{h_1, h_3\}_\omega = -x = -h_2, \quad \{h_2, h_3\}_\omega = -y = h_1,$$

$\{h_i, h_0\} = 0$, si X_t es un sistema de Lie-Hamilton que admite el álgebra de Lie minimal A_0, es decir, $X_t = \sum_{i=1}^3 a_i(t)X_i$ para ciertas funciones dependientes de t tal que $V^{X_t} \simeq A_0$, entonces admite una estructura de Lie-Hamilton $(U, \omega, h = \sum_{i=1}^3 a_i(t)h_i)$ y un álgebra de Lie-Hamilton $(H_\Pi, \{\cdot,\cdot\}_\omega)$ generado por las funciones $\langle h_0, h_1, h_2, h_3\rangle$. Por tanto, $(H_\Pi, \{\cdot,\cdot\}_\omega)$ es un álgebra de Lie real finito-dimensional de funciones Hamiltonianas isomorfa al álgebra Euclideana central extendida $\overline{\mathfrak{iso}}(2)$.

Álgebra P_5. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos vectoriales

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_5 = x\frac{\partial}{\partial y}$$

y los corchetes para cada par de campos vienen dados por

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = X_1, \quad [X_1, X_4] = 0, \quad [X_1, X_5] = X_2,$$
$$[X_2, X_3] = -X_2, \quad [X_2, X_4] = X_1, \quad [X_2, X_5] = 0,$$
$$[X_3, X_4] = -2X_4, \quad [X_3, X_5] = 2X_5, \quad [X_4, X_5] = -X_3,$$

y admite un sistema de Lie-Hamilton con respecto a la forma simpléctica $\omega = dx \wedge dy$, ya que los campos de la base tienen divergencia cero. Calculemos las funciones Hamiltonianas de los campos en la base:

$$\begin{aligned}
&i_{X_1} dx \wedge dy = i_{\frac{\partial}{\partial x}} dx \wedge dy = dy = -(-dy),\\
&i_{X_2} dx \wedge dy = i_{\frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = -dx,\\
&i_{X_3} dx \wedge dy = i_{x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = xdy + ydx = -d(-xy),\\
&i_{X_4} dx \wedge dy = i_{y\frac{\partial}{\partial x}} dx \wedge dy = ydy = -d\left(-\frac{y^2}{2}\right),\\
&i_{X_5} dx \wedge dy = i_{x\frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = -xdx = -d\left(\frac{x^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, las funciones Hamiltonianas de los campos básicos son $h_1 = -y, h_2 = x, h_3 = -xy, h_4 = -\frac{y^2}{2}$ y $h_5 = \frac{x^2}{2}$. Ahora calculamos los corchetes de las funciones h_i usando el corchete de Poisson usual

$$\begin{aligned}
&\{h_1, h_2\}_\omega = 1 \equiv h_0, \quad \{h_1, h_3\}_\omega = -y = h_1, \quad \{h_1, h_4\}_\omega = 0,\\
&\{h_1, h_5\}_\omega = x = h_2, \quad \{h_2, h_3\}_\omega = -x = h_2, \quad \{h_2, h_4\}_\omega = -y = h_1,\\
&\{h_2, h_5\}_\omega = 0, \quad \{h_3, h_4\}_\omega = -y = h_1, \quad \{h_3, h_5\}_\omega = x^2 = 2h_5,\\
&\{h_4, h_5\}_\omega = xy = -h_3.
\end{aligned}$$

Por tanto $\langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_0\rangle$ genera al álgebra de Lie-Hamilton $\overline{\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2}$ la cual es una extensión no trivial de P_5, es decir, no es isomorfa a $P_5 \oplus \mathbb{R}$.

Álgebra $I_8^{(\alpha=-1)}$. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos vectoriales

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},$$

y los corchetes para cada par de campos vienen dados por

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = X_1, \quad [X_2, X_3] = -X_2,$$

y admite un sistema de Lie-Hamilton con respecto a la forma simpléctica $\omega = dx \wedge dy$, ya que los campos de la base tienen divergencia cero. Calculemos las funciones Hamiltonianas de los campos en la base:

$$\begin{aligned}
&i_{X_1} dx \wedge dy = i_{\frac{\partial}{\partial x}} dx \wedge dy = dy = -(-dy),\\
&i_{X_2} dx \wedge dy = i_{\frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = -dx,\\
&i_{X_3} dx \wedge dy = i_{x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = xdy + ydx = -d(-xy).
\end{aligned}$$

Por tanto, las funciones Hamiltonianas de los campos básicos son $h_1 = -y, h_2 = x$ y $h_3 = -xy$. Ahora calculamos los corchetes de las funciones h_i usando el corchete de Poisson usual

$$\{h_1, h_2\}_\omega = 1 \equiv h_0, \quad \{h_1, h_3\}_\omega = -y = h_1, \quad \{h_2, h_3\}_\omega = -x = -h_2.$$

Así, un sistema de Lie X_t que admite un álgebra de Lie minimal B_{-1} posee un álgebra de Lie-Hamilton isomorfa al álgebra de Poincaré central extendida $\overline{\mathfrak{iso}}(1, 1)$ y también isomorfa al álgebra del oscilador armónico $\mathfrak{h}_4$.

Álgebra I_{14}. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos vectoriales

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \eta_1(x)\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, X_{r+1} = \eta_r(x)\frac{\partial}{\partial y}, r \geq 1,$$

y admite un sistema de Lie-Hamilton con respecto a la forma simpléctica $\omega = dx \wedge dy$, ya que los campos de la base tienen divergencia cero. Calculemos las funciones Hamiltonianas de los campos en la base:

$$\begin{aligned}
i_{X_1} dx \wedge dy &= i_{\frac{\partial}{\partial x}} dx \wedge dy = dy = -d(-dy),\\
i_{X_{r+1}} dx \wedge dy &= i_{\eta_j(x)\frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = -\eta_j(x)dx = -d\left(\int \eta_j(x)dx\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, las funciones Hamiltonianas de los campos básicos son $h_1 = -y$ y $h_j = \int \eta_j(x)dx$, para $j = 2, \ldots, r+1$. Ahora calculamos los corchetes de las funciones h_i usando el corchete de Poisson usual

$$\{h_1, h_j\}_\omega = \eta_j(x).$$

Notemos que estas funciones Hamiltonianas generan dos tipos diferentes de álgebras de Lie-Hamilton, que denotamos por I_{14A} y I_{14B}:

1) I_{14A}: si $1 \notin \langle \eta_1, \ldots, \eta_r \rangle$, entonces estas funciones generan un álgebra de Lie $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$ y admiten solamente un álgebra de Lie-Hamilton adicional isomorfa a $(\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r) \oplus \mathbb{R}$.

2) I_{14B}: si $1 \in \langle \eta_1, \ldots, \eta_r \rangle$, podemos elegir una base para I_{14} de tal modo que exista una función, digamos η_1, igual a 1. Entonces las funciones Hamiltonianas toman la forma

$$h_1 = -y, \quad h_2 = x, \quad h_{j+1} = \int \eta_j(x) dx, \quad j = 2, \ldots, r, \quad r \geq 1,$$

las cuales requieren un generador central $h_0 = 1$ para cerrar un álgebra de Lie central extendida $(H_\Pi, \{\cdot, \cdot\}_\omega) \simeq \overline{(\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r)}$.

En consecuencia, un sistema de Lie X_t con un álgebra de Lie minimal I_{14} es un sistema de Lie-Hamilton.

Álgebra $I_{16}^{(\alpha=-1)}$. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos vectoriales

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, X_{r+3} = x^r \frac{\partial}{\partial y},$$

y admite un sistema de Lie-Hamilton con respecto a la forma simpléctica $\omega = dx \wedge dy$, ya que los campos de la base tienen divergencia cero. Calculemos las funciones Hamiltonianas de los campos en la base:

$$\begin{aligned}
&i_{X_1} dx \wedge dy = i_{\frac{\partial}{\partial x}} dx \wedge dy = dy = -(-dy),\\
&i_{X_2} dx \wedge dy = i_{\frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = -dx,\\
&i_{X_3} dx \wedge dy = i_{x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = xdy + ydx = d(xy) = -d(-xy),\\
&i_{X_j} dx \wedge dy = i_{x^j \frac{\partial}{\partial y}} dx \wedge dy = -x^j dx = -d\left(\int x^j dx\right) = -d\left(\frac{x^{j+1}}{j+1}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, las funciones Hamiltonianas de los campos básicos son $h_1 = -y, h_2 = x, h_3 = -xy$ y $h_j = \frac{x^{j+1}}{j+1}$. Ahora calculamos los corchetes de las funciones h_i usando el corchete de Poisson usual

$$\begin{gathered}
\{h_1, h_2\}_\omega = 1 \equiv h_0, \quad \{h_1, h_3\}_\omega = -y = h_1, \quad \{h_1, h_4\}_\omega = x = h_2,\\
\{h_1, h_{k+4}\}_\omega = (k+1)h_{k+3}, \quad \{h_2, h_{j+3}\}_\omega = 0, \quad \{h_3, h_{j+3}\}_\omega = (j+1)h_{j+3},\\
\{h_{j+3}, h_{k+4}\}_\omega = 0.
\end{gathered}$$

En consecuencia dado un sistema de Lie X_t con álgebra de Lie minimal C_{-1}^r, este sistema es de Lie-Hamilton que admite un álgebra de Lie-Hamilton isomorfa a $\overline{\mathfrak{h}_2 \ltimes \mathbb{R}^{r+1}}$.

Álgebra P_2. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos vectoriales

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y},$$

y los corchetes para cada par de campos vienen dados por

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3.$$

Por el lema (4.10) esta álgebra admite un sistema de Lie-Hamilton con respecto a la forma simpléctica $\omega = f(x,y)dx\wedge dy$ si y solo si f satisface las siguientes condiciones

$$f = f(y) \tag{4.14}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0 \tag{4.15}$$

$$(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 4xf = 0. \tag{4.16}$$

Resolvamos (4.14),(4.15) y (4.16) para encontrar f , si sustituimos (4.14) en (4.15) y (4.16) tenemos

$$y\frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0 \quad y \quad 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 4xf = 0$$

como estas dos ecuaciones son la misma salvo el factor $2x$ tenemos que los campos X_1, X_2, X_3 son localmente Hamiltonianos relativos a la forma $\omega = f(x,y)dx\wedge dy$ si y solo si f satisface la ecuación

$$y\frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0. \tag{4.17}$$

Resolviendo por el método del factor integrante, tenemos que $f = \frac{c}{y^2}$.

En particular, esta álgebra es de Lie-Hamilton con respecto a la forma simpléctica

$$\omega = \frac{1}{y^2}dx\wedge dy \quad en \quad \mathbb{R}^2_{y\neq 0}$$

que se obtiene al tomar $c = 1$. Calculemos las funciones Hamiltonianas de los campos en la base:

$$\begin{aligned}
&i_{X_1}\frac{1}{y^2}dx\wedge dy = i_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{1}{y^2}dx\wedge dy = \frac{1}{y^2}dy = -d\left(\frac{1}{y}\right),\\
&i_{X_2}\frac{1}{y^2}dx\wedge dy = i_{x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{y^2}dx\wedge dy = \frac{x}{y^2}dy - \frac{1}{y}dx = -d\left(\frac{x}{y}\right),\\
&i_{X_3}\frac{1}{y^2}dx\wedge dy = i_{(x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x}+2xy\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{y^2}dx\wedge dy = \frac{x^2-y^2}{y^2}dy - \frac{2x}{y}dx = -d\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, las funciones Hamiltonianas de los campos básicos son $h_1 = \frac{1}{y}, h_2 = \frac{x}{y}$ y $h_3 = \frac{x^2+y^2}{y}$. Ahora calculamos los corchetes de las funciones h_i usando el corchete de Poisson usual

$$\{h_1,h_2\}_\omega = h_1, \quad \{h_1,h_3\}_\omega = \frac{2x}{y} = 2h_2, \quad \{h_2,h_3\}_\omega = \frac{x^2+y^2}{y} = h_3,$$

por tanto, $(\mathbb{R}^2_{y\neq 0}, \omega, h = a_0(t)h_1 + a_1(t)h_2 + a_2(t)h_3)$ es una estructura de Lie-Hamilton para X_t y como $V^{X_t} \simeq \mathfrak{sl}(2)$, entonces $(H_\Pi, \{\cdot,\cdot\}_\omega) = (\langle h_1,h_2,h_3\rangle, \{\cdot,\cdot\}_\omega)$ es un álgebra de Lie-Hamilton para X_t la cual es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

Álgebra P_3. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos vectoriales

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = (1+x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (1+y^2-x^2)\frac{\partial}{\partial y},$$

y los corchetes para cada par de campos vienen dados por

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = 4X_1.$$

Por el lema (4.10) esta álgebra es de campos Hamiltonianos con respecto a la forma simpléctica $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$ si solo si f satisface las siguientes ecuaciones

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{4.18}$$

$$(1 + x^2 - y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 4xf = 0 \tag{4.19}$$

$$2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1 + y^2 - x^2)\frac{\partial f}{\partial y} + 4yf = 0. \tag{4.20}$$

La solución a (4.18) es $f = F(x^2 + y^2)$, y sustituimos en (4.19)

$$\begin{aligned}
(1 + x^2 - y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 4xf &= 0 \\
(1 + x^2 - y^2)(2x)F'(x^2 + y^2) + 2xy(2y)F'(x^2 + y^2) + 4xF(x^2 + y^2) &= 0 \\
(1 + x^2 + y^2)(2x)F'(x^2 + y^2) + 4xF(x^2 + y^2) &= 0 \\
\frac{F'(x^2 + y^2)}{F(x^2 + y^2)} &= \frac{-2}{1 + x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Si $t = x^2 + y^2$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(lnF(t)) &= \frac{-2}{1+t} \\
F(t) &= \frac{1}{(1+t)^2} \\
f &= \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Esta álgebra es de campos Hamiltonianos con respecto a la forma simpléctica

$$\omega = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy \quad en \quad \mathbb{R}^2.$$

Calculemos las funciones Hamiltonianas de los campos en la base:

$$\begin{aligned}
&i_{X_1}\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy = i_{y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy = -d\left(\frac{1}{2(1 + x^2 + y^2)^2}\right), \\
&i_{X_2}\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy = i_{(1+x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy = -d\left(-\frac{y}{1 + x^2 + y^2}\right), \\
&i_{X_3}\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy = i_{2xy\frac{\partial}{\partial x} + (1+y^2-x^2)\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy = -d\left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, las funciones Hamiltonianas de los campos básicos son $h_1 = \frac{1}{2(1+x^2+y^2)}$, $h_2 = -\frac{y}{1+x^2+y^2}$ y $h_3 = \frac{x}{1+x^2+y^2}$. Ahora calculamos los corchetes de las funciones h_i usando el corchete de Poisson usual

$$\begin{aligned} \{h_1, h_2\}_\omega &= \frac{x}{1+x^2+y^2} = h_3, \quad \{h_1, h_3\}_\omega = \frac{y}{1+x^2+y^2} = -h_2, \\ \{h_2, h_3\}_\omega &= -1 + \frac{2}{1+x^2+y^2} = -1 + 4h_1, \end{aligned}$$

$h_0 \equiv 1$ y $\{h_0, \cdot\} = 0$. De aquí tenemos que $\langle h_1, h_2, h_3, h_0\rangle$ genera al álgebra de Lie de funciones Hamiltonianas isomorfa a la extensión central de $\mathfrak{so}(3)$, denotada $\overline{\mathfrak{so}}(3)$. Si definimos $\overline{h_1} = h_1 + h_0/4$ entonces $\langle \overline{h_1}, h_2, h_3\rangle$ genera un álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{so}(3)$ y $\overline{\mathfrak{so}}(3) \simeq \mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}$.

Álgebra I_1. Esta álgebra de Lie tiene como base el campo vectorial

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

Por el lema (4.10) esta álgebra es de campos Hamiltonianos con respecto a la forma simpléctica $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$ si y solo si f satisface la condición

$$f = f(y). \tag{4.21}$$

Así, esta álgebra es de campos Hamiltonianos con respecto a la forma simpléctica

$$\omega = f(y)dx \wedge dy.$$

Calculemos la función Hamiltoniana del campo en la base:

$$i_{X_1} f(y)dx \wedge dy = i_{\frac{\partial}{\partial x}} f(y)dx \wedge dy = f(y)dy = -d\left(-\int f(y)dy\right),$$

entonces la función Hamiltoniana del campo básico es $h_1 = -\int f(y)dy$, así h_1 genera un álgebra de Lie isomorfa a $\mathbb{R}$ y un sistema X_t con $V^{X_t} \simeq I_1$ admite un álgebra de Lie-Hamilton isomorfa a I_1.

Álgebra I_4. Esta álgebra tiene por base a los campos vectoriales

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y},$$

y los corchetes para cada par de campos vienen dados por

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3,$$

Por el lema (4.10) esta álgebra es de campos Hamiltonianos con respecto a la forma simpléctica $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$ si y solo si f satisface las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{4.22}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0 \tag{4.23}$$

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x}+y^2\frac{\partial f}{\partial y}+(2x+2y)f=0. \tag{4.24}$$

La solución a (4.22) es $f=F(x-y)$, y sustituimos en (4.23)

$$\begin{aligned} xF'(x-y)-yF'(x-y)+2F(x-y)=&0\\ (x-y)F'(x-y)+2F(x-y)=&0\\ \frac{F'(x-y)}{F(x-y)}=&-\frac{2}{x-y}. \end{aligned}$$

Si $t=x-y$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(lnF(t))=&-\frac{2}{t}\\ F(t)=&\frac{1}{t^2}\\ f=&\frac{1}{(x-y)^2}. \end{aligned}$$

Así, esta álgebra es de campos Hamiltonianos con respecto a la forma simpléctica

$$\omega=\frac{1}{(x-y)^2}dx\wedge dy.$$

Calculemos las funciones Hamiltonianas de los campos en la base:

$$\begin{aligned} i_{X_1}\frac{1}{(x-y)^2}dx\wedge dy=&i_{\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{(x-y)^2}dx\wedge dy=-d\left(-\frac{1}{x-y}\right),\\ i_{X_2}\frac{1}{(x-y)^2}dx\wedge dy=&i_{x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{(x-y)^2}dx\wedge dy=-d\left(-\frac{x+y}{2(x-y)}\right),\\ i_{X_3}\frac{1}{(x-y)^2}dx\wedge dy=&i_{x^2\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{(x-y)^2}dx\wedge dy=-d\left(-\frac{xy}{x-y}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, las funciones Hamiltonianas de los campos básicos son $h_1=-\frac{1}{x-y}, h_2=-\frac{x+y}{2(x-y)}$ y $h_3=-\frac{xy}{x-y}$. Ahora calculamos los corchetes de las funciones h_i usando el corchete de Poisson usual

$$\{h_1,h_2\}_\omega=h_1,\quad \{h_1,h_3\}_\omega=-\frac{x+y}{x-y}=2h_2,\quad \{h_2,h_3\}_\omega=-\frac{xy}{x-y}=h_3.$$

Entonces $(\langle h_1,h_2,h_3\rangle,\{\cdot,\cdot\}_\omega)\simeq\mathfrak{sl}(2)$. Si X_t es un sistema de Lie-Hamilton que admite un álgebra de Lie minimal I_4, entonces admite un álgebra de Lie-Hamilton que es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

Álgebra I_5. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos vectoriales

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y},$$

y los corchetes para cada par de campos vienen dados por

$$[X_1,X_2]=2X_1,\quad [X_1,X_3]=X_2,\quad [X_2,X_3]=2X_3.$$

Por el lema (4.10) esta álgebra es de campos Hamiltonianos con respecto a la forma simpléctica $\omega = f(x, y)dx \wedge dy$ si y solo si f satisface las siguientes condiciones

$$f = f(y) \tag{4.25}$$

$$2x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 3f = 0 \tag{4.26}$$

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} + 3xf = 0. \tag{4.27}$$

De (4.25) y (4.26) tenemos que f debe cumplir la ecuación

$$y\frac{\partial f}{\partial y} + 3f = 0.$$

Resolviendo por el método de factor integrante, tenemos que $f = \frac{c}{y^3}$. En particular, esta álgebra es de campos Hamiltonianos con respecto a la forma simpléctica

$$\omega = \frac{1}{y^3}dx \wedge dy \quad en \quad \mathbb{R}^2_{y\neq 0}$$

que se obtiene al tomar $c = 1$. Calculemos las funciones Hamiltonianas de los campos en la base:

$$\begin{aligned}
i_{X_1}\frac{1}{y^3}dx \wedge dy &= i_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{1}{y^3}dx \wedge dy = -d\left(\frac{1}{2y^2}\right),\\
i_{X_2}\frac{1}{y^3}dx \wedge dy &= i_{2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{y^3}dx \wedge dy = -d\left(\frac{x}{y^2}\right),\\
i_{X_3}\frac{1}{y^3}dx \wedge dy &= i_{x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{y^3}dx \wedge dy = -d\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, las funciones Hamiltonianas de los campos básicos son $h_1 = \frac{1}{2y^2}, h_2 = \frac{x}{y^2}$ y $h_3 = \frac{x^2}{2y^2}$. Ahora calculamos los corchetes de las funciones h_i usando el corchete de Poisson usual

$$\{h_1, h_2\}_\omega = \frac{1}{y^2} = 2h_1, \quad \{h_1, h_3\}_\omega = \frac{x}{y^2} = h_2, \quad \{h_2, h_3\}_\omega = \frac{x^2}{y^2} = 2h_3.$$

En consecuencia, un sistema de Lie que posee un álgebra de Lie minimal I_5 posee un álgebra de Lie-Hamilton isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

Álgebra I_{12}. Esta álgebra de Lie tiene por base a los campos vectoriales

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \epsilon_1(x)\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, X_{r+1} = \epsilon_r(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad r \geq 1$$

y todos los corchetes para cada par de campos son cero. Por el lema (4.10) esta álgebra es de campos Hamiltonianos con respecto a la forma simpléctica $\omega = f(x, y)dx\wedge dy$ si y solo si f satisface la condición

$$f = f(x). \tag{4.28}$$

Así, esta álgebra es de campos Hamiltonianos con respecto a la forma simpléctica

$$\omega = f(x)dx \wedge dy.$$

Calculemos las funciones Hamiltonianas de los campos en la base:

$$\begin{aligned}
i_{X_1} f(x)dx \wedge dy &= i_{\frac{\partial}{\partial y}} f(x)dx \wedge dy = -f(x)dx = -d\left(\int f(x)dx\right), \\
i_{X_j} f(x)dx \wedge dy &= i_{\epsilon_j(x)\frac{\partial}{\partial y}} f(x)dx \wedge dy = -f(x)\epsilon_j(x)dx = -d\left(\int f(x)\epsilon_j(x)dx\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, las funciones Hamiltonianas de los campos básicos son $h_1 = \int f(x)dx$ y $h_j = \int f(x)\epsilon_j(x)dx$, para $j = 2, \ldots, r+1$. Ahora calculamos los corchetes de las funciones h_i usando el corchete de Poisson usual

$$\{h_1, h_j\}_\omega = 0.$$

En consecuencia, estas funciones Hamiltonianas generan al álgebra de Lie Abeliana $\mathbb{R}^{r+1}$, así un sistema de Lie-Hamilton X_t relacionado al álgebra de Lie minimal I_{12} posee un álgebra de Lie-Hamilton isomorfa a $\mathbb{R}^{r+1}$. ∎

#	Primitiva	Base de campos vectoriales X_i	Dominio
P_1	$A_\alpha \simeq \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, \alpha\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha \geq 0$	$\mathbb{R}^2$
P_2	$\mathfrak{sl}(2)$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right\}, (x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$
P_3	$\mathfrak{so}(3)$	$\left\{y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, (1+x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}\right\}, 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (1+y^2-x^2)\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2$
P_4	$\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2$
P_5	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2$
P_6	$\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2$
P_7	$\mathfrak{so}(3,1)$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, (x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}, 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2-x^2)\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2$
P_8	$\mathfrak{sl}(3)$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2$
#	Imprimitiva	Base de campos vectoriales X_i	Dominio
I_1	$\mathbb{R}$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\right\}$	$\mathbb{R}^2$
I_2	$\mathfrak{h}(2)$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}$	$\mathbb{R}^2$
I_3	$\mathfrak{sl}(2)$ (Tipo I)	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x}$	$\mathbb{R}^2$
I_4	$\mathfrak{sl}(2)$ (Tipo II)	$\left\{\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right\}, x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2_{x\neq y}$
I_5	$\mathfrak{sl}(2)$ (Tipo III)	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right\}, x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$
I_6	$\mathfrak{gl}(2)$ (Tipo I)	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x}$	$\mathbb{R}^2$
I_7	$\mathfrak{gl}(2)$ (Tipo II)	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$
I_8	$B_\alpha \simeq \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y}, \quad 0 < \lvert\alpha\rvert \leq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_9	$\mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{h}_2$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2$
I_{10}	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{h}_2$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial x}$	$\mathbb{R}^2$
I_{11}	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial x}, y^2\frac{\partial}{\partial y}$	$\mathbb{R}^2$
I_{12}	$\mathbb{R}^{r+1}$	$\left\{\frac{\partial}{\partial y}\right\}, \xi_1(x)\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, \xi_r(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{13}	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\left\{\frac{\partial}{\partial y}\right\}, y\frac{\partial}{\partial y}, \xi_1(x)\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, \xi_r(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{14}	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \eta_1(x)\frac{\partial}{\partial y}\right\}, \eta_2(x)\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, \eta_r(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{15}	$\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^r$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right\}, \eta_1(x)\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, \eta_r(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{16}	$C_\alpha^r \simeq \mathfrak{h}_2 \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, x^r\frac{\partial}{\partial y}, \quad r \geq 1, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^2$
I_{17}	$\mathbb{R} \ltimes (\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r)$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x} + (ry + x^r)\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, x^{r-1}\frac{\partial}{\partial y}, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{18}	$(\mathfrak{h}_2 \oplus \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, x^r\frac{\partial}{\partial y}, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{19}	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial y}, 2x\frac{\partial}{\partial x} + ry\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial x} + rxy\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, x^r\frac{\partial}{\partial y}, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{20}	$\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, x\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial x} + rxy\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, x^r\frac{\partial}{\partial y}, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$

Tabla 4.1: Lista completa de las álgebras de Lie de campos vectoriales en el plano

#	Primitiva	Funciones Hamiltonianas h_i	ω	Álgebra de Lie-Hamilton
P_1	$A_0 \simeq \mathfrak{iso}(2)$	$-y, x, -\frac{x^2+y^2}{2}, 1$	$dx \wedge dy$	$\overline{\mathfrak{iso}}(2)$
P_2	$\mathfrak{sl}(2)$	$\frac{1}{y}, \frac{x}{y}, \frac{x^2+y^2}{y}$	$\frac{dx\wedge dy}{y^2}$	$\mathfrak{sl}(2)$ o $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{R}$
P_3	$\mathfrak{so}(3)$	$\frac{1}{2(1+x^2+y^2)}, -\frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x}{1+x^2+y^2}, 1$	$\frac{dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}$	$\mathfrak{so}(3)$ o $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}$
P_5	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$	$-y, x, -xy, -\frac{y^2}{2}, \frac{x^2}{2}, 1$	$dx \wedge dy$	$\overline{\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2} \simeq \mathfrak{h}_6$
#	Imprimitiva	Funciones Hamiltonianas h_i	ω	Álgebra de Lie-Hamilton
I_1	$\mathbb{R}$	$-\int f(y)dy$	$f(y)dx \wedge dy$	$\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$
I_4	$\mathfrak{sl}(2)$ (Tipo II)	$-\frac{1}{x-y}, -\frac{x+y}{2(x-y)}, -\frac{xy}{x-y}$	$\frac{dx\wedge dy}{(x-y)^2}$	$\mathfrak{sl}(2)$ o $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{R}$
I_5	$\mathfrak{sl}(2)$ (Tipo III)	$\frac{1}{2y^2}, \frac{x}{y^2}, \frac{x^2}{2y^2}$	$\frac{dx\wedge dy}{y^3}$	$\mathfrak{sl}(2)$ o $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{R}$
I_8	$B_{-1} \simeq \mathfrak{iso}(1,1)$	$-y, x, -xy, 1$	$dx \wedge dy$	$\overline{\mathfrak{iso}}(1,1) \simeq \mathfrak{h}_4$
I_{12}	$\mathbb{R}^{r+1}$	$\int f(x)dx, \int f(x)\epsilon_j(x)dx$	$f(x)dx \wedge dy$	$\mathbb{R}^{r+1}$ o $\mathbb{R}^{r+2}$
I_{14A}	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$ (Tipo I)	$-y, \int \eta_j(x)dx, 1 \notin < \eta_j >$	$dx \wedge dy$	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$ o $(\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r) \oplus \mathbb{R}$
I_{14B}	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$ (Tipo II)	$-y, x, \int \eta_j(x)dx, 1$	$dx \wedge dy$	$\overline{\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r}$
I_{16}	$C_{-1}^r \simeq \mathfrak{h}_2 \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$-y, x, -xy, \frac{x^{j+1}}{j+1}, 1$	$dx \wedge dy$	$\overline{\mathfrak{h}_2 \ltimes \mathbb{R}^{r+1}}$

Tabla 4.2: Tabla de las álgebras de Lie-Hamilton en el plano

Bibliografía

[1] Ralph Abraham and Jerrold E. Marsden, *Foundations of Mechanics* , Addison-Wesley Publishing Company , 1978.

[2] A. Ballesteros, A. Blasco, F.J. Herranz, J. de Lucas, C. Sardón, Lie-Hamilton systems on the plane: properties, classification and applications, pp. 1–37.

[3] G. W. Bluman, S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, Springer, New York, 1989.

[4] William M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry* (2nd ed.), Academic Press, 2002.

[5] Boris M Boubrov, Boris P Komrakov, Contact Lie algebras of vector fields on the plane, Vol. 3, (March 1999), pp. 1–20.

[6] Artemio González López, Niky Kamran, Peter J. Olver , Lie Algebras of vector fields in the real plane, (November 1990), pp. 339–368.

[7] Hermann, R., Sophus Lie's 1880 Transformation Group Paper.

[8] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, New York, 1987.

[9] N. Jacobson , *Lie Algebras*, Interscience New York, 1962.

[10] Jerrold E. Marsden, Tudor S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Summer, 1998.

[11] Peter J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (2nd ed.), Springer-Verlag, 1993.

[12] Peter J. Olver, *Equivalence, Invariants and Symmetry* , Cambridge , 2008.

[13] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, 1971.