"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Programa de Posgrado en Matemáticas

Propiedades topológicas en niveles y bloques de Whitney

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestra en Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Gabriela Lugo Alcántar

Directores de Tesis:

Dr. Javier Sánchez Martínez

M.C. Carlos A. Robles Corbalá

Hermosillo, Sonora, México, Agosto de 2023

SINODALES

Dra. Martha Guzmán Partida
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Genaro Hernández Mada
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

M.C. Carlos A. Robles Corbalá
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Javier Sánchez Martínez
Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla, México.

A mis padres.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento a los directores de esta tesis de maestría que sin ellos no hubiera sido posible su realización. A M.C Carlos Robles por creer en mi, por su constante apoyo y por la guía que me ha dado estos años, durante la licenciatura y la maestría. Al Dr. Javier Sánchez por su orientación, paciencia y apoyo que me ha brindado en este viaje que a pesar de la distancia geográfica, siempre estuvo presente. Gracias a ambos por ser mis directores de tesis, por compartir conmigo sus conocimientos, experiencias y entusiasmo.

Quiero agradecer a la Dra. Martha Guzmán y al Dr. Genaro Hernández por ser mis sinodales, por el tiempo que me han dedicado al leer este trabajo y por sus valiosas observaciones.

Agradezco a Conacyt por otorgarme la beca que hizo posible la realización de mis estudios de maestría. A la Universidad de Sonora y al programa de posgrado en matemáticas.

Gracias a mis padres, Gabriel Lugo y Dolores Alcántar, por estar para mí en cada momento, por su amor, paciencia y su guía. Sin su apoyo incondicional en todos los ámbitos de mi vida no hubiera podido llegar hasta aquí.

A mis amigos y compañeros por su paciencia y apoyo. Por siempre animarme y hacer que todo este proceso fuera más llevadero.

Sobre todo, agradezco al que ha hecho todo esto posible y me ha puesto en este camino. Gracias Dios por darme fortaleza y llenar mi vida de tan gratificantes momentos.

Índice general

Introducción

Un área importante de las matemáticas es la topología; esta disciplina se encarga de estudiar las propiedades de los espacios y las funciones continuas entre ellos. Entre sus líneas de investigación se encuentra la teoria de continuos e hiperespacios, a donde pertenece el presente estudio.

En 1978 Sam B. Nadler publica su libro titulado Hyperspaces of sets [17], siendo éste el primer libro dedicado a la teoría de hiperespacios. El presente trabajo está inspirado en el capítulo XVI de este libro el cual está enfocado en estudiar propiedades de Whitney y en la sección E de este mismo capítulo se estudian propiedades de Whitney reversibles.

El objetivo principal de este trabajo de tesis es estudiar propiedades topológicas de continuos que son propiedades de Whitney y propiedades de Whitney reversibles para niveles y bloques de Whitney, para ello haremos uso de las funciones de Whitney. En 1930, Hassler Whitney construyó funciones especiales en espacios de conjuntos con el propósito de estudiar familias de curvas [20] y más adelante en 1942, J.L Kelley encontró un uso importante de las funciones de Whitney en el estudio de los hiperespacios [13]. Al día de hoy, las funciones de Whitney nos permiten estudiar la estructura de los hiperespacios de continuos.

Este trabajo consta de cuatro capítulos los cuales describiremos a continuación.

En el primer capítulo damos una introducción a la teoría de continuos e hiperespacios con el propósito de familiarizarnos con los conceptos que estaremos utilizando. Introducimos el concepto de función de Whitney y vemos que estas funciones existen para el hiperespacio de los subcontinuos de un continuo, así mismo incluimos el concepto de arcos ordenados y algunos de sus resultados. También presentamos el concepto de nivel de Whitney y se prueba que este es un continuo, además mostramos algunas propiedades que tienen los niveles de Whitney y vemos como son los niveles de Whitney para el intervalo $[0, 1]$ y para la circunferencia S. Agregamos una sección donde presentamos las propiedades topológicas de continuos que estudiaremos así como algunos ejemplos de continuos que tienen estas propiedades. Por último en este primer capítulo, definimos lo que es una propiedad de Whitney, fuerte Whitney reversible y Whitney reversible. Cabe decir que en esta primera parte no incluimos todas las pruebas de los resultados pero sí agregamos la referencias de donde se puede consultar en caso de que el lector lo necesite.

El segundo capítulo está dedicado a estudiar propiedades de Whitney, es decir, veremos cuales de las propiedades topológicas de continuos que se mencionan en el capítulo uno son heredadas al nivel de Whitney. En este capítulo analizaremos las siguientes propiedades: ser continuo, ser arco, ser círculo, ser arco-conexo, ser descomponible, ser encadenable, ser tipo círculo propio, ser hereditariamente indescomponible, ser pseudo-arco y ser localmente conexo. Además agregamos una sección donde trabajamos con una propiedad conocida como propiedad cubriente la cual se originó en [14] con el propósito de probar que la propiedad de ser indescomponibles es una propiedad de Whitney para los continuos encadenables.

En el tercer capítulo se hace un estudio de las propiedades topológicas que los niveles de Whitney le heredan a un continuo, es decir, veremos que propiedades topológicas mencionadas en el capítulo uno son propiedades fuerte Whitney reversibles y cuales son propiedades de Whitney reversibles. Las propiedades que trataremos en este capítulos son: ser localmente conexo, no contener triodos, ser arco, ser círculo, ser unicoherente, ser indescomponible, no ser hereditariamente indescomponible, no ser pseudo-arco, no ser encadenable, no ser círculo, no ser arco-conexo, no ser localmente conexo, no ser indescomponible y encadenable, no contener arcos, no contener círculos, ser hereditariamente indescomponible, ser pseudo-arco, ser irreducible y tener la propiedad cubriente.

Por último en el cuarto capítulo realizamos una generalización del estudio de los niveles de Whitney al empezar a hacer un estudio acerca de los bloques de Whitney. Verificamos que los bloques de Whitney son continuos y vemos como son los bloques de Whitney cuando el continuo es el intervalo $[0,1]$, la circunferencia y un triodo simple. Este capítulo está dividido en dos partes, en la primera parte estudiamos propiedades de Whitney para los bloques de Whitney y en la segunda parte estudiamos propiedades fuerte Whitney reversibles y Whitney reversibles para los bloques de Whitney.

Cabe mencionar que al extendernos a estudiar propiedades topológicas con bloques de Whitney es meternos a un área bastante amplia. Por este motivo vamos a omitir la prueba de algunos resultados que aplicaremos para poder probar otros. Sin embargo, para cada uno de los resultados asumidos dejaremos sus referencias.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo presentaremos algunos conceptos y resultados que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Vamos a omitir las demostraciones de algunos resultados, sin embargo, daremos la referencia de donde se pueden consultar.

Definición 1.0.1. Un **continuo** X es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un **subcontinuo** Y de un continuo X es un continuo tal que $Y \subset X$. Diremos que un continuo es degenerado si consta de un solo punto.

Los **hiperespacios** son ciertas familias de subconjuntos de un continuo, con alguna característica particular. Para un continuo X los hiperespacios que consideraremos en este trabajo son:

El hiperespacio de cerrados de X

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

El hiperespacio de subcontinuos de X

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

El hiperespacio de singulares de X

$$F_1(X) = \{\{x\} \in 2^X : x \in X\}.$$

Observemos que los espacios $C(X)$ y $F_1(X)$ se definen como subespacios de 2^X, de manera que, para darle una métrica a los hiperespacios mencionados bastará con dársela a 2^X. La métrica de la que hablamos es conocida como la métrica de Hausdorff.

Definición 1.0.2. Sea X un continuo con métrica d. Dado $\epsilon > 0$, $x \in X$ y $A \in 2^X$ definimos:

(1) El **diámetro** de A como:

$$diam(A) = \sup\{d(a,b) : a, b \in A\}.$$

(2) La **bola abierta** de radio ϵ con centro en x como:

$$B_d(\epsilon, x) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}.$$

(3) La **nube** de radio ϵ con centro en A como:

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a,x) < \epsilon\}.$$

Una observación importante es que $N(\epsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_d(\epsilon, a)$.

(4) Se define la **métrica de Hausdorff** como la función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ como:

$$H(A,B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$$

para cualesquiera $A, B \in 2^X$.

El siguiente teorema afirma que la métrica de Hausdorff es una métrica para 2^X y la prueba la podemos encontrar en [12, Proposición 2.1, p. 22].

Teorema 1.0.3. Para cualquier continuo X, H es una métrica para 2^X.

El teorema anterior nos dice que 2^X es un espacio métrico y entonces también lo son sus subespacios por lo que todos los hiperespacios que definimos son espacios métricos con esta métrica. Un hecho importante es que todos los hiperespacios que definimos son continuos.

Mencionamos a continuación dos teoremas que muestran propiedades de las nubes. Las pruebas las podemos encontrar en [15, Teoremas 3.2.4 y 3.2.5, p. 28] respectivamente.

Una primera propiedad que presentamos de las nubes es que para cualquier cerrado que esté contenido en un abierto podemos encontrar toda una nube contenida en ese abierto.

Teorema 1.0.4. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X y $A \in 2^X$ tal que $A \subseteq U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subseteq U$.

Otra propiedad que tienen las nubes es que cualquier nube de un cerrado contiene una nube más pequeña de ese cerrado.

Teorema 1.0.5. Si $\delta < \epsilon$ y $B \in 2^X$, entonces $N(\delta, B) \subseteq N(\epsilon, B)$.

El resultado que presentamos a continuación es una propiedad bastante útil que tiene la métrica de Hausdorff ya que nos permite pasar de medir en 2^X a probar contenciones de subconjuntos de X. La demostración de este resultado se puede consultar en [15, Teorema 3.2.6, p. 29].

Teorema 1.0.6. Sea $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Entonces $H(A, B) < \epsilon$ si y sólo si, $A \subseteq N(\epsilon, B)$ y $B \subseteq N(\epsilon, A)$.

En 2^X también podemos trabajar con sucesiones. Veamos a continuación un criterio que nos permite conocer el comportamiento de las sucesiones en 2^X, su prueba se puede encontrar en [15, Teorema 3.3.3, p. 31].

Teorema 1.0.7. Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$ con la métrica de Hausdorff, donde $A, B \in 2^X$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) Si $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $A \subset B$.

(b) $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

(c) Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Además, definimos el límite superior y el límite inferior de una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en 2^X como sigue:

$$\liminf A_n = \{x \in X : \forall \epsilon > 0, B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para casi toda } n\}.$$

$$\limsup A_n = \{x \in X : \forall \epsilon > 0, B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para una infinidad de } n\text{'s}\}.$$

Una manera de caracterizar a los elementos del límite superior y del límite inferior de una sucesión en 2^X nos lo muestra el siguiente teorema. La prueba del mismo se puede consultar en [15, Teorema 3.5.6, p. 42].

Teorema 1.0.8. Para una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq 2^X$, se cumple que:

a) $x \in \liminf A_n$, si y sólo si, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $\lim x_n = x$ y $x_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $x \in \limsup A_n$ si y sólo si, existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$.

El motivo por el que incluimos las nociones de límite inferior y límite superior es ver la relación que tienen estos límites con la convergencia en 2^X con respecto a la métrica de Hausdorff. Esto lo muestra el siguiente teorema cuya prueba se puede consultar en [15, Teorema 3.5.7, p. 43].

Teorema 1.0.9. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X entonces $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge con la métrica de Hausdorff a $A \in 2^X$ si y sólo si, $A = \liminf A_n = \limsup A_n$.

El siguiente teorema nos permite conocer a los conjuntos cerrados y abiertos en 2^X generados a partir de conjuntos abiertos y cerrados en X. La prueba la podemos encontrar en [15, Capítulo 3.3, pp. 31-34].

Teorema 1.0.10. Sea A un subconjunto de X y consideremos las siguientes familias del hiperespacio 2^X:

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\}$$

$$\mathcal{D}(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\}$$

(1) Si A es abierto en X, entonces $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{D}(A)$ son abiertos en 2^X.

(2) Si A es cerrado en X, entonces $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{D}(A)$ son cerrados en 2^X.

A continuación presentamos un resultado importante que nos muestra una manera alternativa de dotar de una estructura topológica a 2^X sin utilizar a la métrica de Hausdorff, de hecho, nos presenta una topología en 2^X que es equivalente a la topología que induce la métrica de Hausdorff y la prueba la podemos encontrar en [15, Teorema 3.4.2, p. 35].

Sean X un continuo y $U_1, ..., U_n$ subconjuntos abiertos de X. Definimos un subconjunto **vietórico** como:

$$< U_1, ..., U_n >= \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para toda } i \in \{1, ..., n\}\}.$$

Teorema 1.0.11. Sea X un continuo. Consideremos la familia de subconjuntos de 2^X dada por

$$\mathcal{B} = \{< U_1, ..., U_n >: n \in \mathbb{N} \text{ y cada } U_i \text{ es abierto en } X\}.$$

Entonces $\mathcal{B}$ es una base que genera la misma topología que la dada por la métrica de Hausdorff. Esta topología es conocida como la topología de Vietoris.

Enseguida exponemos un lema conocido como el *lema de las orejas* que nos permite obtener subcontinuos de un continuo X. Este será de utilidad para probar próximos resultados.

Lema 1.0.12. (De las orejas). Si X es un continuo y $A \in C(X)$ tal que $X - A = U \cup V$ donde U y V son abiertos ajenos y no vacíos, entonces $A \cup U$ y $A \cup V$ son subcontinuos de X.

Demostración:
La prueba será por contradicción. Supongamos que $A \cup U$ no es conexo por lo que podemos escribir $A \cup U = K \cup L$ donde K y L son dos conjuntos separados, es decir, $\overline{K} \cap L = \emptyset = K \cap \overline{L}$.

Como A es conexo, $A \subseteq K$ ó $A \subseteq L$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \subseteq K$ con esto $L \subseteq U$. De esta manera

$$X = (A \cup U) \cup V = (K \cup L) \cup V = L \cup (V \cup K)$$

además $\overline{L} \cap (V \cup K) = \emptyset$ y $L \cap (V \cup \overline{K}) = \emptyset$ así tenemos que X no es conexo, por lo que llegamos a una contradicción.

Por lo tanto $A \cup U$ es conexo. De forma similar tenemos que $A \cup V$ es conexo.

Ahora sólo falta ver que $A \cup U$ y $A \cup V$ son cerrados, para esto notemos que $A \cup U = X - V$ y $A \cup V = X - U$, como U y V son abiertos tenemos que $X - V$ y $X - U$ son cerrados por lo que tenemos que $A \cup U$ y $A \cup V$ son cerrados.

■

Existen ciertas funciones importantes que involucran a los hiperespacios de continuos como es la función inducida la cual se presenta en el siguiente teorema y cuya prueba se puede encontrar en [15, Teorema 4.0.1, p. 50].

Teorema 1.0.13. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Se define la función $2^f : 2^X \to 2^Y$ como:

$$2^f(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Entonces:

(a) 2^f está bien definida.

(b) 2^f es continua.

(c) $2^f|_{C(X)} : C(X) \to C(Y)$.

(d) 2^f es inyectiva si y sólo si f es inyectiva.

(e) 2^f es sobreyectiva si y sólo si f es sobreyectiva.

Denotaremos $\hat{f} = 2^f|_{C(X)}$.

El siguiente resultado nos dice que la base de $C(X)$ que consta de los conjuntos unipuntuales es isométrico a X, la prueba se puede consultar en [15, Teorema 4.0.5, p. 54].

Teorema 1.0.14. La función $f : X \to F_1(X)$ dada por $f(x) = \{x\}$ es una isometría.

1.1. Funciones de Whitney

Para estudiar la estructura de los hiperespacios de continuos tenemos una herramienta muy importante que son las funciones de Whitney, estas funciones constituyen una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X.

Definición 1.1.1. Una **función de Whitney** es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

a) $\mu(\{x\}) = 0$, para cada $x \in X$.

b) Si $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Llamaremos función de Whitney para $C(X)$ a una función continua $\mu : C(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que cumplan las condiciones a) y b).

Observemos que como 2^X y $C(X)$ son compactos, la imagen de una función de Whitney está acotada. Por otra parte, la propiedad b) nos dice que una función de este tipo alcanza su valor máximo en X. Cuando X tiene más de un punto las condiciones a) y b) implican que $\mu(X) > 0$, así que podemos tomar la función de Whitney normalizada $\frac{\mu}{\mu(X)} : 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Esta nueva función sigue siendo de Whitney pero ahora tiene dos propiedades adicionales ya que $\frac{\mu}{\mu(X)}(X) = 1$ y su imagen está contenida en $[0, 1]$. Por lo que podemos pedir desde el principio que las funciones de Whitney cumplen la siguiente propiedad:

c) $\mu(X) = 1$.

A lo largo de este trabajo estaremos trabajando con funciones de Whitney normalizadas.

Lo primero que tenemos que ver es que las funciones de Whitney existen para poder empezar a trabajar con ellas por lo que presentamos el siguiente teorema, el cual es bastante importante y la prueba se encuentra en [12, Teorema 5.3, p. 74].

Teorema 1.1.2. En cualquier continuo es posible definir funciones de Whitney.

1.2. Arcos ordenados

Un concepto importante que hay en los hiperespacios de continuos son los arcos ordenados. En esta sección presentamos un resultado que nos garantiza la existencia de los arcos ordenados en $C(X)$ así como algunos resultados que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Definición 1.2.1. Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subset B$, un **arco ordenado** entre A y B es una función continua $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y si $0 \leq s < t \leq 1$ entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

A continuación presentamos un teorema muy importante que nos asegura la existencia de los arcos ordenados en $C(X)$ y la prueba la podemos encontrar en [12, Teorema 6.10, p. 90].

Teorema 1.2.2. Si A y B son subcontinuos de $C(X)$ con $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado de A a B contenido en $C(X)$.

El siguiente teorema establece que dados dos subcontinuos contenido uno en el otro, siempre podemos encontrar otro subcontinuo entre ellos. La demostración de este resultado se encuentra en [12, Teorema 6.10, p. 89].

Teorema 1.2.3. Si A y B son continuos de X tales que $A \subsetneq B$ entonces existe un subcontinuo C de X tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.

También contamos con un teorema que nos dice que si tenemos una función de Whitney, para cualquier valor entre dos elementos de su imagen podemos encontrar un subcontinuo que toma ese valor y su prueba se puede ver en [12, Lema 6.8, p. 89].

Teorema 1.2.4. Si A y B son subcontinuos de X tales que $A \subset B$, $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, entonces existe un subcontinuo C de X tal que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.

A continuación presentamos un resultado que es la versión para funciones de Whitney del teorema del valor intermedio del cálculo. Este resultado muestra que si tenemos una función continua y elegimos dos puntos en su imagen, entonces la función continua toma todos los posibles valores entre esos dos puntos, es decir, la función continua no da brincos en su imagen.

Teorema 1.2.5. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ de A a B tal que $\mu(Im\ \alpha) = [\mu(A), \mu(B)]$.

Demostración:
Por el teorema 1.2.2 tenemos que existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$, de manera que, $A = \alpha(0) \subseteq \alpha(r) \subseteq \alpha(1) = B$ para cada $r \in [0,1]$. Como μ es una función de Whitney tenemos que $\mu(A) \leq \mu(\alpha(r)) \leq \mu(B)$ para cada $r \in [0,1]$. De aquí obtenemos que $\mu(Im\ \alpha) \subseteq [\mu(A), \mu(B)]$.

Además, como $Im\ \alpha$ es conexo y μ es una función continua tenemos que $\mu(Im\ \alpha)$ es conexo. De esta manera, concluimos que $\mu(Im\ \alpha) = [\mu(A), \mu(B)]$.

∎

1.3. Niveles de Whitney

Como ya sabemos que existen las funciones de Whitney para $C(X)$, podemos ahora introducir un concepto que es fundamental en este trabajo: los niveles de Whitney.

Los niveles de Whitney son muy importantes para estudiar al hiperespacio de los subcontinuos $C(X)$. En esta sección presentamos propiedades que tienen los niveles de Whitney y veremos como son los niveles de Whitney para el intervalo $[0,1]$ y la circunferencia S.

Definición 1.3.1. Un **nivel de Whitney** para $C(X)$ es un conjunto de la forma:

$$\mu^{-1}(t) = \{A \in C(X) : \mu(A) = t\}$$

donde $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [0,1)$.

Notemos que $\mu^{-1}(0) = F_1(X)$ y $\mu^{-1}(1) = \{X\}$.

Una propiedad importante que tiene un nivel de Whitney es la que nos presenta el siguiente teorema cuya prueba se encuentra en [12, Teorema 8.1, p. 109].

Teorema 1.3.2. La unión de los elementos de un nivel de Whitney para $C(X)$ es igual a X.

A continuación mencionamos un teorema que nos da una manera de obtener cerrados en un continuo, la prueba de éste se puede consultar en [15, Teorema 6.2.5, p.83].

Teorema 1.3.3. Si $\mathcal{A} \subset 2^X$ es cerrado y no vacío, entonces $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$ es cerrado en X.

Más aún, se obtiene el siguiente resultado.

Lema 1.3.4. Si $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ es conexo, cerrado y $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$ entonces $\cup\mathcal{A} \in C(X)$.

Demostración:
Sabemos por el resultado anterior $\cup\mathcal{A}$ es cerrado. Mostremos que $\cup\mathcal{A}$ es conexo. Supongamos que $\cup\mathcal{A}$ no es conexo es decir, $\cup\mathcal{A} = M \cup N$ donde M y N son dos cerrados ajenos y no vacíos.

Como $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$ existe $A \in \mathcal{A} \cap C(X)$ y como $A \subseteq \cup\mathcal{A} = M \cup N$ entonces $A \subseteq M$ o $A \subseteq N$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \subseteq M$.

Sean

$$\mathcal{A}_1 = \{B \in \mathcal{A} : B \subseteq M\},$$

y

$$\mathcal{A}_2 = \{B \in \mathcal{A} : B \cap N \neq \emptyset\}.$$

De manera que, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$. También notemos que por el teorema 1.0.10 $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son cerrados ya que

$$\mathcal{A}_1 = \{B \in 2^X : B \subseteq M\} \cap \mathcal{A},$$

y

$$\mathcal{A}_2 = \{B \in 2^X : B \cap N \neq \emptyset\} \cap \mathcal{A}.$$

Además como $A \subseteq M$, $A \in \mathcal{A}_1$ así que $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$. Luego, como $\cup\mathcal{A} = M \cup N$ y $N \neq \emptyset$ existe $x \in N$ y $B \in \mathcal{A}$ tal que $x \in B$ así, $B \in \mathcal{A}_2$ por lo que $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Con esto tenemos que $\mathcal{A}$ es no conexo con lo que tenemos una contradicción.

Por lo tanto $\cup\mathcal{A}$ es conexo, de esta forma concluimos que $\cup\mathcal{A} \in C(X)$.

■

Buscando probar la arco-conexidad de los niveles de Whitney tenemos como un caso partícular cuando los elementos de un nivel de Whitney se intersectan, y esto lo podemos ver en el siguiente resultado.

Teorema 1.3.5. Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, $0 \leq t_0 < 1$ y $A, B \in \mu^{-1}(t_0)$. Si $C \in C(A)$ y $C \subseteq A \cap B$ entonces existe una trayectoria $\alpha \subseteq \mu^{-1}(t_0)$ con extremos A y B tal que para todo $L \in \alpha$ se cumple que $C \subseteq L \subseteq A \cup B$.

Demostración:
Como $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$ existen dos arcos ordenados $f, g : [0,1] \to C(X)$ tales que

$$f(0) = C = g(0),\ f(1) = A \text{ y } g(1) = B.$$

Sea $s \in [0,1]$. Definimos $h_s : [0,1] \to C(X)$ como $h_s(r) = f(s) \cup g(r)$. Notemos que h_s es una función continua y además

$$h_s(0) = f(s) \cup g(0) = f(s) \cup C \subseteq A$$

$$h_s(1) = f(s) \cup g(1) = f(s) \cup B \supseteq B$$

es decir, $\mu(h_s(0)) \leq \mu(A) = t_0 = \mu(B) \leq \mu(h_s(1))$, por el teorema del valor intermedio existe $r(s)$ tal que $t_0 = \mu(h_s(r(s))) = \mu(f(s) \cup g(r(s)))$.

Sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ como $\alpha(s) = f(s) \cup g(r(s))$.

Veamos que α está bien definida. Supongamos que r y $r(s)$ cumplen que

$$\mu(f(s) \cup g(r)) = \mu(f(s) \cup g(r(s))) = t_0.$$

Si $r < r(s)$, como g es un arco ordenado $f(s) \cup g(r) \subseteq f(s) \cup g(r(s))$ y así $f(s) \cup g(r) = f(s) \cup g(r(s))$. Si $r(s) < r$ es similar.

Por definición para cada $s \in [0,1]$, $\alpha(s) \in \mu^{-1}(t_0)$ y $C \subseteq \alpha(s)$. Notemos que

$$\alpha(0) = f(0) \cup g(r(0)) = C \cup g(r(0)) = g(r(0)) \subseteq B$$

y $\mu(g(r(0))) = t_0 = \mu(B)$ por tanto $g(r(0)) = \alpha(0) = B$. Ahora

$$\alpha(1) = f(1) \cup g(r(1)) = A \cup g(r(1))$$

y como $\mu(\alpha(1)) = t_0 = \mu(A)$ entonces $\alpha(1) = A$.

Mostraremos que $\alpha : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ es continua. Supongamos que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $[0,1]$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ y $\lim_{n\to\infty} \alpha(s_n) = K \in \mu^{-1}(t_0)$. Probemos que $K = \alpha(s)$.

Como el arco ordenado $f : [0,1] \to C(X)$ es una función continua entonces $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(s)$. Como $\{r(s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el compacto $[0,1]$ existe $\{r(s_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente, digamos que $\lim_{k\to\infty} r(s_{n_k}) = r$. También $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s$. De este modo

$$K = \lim_{k\to\infty} \alpha(s_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(s_{n_k}) \cup g(r(s_{n_k})) = f(s) \cup g(r) \in \mu^{-1}(t_0)$$

Por lo tanto $K = \alpha(s)$.

■

Presentamos a continuación el resultado principal de esta sección, que tiene como consecuencia que todo nivel de Whitney para $C(X)$ resulta ser un continuo.

Teorema 1.3.6. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, entonces los niveles de Whitney para $C(X)$ son continuos.

Demostración:
Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [0,1]$. Como μ es una función continua se tiene que $\mu^{-1}(t)$ es cerrado en $C(X)$ y como $C(X)$ es compacto tenemos que $\mu^{-1}(t)$ es compacto.

Falta probar que $\mu^{-1}(t)$ es conexo. Supongamos que $\mu^{-1}(t)$ no es conexo entonces existen $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos en $\mu^{-1}(t)$ tales que $\mu^{-1}(t) = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$.

Sean $K_0 = \bigcup_{K\in\mathcal{K}} K$ y $L_0 = \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$. Notemos que K_0 y L_0 son no vacíos y cerrados por el teorema 1.3.3. Además por el teorema 1.3.2 tenemos que

$$X = \bigcup_{A\in\mu^{-1}(t)} A = K_0 \cup L_0$$

.

Si probamos que K_0 y L_0 son ajenos tendríamos una contradicción puesto que X es conexo, lo que concluye que $\mu^{-1}(t)$ es conexo.

Supongamos que $K_0 \cap L_0 \neq \emptyset$ entonces existen $K \in \mathcal{K}$ y $L \in \mathcal{L}$ tales que $K \cap L \neq \emptyset$. Por el teorema 1.3.5 tenemos que existe una trayectoria $\alpha : [0,1] \to \mu^{-1}(t)$ que conecta a K con L, es decir, $\alpha(0) = K$ y $\alpha(1) = L$ pero $\alpha([0,1])$ es un conexo contenido en $\mu^{-1}(t) = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$ así que intersecta a $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$, lo cual es una contradicción. De esta manera concluimos que $K_0 \cap L_0 = \emptyset$ así $\mu^{-1}(t)$ es conexo.

Por lo tanto, los niveles de Whitney para $C(X)$ son continuos.

■

Con la información anterior podemos construir modelos geométricos para los niveles de Whitney para ciertos continuos.

Ejemplo 1.3.7. Veamos cómo son los niveles de Whitney para el continuo $X = [0,1]$ y $X = S$.

(1) Los niveles de Whitney para el intervalo $[0,1]$ son arcos.

Sea $\mu : C([0,1]) \to [0,1]$ una función de Whitney. Sea $t \in [0, \mu([0,1])]$ y $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$. Definimos $f : \mathcal{A} \to [0,1]$ por $f([a,b]) = a$. Veamos que f es una función continua en $[x_1, x_2] \in \mathcal{A}$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \epsilon$ tal que si $[y_1, y_2] \in \mathcal{A}$ se cumple que $H([x_1, x_2], [y_1, y_2]) < \delta$ entonces

$$[x_1, x_2] \subset N(\delta, [y_1, y_2]) = \bigcup_{y \in [y_1, y_2]} B(\delta, y)$$

$$[y_1, y_2] \subset N(\delta, [x_1, x_2]) = \bigcup_{x \in [x_1, x_2]} B(\delta, x)$$

.

De la primera contención tenemos que para toda $x^* \in [x_1, x_2]$ existe $y \in [y_1, y_2]$ tal que $|x^* - y| < \delta$. Por otro lado, supongamos que $x_1 \leq y_1$. Entonces para cada $y \in [y_1, y_2]$ se tiene que $|x_1 - y_1| \leq |x_1 - y|$. Escojamos $y_0 \in [y_1, y_2]$ tal que $|x_1 - y_0| < \delta$ entonces

$$|f([x_1, x_2]) - f([y_1, y_2])| = |x_1 - y_1| \leq |x_1 - y_0| < \delta = \epsilon.$$

De manera análoga se hace para $x_1 > y_1$. Como $[x_1, x_2]$ fue arbitrario, se sigue que f es continua en $\mathcal{A}$.

Para probar que f es inyectiva, tomemos dos elementos $[a,b], [c,d] \in \mathcal{A}$ tales que $f([a,b]) = f([c,d])$ entonces $a = c$ por lo que $[a,b] \subset [c,d]$ o $[c,d] \subset [a,b]$. Y ya que ambos conjuntos están en $\mathcal{A}$ la contención no puede ser propia pues si $[a,b] \subsetneq [c,d]$ entonces $\mu([a,b]) < \mu([c,d])$ así tenemos que $t < t$ lo cual es una contradicción. Por lo que $[a,b] = [c,d]$. Por lo tanto f es inyectiva.

Notemos que $Im\, f \subset [0,1]$. Además $\mathcal{A}$ es cerrado en $C([0,1])$ el cual es compacto, por lo que $\mathcal{A}$ también y por tanto $Im\, f$ también lo es, así $f : \mathcal{A} \to Im\, f$ es una función cerrada por lo que f es un homeomorfismo.

Sea $b_0 = \text{máx}\, Im\, f$. Veamos que $Im\, f = [0, b_0]$. Como $b_0 = \text{máx}\, Im\, f$ tenemos que $Im\, f \subset [0, b_0]$ y existe un elemento en $\mathcal{A}$ de la forma $[b_0, b] \subset [b_0, 1]$. Queremos probar que $[0, b_0] \subset Im\, f$.

Sea $a \in [0, b_0]$. Consideremos la función $\gamma : [a, 1] \to C([0, 1])$ dada por $\gamma(s) = [a, s]$. La función γ es continua en $x \in [a, 1]$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \epsilon$ tal que si $y \in [a, 1]$ se cumple que $|x - y| < \delta$. Notemos que

$$x - y \leq |x - y| < \epsilon \qquad y - x \leq |x - y| < \epsilon.$$

Esto es equivalente a que

$$x < y + \epsilon \qquad y < x + \epsilon.$$

De ambas desigualdades se sigue que

$$[a, x] \subset [a - \epsilon, y + \epsilon] = \bigcup_{c \in [a,y]} B(\epsilon, c) = N(\epsilon, [a, y])$$

$$[a, y] \subset [a - \epsilon, x + \epsilon] = \bigcup_{d \in [a,x]} B(\epsilon, d) = N(\epsilon, [a, x])$$

.

Entonces

$$H(\gamma(x), \gamma(y)) = H([a, x], [a, y]) < \epsilon.$$

Como x es arbitrario se sigue que γ es continua en $[a, 1]$.

Observemos que

$$\mu(\gamma(a)) = \mu([a, a]) = \mu(\{a\}) = 0$$
$$\mu(\gamma(1)) = \mu([a, 1]) > \mu([b_0, b]) = t.$$

Esto último es porque $[b_0, b] \subset [a, 1]$. Así tenemos que $\mu(\gamma(a)) < t < \mu(\gamma(1))$. Aplicando el teorema de valor intermedio obtenemos que existe $s \in [a, 1]$ tal que $\mu(\gamma(s)) = t$, es decir, $\mu([a, s]) = t$. De manera que existe $[a, s] \in \mathcal{A}$ tal que $f([a, s]) = a$. Por tanto $a \in Im\, f$. Así $[0, b_0] \subset Im\, f$.

Por tanto $Im\, f = [0, b_0]$. De aquí que $f : \mathcal{A} \to [0, b_0]$ es un homeomorfismo por tanto $\mathcal{A}$ es homeomorfo a un arco.

(2) Los niveles de Whitney para una circunferencia S son homeomorfos a S.

Sea $\mu : C(S) \to S$ una función de Whitney. Sea $t \in [0, \mu(S)]$ y $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$. Mostraremos que $\mathcal{A}$ es homeomorfo a S.

Definamos $f : \mathcal{A} \to S$ por $f(A) =$ punto medio de A. Parametricemos la circunferencia por $h : [0, 2\pi] \to S$ por $h(l) = (\cos l, \sin l)$. Sea $B \in \mathcal{A}$ con $B \neq S$, B un arco con extremos P y Q, lo cual denotaremos por, $B = [P, Q]$, donde $P = h(t_1)$ y $Q = h(t_2)$ con $t_1 < t_2$. Notemos que la longitud de arco B es

$$\mathcal{L}(B) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(-\sin(l))^2 + (\cos(l))^2}\, dl = \int_{t_1}^{t_2} 1\, dl = t_2 - t_1$$

Así

$$f(B) = (\cos(\tfrac{t_2 - t_1}{2}), \sin(\tfrac{t_2 - t_1}{2})).$$

Veamos que f es continua. Sea $A \in \mathcal{A}$ y $A \neq S$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A. Si probamos que $f(A_n)$ converge a $f(A)$ tendremos que f es una función continua.

Como la longitud del arco A, $\mathcal{L}(A) = t_2 - t_1$, es una función continua tenemos que $\mathcal{L}(A_n)$ converge a $\mathcal{L}(A)$, es decir, $t_2^n - t_1^n$ converge a $t_2 - t_1$, donde $t_2^n - t_1^n$ es la longitud de A_n para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, obtenemos $f(A_n) = (\cos(\frac{t_2^n - t_1^n}{2}), \sin(\frac{t_2^n - t_1^n}{2}))$ converge a $(\cos(\frac{t_2 - t_1}{2}), \sin(\frac{t_2 - t_1}{2})) = f(A)$. Así tenemos que $f(A_n)$ converge a $f(A)$, por tanto, f es continua.

Ahora veamos que f es inyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{A}$ con $A = [R, S]$ y $B = [P, Q]$ donde $h(t_1) = R$, $h(t_2) = S$ con $t_1 < t_2$ y $h(t_1') = P$, $h(t_2') = Q$ con $t_1' < t_2'$.

Supongamos que $f(A) = f(B)$, así tenemos que $(\cos(\frac{t_2 - t_1}{2}), \sin(\frac{t_2 - t_1}{2})) = (\cos(\frac{t_2' - t_1'}{2}), \sin(\frac{t_2' - t_1'}{2}))$, luego $\frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{t_2' - t_1'}{2}$ y claramente $t_2 - t_1 = t_2' - t_1'$, así que los arcos tienen el mismo punto medio y son de igual longitud, de aquí que $[R, S] \subset [P, Q]$ y $[P, Q] \subset [R, S]$. Además como $[R, S], [P, Q] \in \mathcal{A}$ tenemos que $\mu([R, S]) = t = \mu([P, Q])$ por lo que la contención de los arcos no puede ser propia pues tendríamos una contradicción. Así $[R, S] = [P, Q]$, es decir, $A = B$. Por tanto f es inyectiva.

Notemos que $f(\mathcal{A}) \subset S$. Como $\mathcal{A}$ es compacto, $f(\mathcal{A})$ también es compacto y $f : \mathcal{A} \to f(\mathcal{A})$ es un homeomorfismo. Probemos que $f(\mathcal{A}) = S$, para esto nos hace falta ver que $S \subset f(\mathcal{A})$.

Sea $p \in S$ y

$$\beta = \{\{p\}, S\} \cup A(p)$$

donde $A(p) = \{A \in C(S) : A$ es un arco con p como punto medio$\}$.

El conjunto β puede ser parametrizado como un arco ordenado. Sea $\alpha_1 : [0, 1] \to C(S)$ un arco ordenado que va de $\{p\}$ a S. Definamos $\alpha_2 : \alpha_1 \to \beta$ de la siguiente forma, para $A \in \alpha_1$ existe $t \in [0, 1]$ tal que $\alpha_1(t) = A$ y $\alpha_2(A) = B$ donde $B \in \beta$. Así $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1 : [0, 1] \to C(S)$ es un arco ordenado que va de $\{p\}$ a S tal que $\alpha([0, 1]) = \beta$.

Notemos que $\mu \circ \alpha : [0, 1] \to S$ es una función continua y $0 = \mu(\alpha(0)) < t < \mu(\alpha(1)) = 1$. Aplicando el teorema del valor intermedio a $\mu \circ \alpha$ obtenemos que existe $s \in [0, 1]$ tal que

$\mu(\alpha(s)) = t$. Así $\alpha(s)$ es un arco con p como punto medio tal que $\alpha(s) \in \mathcal{A}$. Por tanto, $p = f(\alpha(s)) \in f(\mathcal{A})$. De modo que $S \subset f(\mathcal{A})$. Así tenemos que $f(\mathcal{A}) = S$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es homeomorfo a S.

Otro resultado que tenemos acerca de los niveles de Whitney es el siguiente, el cual nos dice que si tomamos dos elementos de un nivel de Whitney donde uno está metido en la nube del otro entonces estos elementos se encuentran cercanos.

Lema 1.3.8. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t_0 \in (0,1)$ entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in \mu^{-1}(t_0)$ y $B \subseteq N(\delta, A)$ se tiene que $H(A,B) < \epsilon$.

Demostración:
Hagamos la prueba por contradicción. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ existen $A_n, B_n \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $B_n \subseteq N(\frac{1}{n}, A_n)$ y $H(A_n, B_n) \geq \epsilon$.

Como $\mu^{-1}(t_0)$ es compacto podemos suponer que las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen, es decir, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ con $A, B \in \mu^{-1}(t_0)$.

Por la continuidad de la métrica de Hausdorff, $H(A,B) \geq \epsilon$ y $B \subset A$ entonces, $B \subsetneq A$ y $t = \mu(B) < \mu(A) = t$ con lo que llegamos a una contradicción.

■

Unas funciones importantes en el estudio de los hiperespacios de continuos son las funciones monótonas, las cuales definiremos a continuación.

Definición 1.3.9. Una función continua y sobreyectiva entre espacios topológicos $f : X \to Y$ es llamada **función monótona** si $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$.

A continuación ofrecemos una manera equivalente de caracterizar a una función monótona.

Teorema 1.3.10. Una función continua y sobreyectiva definida entre continuos $f : X \to Y$ es monótona si y sólo si para todo $A \in C(Y)$, $f^{-1}(A) \in C(X)$.

Demostración:
$(\Leftarrow)$ Si $y \in Y$ entonces $\{y\} \in F_1(Y) \subseteq C(Y)$ y así $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$ es conexo y por tanto f es monótona.

$(\Rightarrow)$ Sea $A \in C(Y)$. Por contradicción, supongamos que $f^{-1}(A)$ no es conexo así $f^{-1}(A) = K \cup L$ donde K y L son cerrados ajenos y no vacíos.

Como f es sobreyectiva, $A = f(f^{-1}(A)) = f(K \cup L) = f(K) \cup f(L)$ donde $f(K)$ y $f(L)$ son cerrados.

Si $p \in f(K) \cap f(L)$ entonces existe $K_1 \in K$ y $L_1 \in L$ tales que $f(K_1) = p = f(L_1)$.

Como $p \in A$, $f^{-1}(p) \subseteq f^{-1}(A) = K \cup L$ también sabemos que $K_1 \in f^{-1}(p) \cap K$, $L_1 \in f^{-1}(p) \cap L$ y $K \cap L = \emptyset$ entonces $f^{-1}(p)$ no es conexo lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $f^{-1}(A) \in C(X)$. ∎

1.4. Propiedades topológicas

Uno de los principales objetivos al trabajar con continuos es estudiar sus propiedades topológicas. En esta sección mencionaremos las propiedades topológicas con las que trabajaremos en los capítulos posteriores.

Definición 1.4.1. Un espacio topológico X es **arco-conexo** si para cualquier par de puntos $p, q \in X$ existe un arco que los conecta. Es decir, para cada par de puntos distintos $p, q \in X$, existe un homomorfismo $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$.

Notemos que no todos los continuos son arco-conexos, un ejemplo de esto es el siguiente.

Consideremos $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\}$ entonces $X = \overline{W}$ es un continuo llamado la curva senoidal del topólogo.

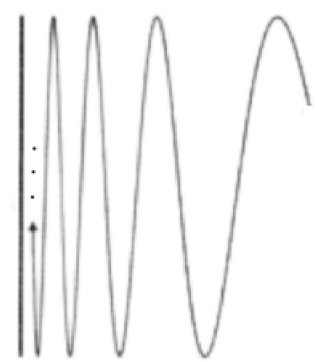


Figura 1.1: Curva senoidal del topólogo

$\overline{W}$ no es arco-conexo desde que no existe un arco $f : [0,1] \to \overline{W}$ que conecte a los puntos $(1, sen(1))$ y $(0,0)$.

Definición 1.4.2. Un espacio topológico X es **conexo por trayectorias** si para cualquier par de puntos $p, q \in X$ existe $\sigma : [0,1] \to X$ una función continua tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma(1) = q$.

Una relación importante entre los dos conceptos presentados arriba es que, en los espacios Hausdorff, ser conexo por trayectorias es equivalente a ser arco-conexo como se indica en [12, p. 92].

Además recordemos que si un espacio es conexo por trayectorias entonces es conexo. Este resultado se puede ver [4, Teorema 8.30, p. 283].

Definición 1.4.3. Un continuo X es **descomponible** si existen $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $X = A \cup B$. Y diremos que un continuo X es **indescomponible** si X no es descomponible.

Además, llamaremos a un continuo X **hereditariamente indescomponible** si para todo $A \in C(X)$ se tiene que A es indescomponible.

El intervalo $[0,1]$ así como cualquier arco es un continuo descomponible. Observemos que tenemos varias maneras de descomponer este continuo, una de ellas es tomando $A = [0, \frac{1}{2}]$ y $B = [\frac{1}{4}, 1]$ donde A y B son subcontinuos propios de $[0,1]$ y $A \cup B = [0,1]$.

Así mismo la curva senoidal del topólogo $\overline{W}$ que definimos anteriormente es un continuo descomponible. Una forma de descomponerlo es tomando $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\} \cup \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \frac{1}{2}]\}$ y $B = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\frac{1}{3}, 1]\}$, de esta manera A y B son dos subcontinuos propios de $\overline{W}$ tales que $A \cup B = \overline{W}$.

Dar ejemplos de continuos indescomponibles es un poco más complicado, pero podemos mencionar al arcoiris de Knaster cuya construcción se puede consultar en [12, p. 16].

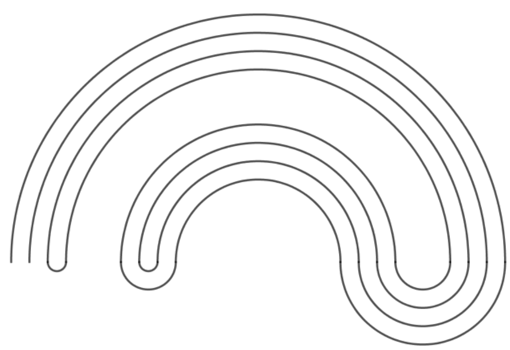


Figura 1.2: Arcoiris de Knaster

Si describir continuos indescomponibles es complejo, lo es aún más para los continuos hereditariamente indescomponibles. Un continuo famoso que es hereditariamente indescomponible es el pseudo-arco.

A continuación nos enfocaremos en estudiar un poco a los continuos encadenables.

Definición 1.4.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Una familia $\{U_1, ..., U_n\}$ de subconjuntos de X es llamada una **cadena simple** en X si se cumple que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. A cada U_i se le llama eslabón de la cadena simple.

Una cadena simple $\mathcal{C}$ de conjuntos abiertos en X es llamada una $\epsilon-$**cadena** si el diámetro de cada eslabón es menor que ϵ.

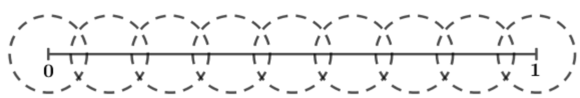
Definición 1.4.5. Un continuo X se llama **encadenable** si para todo $\epsilon > 0$ existe una familia finita de abiertos $\{U_1, ..., U_n\}$ de X tales que $X = \cup_{i=1}^{n} U_i$, $diam\ (U_i) < \epsilon$ para cada $i = 1, ..., n$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

Ejemplo 1.4.6. Un ejemplo de un continuo encadenable es el intervalo $[0, 1]$.

Si $\epsilon > 0$, elegimos una partición $P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = 1\}$ tal que $|x_i - x_{i-1}| < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $i = 1, ..., n$. Sean

$$U_1 = (x_0 - \tfrac{1}{2}x_1, x_0 + \tfrac{3}{4}x_1), ..., \ U_i = (x_{i-1} - \tfrac{1}{2}x_1, x_{i-1} + \tfrac{3}{4}x_1), ..., \ U_{n+1} = (1 - \tfrac{1}{2}x_1, 1 + \tfrac{3}{4}x_1)$$

De esta manera tenemos que la familia $\{U_1, ..., U_{n+1}\}$ cubre al $[0, 1]$, $diam(U_i) < \epsilon$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.



Otra manera de describir a los continuos encadenables es con funciones continuas que llamaremos $\epsilon-$funciones las cuales definimos a continuación.

Definición 1.4.7. Dados dos espacios métricos X y Y y $\epsilon > 0$, diremos que una función continua $f : X \to Y$ es una $\epsilon-$**función** si $diam\ f^{-1}(y) < \epsilon$ para $y \in Y$.

Enseguida, mostraremos algunos resultados que nos permitirán expresar a los continuos encadenables en términos de $\epsilon-$funciones.

Empecemos con un lema que nos permite acomodar todos los puntos de un espacio métrico conexo en un intervalo de tal manera que cada que tenemos dos cerrados ajenos, estos son mandados a los extremos del intervalo.

Lema 1.4.8. Si X es un espacio métrico conexo y $A, B \in X$ son dos cerrados ajenos y no vacíos, entonces existe $f : X \to [0, 1]$ una función continua y sobreyectiva tal que $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) = B$.

Demostración:
Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}.$$

Notemos que esta función está bien definida ya que $d(x, A) + d(x, B) \neq 0$ pues A y B son ajenos. También es una función continua puesto que la función distancia es continua.

Además f cumple que, $f(x) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{A}$ y $f(x) = 1$ si y sólo si $x \in \overline{B}$. De aquí tenemos que para cada $x \in X$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Como X es conexo, $f(X)$ es un subespacio conexo de $[0, 1]$ y $0, 1 \in f(X)$ así que $f(X) = [0, 1]$ por lo que f es una función sobreyectiva.

De esta manera tenemos que la función que definimos $f : X \to [0, 1]$ es una función continua, sobreyectiva que cumple que $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) = B$.

∎

El siguiente resultado muestra que si tenemos una cadena de abiertos que cubre a un continuo, la cerradura de sus eslabones no se pueden intersectar si la distancia entre sus índices es mayor o igual a 3.

Lema 1.4.9. Si X es un continuo y $\mathcal{L} = \{V_1, ..., V_k\}$ es una cadena de abiertos que cubren a X entonces $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ si $|i - j| \geq 3$.

Demostración:
Supongamos que existen $i, j \in \{1, .., k\}$ tal que $|i - j| \geq 3$, $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} \neq \emptyset$.

Sea $p \in \overline{V_i} \cap \overline{V_j}$. Sea l tal que $p \in V_l$. Con esto, $V_l \cap \overline{V_i} \neq \emptyset \neq V_l \cap \overline{V_j}$.

Como $p \in V_l \cap \overline{V_i}$ y V_l es abierto por definición de cerradura tenemos que $V_l \cap V_i \neq \emptyset$. Similarmente $V_l \cap V_j \neq \emptyset$. De aquí que $|i - l| \leq 1$ y $|l - j| \leq 1$, y por la desigualdad del triángulo $|i - j| \leq |i - l| + |l - j| \leq 2$ con lo que llegamos a una contradicción.

∎

Aún más, el siguiente resultado nos permite construir una cadena que cubre a un continuo de tal manera que la cerradura entre sus eslabones no se intersecten si sus índices están a distancia dos o más.

Lema 1.4.10. Sea X un continuo encadenable. Si $\epsilon > 0$ entonces existe $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ una $\epsilon-$cadena que cubre a X y $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ si $|i - j| \geq 2$.

Demostración:
Como X es encadenable existe una $\frac{\epsilon}{2}-$cadena $\mathcal{L} = \{V_1, ..., V_k\}$ que cubre a X donde $k \geq 2$.

Sea $m = \max\{i \in \mathbb{N} : 2i \leq k\}$. Como $k \geq 2$, $m \geq 1$.

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ sea $U_i = V_{2i-1} \cup V_{2i}$. Si k es par tomamos la cadena $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_m\}$. Si k es impar, llamamos $U_{m+1} = V_k$ y tomamos la cadena $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_m, U_{m+1}\}$.

Notemos que para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $diam(V_i) \leq \frac{\epsilon}{2}$ así que $diam(U_i) = diam(V_{2i-1} \cup V_{2i}) \leq \epsilon$, de aquí tenemos que la familia $\mathcal{C}$ es una $\epsilon-$cadena que cubre a X. Por el lema anterior, $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ si $|i - j| \geq 3$ así que $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ si $|i - j| \geq 2$.

■

Posteriormente mostraremos una propiedad que cumplen las $\epsilon-$funciones cuando están definidas en espacios métricos compactos como es el caso de los continuos.

Lema 1.4.11. Supongamos que existe una $\epsilon-$función entre continuos, $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $Z \subset Y$ y $diam(Z) < \delta$ entonces $diam(f^{-1}(Z)) < \epsilon$.

Demostración:
Primero mostremos el resultado considerando únicamente subconjuntos cerrados de Y.

Hagamos la prueba por contradicción. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $B_n \subset Y$ un subconjunto cerrado tal que $diam(B_n) < \frac{1}{n}$ y $diam(f^{-1}(B_n)) \geq \epsilon$.

Como 2^Y es compacto, podemos suponer que la sucesión $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a B en 2^Y. En este caso, ya que la función diámetro es continua, $diam(B) = 0$, esto quiere decir que, B debe ser un conjunto unipuntual digamos $B = \{q\}$.

Por otra parte, como $diam(f^{-1}(B_n)) \geq \epsilon$ tenemos que $diam(f^{-1}(B)) = diam(f^{-1}(\{q\})) \geq \epsilon$ lo cual nos lleva a una contradicción.

Por tanto, existe $\delta' > 0$ tal que si Z es un conjunto cerrado en Y y $diam(Z) < \delta'$ entonces $diam(f^{-1}(Z)) < \epsilon$.

Tomando a $\delta = \frac{\delta'}{2} > 0$ y K un subconjunto de Y tal que $diam(K) < \delta$ entonces $diam(\overline{K}) \leq \delta < \delta'$ así que $diam(f^{-1}(K)) \leq diam(f^{-1}(\overline{K})) < \epsilon$.

■

Definición 1.4.12. Diremos que un continuo X es **tipo arco** si para cada $\epsilon > 0$ existe $f : X \to [0, 1]$ una $\epsilon-$ función sobreyectiva .

En breve, presentamos una manera equivalente de enunciar a los continuos encadenables. A partir de aquí va a ser indistinto referirnos a los continuos encadenables como en la definición 1.4.4 o con $\epsilon-$funciones sobreyectivas que van al intervalo. Además por la definición anterior y la siguiente caracterización podemos llamar a los continuos encadenables como continuos tipo arco.

Teorema 1.4.13. Un continuo X es encadenable si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $f : X \to [0, 1]$ una $\epsilon-$función sobreyectiva.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que X es encadenable y sea $\epsilon > 0$. Sea $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ una $\frac{\epsilon}{2}-$cadena que cubre a X tal que $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ si $|i-j| \geq 2$. Podemos suponer que $n \geq 3$.

Sea $m = \text{máx}\{i \in \mathbb{N} : 2i - 1 \leq n\}$. Como $n \geq 3$, $m \geq 2$. Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ sea $M_i = \overline{U_{2i-1}} \cup \overline{U_{2i}} \cup \overline{U_{2i+1}}$. Notemos que $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ si $|i-j| \leq 1$. Y para cada $i \in \{1, ..., m\}$ definimos I_i como $I_i = [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$.

Por la elección de $\mathcal{C}$, $\overline{U_{2i-1}} \cap \overline{U_{2i+1}} = \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$ así que por el lema 1.4.7 se tiene que existe una función $f_i : M_i \to I_i$ tal que $f_i^{-1}(\frac{i-1}{m}) = \overline{U_{2i-1}}$ y $f_i^{-1}(\frac{i}{m}) = \overline{U_{2i+1}}$.

Sea $f : X \to [0, 1]$ como:

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \in M_i \\ 1 & \text{si } x \in \overline{U_n}. \end{cases}$$

Como cada f_i es continua, f es continua. Como X es conexo, $f(X)$ también es conexo y como $0, 1 \in f(X)$ tenemos que f es sobreyectiva.

Por otro lado, si $r \in [0, 1)$ entonces $f^{-1}(r) \subset \overline{U_j}$ para algún j, esto quiere decir que, $diam(f^{-1}(r)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Luego, si n es impar entonces $f^{-1}(1) = \overline{U_n}$. Si n es par entonces $f^{-1}(1) = \overline{U_n} \cup \overline{U_{n-1}}$. En cualquier caso, $diam(f^{-1}(1)) \leq \epsilon$. Por lo tanto, f es una $\epsilon-$función.

($\Leftarrow$) Supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existe $f : X \to [0, 1]$ una $\epsilon-$función sobreyectiva.

Sea $\delta > 0$ tal que si $A \subseteq [0, 1]$ y $diam(A) < \delta$ entonces por el lema 1.4.10 $diam(f^{-1}(A)) < \epsilon$.

Como $[0, 1]$ es encadenable existe una $\delta-$cadena $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ que cubre a $[0, 1]$. Sea $\mathcal{L} = \{f^{-1}(U_1), ..., f^{-1}(U_n)\}$.

Notemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $diam(f^{-1}(U_i)) < \epsilon$, cada $f^{-1}(U_i)$ es abierto ya que f es continua y también $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \neq \emptyset$ si $|i-j| \leq 1$. Y como f es sobreyectiva tenemos que $\mathcal{L}$ cubre a X, por lo tanto X es encadenable.

■

De manera similar, con $\epsilon-$funciones podemos definir a los continuos tipo círculo.

Definición 1.4.14. Diremos que un continuo X es **tipo círculo** si para cada $\epsilon > 0$ existe una $\epsilon-$función sobreyectiva $f : X \to S$. Además diremos que un continuo es **tipo círculo propio** si es un continuo tipo círculo que no es encadenable.

Definición 1.4.15. Un **pseudo-arco** es un continuo hereditariamente indescomponible y encadenable.

Definición 1.4.16. Si X es un espacio topológico y $p \in X$, decimos que X es **localmente conexo en** p si para todo abierto U de X tal que $p \in U$, existe un abierto conexo V tal que $p \in V \subseteq U$. Si X es localmente conexo para todo p en X diremos que X es localmente conexo.

El arco, la circunferencia, las $n-$celdas y en general las gráficas finitas son continuos localmente conexos. Por otro lado, la curva senoidal del topólogo no es un continuo localmente conexo ya que los abiertos de cualquier punto en $\{0\} \times [-1, 1]$ no son conexos.

Definición 1.4.17. Un continuo X es llamado **triodo** si existe $A \in C(X)$ tal que $X - A$ tiene al menos tres componentes.

Claramente el triodo simple es un triodo, pero también lo es el continuo $F = \cup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} B_i$ donde $B_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$ y $B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = \frac{x}{n}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El continuo F es llamado abanico armónico y es un triodo puesto que $F - \{(0, 0)\}$ tiene al menos tres componentes.

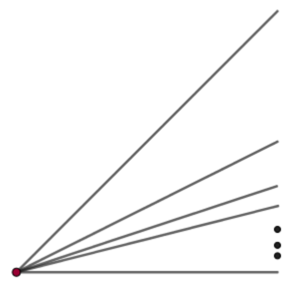


Figura 1.3: Abanico armónico

Así mismo, una 2−celda $X = [0, 1]^2$ es un triodo ya que podemos encontar un subcontinuo A tal que $X - A$ tenga al menos tres componentes como se muestra en la figura 1.4.

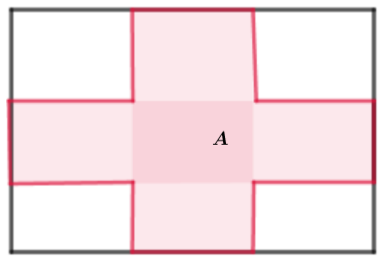


Figura 1.4

Definición 1.4.18. Un continuo X se dice ser **unicoherente** si para todo $A, B \in C(X)$ con $X = A \cup B$ se cumple que $A \cap B \in C(X)$.

El intervalo $[0, 1]$ así como la curva senoidal del topólogo que describimos anteriormente son continuos unicoherentes, de igual modo, podemos encontrar continuos que no lo son como es el caso de la circunferencia S. En efecto, en la figura 1.5, podemos ver que A y B son dos subcontinuos propios de S tales que $S = A \cup B$ y $A \cap B = \{p, q\}$ que no es un conjunto conexo.

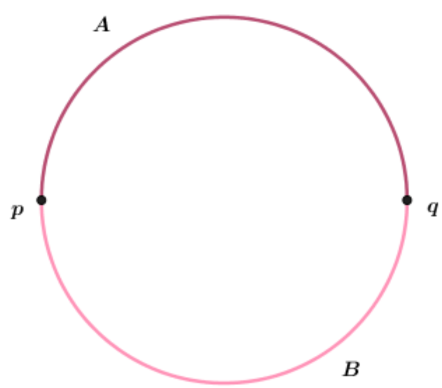


Figura 1.5

Definición 1.4.19. Un continuo X se llama **irreducible** si existen $p, q \in X$ tales que si $C \in C(X)$ y $p, q \in C$ entonces $C = X$. En este caso escribiremos $X = Irr(p, q)$.

Notemos que si $X = [0, 1]$ entonces $X = Irr(0, 1)$. También la curva senoidal del topólogo $\overline{W}$ es un continuo irreducible, basta considerar un punto en $\{0\} \times [-1, 1]$ y el punto $(1, sen(1))$. En cambio, la circunferencia, los $n-$odos simples y el abanico armónico son continuos que no son irreducibles.

1.5. Propiedades de Whitney y propiedades de Whitney reversibles

Definición 1.5.1. Sea P una propiedad topológica. Entonces P se dice ser:

i) **De Whitney** si para cada continuo X y cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ se tiene que, si X cumple P entonces $\mu^{-1}(t)$ cumple P para toda $t \in (0, 1)$.

ii) **De Whitney reversible** si para cada continuo X y cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ se tiene que, si $\mu^{-1}(t)$ cumple P para toda $t \in (0, 1)$ entonces X cumple P.

iii) **Fuerte Whitney reversible** si para cada continuo X para el cual existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ y existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $(0, 1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ cumple P para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X cumple P.

En los próximos capítulos veremos cuáles propiedades topológicas son propiedades de Whitney y cuáles son propiedades de Whitney reversibles.

Capítulo 2

Propiedades de Whitney

En este segundo capítulo estudiaremos propiedades de Whitney, analizaremos las propiedades topológicas que mencionamos en la sección 1.5 y veremos cuáles de éstas son heredadas a los niveles de Whitney por un continuo.

Veremos que la propiedad de ser continuo, ser arco, ser círculo, ser arco-conexo, ser descomponible, ser encadenabe, ser tipo círculo propio, ser encadenable e indescomponible y ser localmente conexo son propiedades de Whitney. Además agregamos una sección dedicada a la propiedad cubriente donde se prueba que ser indescomponible es una propiedad de Whitney cuando el continuo tiene la propiedad cubriente.

En la sección 1.3 mostramos algunas propiedades que tienen los niveles de Whitney, entre éstas se probó en el teorema 1.3.6 que todo nivel de Whitney para $C(X)$ es un continuo, como consecuencia de ello presentamos una primera propiedad de Whitney.

Teorema 2.0.1. La propiedad de ser un continuo es una propiedad de Whitney.

2.1. Arco-conexidad

En esta sección estudiaremos la arco-conexidad en continuos. Veremos que la propiedad de ser arco, ser círculo y ser arco-conexo son propiedades de Whitney.

Teorema 2.1.1. La propiedad de ser arco es una propiedad de Whitney.

Demostración:
Sea $\mu : C([0,1]) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu([0,1])]$. Notemos que cada elemento de $\mu^{-1}(t)$ es un arco.

Definimos $f : \mu^{-1}(t) \to [0,1]$ por $f(A) = \min A$, la cual es una función continua.

Además es una función inyectiva ya que, si tomamos $A, B \in \mu^{-1}(t)$ de tal manera que $f(A) = f(B)$ entonces A y B son de la forma $A = [a, b]$ y $B = [a, c]$ por lo que $A \subset B$ o $B \subset A$. Puesto que $\mu(A) = \mu(B)$ obtenemos que $A = B$.

Notemos que $f(\mu^{-1}(t)) \subset [0, 1]$. Además $\mu^{-1}(t)$ es compacto y por tanto $f(\mu^{-1}(t))$ es compacto, así $f : \mu^{-1}(t) \to f(\mu^{-1}(t))$ es una función cerrada por lo que f es un homeomorfismo.

Como $\mu^{-1}(t)$ es un continuo, $f(\mu^{-1}(t))$ es un subcontinuo de $[0, 1]$. De modo que $f(\mu^{-1}(t))$ es un subintervalo de $[0, 1]$. Por lo tanto $f(\mu^{-1}(t))$ es un arco y puesto que $f : \mu^{-1}(t) \to f(\mu^{-1}(t))$ es un homeomorfismo tenemos que $\mu^{-1}(t)$ es un arco.

■

Teorema 2.1.2. La propiedad de ser círculo es una propiedad de Whitney.

Demostración:
Sea $\mu : C(S) \to S$ una función de Whitney y sea $t \in [0, \mu(S)]$. Notemos que cada elemento $A \in \mu^{-1}(t)$ es un arco de S.

Definamos $f : \mu^{-1}(t) \to S$ por $f(A) =$ punto medio de A para $A \in \mu^{-1}(t) - \{S\}$, la cual es una función continua.

Además, f es una función inyectiva ya que si $A_1, A_2 \in \mu^{-1}(t)$ tal que $f(A_1) = f(A_2)$ entonces A_1 y A_2 son arcos en S con el mismo punto medio así que $A_1 \subset A_2$ o $A_2 \subset A_1$ pero como $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ tenemos que $A_1 = A_2$.

Notemos que $f(\mu^{-1}(t)) \subset S$. Como $\mu^{-1}(t)$ es compacto, $f(\mu^{-1}(t))$ también es compacto y $f : \mu^{-1}(t) \to f(\mu^{-1}(t))$ es un homeomorfismo. Probemos que $f(\mu^{-1}(t)) = S$, para esto nos hace falta ver que $S \subset f(\mu^{-1}(t))$.

Sea $p \in S$ y

$$\beta = \{\{p\}, S\} \cup A(p)$$

donde $A(p) = \{A \in C(S) : A$ es un arco con p como punto medio$\}$.

El conjunto β puede ser parametrizado como un arco ordenado. Sea $\alpha_1 : [0, 1] \to C(S)$ un arco ordenado que va de $\{p\}$ a S. Definamos $\alpha_2 : \alpha_1 \to \beta$ de la siguiente forma: para $A \in \alpha_1$ existe $t \in [0, 1]$ tal que $\alpha_1(t) = A$ y $\alpha_2(A) = B$ donde $B \in \beta$. Así $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1 : [0, 1] \to C(S)$ es un arco ordenado que va de $\{p\}$ a S tal que $\alpha([0, 1]) = \beta$.

Notemos que $\mu \circ \alpha : [0, 1] \to S$ es una función continua y $0 = \mu(\alpha(0)) < t < \mu(\alpha(1)) = 1$. Aplicando el teorema del valor intermedio a $\mu \circ \alpha$ obtenemos que existe $s \in (0, 1)$ tal que $\mu(\alpha(s)) = t$. Así $\alpha(s)$ es un arco con p como punto medio tal que $\alpha(s) \in \mu^{-1}(t)$. Por tanto, $p = f(\alpha(s)) \in f(\mu^{-1}(t))$. De modo que $S \subset f(\mu^{-1}(t))$. Así tenemos que $f(\mu^{-1}(t)) = S$. Por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a S.

■

Veamos a continuación que la propiedad de ser arco-conexo es una propiedad de Whitney.

Teorema 2.1.3. Si X es un continuo arco-conexo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es conexo por trayectorias para todo $t_0 \in (0,1)$ y por ende también es arco-conexo. Es decir, la propiedad de ser arco-conexo es una propiedad de Whitney.

Demostración:
Sean $A, B \in \mu^{-1}(t_0)$. Sea $a \in A$ y $b \in B$. Si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces por el teorema 1.3.5 existe una trayectoria en $\mu^{-1}(t_0)$ con extremos A y B.

Supongamos que $A \cap B = \emptyset$. Por hipótesis existe un arco $\sigma : [0,1] \to X$ tal que $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$. Denotaremos por $\sigma = \sigma([0,1]$.

Caso 1. Si $\mu(\sigma) \leq t_0$.

Consideremos un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{b\}$ y $\alpha(1) = B$. Entonces para cada $t \in [0,1]$, $\sigma \cup \alpha(t) \in C(X)$ y

$$\mu(\sigma \cup \alpha(0)) = \mu(\sigma \cup \{b\}) = \mu(\sigma) \leq t_0 = \mu(B) \leq \mu(\sigma \cup \alpha(1)).$$

Usando el teorema del valor intermedio existe un elemento $s_0 \in (0,1)$ tal que $\mu(\sigma \cup \alpha(s_0)) = t_0$. Llamemos $B_0 = \sigma \cup \alpha(s_0)$.

Como $A \cap B_0 \neq \emptyset$ y $A, B_0 \in \mu^{-1}(t_0)$ existe $f : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ una función continua tal que $f(0) = A$ y $f(1) = B_0$.

Así mismo, como $B_0 \cap B \neq \emptyset$ y $B_0, B \in \mu^{-1}(t_0)$ existe $g : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ una función continua tal que $g(0) = B_0$ y $g(1) = B$.

Sea $h : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

la cual es una función continua y bien definida pues $f(2(\frac{1}{2})) = f(1) = B_0 = g(0) = g(2(\frac{1}{2})-1)$, además $h(0) = f(0) = A$ y $h(1) = g(1) = B$.

Caso 2. Si $\mu(\sigma) > t_0$.

Sea $\alpha_a : [0,1] \to C(\sigma)$ un arco ordenado tal que $\alpha_a(0) = \{a\}$ y $\alpha_a(1) = \sigma$.

Como $\mu(\alpha_a(0)) = \mu(\{a\}) = 0 < t_0 < \mu(\sigma) = \mu(\alpha_a(1))$, por el teorema de valor intermedio existe $k_0 \in (0,1)$ tal que $\mu(\alpha_a(k_0)) = t_0$. Llamemos $\sigma_a = \alpha_a(k_0)$. Con esto tenemos que α_a es un arco contenido en σ tal que $a \in \sigma_a$ y $\mu(\sigma_a) = t_0$.

De forma análoga se construye un arco σ_b dentro de σ tal que $b \in \sigma_b$ y $\mu(\sigma_b) = t_0$.

Como σ es un arco y $\mu|_{C(\sigma)} : C(\sigma) \to [0,1]$ es una función de Whitney, entonces $(\mu|_{C(\sigma)})^{-1}(t_0) = \mu^{-1}(t_0) \cap C(\sigma)$ es un arco por el teorema 2.1.1 y ya que $\sigma_a, \sigma_b \in \mu^{-1}(t_0) \cap C(\sigma)$ existe un arco $\eta : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0) \cap C(\sigma)$ tal que $\eta(0) = \sigma_a$ y $\eta(1) = \sigma_b$.

Notemos que $A \cap \sigma_a \neq \emptyset$ así que existe en $\mu^{-1}(t_0)$ una trayectoria $f : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ tal que $f(0) = A$ y $f(1) = \sigma_a$.

También $\sigma_b \cap B \neq \emptyset$ así que existe en $\mu^{-1}(t_0)$ una trayectoria $g : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ tal que $g(0) = \sigma_b$ y $g(1) = B$.

Sea $h : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} f(3t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \eta(3t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ g(3t-2) & \text{si } t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

la cual es una función continua y está bien definida. Además $h(0) = f(0) = A$ y $h(1) = g(1) = B$.

Por lo tanto, $\mu^{-1}(t_0)$ es conexo por trayectorias.

■

2.2. Descomponibilidad

En esta sección estudiaremos la descomponibilidad en continuos. El objetivo principal de esta sección es probar que la propiedad de ser descomponible es una propiedad de Whitney, para ello necesitaremos algunos resultados.

Empezaremos viendo la siguiente caracterización de los continuos descomponibles.

Teorema 2.2.1. Un continuo X es descomponible si y sólo si existe $A \in C(X) - \{X\}$ tal que $int_X(A) \neq \emptyset$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que X es descomponible, es decir, $X = A \cup B$ donde $A, B \in C(X) - \{X\}$. Con esto $\emptyset \neq X - B \subseteq A$ y $X - B$ es un abierto y no vacío, así que $int_X(A) \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $A \in C(X) - \{X\}$ tal que $int_X(A) \neq \emptyset$. Consideremos dos casos:

i) $X - A$ es conexo. En este caso $\overline{X - A} \in C(X)$ así $X = A \cup (X - A) \subseteq A \cup (\overline{X - A}) \subseteq X$ por lo que $X = A \cup (\overline{X - A})$. Además $X - \overline{X - A} = int_X(A) \neq \emptyset$ por lo que $\overline{X - A} \in C(X) - \{X\}$ así expresamos a X como la unión de dos subcontinuos propios.

ii) $X - A$ es no conexo. Sea U y V dos abiertos ajenos y no vacíos tal que $X - A = U \cup V$, con esto, $X = (A \cup U) \cup (A \cup V)$ y por el lema de las orejas sabemos que $A \cup U, A \cup V \in C(X)$. Además $X - (A \cup U) \subseteq V \neq \emptyset$ del mismo modo $X - (A \cup V) \subseteq U \neq \emptyset$ por lo que $A \cup U, A \cup V \in C(X) - \{X\}$.

■

Como resultado inmediato del teorema anterior tenemos el siguiente corolario, que nos permite obtener una caracterización para los continuos indescomponibles.

Corolario 2.2.2. Un continuo X es indescomponible si y sólo si para todo $A \in C(X) - \{X\}$, $int_X(A) = \emptyset$.

El siguiente teorema es un resultado de topología general que nos ayudará a probar los próximos resultados y la prueba se puede encontar en [16, Teorema 48.2, p. 337].

Teorema 2.2.3. (Teorema de Baire). Si X es un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos cerrados tal que $int_X(A_n) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $int_X(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset$.

Corolario 2.2.4. Si X es un continuo indescomponible y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de elementos en $C(X) - \{X\}$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subsetneq X$.

Demostración:
Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de elementos en $C(X) - \{X\}$ entonces $int_X(A_n) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ así que $int_X(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset$ por el teorema de Baire y como $int_X(X) = X \neq \emptyset$, tenemos que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subsetneq X$.

$\blacksquare$

Sea X un continuo y $p \in X$. Llamaremos *composante de p en X* al siguiente conjunto:

$$\sum_p^X = \cup\{A \in C(X) - \{X\} : p \in A\}$$

A continuación se prueba que la composante de un punto de X es denso en X.

Proposición 2.2.1. Si X es un continuo y $p \in X$ entonces $\overline{\sum_p^X} = X$.

Demostración:
Como $\sum_p^X$ es un conjunto conexo, $\overline{\sum_p^X} \in C(X)$. Si $\overline{\sum_p^X} \subsetneq X$ entonces por el teorema 1.2.3 existe $B \in C(X)$ tal que $\overline{\sum_p^X} \subsetneq B \subsetneq X$. Como $p \in \overline{\sum_p^X} \subseteq B$, entonces $B \subseteq \sum_p^X \subseteq \overline{\sum_p^X} \subsetneq B$ con lo que tenemos una contradicción. Por lo tanto, $\overline{\sum_p^X} = X$.

$\blacksquare$

Si X es un continuo y $p \in X$, entonces $\sum_p^X$ la podemos expresar como la unión numerable de subcontinuos de X que contienen al punto p como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 2.2.5. Si X es un continuo y $p \in X$, entonces existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de elementos en $C(X) - \{X\}$ tal que $p \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_p^X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Demostración:
Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable para $X-\{p\}$. Como $\{p\}$ es cerrado, U_n es abierto y no vacío en X para cada $n\in\mathbb{N}$. Si $n\in\mathbb{N}$, entonces $p\in X-U_n$.

Sea A_n la componente de $X-U_n$ tal que $p\in A_n$. Como U_n es abierto, $X-U_n$ es cerrado así que A_n es cerrado en $X-U_n$ y por definición de componente A_n es conexo. Además $A_n\neq X$ desde que $U_n\neq\emptyset$, es decir, $A_n\in C(X)-\{X\}$.

De lo anterior tenemos que $A_n\subseteq\sum_p^X$ de esta forma $\cup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\sum_p^X$. Falta probar que $\sum_p^X\subseteq\cup_{n=1}^{\infty}A_n$.

Sea $q\in\sum_p^X$ con $q\neq p$ entonces existe $A\in C(X)-\{X\}$ tal que $p,q\in A$ de aquí tenemos que $\emptyset\neq X-A\subseteq X-\{p\}$, así que existe un basico U_n de $X-\{p\}$ tal que $U_n\subseteq X-A$. Es decir, $p\in A\subseteq X-U_n$. Como A_n es la componente de p en $X-U_n$ y A es conexo, $A\subseteq A_n$ por lo que $q\in A_n$. Por lo tanto, $\sum_p^X\subseteq A_n\subseteq\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ así concluimos que $\sum_p^X=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$.

■

Como consecuencia de lo anterior tenemos el siguiente resultado para los continuos indescomponibles.

Corolario 2.2.6. Si X es un continuo indescomponible entonces para cada $p\in X$, $\sum_p^X\subsetneq X$.

Demostración:
Sea $p\in X$. Por el resultado anterior existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable en $C(X)-\{X\}$ tal que $p\in\cap_{n=1}^{\infty}A_n$ y $\sum_p^X=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$. Como X es indescomponible, $int_X(\sum_p^X)=int_X(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\emptyset$ por lo tanto $\sum_p^X\subsetneq X$.

■

Además, un resultado que obtenemos del teorema anterior es que los continuos que son descomponibles son la composante de alguno de sus puntos.

Corolario 2.2.7. Un continuo X es descomponibe si y sólo si existe $p\in X$ tal que $\sum_p^X=X$.

Otra característica que tienen los continuos indescomponibles es que no son conexos por trayectorias. Esto se prueba a continuación.

Corolario 2.2.8. Si X es un continuo indescomponible entonces X no es conexo por trayectorias.

Demostración:
Sea $p\in X$ y sea $q\in X-\sum_p^X$. Supongamos que existe $\alpha:[0,1]\to X$ una trayectoria tal que $\alpha(0)=p$ y $\alpha(1)=q$. Así $\alpha([0,1])\in C(X)$ y $p,q\in\alpha([0,1])$, por lo que tenemos que, $X=\alpha([0,1])=\alpha([0,\frac{1}{2}])\cup\alpha([\frac{1}{2},1])$ con lo cual tenemos una contradicción ya que X lo

estamos expresando como la unión de dos subcontinuos propios pero X es indescomponible. Por lo tanto, no existe una trayectoria que une a p con q en X.

■

El siguiente resultado nos da una manera de construir un continuo dentro de un nivel de Whitney y será de gran utilidad al momento de probar que ser descomponible es una propiedad de Whitney.

Lema 2.2.9. Si X es un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $A \in C(X)$ entonces $X(A,\mu,t_0) = \{B \in \mu^{-1}(t_0) : B \cap A \neq \emptyset\}$ es un continuo dentro de $\mu^{-1}(t_0)$ para cada $t_0 \in [0,1]$. Mas aún:

i) Si $\mu(A) \leq t_0$ entonces $X(A,\mu,t_0)$ es conexo por trayectorias.

ii) Si $\mu(A) > t_0$ y $\Lambda = \mu^{-1}(t_0) \cap C(A)$ entonces Λ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ y además para cada elemento $B \in X(A,\mu,t_0) - \Lambda$ existe $B' \in \Lambda$ y existe una trayectoria $\alpha \subseteq X(A,\mu,t_0)$ con extremos B y B'. En particular $X(A,\mu,t_0)$ es conexo.

Demostración:
Como $X(A,\mu,t_0) = \mu^{-1}(t_0) \cap \{B \in 2^X : A \cap B \neq \emptyset\}$ entonces $X(A,\mu,t_0)$ es cerrado en el compacto $\mu^{-1}(t_0)$ por lo que $X(A,\mu,t_0)$ es un subespacio compacto de $\mu^{-1}(t_0)$. Para concluir que $X(A,\mu,t_0)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ basta probar i) y ii).

Probemos i). Supongamos que $\mu(A) \leq t_0$.

En este caso, existe $M_0 \in C(X)$ tal que $A \subseteq M_0$ con $\mu(M_0) = t_0$. Sea $M_1 \in X(A,\mu,t_0)$ es decir, $\mu(M_1) = t_0$ y $M_1 \cap A \neq \emptyset$. Sea $p \in M_1 \cap A$, como $A \subseteq M_0$ entonces $p \in M_0$ de esta manera tenemos que $M_0, M_1 \in \mu^{-1}(t_0)$ y $p \in M_0 \cap M_1$. Por el teorema 1.3.5 tenemos que existe una trayectoria $\gamma \subseteq \mu^{-1}(t_0)$ con extremos M_0 y M_1 tal que si $L \in \gamma$ entonces $p \in L$, así $L \cap A \neq \emptyset$ por lo que $\gamma \subseteq X(A,\mu,t_0)$. Y puesto que $M_0 \in X(A,\mu,t_0)$ concluimos que $X(A,\mu,t_0)$ es conexo por trayectorias.

Ahora, probemos ii). Supongamos que $\mu(A) > t_0$.

Igual que antes, sea $\Lambda = \mu^{-1}(t_0) \cap C(A)$. Sea $\mu^* = \mu|_{C(A)} : C(A) \to [0,1]$ la cual es una función de Whitney para $C(A)$, con esto, $(\mu^*)^{-1}(t_0)$ es un continuo. Además

$$(\mu^*)^{-1}(t_0) = (\mu|_{C(A)})^{-1}(t_0) = \mu^{-1}(t_0) \cap C(A) = \Lambda$$

por lo que Λ es un continuo contenido en $\mu^{-1}(t_0)$.

Sea $M_2 \in X(A,\mu,t_0) - \Lambda$, por definición $\mu(M_2) = t_0$ y $M_2 \cap A \neq \emptyset$. Sea $q \in M_2 \cap A$. Por el teorema 1.3.2 tenemos que $\cup\Lambda = \cup(\mu^*)^{-1}(t_0) = A$ y como $q \in A$ existe $M_2' \in \Lambda$ tal que $q \in M_2'$. Con esto tenemos que $M_2, M_2' \in \mu^{-1}(t_0)$ y $q \in M_2 \cap M_2'$. De esta forma existe una trayectoria $\alpha \subseteq \mu^{-1}(t_0)$ con extremos M_2 y M_2' de tal manera que si $K \in \alpha$ entonces $q \in K$. Por lo tanto $\alpha \subseteq X(A,\mu,t_0)$ es decir, $X(A,\mu,t_0)$ es conexo.

■

Ahora sí, procedamos a probar que la propiedad de ser un continuo descomponible es una propiedad de Whitney.

Teorema 2.2.10. Si X es un continuo descomponible, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t_0 \in (0,1)$ entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es descomponible. Es decir, la propiedad de ser descomponible es una propiedad de Whitney.

Demostración:
Supongamos que $X = A \cup B$ con $A, B \in C(X) - \{X\}$. Sea $0 < t_0 < 1$ y sean

$$X(A, \mu, t_0) = \{K \in \mu^{-1}(t_0) : K \cap A \neq \emptyset\}$$

$$X(B, \mu, t_0) = \{K \in \mu^{-1}(t_0) : K \cap B \neq \emptyset\}$$

Como $X = A \cup B$ tenemos $\mu^{-1}(t_0) = X(A, \mu, t_0) \cup X(B, \mu, t_0)$. Si los continuos $X(A, \mu, t_0)$ y $X(B, \mu, t_0)$ están contenidos de manera propia en $\mu^{-1}(t_0)$ ya habríamos terminado.

Supongamos que $\mu^{-1}(t_0) = X(A, \mu, t_0)$. Tenemos dos casos:

i) Si $\mu(A) \leq t_0$ entonces $X(A, \mu, t_0) = \mu^{-1}(t)$ es conexo por trayectorias y por tanto no es indescomponible.

ii) Si $\mu(A) > t_0$, el continuo $\Lambda = \mu^{-1}(t_0) \cap C(A) \subsetneq X(A, \mu, t_0)$ cumple que para cada $K \in X(A, \mu, t_0) - \Lambda$ existe $K' \in \Lambda$ y una trayectoria en $X(A, \mu, t_0)$ con extremos K y K' por lo que, $X(A, \mu, t_0)$ no es indescomponible.

■

2.3. Encadenabilidad y tipo círculo propio

En esta sección estudiaremos la propiedad de ser encadenable y la propiedad de ser tipo círculo propio. Mostraremos con ayuda de las $\epsilon-$funciones que la propiedad de ser encadenable y la propiedad de ser tipo círculo propio son propiedades de Whitney. Así mismo veremos que la propiedad de ser indescomponible y encadenable es una propiedad de Whitney.

Empezaremos probando que la propiedad de ser encadenable es una propiedad de Whitney pero para esto vamos a necesitar algunos resultados previos como los siguientes.

Teorema 2.3.1. Sea $\epsilon > 0$ y sea $f : X \to Y$ una $\epsilon-$función. Si $A, B \subseteq X$ y $f(B) \subseteq f(A)$ entonces $B \subseteq N(\epsilon, A)$.

Demostración:
Sea $b \in B$. Como $f(B) \subseteq f(A)$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = f(b)$, por lo que tenemos $a, b \in f^{-1}(f(b))$ y $diam\ f^{-1}(f(b)) < \epsilon$ puesto que f es una $\epsilon-$función. De esta manera tenemos que existe $a \in A$ tal que $d(a,b) < \epsilon$, es decir, $b \in N(\epsilon, A)$.

■

Antes de continuar recordemos una de las nociones básicas de topología, la homotopía:

Definición 2.3.2. Sean X y Y dos espacios topológicos. Dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ son **homotópicas** si existe una función continua $h : X \times [0,1] \to Y$ tal que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$ para cada $x \in X$. La función h es llamada **homotopía**.

Si f es homotópica a g lo denotaremos como $f \sim g$.

Definición 2.3.3. Una función continua f es llamada **no-esencial** si es homotópica a una función constante, esto lo denotaremos como $f \sim 1$. Y diremos que f es **esencial** si no es homotópica a una función constante, lo cual denotaremos $f \nsim 1$.

Si cada función continua $f : X \to S$ es no-esencial, entonces X se dice ser contraíble relativo a S y lo denotaremos $Cr\ S$.

A continuación presentamos un resultado que se encuentra en [11, Teorema 19.6, p. 157], el cual nos dice que el hiperespacio $C(X)$ es contraíble relativo a la circunferencia S.

Teorema 2.3.4. $C(X)$ es $Cr\ S$. En particular, $C(X)$ es unicoherente.

Teorema 2.3.5. Sean X y Y continuos y sea Z un subconjunto cerrado en $C(X)$ el cual no contiene al vértice de $C(X)$. Entonces existe $\eta > 0$ tal que para cada $\eta-$función $f : X \to Y$ el conjunto $\hat{f}(Z)$ no contiene al vértice de $C(Y)$. Es decir, $f(A) \neq Y$ para $A \in Z$.

Demostración:
Hagamos la demostración por contradicción. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\frac{1}{n}-$función $f_n : X \to Y$ y $A_n \in Z$ tal que $f_n(A_n) = Y$.

Puesto que Z es cerrado en el compacto $C(X)$ podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ con $A \in Z$ y por ende $A \neq X$ así que existe $b \in X - A$. Sea $\epsilon = \min\{d(b,x) : x \in A\} > 0$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $H(A, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$ y f_n una $\frac{\epsilon}{2}-$función.

Como $f_n(b)$ es un punto de $Y = f_n(A_n)$ existe $c \in A_n$ tal que $f_n(c) = f_n(b)$. Por lo que tenemos que $d(b,c) < \frac{\epsilon}{2}$ y existe $a \in A$ tal que $d(a,c) < \frac{\epsilon}{2}$. De aquí que,

$$\epsilon = \min\{d(b,x) : x \in A\} \leq d(b,a) \leq d(b,c) + d(c,a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

con lo cual llegamos a una contradicción.

■

Veamos ahora el siguiente teorema, el cual nos permite conocer cuando un continuo tipo círculo es encadenable.

Teorema 2.3.6. Si X es un continuo tipo círculo y para cada $\epsilon > 0$ existe una $\epsilon-$función $f : X \to S$ la cual es no-esencial entonces X es encadenable.

Demostración:
Sea $\epsilon > 0$, debemos encontrar una $\epsilon-$función de X sobre $[0,1]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ϵ es tan pequeño tal que que para cada $\epsilon-$función $f : X \to S$ el conjunto $f(X)$ es no degenerado.

Sea $f : X \to S$ una $\epsilon-$función no-esencial. Por el teorema de Eilenberg que podemos encontrar en [6, Teorema 5.1, p. 361] existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{ig(x)}$ para $x \in X$.

Como X es conexo y compacto tenemos que $g(X)$ es un intervalo cerrado, además $g : X \to g(X)$ es una $\epsilon-$función. Si $h : g(X) \to [0,1]$ es un homeomorfismo, entonces $h \circ g : X \to [0,1]$ y para $s \in [0,1]$ tenemos que $diam\ (h \circ g)^{-1}(s) = diam\ g^{-1}(h^{-1}(s)) < \epsilon$ puesto que g es una $\epsilon-$función, así obtenemos que $h \circ g$ es la $\epsilon-$función buscada.

■

Además del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3.7. Si X es un continuo tipo círculo propio entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para cada $\epsilon-$función $f : X \to S$ es esencial.

A continuación probaremos que la propiedad de ser encadenable es una propiedad de Whitney.

Teorema 2.3.8. Sea X un continuo encadenable, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$ entonces $\mu^{-1}(t)$ es encadenable. Es decir, ser encadenable es una propiedad de Whitney.

Demostración:
Sea $\epsilon = 2\epsilon' > 0$. Queremos construir una $\epsilon-$función $g : \mu^{-1}(t) \to [0,1]$.

Sea η_0 un número real que satisface el teorema 2.3.5 donde tomamos $Z = \mu^{-1}(t)$. Por el lema 1.3.8 existe $\eta < \eta_0$ tal que para cada $A, B \in \mu^{-1}(t)$

$$(1) \qquad \text{si } B \subset N(\eta, A) \text{ entonces } H(A,B) < \epsilon'.$$

Como X es un continuo encadenable existe una $\eta-$función $f : X \to [0,1]$. Por definición de η_0 tenemos que $f(A) \neq [0,1]$ para cada $A \in \mu^{-1}(t)$ entonces $f(A)$ es un conjunto unipuntual o un subintervalo de $[0,1]$.

Definimos $g : \mu^{-1}(t) \to [0,1]$ como $g(A) =$ el centro de $f(A)$ la cual es una función continua. Debemos mostrar que g es una $\epsilon-$función.

Sea $s \in [0,1]$ y $H = \hat{f}(g^{-1}(s))$, de manera que H es un subconjunto cerrado de $C([0,1])$ y cada elemento de H es un punto o un arco con centro en s. Así tenemos que

$$(2) \qquad C, F \in H \text{ entonces } C \subset F \text{ o } F \subset C.$$

Sea $\mu' : C([0,1]) \to [0,1]$ una función de Whitney. Como $\mu'(H)$ es cerrado existe un número maximal en $\mu'(H)$ al que llamaremos r. Así que tenemos $A' \in H$ tal que $\mu'(A') = r$. Por (2) tenemos

$$(3) \qquad F \in H \text{ entonces } F \subset A'$$

Y debe existir $A \in g^{-1}(s)$ tal que $f(A) = A'$. Ahora sea $B \in g^{-1}(s)$, entonces $\hat{f}(B) \in H$ y por (3) obtenemos que $f(B) \subset A' = f(A)$.

Puesto que f es una $\eta-$función por el teorema 2.3.1 tenemos que $B \subset N(\eta, A)$ y de (1) se sigue que $H(A,B) < \epsilon'$. De esta manera hemos mostrado que $g^{-1}(s) \subset N(\epsilon', A)$ donde $N(\epsilon', A)$ denota una bola abierta en $C(X)$ con centro en A. Por tanto *diam* $g^{-1}(s) < 2\epsilon' = \epsilon$, esto muestra que g es una $\epsilon-$función.

■

Con una idea similar a la de la prueba del teorema anterior, mostraremos que la propiedad de ser tipo círculo propio es una propiedad de Whitney.

Teorema 2.3.9. Sea X es un continuo tipo círculo propio, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un continuo tipo círculo propio. Es decir, la propiedad de ser tipo círculo propio es una propiedad de Whitney.

Demostración:
Sea $\epsilon = 2\epsilon' > 0$. Queremos construir una $\epsilon-$función esencial $g : \mu^{-1}(t) \to S$.

Sea η_0 un número real satisfaciendo teorema 2.3.5 donde tomamos $Z = \mu^{-1}(t)$. Por el lema 1.3.8 existe $\eta < \eta_0$ tal que para cada $A, B \in \mu^{-1}(t)$

$$(1) \qquad \text{si } B \subset N(\eta, A) \text{ entonces } H(A,B) < \epsilon'.$$

Por el corolario 2.3.7 existe una $\eta-$función esencial $f : X \to S$. Por definición de η_0 tenemos que $f(A) \neq S$ para cada $A \in \mu^{-1}(t)$ entonces $f(A)$ es un arco de S o un conjunto unipuntual de S y por tanto el centro de $f(A)$ está bien definido. Definimos una función

$g : \mu^{-1}(t) \to S$ como $g(A) =$ el centro de $f(A)$, la cual es una función continua. Mostremos pimero que g es una $\epsilon-$función.

Sea $s \in S$ y $H = \hat{f}(g^{-1}(s))$, de esta manera H es un subconjunto cerrado de $C(S)$ y cada elemento de H es un punto o un arco con centro en s. Así tenemos que

$$(2) \qquad C, F \in H \text{ entonces } C \subset F \text{ o } F \subset C$$

Sea $\mu' : C(S) \to [0, 1]$ una función de Whitney, como $\mu'(H)$ es cerrado existe un número maximal en $\mu'(H)$, digamos r. Así que $A' \in H$ tal que $\mu'(A') = r$. Por (2) tenemos

$$(3) \qquad F \in H \text{ entonces } F \subset A'$$

Así que debe existir $A \in g^{-1}(s)$ tal que $f(A) = A'$. Sea $B \in g^{-1}(s)$, entonces $\hat{f}(B) \in H$ y por (3) obtenemos que $f(B) \subset A' = f(A)$.

Puesto que f es una $\eta-$función por el teorema 2.3.1 tenemos que $B \subset N(\eta, A)$ y de (1) se sigue que $H(A, B) < \epsilon'$. De esta manera hemos mostrado que $g^{-1}(s) \subset N(\epsilon', A)$ donde $N(\epsilon', A)$ denota una bola abierta en $C(X)$ con centro en A. Por tanto *diam* $g^{-1}(s) < 2\epsilon' = \epsilon$, esto muestra que g es una $\epsilon-$función.

Nos hace falta ver que g es una función esencial. Supongamos que g es no-esencial. Usando el teorema de extensión de homotopía de Borsuk el cual podemos encontrar en [6, Corolario 5.2, p. 347] podemos extender a g a una función continua

$$g_1 : \mu^{-1}([t, 1]) \to S.$$

Por otro lado, f puede considerarse como una función de la base de $C(X)$ que denotaremos $\hat{X}$ y se sigue de la definición de g que puede ser extendida a una función continua

$$g_2 : \mu^{-1}([0, t]) \to S$$

tal que $g_2|_{\hat{X}} = f$.

Las funciones g_1 y g_2 forman una función continua $h : C(X) \to S$ pero por el teorema 2.3.4 obtenemos que $h \sim 1$ y por tanto $f = h|_{\hat{X}} \sim 1$ lo que contradice la elección de f.

Por lo tanto, g es esencial.

■

Ya vimos que la propiedad de ser un continuo encadenable es una propiedad de Whitney, resulta también que la propiedad de ser un continuo indescomponible y encadenable es una propiedad de Whitney. Antes de probar este resultado veamos el siguiente teorema que nos muestra una propiedad que tienen los continuos encadenables.

Teorema 2.3.10. Sea X un continuo encadenable y $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Sea $t_0 \in [0, 1]$, si Λ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ y $\cup\Lambda = X$ entonces $\Lambda = \mu^{-1}(t_0)$.

Demostración:
Sea Λ un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ tal que $\cup\Lambda = X$. Queremos probar que $\Lambda = \mu^{-1}(t_0)$, claramente $\Lambda \subseteq \mu^{-1}(t_0)$ por lo que falta probar que $\mu^{-1}(t_0) \subseteq \Lambda$.

Sea $A \in \mu^{-1}(t_0)$. Probemos que $A \in \Lambda$, para mostrar esto veamos que para cada $\epsilon > 0$ existen $L_\epsilon \in \Lambda$ tal que $H(L_\epsilon, A) < \epsilon$.

Sea $\epsilon > 0$. Por el lema 1.3.8 sabemos que existe $\eta(\epsilon) = \eta > 0$ tal que si $K, L \in \mu^{-1}(t_0)$ y $L \subseteq N(\eta, K)$ entonces $H(K, L) < \epsilon$.

Como X es encadenable existe una familia finita de abiertos $\{U_1, ..., U_n\}$ de X tales que:

i) $X = \cup_{i=1}^n U_i$

ii) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$

iii) $diam\ U_i < \eta$ para cada $i = 1, ..., n$.

Sea $m = \text{mín}\{i : A \cap U_i \neq \emptyset\}$ y $s = \text{máx}\{i : A \cap U_i \neq \emptyset\}$. Sean

$$\Lambda_1 = \{L \in \Lambda : L \cap U_i \neq \emptyset, i \leq m\}$$

$$\Lambda_2 = \{L \in \Lambda : L \cap U_i \neq \emptyset, i \geq s\}.$$

Dividiremos la prueba en dos casos:

Caso 1. $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \neq \Lambda$.

En este caso, existe $L_0 \subseteq \cup_{i=m+1}^{s-1} U_i$. Por otra parte, como $A \subseteq \cup_{j=m}^s U_j$, $A \cap U_m \neq \emptyset \neq A \cap U_s$ y A es conexo así que $A \cap U_j \neq \emptyset$ para cada $j = m, m+1, ..., s-1, s$. Con esto afirmamos que $\cup_{j=m}^s U_j \subseteq N(\eta, A)$.

En efecto, sea $x \in \cup_{j=m}^s U_j$ y tomemos $j \in \{m, ..., s\}$ tal que $x \in U_j$. Como $A \cap U_j \neq \emptyset$ para cada $j = m, ..., s$ existe $a \in A \cap U_j$ de aquí que $x, a \in U_j$ y puesto que $diam\ U_j < \eta$ tenemos que $d(x, a) < \eta$ así que $x \in N(\eta, A)$. Por tanto, $\cup_{j=m}^s U_j \subseteq N(\eta, A)$.

Como $L_0 \subseteq \cup_{i=m+1}^{s-1} U_j \subseteq \cup_{i=m}^s U_j \subseteq N(\eta, A)$, es decir, $L_0 \subseteq N(\eta, A)$ y por el lema 1.3.8 tenemos que $H(L_0, A) < \epsilon$.

Caso 2. $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \Lambda$.

Por definición tenemos que Λ_1 y Λ_2 son conjuntos abiertos en Λ. Como $U_1 \neq \emptyset$ podemos tomar $x \in U_1$ y como $\cup\Lambda = X$ existe $B \in \Lambda$ tal que $x \in B$ así $B \in \Lambda_1$, es decir, $\Lambda_1 \neq \emptyset$. De forma similar $\Lambda_2 \neq \emptyset$.

Como Λ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$, Λ es conexo por lo que $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$. Sea $K_0 \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$, como K_0 es un continuo entonces $K_0 \cap U_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \{m, ..., s\}$. De esta forma como $diam\ U_j < \eta$ para cada $j \in \{m, ..., s\}$, $A \subseteq \cup_{j=m}^s U_j \subseteq N(\eta, K_0)$. Esto útimo se cumple pues si $x \in \cup_{j=m}^s U_j$ existe $j \in \{m, ..., s\}$ tal que $x \in U_j$. Sea $a \in K_0 \cap U_j$ como $x, a \in U_j$ y $diam\ U_j < \eta$ entonces $d(x, a) < \eta$, esto es, $x \in N(\eta, A)$. Así $\cup_{j=m}^s U_j \subseteq N(\eta, K_0)$. Con esto, $A \subseteq N(\eta, K_0)$ por lo que tenemos $H(A, K_0) < \eta$.

En el caso 1 sea $L_\epsilon = L_0$ y el caso 2 sea $L_\epsilon = K_0$, con esto, $L_\epsilon \in \Lambda$ y $H(A, L_\epsilon) < \epsilon$, que es lo que queríamos probar.

■

A la propiedad mostrada que tienen los continuos encadenables en el teorema anterior se le conoce como la propiedad cubriente de niveles de Whitney de la cual hablaremos más adelante.

Teorema 2.3.11. Si X es un continuo encadenable e indescomponible entonces para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y para cada $t \in (0,1)$, $\mu^{-1}(t)$ es encadenable e indescomponible. Es decir, la propiedad de ser un continuo encadenable e indescomponible es una propiedad de Whitney.

Demostración:
Probemos que $\mu^{-1}(t)$ es indescomponible. Supongamos que $\mu^{-1}(t) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ donde Γ_1 y Γ_2 son dos subcontinuos de $\mu^{-1}(t)$.

Sea $X_1 = \cup\Gamma_1$ y $X_2 = \cup\Gamma_2$, en este caso, $X_1, X_2 \in C(X)$ por el lema 1.3.4. Además

$$X_1 \cup X_2 = (\cup\Gamma_1) \cup (\cup\Gamma_2) = \cup(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \cup\mu^{-1}(t) = X$$

ya que X es indescomponible podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X_1 = X$, es decir, $\cup\Gamma_1 = X$ y por el teorema anterior $\Gamma_1 = \mu^{-1}(t)$. Por tanto, $\mu^{-1}(t)$ es indescomponible.

Además, por el teorema 2.3.8 tenemos que $\mu^{-1}(t)$ es encadenable. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es encadenable e indescomponible.

■

2.4. Hereditariamente indescomponible y pseudo-arco

En esta sección veremos que las propiedades de ser hereditariamente indescomponible y ser pseudo-arco son propiedades de Whitney.

A continuación presentamos un resultado que nos da una caracterización de los continuos hereditariamente indescomponibles, este nos dice que un continuo es hereditariamente indescomponible si cada par de subcontinuos que se intersectan son comparables.

Lema 2.4.1. Un continuo X es hereditariamente indescomponible si y sólo si para cada $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ se cumple que $A \subseteq B$ o bien $B \subseteq A$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que X es hereditariamente indescomponible y sean $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. En este caso, $A \cup B \in C(X)$ y llamemos $Y = A \cup B$, por hipótesis Y debe ser indescomponible por lo que $Y = A$ ó $Y = B$, así que, $B \subseteq A$ o bien $A \subseteq B$.

($\Leftarrow$) Supongamos que para cada $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ se cumple que $A \subseteq B$ o bien $B \subseteq A$.

Sea $Y \in C(X)$, veamos que Y es indescomponible. Supongamos que $Y = A \cup B$ con $A, B \in C(Y) \subseteq C(X)$. Como Y es conexo, $A \cap B \neq \emptyset$ así $A \subseteq B$ o bien $B \subseteq A$, con esto tenemos que $Y = B$ o bien $Y = A$. Por tanto, Y es indescomponible.

■

La caracterización anterior nos ayuda a probar el siguiente lema, el cual muestra que cuando un continuo es hereditariamente indescomponible y tenemos dos elementos en el mismo nivel de Whitney que se intersectan entonces estos dos elementos tienen que ser iguales.

Lema 2.4.2. Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney y $t \in (0,1)$, entonces para cada $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ se cumple que $A = B$.

Demostración:
Supongamos que $\mu(A) = t = \mu(B)$ y que $A \cap B \neq \emptyset$ entonces por el resultado anterior $A \subseteq B$ o bien $B \subseteq A$, puesto que $\mu(A) = \mu(B)$ cualquiera de las dos contenciones no puede ser propia así que $A = B$.

■

Observación 2.4.3. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$, el lema anterior nos permite definir una función de X en $\mu^{-1}(t)$ que es continua y monótona cuando X es hereditariamente indescomponible como lo veremos a continuación:

Sabemos por el teorema 1.3.2 que $X = \cup\mu^{-1}(t)$, notemos que para cada $x \in X$ existe $A_x \in \mu^{-1}(t)$ tal que $x \in A_x$. Definimos entonces $f : X \to \mu^{-1}(t)$ como $f(x) = A_x$.

Si $B \in \mu^{-1}(t)$ y $x \in B$ entonces $x \in B \cap A_x$, por el lema anterior tenemos que $B = A_x$ así que f está bien definida.

Observemos que si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ entonces como $\mu^{-1}(t)$ es compacto podemos suponer que A_{x_n} converge dentro de $\mu^{-1}(t)$. Además, si $A = \lim_{n\to\infty} A_{x_n}$ entonces $x \in A$ y por el lema anterior $A = A_x$, es decir, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, así tenemos que f es continua.

También para cada $A \in \mu^{-1}(t)$ se cumple que $f^{-1}(A) = A$, es decir, f es una función monótona y sobreyectiva.

Con lo anterior obtenemos el siguiente resultado que nos dice que, cuando tenemos una función mónotona que tiene como dominio un continuo hereditariamente indescomponible entonces su imagen es un continuo hereditariamente indescomponible.

Teorema 2.4.4. Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, Y es un continuo y existe una función monótona $f : X \to Y$ entonces Y es un continuo hereditariamente indescomponible.

Demostración:
Sean $A, B \in C(Y)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Como f es monótona $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in C(X)$ y $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ por lo que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ o bien $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A)$ y ya que f es sobreyectiva $A \subseteq B$ o bien $B \subseteq A$. Por lo tanto, Y es hereditariamente indescomponible.

■

En particular, como todos los niveles de Whitney son la imagen bajo una función monótona concluimos que la propiedad de ser un continuo hereditariamente indescomponible es una propiedad de Whitney.

Corolario 2.4.5. Sea X un continuo hereditariamente indescomponible, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $0 \leq t < 1$ entonces $\mu^{-1}(t)$ es hereditariamente indescomponible. Es decir, la propiedad de ser un continuo hereditariamente indescomponible es una propiedad de Whitney.

Demostración:
Sea X un continuo hereditariamente indescomponible, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $0 \leq t < 1$. Como $\mu^{-1}(t)$ es la imagen bajo una función monótona con dominio en X por el resultado anterior concluimos que $\mu^{-1}(t)$ es hereditariamente indescomponible.

■

Además del corolario anterior y del teorema 2.3.8 obtenemos que la propiedad de ser pseudo-arco es una propiedad de Whitney.

Corolario 2.4.6. Sea X un pseudo-arco, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$ entonces $\mu^{-1}(t)$ es un pseudo-arco. Es decir, ser pseudo-arco es una propiedad de Whitney.

Demostración:
Sea X un pseudo-arco, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Como X es un continuo hereditariamente indescomponible y encadenable entonces $\mu^{-1}(t)$ es hereditariamente indescomponible y encadenable, es decir, $\mu^{-1}(t)$ es pseudo-arco.

■

2.5. Propiedad cubriente

En esta sección definiremos formalmente a la propiedad cubriente, dicha propiedad nos permitirá conocer más propiedades topológicas que tienen ciertos continuos y nos da a conocer que la propiedad de ser indescomponible es una propiedad de Whitney cuando se tiene la propiedad cubriente.

Definición 2.5.1. Un continuo X tiene la propiedad cubriente si para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y para todo $t \in (0,1)$ ningún subcontinuo propio $\mathcal{L}$ de $\mu^{-1}(t)$ cumple que $\cup\mathcal{L} = X$.

Si un continuo X tiene la propiedad cubriente escribiremos $X \in CP$.

Un resultado inmediato que obtenemos del teorema 2.3.10 es el siguiente.

Teorema 2.5.2. Si X es encadenable entonces $X \in CP$.

Resulta también que la clase de los continuos hereditariamente indescomponibles tienen la propiedad cubriente.

Teorema 2.5.3. Si X es hereditariamente indescomponible entonces $X \in CP$.

Demostración:
Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y sea $t_0 \in (0,1)$. Sea $\mathcal{L}$ un subcontinuo propio de $\mu^{-1}(t_0)$. Probemos que $\cup\mathcal{L} \neq X$.

Sea $A \in \mu^{-1}(t_0) - \mathcal{L}$. Veamos que $A \cap \cup\mathcal{L} = \emptyset$.

Si $A \cap \cup\mathcal{L} \neq \emptyset$, existe $a \in A \cap \cup\mathcal{L}$ por lo que debe existir $B \in \mathcal{L}$ tal que $a \in B$, con esto $A \cap B \neq \emptyset$. Como X es hereditariamente indescomponible $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$, además $A, B \in \mu^{-1}(t_0)$ así que $A = B$, de esta manera tenemos que $A \in \mathcal{L}$ con lo cual tenemos una contradicción.

Por lo tanto $\cup\mathcal{L} \subseteq X - A \subsetneq X$.

■

Como consecuencia de los resultados anteriores obtenemos que la propiedad de ser un continuo indescomponible es una propiedad de Whitney cuando el continuo tiene la propiedad cubriente.

Corolario 2.5.4. Si $X \in CP$ y X es indescomponible entonces para toda función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y para cada $t_0 \in (0,1)$, $\mu^{-1}(t_0)$ es indescomponible. Es decir, la propiedad de ser un continuo indescomponible es una propiedad de Whitney cuando el continuo tiene la propiedad cubriente.

Demostración:
Si X es un continuo encadenable e indescomponible quiere decir que $X \in CP$ y es indescomponible. Sabemos por el teorema 2.3.11 que la propiedad de ser un continuo encadenable e indescomponible es una propiedad de Whitney, así tenemos que $\mu^{-1}(t_0)$ es indescomponible para cada $t_0 \in (0,1)$.

■

Además, el teorema 2.5.3 y el corolario 2.5.4 nos permiten concluir el siguiente resultado.

Corolario 2.5.5. Si X es hereditariamente indescomponible, entonces para toda función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y para cada $t_0 \in (0,1)$, $\mu^{-1}(t_0)$ es indescomponible.

Demostración:
Como X es hereditariamente indescomponible entonces $X \in CP$ y por el corolario anterior tenemos que $\mu^{-1}(t_0)$ es indescomponible para cada $t_0 \in (0,1)$.

■

Para conocer un poco más a los continuos que tienen la propiedad cubriente, mostraremos a continuación propiedades topológicas que poseen los continuos que cuentan con dicha propiedad.

Teorema 2.5.6. Si $X \in CP$ entonces X es unicoherente.

Demostración:
Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Supongamos que X no es unicoherente así que existen $A, B \in C(X)$ con $X = A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo por lo que podemos escribir $A \cap B = K \cup L$ donde L y K son dos conjuntos cerrados ajenos y no vacíos de X.

Sea $p \in K$. Sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = B$. Llamemos $t_0 = \max\{t \in [0,1] : \alpha(t) \subseteq K\}$. Como $K \subsetneq B$, $t_0 < 1$, además $L \cap \alpha(t_0) = \emptyset$ y $\alpha(t_0) \subseteq K$.

Sea $\gamma : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\gamma(0) = \{p\}$ y $\gamma(1) = A$. Llamemos $t_1 = \max\{t \in [0,1] : \gamma(t) \subseteq K\}$. Con esto $t_1 < 1$, $\gamma(t_1) \subseteq K$ y $L \cap \gamma(t_1) = \emptyset$.

Por la continuidad de arcos ordenados existen t_0' y t_1' tales que $t_0 < t_0'$, $t_1 < t_1'$ y $\alpha(t_0') \cap L = \emptyset = \gamma(t_1') \cap L$.

Sea $s_0 = \mu(\alpha(t_0') \cup \gamma(t_1'))$. Como $\mu|_{C(A)}$ y $\mu|_{C(B)}$ son funciones de Whitney tenemos que

$$A = \cup(\mu|_{C(A)})^{-1}(s_0) = \cup\mu^{-1}(s_0) \cap C(A)$$

$$B = \cup(\mu|_{C(B)})^{-1}(s_0) = \cup\mu^{-1}(s_0) \cap C(B).$$

Sea $l \in L$. Como $l \in A = \cup\mu^{-1}(s_0) \cap C(A)$ existe $A_1 \in C(A)$ tal que $l \in A_1$ y $\mu(A_1) = s_0$. Así mismo, como $l \in B = \cup\mu^{-1}(s_0) \cap C(B)$ existe $B_1 \in C(B)$ tal que $l \in B_1$ y $\mu(B_1) = s_0$.

Como $A_1, B_1 \in \mu^{-1}(s_0)$ y $B_1 \cap A_1 \neq \emptyset$ existe una trayectoria $f : [0,1] \to \mu^{-1}(s_0)$ tal que $f(0) = A_1$, $f(1) = B_1$ y para cada $t \in [0,1]$, $l \in f(t)$. De esta forma $f([0,1])$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(s_0)$ y además

$$(\mu^{-1}(s_0) \cap C(A)) \cap f([0,1]) \neq \emptyset \text{ pues } A_1 \in (\mu^{-1}(s_0) \cap C(A)) \cap f([0,1])$$

$$(\mu^{-1}(s_0) \cap C(B)) \cap f([0,1]) \neq \emptyset \text{ pues } B_1 \in (\mu^{-1}(s_0) \cap C(B)) \cap f([0,1])$$

por lo que tenemos que

$$\mathcal{A} = (\mu|_{C(A)})^{-1}(s_0) \cup f([0,1]) \cup (\mu|_{C(B)})^{-1}(s_0) \subseteq \mu^{-1}(s_0)$$

es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}(s_0)$.

Así tenemos $\cup\mathcal{A} = X$. Por lo tanto $X \notin CP$.

∎

Teorema 2.5.7. Si $X \in CP$ entonces X no es un triodo.

Demostración:
Haremos la prueba por contradicción. Supongamos que existe $N \in C(X)$ tal que $X - N$ tiene al menos tres componentes. Con esto $X - N = \cup_{i=1}^{3} S_i$ donde los conjuntos S_1, S_2 y S_3 están separados a pares.

Sea $B_i = N \cup S_i$ para cada $i = 1, 2, 3$, en este caso, $B_i \in C(X)$ por el lema de las orejas.

Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y sea $t_0 \in (0,1)$ tal que $\mu(N) < t_0 \leq \text{mín}\{\mu(B_i) : i = 1,2,3\}$. Como $N \subseteq \cap_{i=1}^{3} B_i$ se tiene que $B_1 \cup B_2, B_2 \cup B_3, B_1 \cup B_3 \in C(X)$.

Si $i \neq j$ entonces $\mu|_{B_i \cup B_j}$ es una función de Whitney y así $(\mu|_{B_i \cup B_j})^{-1}(t_0) = \mu^{-1}(t_0) \cap C(B_i \cup B_j)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$. Sean

$$\Gamma_1 = \mu^{-1}(t_0) \cap C(B_1 \cup B_2)$$

$$\Gamma_2 = \mu^{-1}(t_0) \cap C(B_2 \cup B_3)$$

Como $N \subsetneq B_2$ y $\mu(N) < t_0 \leq \mu(B_2)$ existe $K \in C(B_2)$ tal que $\mu(K) = t_0$ así que $K \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, es decir, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$. Como Γ_1 y Γ_2 son subcontinuos de $\mu^{-1}(t_0)$, entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es un subcontinuos de $\mu^{-1}(t_0)$.

Por otra parte

$$\cup(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = (\cup\Gamma_1) \cup (\cup\Gamma_2) = (\cup(\mu|_{C(B_1 \cup B_2)})^{-1}(t_0)) \cup (\cup(\mu|_{C(B_2 \cup B_3)})^{-1}(t_0)) = (B_1 \cup B_2) \cup (B_2 \cup B_3) = X$$

Por hipótesis sabemos que $X \in CP$ entonces $\mu^{-1}(t_0) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Como $N \subsetneq B_1$ y $\mu(N) < t_0 \leq \mu(B_1)$ podemos tomar t_1 tal que $\mu(N) < t_1 < t_0 \leq \mu(B_1)$ y un continuo $L_0 \in C(B_1)$ tal que $\mu(L_0) = t_1$. Como $\mu(N) < \mu(L_0)$,

$$L_0 \cap S_1 \neq \emptyset. \qquad (1)$$

Como $N \subsetneq B_3$ existe $\alpha : [0,1] \to C(B_3)$ un arco ordenado tal que $\alpha(0) = N$ y $\alpha(1) = B_3$. Sea $f : [0,1] \to C(X)$ la función $f(t) = \alpha(t) \cup L_0$ y notemos que

$$\mu(f(0)) = \mu(\alpha(0) \cup L_0) = \mu(N \cup L_0) = \mu(L_0) = t_1 < t_0 \leq \mu(B_3) \leq \mu(B_3 \cup L_0) = \mu(f(1))$$

de esta manera existe t_2 tal que $\mu(f(t_2)) = t_0$, es decir, $\alpha(t_2) \cup L_0 \in \mu^{-1}(t_0)$. Como $\mu(f(0)) = t_1 < t_0 = \mu(f(t_2))$ entonces $0 < t_2$, es decir, $N = \alpha(0) < \alpha(t_2)$. De aquí que

$$\alpha(t_2) \cap S_3 \neq \emptyset. \qquad (2)$$

De (1) tenemos que $(\alpha(t_2) \cup L_0) \cap S_1 \neq \emptyset$ por lo que $\alpha(t_2) \cup L_0 \notin \Gamma_2$ y de (2) tenemos que $(\alpha(t_2) \cup L_0) \cap S_3 \neq \emptyset$ por lo que $\alpha(t_2) \cup L_0 \notin \Gamma_1$. Así tenemos que $\alpha(t_2) \cup L_0 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Por tanto, $\alpha(t_2) \cup L_0 \in \mu^{-1}(t_0) - \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ lo cual nos lleva a una contradicción.

■

A continuación presentamos un resultado publicado en 1944 por Sorgenfrey cuya prueba se encuentra en [18, Teorema 11.34, p. 216], este teorema nos permite determinar cuándo un continuo unicoherente es irreducible.

Teorema 2.5.8. (Teorema de Sorgenfrey). Sea X un continuo unicoherente no degenerado que no contiene triodos entonces X es un continuo irreducible.

Corolario 2.5.9. Si $X \in CP$ entonces X es irreducible.

Demostración:
Como $X \in CP$ por el teorema anterior tenemos que no es un triodo y por el teorema 2.5.6 tenemos que X es unicoherente, así que usando el teorema de Sorgenfrey concluimos que X es irreducible.

■

Como consecuencia del resultado anterior podemos decir que, cuando un continuo tiene la propiedad cubriente sus niveles de Whitney son irreducibles.

Teorema 2.5.10. Si $X \in CP$ entonces para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y para cada $t \in (0,1)$, $\mu^{-1}(t)$ es irreducible.

Demostración:
Por el corolario anterior X es irreducible, es decir, existen $p, q \in X$ tal que $X = Irr(p,q)$. Sea $t \in (0,1)$ y sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tal que $p \in A$ y $q \in B$. Probemos que $\mu^{-1}(t) = Irr(A,B)$.

Sea $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que $A, B \in \mathcal{A}$. Como $\cup\mathcal{A}$ es un subcontinuo de X por el lema 1.3.4 y $p, q \in \cup\mathcal{A}$ tenemos que $\cup\mathcal{A} = X$ y como $X \in CP$ concluimos que $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$.

■

También obtenemos que si un continuo tiene un nivel de Whitney irreducible en algún punto, el continuo va a tener la propiedad cubriente en ese punto.

Teorema 2.5.11. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y supongamos que existe $t_0 \in [0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t_0)$ es irreducible, entonces ningún subcontinuo propio de $\mu^{-1}(t_0)$ cubre a X, es decir, $X \in CP$ en t_0.

Demostración:
Supongamos que $M_1, M_2 \in \mu^{-1}(t_0)$ cumplen que $\mu^{-1}(t_0) = Irr(M_1, M_2)$. Supongamos que Γ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ tal que $\cup\Gamma = X$. Queremos probar que $\Gamma = \mu^{-1}(t_0)$, para esto vamos a mostrar que $M_1, M_2 \in \Gamma$.

Sea $i \in \{1,2\}$. Definiremos α_i como sigue:

Si $M_i \in \Gamma$ entonces $\alpha_i = \{M_i\}$. Si $M_i \notin \Gamma$, como $\cup\Gamma = X$ existe $G_i \in \Gamma$ tal que $M_i \cap G_i \neq \emptyset$. Puesto que $G_i \in \Gamma$ tenemos que $G_i \neq M_i$. Ya que $G_i \cap M_i \neq \emptyset$ y $G_i, M_i \in \mu^{-1}(t_0)$ existe un arco $\alpha : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ tal que $\alpha(0) = M_i$ y $\alpha(1) = G_i$.

Sea $k_0 = \text{mín}\{t \in [0,1] : \alpha(t) \in \Gamma\} > 0$. Redefiniendo $G_i = \alpha(k_0)$ tenemos que $\alpha|_{[0,k_0]}$ es un arco en $\mu^{-1}(t_0)$ con extremos M_i y G_i. Y notemos que $\alpha([0,k_0]) \cap \Gamma = \{G_i\}$.

Sea $\alpha_i = \alpha_i([0,k_0])$, de esta manera quedan definidos α_1 y α_2.

Hagamos la prueba por contradicción, para fines de la prueba supongamos que $M_1 \notin \Gamma$. Con esto $M_1 \neq G_1$ y $M_1, G_1 \in \mu^{-1}(t_0)$, así que existe $x_1 \in M_1 - G_1$. Sea $f : [0,1] \to \alpha_1$ un homeomorfismo tal que $f(0) = M_1$ y $f(1) = G_1$.

Sea $S = \{s \in [0,1] : x_1 \in f(s)\}$ un subespacio cerrado y no vacío y sea $S_1 = \sup S$. Como $x_1 \notin f(1) = G_1$, tenemos que $0 \leq S_1 < 1$.

Como $\cup\Gamma = X$ y $x_1 \in X$ existe $X_1 \in \Gamma$ tal que $x_1 \in X_1$ y como $f(S_1) \notin \Gamma$ tenemos que $f(S_1) \neq X_1$. Puesto que $x_1 \in f(S_1) \cap X_1$ y $f(S_1), X_1 \in \mu^{-1}(t_0)$ existe un arco $\beta \subseteq \mu^{-1}(t_0)$ con extremos X_1 y $f(S_1)$ con la propiedad de que si $B \in \beta$, $x_1 \in B$.

Como $x_1 \in B$, para cada $B \in \beta$ tenemos:

$$(1) \qquad \beta \cap \alpha_1 \subseteq f([0,S_1]).$$

Ya que $S_1 < 1$ y $\alpha_1 \cap \Gamma = \{G_1\} = \{f(1)\}$ tenemos que

$$(2) \qquad f([0,S_1]) \cap \Gamma = \emptyset.$$

Como $M_1 \in \alpha_1 \cap \beta$

$$(3) \qquad \alpha_1 \cap \beta \neq \emptyset.$$

Ya que $X_1 \in \Gamma \cap \beta$

$$(4) \qquad \Gamma \cap \beta \neq \emptyset.$$

Con esto, ya que β es conexo y como $f([0,S_1])$ y Γ son cerrados ajenos, las propiedades anteriores muestran que

$$(5) \qquad \beta \nsubseteq f([0, S_1]) \cup \Gamma \text{ aún más } \beta \nsubseteq \alpha_1 \cup \Gamma.$$

Por otra parte, notemos que $\alpha_1 \cup \Gamma \cup \alpha_2$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ y $M_1, M_2 \in \alpha_1 \cup \Gamma \cup \alpha_2$ así que

$$(6) \qquad \alpha_1 \cup \Gamma \cup \alpha_2 = \mu^{-1}(t_0).$$

Como β es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$, por (5) y (6) se tiene

$$(7) \qquad \beta \cap \alpha_2 \neq \emptyset.$$

Por (3) y (7) tenemos que $\alpha_1 \cup \beta \cup \alpha_2$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ y ya que $M_1, M_2 \in \alpha_1 \cup \beta \cup \alpha_2$

$$(8) \qquad \alpha_1 \cup \beta \cup \alpha_2 = \mu^{-1}(t_0).$$

Con esto último tenemos que $\mu^{-1}(t_0)$ es arco-conexo y como $\mu^{-1}(t_0) = Irr(M_1, M_2)$ tenemos que

$$(9) \qquad \mu^{-1}(t_0) \text{ es un arco con extremos } M_1 \text{ y } M_2.$$

Como $f(0) = M_1$ y $S_1 < 1$, $\beta \subseteq f([0, S_1])$, $\beta \cap \Gamma \neq \emptyset$ y $f([0, S_1]) \cap \Gamma = \emptyset$ lo que nos lleva a una contradicción.

Por tanto $M_1 \in \Gamma$, similarmente para M_2.

■

Además, de los teoremas 2.5.10 y 2.5.11 obtenemos la siguiente equivalencia.

Corolario 2.5.12. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0, 1]$ es una función de Whitney, son equivalentes:

i) $\mu^{-1}(t)$ es irreducible para cada $t \in [0, 1)$

ii) $X \in CP$.

2.6. Conexidad local

En esta sección estudiaremos la propiedad de conexidad local. Veremos que la propiedad de ser un continuo localmente conexo es una propiedad de Whitney, para ello tomaremos en cuenta el siguiente resultado.

Proposición 2.6.1. Si X es un continuo que no es localmente conexo en $p \in X$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = p$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, no existe un subespacio conexo de diámetro menor que $\frac{1}{n}$ que contiene a x_n y p.

A continuación mencionamos un teorema que se encuentra en [18, Teorema 8.26, p. 132].

Teorema 2.6.1. Cada subconjunto abierto y conexo dentro de un continuo localmente conexo es arco-conexo.

También en [18, Ejercicio 8.50, p. 138] se encuentra un resultado para los continuos localmente conexo que mencionamos a continuación.

Teorema 2.6.2. Si X es un continuo localmente conexo, entonces X es homeomorfo a un continuo en el que las bolas abiertas son conjuntos conexos.

Ahora sí, con ayuda de los resultados previos procederemos a probar que la propiedad de ser un continuo localmente conexo es una propiedad de Whitney.

Teorema 2.6.3. Si X es un continuo localmente conexo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es localmente conexo para cada $t_0 \in (0,1)$. Es decir, la propiedad de ser localmente conexo es una propiedad de Whitney.

Demostración:
Supongamos que X es un continuo localmente conexo (en el que todas las bolas abiertas son conjuntos conexos) y sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $0 < t_0 < 1$. Mostraremos que $\mu^{-1}(t_0)$ es un continuo localmente conexo.

Sea $A_0 \in \mu^{-1}(t_0)$. Consideremos una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $\mu^{-1}(t_0) - \{A_0\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} B_n = A_0$.

Sea $x \in A_0$ y $m \in \mathbb{N}$. Usando que $\frac{t_0}{2^m} > 0$ y la continuidad de μ en $\{x\}$ existe $\delta_m > 0$ tal que si $A \in C(X)$ y $H(A, \{x\}) < \delta_m$ entonces $\mu(A) < \frac{t_0}{2^m}$.

Como $x \in A_0 = \lim_{n\to\infty} B_n$ existe n_m tal que $B_n \cap B(\delta_m, x) \neq \emptyset$ para cada $n \geq n_m$. Con esto, podemos construir una subsucesión $\{B_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que para cada m, $B_{n_m} \cap B(\delta_m, x) \neq \emptyset$. Renombraremos la subsucesión $\{B_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ por $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Como $B(\delta_n, x)$ es un conjunto abierto y conexo por el teorema 2.6.1 tenemos que $B(\delta_n, x)$ es arco-conexo. Como $B(\delta_n, x) \cap A_n \neq \emptyset$ existe un arco $\gamma_n \subset B(\delta_n, x)$ tal que $A_0 \cap \gamma_n \neq \emptyset \neq A_n \cap \gamma_n$, y como $H(\{x\}, \gamma_n) < \delta_n$ entonces $\mu(\gamma_n) < \frac{t_0}{2^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n = A_n \cup \gamma_n \cup A_0$ el cual es un continuo. Como $\mu(\gamma_n) < \frac{t_0}{2^n} < t_0$, existe un arco $\Gamma_n \subset \mu^{-1}(t_0) \cap C(X_n)$ con extremos A_n y A_0 por el teorema 1.3.5.

Como $\lim_{n\to\infty} diam(\gamma_n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} A_n = A_0$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} X_n = A_0$.

Mostraremos que $\lim_{n\to\infty} C(X_n) \cap \mu^{-1}(t_0) = \{A_0\}$. Primero notemos que $A_0 \in C(X_n) \cap \mu^{-1}(t_0)$ así que $A_0 \in \liminf_{n\to\infty} C(X_n) \cap \mu^{-1}(t_0)$.

Sea ahora $B \in \limsup_{n\to\infty} C(X_n) \cap \mu^{-1}(t_0)$. Mostraremos que $B = A_0$. Por definición de límite superior existe una sucesión n_i de números naturales tal que para cada i existe $B_{n_i} \in C(X_{n_i}) \cap \mu^{-1}(t_0)$ y $\lim_{n\to\infty} B_{n_i} = B$.

Como $B_{n_i} \subset X_{n_i}$ y $\lim_{n\to\infty} X_{n_i} = A_0$ entonces $B \subset A_0$ y puesto que $\mu(B) = t_0 = \mu(A_0)$ concluimos que $B = A_0$, así $\{A_0\} = \lim_{n\to\infty} C(X_n) \cap \mu^{-1}(t_0)$.

Con lo anterior tenemos que $\lim_{n\to\infty} diam(\Gamma_n) = 0$ y por tanto $\mu^{-1}(t_0)$ es localmente conexo en A_0, y ya que A_0 fue arbitrario concluimos que $\mu^{-1}(t_0)$ es localmente conexo.

■

Capítulo 3

Propiedades de Whitney reversibles

En este capítulo veremos las propiedades topológicas que los niveles de Whitney le heredan a un continuo, es decir, estudiaremos propiedades fuerte Whitney reversibles y propiedades de Whitney reversibles.

A lo largo de este capítulo probaremos que las siguientes son propiedades fuerte Whitney reversibles: ser localmente conexo, no contener triodos, ser arco, ser círculo, ser unicoherente, ser indescomponible, no ser hereditariamente indescomponible, no ser pseudo-arco, no ser encadenable, no ser círculo, no ser arco-conexo, no ser localmente conexo, no ser indescomponible y encadenable, no contener arcos, no contener círculos, ser hereditariamente indescomponible y ser pseudo-arco.

Además, en la última sección de este capítulo demostraremos que la propiedad de ser irreducible y la propiedad cubriente son propiedades de Whitney reversibles.

3.1. Conexidad local

En la primera sección de este capítulo veremos que la propiedad de ser localmente conexo, no contener triodos, ser arco y ser círculo son propiedades fuerte Whitney reversibles.

Empecemos viendo que la propiedad de ser un continuo localmente conexo es una propiedad de Whitney reversible.

Teorema 3.1.1. Sea X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si existe $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es localmente conexo para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X es localmente conexo. Por tanto, ser un continuo localmente conexo es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Demostración:
Por [18, Teorema 8.4, p. 120] sabemos que un continuo X es localmente conexo si y sólo si

para todo $\epsilon > 0$ existe una cantidad finita $\{X_i\}_{i=1}^n$ de subcontinuos de X tal que $X = \cup_{i=1}^n X_i$ con $diam\ X_i < \epsilon$.

Sea $\epsilon > 0$. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney la cual sabemos que es uniformemente continua así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $A \in \mu^{-1}(t_n)$ entonces $diam\ (A) < \frac{\epsilon}{2}$.

En efecto, como $\frac{\epsilon}{8} > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H^2(\mu^{-1}(t_n), \mu^{-1}(0)) < \frac{\epsilon}{8}$. Si $A \in \mu^{-1}(t_n)$ existe $p \in X$ tal que $H(A, \{p\}) < \frac{\epsilon}{8}$ de manera que si $x, y \in A$ entonces $d(x,p) < \frac{\epsilon}{8}$ y $d(y,p) < \frac{\epsilon}{8}$ y por la desigualdad del triángulo tenemos $d(x,y) \leq d(x,p) + d(p,y) < \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{8} = \frac{\epsilon}{4}$, por tanto, $diam\ A \leq \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{2}$.

Llamaremos $s_0 = t_n$. Es decir, existe s_0 tal que $diam\ A < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $A \in \mu^{-1}(s_0)$. Como $\mu^{-1}(s_0)$ es localmente conexo existen $A_1, ..., A_k$ subcontinuos de $\mu^{-1}(s_0)$ tal que

i) $diam\ A_i < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $i = 1, ..., k$

ii) $\mu^{-1}(s_0) = \cup_{i=1}^k A_i$

Como cada A_i es un subcontinuo de 2^X y $A_i \cap C(X) \neq \emptyset$ entonces por el lema 1.3.4 $\cup A_i = G_i$ es un subcontinuo de X. Notemos que $\cup_{i=1}^k G_i = \cup_{i=1}^k \cup A_i = \cup \mu^{-1}(s_0) = X$.

Falta mostrar que $diam\ G_i < \epsilon$ para cada $i = 1, .., k$. Sean $i \in \{1, ..., k\}$ y $p, q \in G_i$. Por definición de G_i, existen $A, B \in A_i$ tal que $p \in A$ y $q \in B$. Como $diam\ A_i < \frac{\epsilon}{2}$, $H(A,B) < \frac{\epsilon}{2}$. Por otra parte $diam\ A < \frac{\epsilon}{2}$ y $diam\ B < \frac{\epsilon}{2}$ puesto que $A, B \in A_i \subseteq \mu^{-1}(s_0)$.

Como $p \in A \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, B)$ existe $b \in B$ tal que $d(p,b) < \frac{\epsilon}{2}$ y como $b, q \in B$, $d(b,q) < \frac{\epsilon}{2}$. Por tanto $d(p,q) \leq d(p,b) + d(b,q) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, por lo que ya tenemos que $diam\ G_i < \epsilon$.

∎

La siguiente propiedad que queremos mostrar que es una propiedad fuerte Whitney reversible es, la propiedad de no contener triodos. Para ello, vamos a necesitar un lema que nos dice que si un continuo es un triodo podemos encontrar un número positivo tal que el nivel de Whitney en valores más pequeños que ese número resultan ser triodos.

Lema 3.1.2. Si X es un continuo y X es un triodo, entonces para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $t \in (0, \delta)$, $\mu^{-1}(t)$ es un triodo.

Demostración:
Como X es un triodo existe $N \in C(X)$ tal que $X - N$ tiene al menos tres componentes. En este caso, $X - N = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ donde los conjuntos S_i están mutuamente separados y son no vacíos.

Si para cada $i \in \{1,2,3\}$ llamamos $A_i = N \cup S_i$ entonces por el lema de las orejas A_i es un subcontinuo de X.

Sea $\delta > 0$ tal que

$$[\mu^{-1}(\delta) \cap C(A_i)] - X(N, \mu, \delta) \neq \emptyset \qquad (1)$$

donde $X(N, \mu, \delta) = \{K \in \mu^{-1}(\delta) : K \cap N \neq \emptyset\}$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Para mostrar la existencia de δ que cumple (1) procedemos como sigue:

i) Sea $a_1 \in A_1 - N \subseteq S_1$. Como N es cerrado $A_1 - N$ es abierto así que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B^{A_1}(\epsilon_1, a_1) \subseteq S_1$ por lo que existe $A_1' \in C(A_1)$ tal que $\{a_1\} \subsetneq A_1' \subseteq B^{A_1}(\epsilon_1, a_1)$ y claramente $A_1' \cap N = \emptyset$. Llamemos $\delta_1 = \mu(A_1') > 0$.

ii) De manera similar, se definen $\delta_2, \delta_3 > 0$ y también $A_2' \subseteq A_2 - N$ y $A_3' \subseteq A_3 - N$.

iii) Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$. Por la existencia de arcos ordenados $\alpha_i : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha_i(0) = \{a_i\}$ y $\alpha_i(1) = A_i'$ existe $B_i \in C(A_i')$ tal que $\mu(B_i) = \delta$ para cada $i = 1,2,3$. De aquí concluimos que $B_i \in [\mu^{-1}(\delta) \cap C(A_i)] - X(N,\mu,\delta)$. Por lo tanto, $[\mu^{-1}(\delta) \cap C(A_i)] - X(N,\mu,\delta) \neq \emptyset$.

Veamos que si $0 < t_0 < \delta$ entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es un triodo. Notemos que

$$X(N,\mu,t_0) = \{B \in \mu^{-1}(t_0) : B \cap N \neq \emptyset\}$$

es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$ por el lema 2.2.9.

Para cada $i = 1,2,3$, sea $U_i = \{A \in \mu^{-1}(t_0) : A \subseteq S_i\} = \mu^{-1}(t_0) \cap \{A \in 2^X : A \subseteq S_i\}$ el cual es abierto en $\mu^{-1}(t_0)$.

Por la elección de δ, para cada $i = 1,2,3$ tenemos que $U_i \neq \emptyset$. Además

$$\mu^{-1}(t_0) = X(N,\mu,t_0) \cup \cup_{i=1}^{3} U_i$$

es decir,

$$\mu^{-1}(t_0) - X(N,\mu,t_0) = \cup_{i=1}^{3} U_i$$

y sabemos que $\cup_{i=1}^{3} U_i$ tiene al menos tres componentes. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t_0)$ es un triodo.

■

Como consecuencia del resultado anterior, obtenemos que la propiedad de no contener triodos es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.1.3. Sea X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1)$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ no contiene triodos para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X no contiene triodos.

Demostración:
Si suponemos que X contiene un triodo $T \in C(X)$ entonces $\mu|_{C(T)} : C(T) \to [0,1]$ es una función de Whitney. Por el resultado anterior existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\mu|_{C(T)})^{-1}(t_n)$ es un triodo. Como $(\mu|_{C(T)})^{-1}(t_n) \subseteq \mu^{-1}(t_n)$ entonces $\mu^{-1}(t_n)$ contiene un triodo lo cual no puede pasar por hipótesis. Por tanto, X no contiene triodos.

■

A continuación presentamos un teorema cuya demostración vamos a omitir, sin embargo, dejamos su referencia [18, p. 135]. Este resultado será de mucha ayuda para la prueba de los próximos resultados.

Teorema 3.1.4. Sea X un continuo localmente conexo que no contiene triodos simples, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.

Como sabemos que tanto la propiedad de ser localmente conexo y la propiedad de no contener triodos son propiedades que los niveles de Whitney le heredan a un continuo, podemos hacer uso del teorema anterior para probar que tanto la propiedad de ser arco y de ser circunferencia son propiedades fuerte Whitney reversible.

Mostremos primero que la propiedad de ser arco es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.1.5. Sea X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en (0, 1) tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es un arco para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X es un arco.

Demostración:
Sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Como $\mu^{-1}(t_n)$ es un arco, $\mu^{-1}(t_n)$ es localmente conexo y no contiene triodos. Por el teorema 3.1.1 X es localmente conexo y también por el corolario 3.1.3 X no contiene triodos así que por el teorema 3.1.4 X es un arco o una curva cerrada simple. Como los niveles de Whitney de S son homeomorfos a S, X tiene que ser un arco.

■

De manera similar, obtenemos que la propiedad de ser circunferencia es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.1.6. Sea X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es una circunferencia para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X es una circunferencia.

Demostración:
Sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Como $\mu^{-1}(t_n)$ es una circunferencia, $\mu^{-1}(t_n)$ es localmente conexo y no contiene triodos. Así que X es localmente conexo por el teorema 3.1.1 y no contiene triodos por el corolario 3.1.3. Así que por el teorema 3.1.4 X es un arco o una circunferencia, pero por el corolario anterior X no puede ser un arco. Por lo tanto, X es una circunferencia.

■

3.2. Unicoherencia

Nos dedicaremos en esta sección a probar que la propiedad de ser unicoherente es una propiedad fuerte Whitney reversible. Antes de probar esto, mostraremos un resultado que nos permite encontrar subcontinuos de un nivel de Whitney con diámetro pequeño.

Lema 3.2.1. Si X es un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney y para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < t < \delta$ entonces $0 < diam(A) < \epsilon$ para cada $A \in \mu^{-1}(t)$.

Demostración:
Supongamos que el resultado no se cumple para algún $\epsilon_0 > 0$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in C(X)$ tal que $0 < \mu(A_n) < \frac{1}{n}$ y $diam(A_n) \geq \epsilon_0$.

Puesto que $C(X)$ es compacto podemos suponer que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $C(X)$, y digamos que converge a A, es decir, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Como μ es una función continua $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ así que $\mu(A) = 0$ por lo que $A \in F_1(X)$, pero por otro lado $0 = diam(A) \geq \epsilon_0 > 0$, lo cual es una contradicción.

■

A continuación, probaremos con ayuda del lema anterior que la propiedad de ser un continuo unicoherente es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Teorema 3.2.2. Si X es un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney y existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es unicoherente para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X es unicoherente.

Demostración:
Hagamos la demostración por contradicción. Supongamos que X no es unicoherente, es decir, existen $A, B \in C(X)$ tal que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo. De esta manera también podemos suponer que $A \cap B = K \cup L$ donde K y L son dos compactos, ajenos y no vacíos.

Como $\inf\{d(x,y) : x \in K, y \in L\} > 0$ por el lema anterior existe t_n tal que

$$\{M \in \mu^{-1}(t_n) : M \cap K \neq \emptyset\} \cap \{M \in \mu^{-1}(t_n) : M \cap L \neq \emptyset\} = \emptyset.$$

Consideremos los conjuntos

$$X(A,\mu,t_n) = \{C \in \mu^{-1}(t_n) : C \cap A \neq \emptyset\}$$

$$X(B,\mu,t_n) = \{C \in \mu^{-1}(t_n) : C \cap B \neq \emptyset\},$$

los cuales son subcontinuos de $\mu^{-1}(t_n)$ como se probó en el lema 2.2.9 y además, como $X = A \cup B$ tenemos que

$$\mu^{-1}(t_n) = X(A, \mu, t_n) \cup X(B, \mu, t_n).$$

Por la elección de t_n tenemos que

$$X(A, \mu, t_n) \cap X(B, \mu, t_n) = \{C \in \mu^{-1}(t_n) : C \cap (A \cap B) \neq \emptyset\}.$$

Más aún,

$$\begin{aligned} X(A, \mu, t_n) \cap X(B, \mu, t_n) &= \{C \in \mu^{-1}(t_n) : C \cap K \neq \emptyset\} \cup \{C \in \mu^{-1}(t_n) : C \cap L \neq \emptyset\} \\ &= X(K, \mu, t_n) \cup X(L, \mu, t_n) \end{aligned}$$

y notemos que $X(K, \mu, t_n)$ y $X(L, \mu, t_n)$ son cerrados, ajenos y no vacíos por lo que $\mu^{-1}(t_n) = X(A, \mu, t_n) \cup X(B, \mu, t_n)$ no es unicoherente, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, X es unicoherente.

■

3.3. Descomponibilidad

En esta sección mostraremos que ser indescomponible, no ser hereditariamente indescomponible, no ser pseudo-arco, no ser encadenable, no ser círculo, no ser arco-conexo, no ser localmente conexo, no ser indescomponible y encadenable, no contener arcos, no contener círculos, ser hereditariamente indescomponible y ser pseudo-arco son propiedades fuerte Whitney reversibles.

Notemos que si P es una propiedad de Whitney entonces su negación $\neg P$ es una propiedad fuerte Whitney reversible, de esta manera podemos hacer la siguiente observación.

Observación 3.3.1. Sea X un continuo, $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y P una propiedad de Whitney. Si para algún $0 < t < 1$, $\mu^{-1}(t)$ no cumple la propiedad P entonces X no cumple la propiedad P.

En el capítulo 2 estudiamos a las propiedades de Whitney así que con la observación anterior podemos obtener algunas propiedades que son fuerte Whitney reversibles.

Empecemos viendo que la propiedad de ser indescomponible es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.3.2. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0, 1]$ es una función de Whitney para la cual existe $0 < t < 1$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es indescomponible, entonces X es indescomponible.

Demostración:
Por el teorema 2.2.10 sabemos que la propiedad de ser descomponible es una propiedad de Whitney, si $\mu^{-1}(t)$ es indescomponible por la obervación anterior tenemos que X es indescomponible.

∎

El siguiente corolario muestra que la propiedad de no ser hereditariamente indescomponible es un propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.3.3. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para la cual existe $0 < t < 1$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es hereditariamente indescomponible, entonces X no es hereditariamente indescomponible.

Demostración:
Por el corolario 2.4.5 sabemos que la propiedad de ser hereditariamente indescomponible es una propiedad de Whitney, si $\mu^{-1}(t)$ no es hereditariamente indescomponible por la observación anterior tenemos que X no es hereditariamente indescomponible.

∎

La propiedad de no ser pseudo-arco es una propiedad fuerte Whitney reversible como nos dice el siguiente resultado.

Corolario 3.3.4. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para la cual existe $0 < t < 1$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es pseudo-arco, entonces X no es pseudo-arco.

Demostración:
Por el corolario 2.4.6 sabemos que la propiedad de ser pseudo-arco es una propiedad de Whitney, si $\mu^{-1}(t)$ no es pseudo-arco por la observación anterior tenemos que X no es pseudo-arco.

∎

A continuación se muestra que la propiedad de no ser un continuo encadenable es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.3.5. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para la cual existe $0 < t < 1$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es encadenable, entonces X no es encadenable.

Demostración:
Por el teorema 2.3.8 sabemos que la propiedad de ser encadenable es una propiedad de Whitney, por la observación anterior tenemos que si $\mu^{-1}(t)$ no es encadenable entonces X no es encadenable.

∎

De manera similar al resultado anterior, se pueba que la propiedad no ser un continuo tipo círculo propio es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.3.6. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para la cual existe $0 < t < 1$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es tipo círculo propio, entonces X no es tipo círculo propio.

Demostración:
Por el teorema 2.3.9 sabemos que la propiedad de ser tipo círculo propio es una propiedad de Whitney, por la observación anterior resulta que si $\mu^{-1}(t)$ no es tipo círculo propio entonces X no es tipo círculo propio.

■

Así mismo, por la observación anterior tenemos que la propiedad de no ser arco es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.3.7. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para la cual existe $0 < t < 1$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es arco, entonces X no es arco.

Demostración:
Por el teorema 2.1.1 sabemos que la propiedad de ser arco es una propiedad de Whitney, si $\mu^{-1}(t)$ no es arco por la observación anterior tenemos que X no es arco.

■

También tenemos que la propiedad de no ser círculo es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.3.8. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para la cual existe $0 < t < 1$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es círculo, entonces X no es círculo.

Demostración:
Por el teorema 2.1.2 sabemos que la propiedad de ser círculo es una propiedad de Whitney, si $\mu^{-1}(t)$ no es círculo por la observación anterior tenemos que X no es círculo.

■

El siguiente corolario muestra que la propiedad de no ser arco-conexo es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.3.9. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para la cual existe $0 < t < 1$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es arco-conexo, entonces X no es arco-conexo.

Demostración:
El el teorema 2.1.3 nos dice que la propiedad de ser arco-conexo es una propiedad de Whitney, usando la observación 3.3.1 tenemos que si $\mu^{-1}(t)$ no es arco-conexo entonces X no es arco-conexo.

■

A continuación se prueba que la propiedad de no ser localmente conexo es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.3.10. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para la cual existe $0 < t < 1$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es localmente conexo, entonces X no es localmente conexo.

Demostración:
Por el teorema 2.6.3 sabemos que la propiedad de ser localmente conexo es una propiedad de Whitney, si $\mu^{-1}(t)$ no es localmente conexo por la observación 3.3.1 tenemos que X no es localmente conexo.

■

Veamos ahora que la propiedad de no ser indescomponible y encadenable es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Corolario 3.3.11. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney para la cual existe $0 < t < 1$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es indescomponible y encadenable, entonces X no es indescomponible y encadenable.

Demostración:
Por el teorema 2.3.11 sabemos que la propiedad de ser indescomponible y encadenable es una propiedad de Whitney, si $\mu^{-1}(t)$ no es indescomponible y encadenable tenemos por la observación 3.3.1 que X no es indescomponible y encadenable.

■

En siguiente teorema mostraremos que la propiedad de no contener arcos es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Teorema 3.3.12. Sea X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ no contiene arcos para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X no contiene arcos. Es decir, no contener arcos es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Demostración:
Supongamos que X es un continuo que contiene un arco A. Como μ es una función de Whitney para $C(X)$ tenemos que $\mu|_{C(A)}$ es una función de Whitney para $C(A)$.

Por el teorema 2.1.1 sabemos que ser arco es una propiedad de Whitney y usando t_n tal que $t_n < \mu(A)$ tenemos que $\mu^{-1}(t_n)$ contiene un arco

$$(\mu|_{C(A)})^{-1}(t_n) = \mu^{-1}(t_n) \cap C(A)$$

lo cual es una contradicción y por tanto X no puede contener arcos.

■

De manera similar se prueba el siguiente resultado.

Teorema 3.3.13. Sea X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ no contiene un círculo para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X no contiene un círculo. Es decir, no contener un círculo es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Demostración:
Supongamos que X es un continuo que contiene un círculo S. Notemos que $\mu|_{C(S)}$ es una función de Whitney para $C(S)$ y por el teorema 2.1.2 sabemos que la propiedad de ser círculo es una propiedad de Whitney. Como S es un continuo no degenerado, $\mu(S) > 0$ y usando t_n tal que $t_n < \mu(S)$ tenemos que $\mu^{-1}(t_n)$ contiene un círculo

$$(\mu|_{C(S)})^{-1}(t_n) = \mu^{-1}(t_n) \cap C(S)$$

con lo que tenemos una contradicción y por tanto X no contiene círculos.

■

La propiedad de ser hereditariamente indescomponible es una propiedad fuerte Whitney reversible como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.14. Sea X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es hereditariamente indescomponible para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X es hereditariamente indescomponible. Es decir, ser hereditariamente indescomponible es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Demostración:
Si suponemos que X no es hereditariamente indescomponible entonces existe $A \in C(X)$ tal que A es descomponible.

Como A es descomponible debe tener más de un punto por lo que $\mu(A) > 0$, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_n < \mu(A)$.

Puesto que A es descomponible y $\mu|_{C(A)}$ es una función de Whitney para $C(A)$ tenemos que

$$(\mu|_{C(A)})^{-1}(t_n) = \mu^{-1}(t_n) \cap C(A)$$

es un subcontinuo descomponible de $\mu^{-1}(t_n)$ ya que sabemos por el teorema 2.2.10 que ser descomponible es una propiedad de Whitney, y con esto llegamos a una contradicción.

Por tanto, X es hereditariamente indescomponible.

■

Antes de proceder a probar que ser pseudo-arco es una propiedad fuerte Whitney reversible, veamos el siguiente teorema que nos dice que cuando tenemos un continuo hereditariamente indescomponible podemos encontrar $\epsilon-$funciones que van a niveles de Whitney pequeños.

Teorema 3.3.15. Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $\epsilon > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $0 < t < \delta$ existe $f_t : X \to \mu^{-1}(t)$ una $\epsilon-$función.

Demostración:
Sea $\epsilon > 0$. Por el lema 3.2.1 existe $\delta > 0$ tal que si $0 < t < \delta$ entonces para cada $A \in \mu^{-1}(t)$ se cumple que $diam(A) < \epsilon$.

Sea $t \in (0, \delta)$. Como X es hereditariamente indescomponible la función $f_t : X \to \mu^{-1}(t)$ tal que $f_t(x)$ es el único elemento en $\mu^{-1}(t)$ tal que $x \in f_t(x)$ está bien definida y es continua como ya se vió en observación 2.4.3.

Ahora, si $A \in \mu^{-1}(t)$ entonces $f_t^{-1}(A) = A$ y como $diam(A) < \epsilon$ tenemos que $diam(f_t^{-1}(A)) < \epsilon$ y por tanto f_t es una $\epsilon-$función.

■

A continuación demostraremos que la propiedad de ser pseudo-arco es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Teorema 3.3.16. Sea X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, si existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es pseudo-arco para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X es un pseudo-arco.

Demostración:
Como $\mu^{-1}(t_n)$ es pseudo-arco, tenemos que $\mu^{-1}(t_n)$ es hereditariamente indescomponible y encadenable para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema 3.3.14 obtenemos que X es hereditariamente indescomponible.

Sea $\epsilon > 0$. Por el teorema 3.3.15 existe t_n y una $\epsilon-$función $f : X \to \mu^{-1}(t_n)$. Y por el lema 1.4.11 existe $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}(t_n)$ y $diam(\mathcal{A}) < \delta$ entonces $diam(f^{-1}(\mathcal{A})) < \epsilon$.

Ahora, como $\mu^{-1}(t_n)$ es encadenable existe $g : \mu^{-1}(t_n) \to [0,1]$ una $\delta-$ función, y con esto, $g \circ f : X \to [0,1]$ es una $\epsilon-$función.

Por lo tanto, X es encadenable y hereditariamente indescomponible, es decir, X es pseudo-arco.

■

3.4. Propiedad cubriente e irreducibilidad

En el capítulo 2 definimos a la propiedad cubriente que denotamos como CP y vimos algunos resultados que serán de bastante utilidad en esta sección, donde estudiaremos un poco más a la propiedad cubriente y la irreducibilidad.

En esta sección probaremos que la propiedad de ser irreducible y la propiedad de tener la propiedad cubriente son propiedades de Whitney reversibles.

A continuación mostraremos un resultado que nos dice que la propiedad cubriente relativa a una función de Whitney μ es de hecho una propiedad del continuo, es decir, es independiente de la elección de μ.

Teorema 3.4.1. Sea X un continuo y sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $X \in CP(\mu)$, entonces $X \in CP(\mu_1)$ para cualquier función de Whitney μ_1 para $C(X)$. En otras palabras: si $X \in CP(\mu)$, entonces X tiene la propiedad cubriente.

Demostración:
Supongamos que $X \in CP(\mu)$ y sea μ_1 una función de Whitney para $C(X)$. Sea $t_1 \in [0,1]$ y Λ_1 un subcontinuo propio de $\mu_1^{-1}(t_1)$. Queremos mostrar que $\cup\Lambda_1 \neq X$.

Sea $A_0 \in \mu_1^{-1}(t_1) - \Lambda_1$ y sea $t_0 = \mu(A_0)$. Definimos

$$\Lambda = \{B \in \mu^{-1}(t_0) : \text{para algún } K \in \Lambda_1, K \subset B \text{ o } B \subset K\}.$$

Vamos a probar lo siguiente:

(1) $[\cup\Lambda_1] \subset [\cup\Lambda]$.

(2) Λ es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}(t_0)$.

Notemos que, ya que $X \in CP(\mu)$ si probamos (1) y (2) obtendremos que $\cup\Lambda_1 \neq X$.

Veamos la pueba de (1).

Sea $x \in [\cup\Lambda_1]$. Entonces existe $K \in \Lambda_1$ tal que $x \in K$. Consideremos dos casos:

(i) Supongamos que $\mu(K) \geq t_0$. Como $\{x\} \subset K$ existe $B \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $\{x\} \subset B \subset K$. Entonces $B \in \Lambda$ y como $x \in B$ tenemos que $x \in \cup\Lambda$.

(ii) Supongamos que $\mu(K) < t_0$. Como $K \subset X$ existe $B \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $K \subset B$. Entonces $B \in \Lambda$ y desde que $x \in K \subset B$ tenemos que $x \in [\cup\Lambda]$.

Por lo tanto, $[\cup\Lambda_1] \subset [\cup\Lambda]$.

Ahora veamos la prueba de (2).

Por definición, $\Lambda \subset \mu^{-1}(t_0)$. Queremos probar que $\Lambda \neq \mu^{-1}(t_0)$. Notemos que por definición de t_0, $A_0 \in \mu^{-1}(t_0)$. Mostraremos que $A_0 \notin \Lambda$.

Supongamos que $A_0 \in \Lambda$. Por definición de Λ existe $K \in \Lambda_1$ tal que $K \subset A_0$ o $A_0 \subset K$. Como $\Lambda_1 \subset \mu_1^{-1}(t_1)$ y $A_0 \in \mu_1^{-1}(t_1)$ tenemos que $\mu_1(K) = \mu_1(A_0)$, así que $K = A_0$.

Puesto que $K \in \Lambda_1$ tenemos que $A_0 \in \Lambda_1$ con lo cual llegamos a una contradicción. Por tanto, $A_0 \notin \Lambda$. Así concluimos que $\Lambda \neq \mu^{-1}(t_0)$.

Veamos que Λ es compacto. Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Λ, como cada $B_n \in \mu^{-1}(t_0)$ podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ con $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Como cada $B_n \in \Lambda$ existe $K_n \in \Lambda_1$ tal que $K_n \subset B_n$ o $B_n \subset K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ya que Λ_1 es compacto podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} K_n = K$ con $K \in \Lambda_1$. Así que por el teorema 1.0.7 $K \subset B$ o $B \subset K$, por lo que $B \in \Lambda$.

Con lo anterior tenemos que Λ es un cerrado en el compacto $\mu^{-1}(t_0)$. Con esto, concluimos que Λ es compacto.

Falta probar que Λ es conexo. Supongamos que Λ no es conexo, es decir, $\Lambda = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ donde Γ_1 y Γ_2 son dos subconjuntos compactos, ajenos y no vacíos de Λ.

Para cada $i = 1, 2$ definimos

$$\Gamma_i^1 = \{A \in \Lambda_1 : \text{para algún } G \in \Gamma_i, G \subset A \text{ o } A \subset G\}.$$

Mostraremos que $\Lambda_1 = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_2^1$ y que Γ_1^1 y Γ_2^1 son dos subconjuntos compactos, ajenos y no vacíos de Λ_1.

Para mostrar que $\Lambda_1 = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_2^1$ es suficiente mostrar que $\Lambda_1 \subset [\Gamma_1^1 \cup \Gamma_2^1]$.

Sea $L_1 \in \Lambda_1$ por la definición de t_0 existe $M \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $L_1 \subset M$ o $M \subset L_1$ ya que $\mu_1(L_1) = \mu_1(M)$ y $M \notin \Lambda_1$.

Entonces por la definición de Λ, $M \in \Lambda$ y puesto que $\Lambda = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ obtenemos que $M \in [\Gamma_1 \cup \Gamma_2]$. Como $M \in \Gamma_i$, por definición de Γ_i^1 tenemos que $L_1 \in \Gamma_i^1$. Así $\Lambda_1 = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_2^1$.

Usando la definición de Λ y que Γ_1 es un subconjunto no vacío de Λ, se sigue que Γ_1^1 es no vacío. Similarmente Γ_2^1 es no vacío.

Luego por la compacidad de Γ_i tenemos que Γ_i^1 es compacto para $i = 1, 2$.

Falta mostrar que $\Gamma_1^1 \cap \Gamma_2^1 = \emptyset$. Supongamos que existe $A \in [\Gamma_1^1 \cap \Gamma_2^1]$. Consideremos dos casos:

(i) Supongamos que $\mu(A) \geq t_0$. Como $A \in \Gamma_i^1$ y $\Gamma_i \subset \Lambda \subset \mu^{-1}(t_0)$ se sigue de la definición de Γ_i^1 que existe $G_i \in \Gamma_i$ tal que $G_i \subset A$ para $i = 1, 2$.

Por el lema 2.2.9 sabemos que $C(A) \cap \mu^{-1}(t_0)$ es un subcontinuo en $\mu^{-1}(t_0)$. Puesto que $A \in \Lambda_1$ se sigue de la definición de Λ que $[C(A) \cap \mu^{-1}(t_0)] \subset \Lambda$. Por tanto, $C(A) \cap \mu^{-1}(t_0)$ es un subcontinuo de Λ.

Como $G_i \in \Gamma_i$ y $G_i \in [C(A) \cap \mu^{-1}(t_0)]$ para $i = 1, 2$ tenemos que $[C(A) \cap \mu^{-1}(t_0)] \cap \Gamma_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$, lo cual es una contradicción.

(ii) Supongamos que $\mu(A) < t_0$. Ya que $A \in \Gamma_i^1$ y $\Gamma_i \subset \Lambda \subset \mu^{-1}(t_0)$ se sigue de la definición de Γ_i^1 que existe $G_i' \in \Gamma_i$ tal que $A \subset G_i'$ para cada $i = 1, 2$.

Notemos que $G_1', G_2' \in \mu^{-1}(t_0)$ y A es un subcontinuo de $G_1' \cap G_2'$ así que por el teorema 1.3.5 existe un arco $\alpha \subset \mu^{-1}(t_0)$ con extremos G_1' y G_2' y tal que para cada $L \in \alpha$ se tiene que $A \subset L$. Como $A \in \Lambda_1$ se sigue de la definición de Λ que $\alpha \subset \Lambda$.

Por tanto, como $G_i' \in [\Gamma_i \cap \alpha]$ para $i = 1, 2$ tenemos una contradicción ya que Γ_1 y Γ_2 son subconjuntos ajenos de Λ. De esta manera concluimos que $\Gamma_1' \cap \Gamma_2' = \emptyset$.

Por lo tanto, Λ es conexo.

■

Por el teorema anterior y los resultados que vimos en el capítulo 2 sobre la propiedad cubriente obtenemos las siguientes equivalencias.

Corolario 3.4.2. Para cualquier continuo X, los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) Para alguna función de Whitney μ para $C(X)$, $\mu^{-1}(t)$ es irreducible para cada $t \in [0, 1)$.

(1') Para alguna función de Whitney μ para $C(X)$, $\mu^{-1}(t)$ es irreducible para cada $t \in (0, 1)$.

(2) Para cualquier función de Whitney μ para $C(X)$, $\mu^{-1}(t)$ es irreducible para cada $t \in [0, 1)$.

(2') Para cualquier función de Whitney μ para $C(X)$, $\mu^{-1}(t)$ es irreducible para cada $t \in (0, 1)$.

(3) $X \in CP$.

Demostración:
Claramente (2) implica (1), (1) implica (1') y (2) implica (2').

Por el corolario 2.5.12, (2) y (3) son equivalentes.

Por el teorema 2.5.11, (1) implica $X \in CP(\mu)$ y por el teorema anterior esto implica (3).

Notemos que ningún subcontinuo propio de $\mu^{-1}(0)$ cubre a X. Entonces por el teorema 2.5.11, (1') implica $X \in CP(\mu)$ para alguna función de Whitney μ y por el resultado anterior se cumple (3).

Así mismo por el teorema 2.5.11, (2') implica que $X \in CP(\mu)$ para cualquier función de Whitney μ y por definición de propiedad cubriente se cumple (3).

■

Como consecuencia del corolario anterior, obtenemos que la propiedad de ser un continuo irreducible es una propiedad de Whitney reversible.

Teorema 3.4.3. Sea X un continuo y sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $\mu^{-1}(t)$ es irreducible para cada $t \in (0,1)$, entonces X es irreducible.

Demostración:
Sea μ una función de Whitney para $C(X)$ y supongamos que $\mu^{-1}(t)$ es irreducible para cada $t \in (0,1)$. Entonces por el corolario anterior, $\mu^{-1}(t)$ es irreducible para cada $t \in [0,1)$ así que en partícular tenemos que $\mu^{-1}(0)$ es irreducible.

Puesto que $\mu^{-1}(0)$ es homeomorfo a X concluimos que X es irreducible.

■

También, con la ayuda de los resultados previos obtenemos que tener la propiedad cubriente es una propiedad de Whitney reversible.

Teorema 3.4.4. Sea X un continuo y sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $\mu^{-1}(t) \in CP$ para cada $t \in (0,1)$, entonces $X \in CP$.

Demostración:
Sea μ una función de Whitney para $C(X)$ y supongamos que $\mu^{-1}(t) \in CP$ para cada $t \in (0,1)$. Entonces por corolario 2.5.9 tenemos que $\mu^{-1}(t)$ es irreducible para cada $t \in (0,1)$ y por el corolario anterior $X \in CP$.

■

Capítulo 4

Bloques de Whitney

Ahora vamos a generalizar un poco más el estudio de los niveles de Whitney estudiando a los bloques de Whitney.

El objetivo de este capítulo es analizar a los bloques de Whitney y sus propiedades. Empezaremos dando la definición de bloques de Whitney y mostrando que éstos son continuos.

Así mismo, daremos ejemplos de bloques de Whitney para ciertos continuos: el intervalo, la circunferencia y el triodo simple.

Además, en este capítulo agregaremos dos secciones. En la primera sección nos enfocaremos en estudiar las propiedad de Whitney para los bloques de Whitney y en la segunda sección nos dedicaremos a estudiar a las propiedades de Whitney reversibles para los bloques de Whitney.

Definición 4.0.1. Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, entonces un **bloque de Whitney** para $C(X)$ es un conjunto de la forma $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,s])$ donde $0 \leq t < s < 1$. Si $t = 0$, llamaremos a $\mathcal{A}$ bloque inicial de Whitney.

Ahora veamos que los bloques de Whitney que fueron definidos anteriormente son continuos, para ello nos apoyaremos en las funciones monótonas las cuales fueron definidas en la sección 1.3.

Teorema 4.0.2. Todo bloque de Whitney para $C(X)$ es un continuo.

Demostración:
Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney por lo que μ es una función continua y también $\mu(C(X)) = [0,1]$, esto último nos dice que μ es una función sobreyectiva.

Además sabemos que para todo $t \in [0,1]$, $\mu^{-1}(t)$ es conexo. De esta manera tenemos que μ es una función monótona y por el teorema 1.3.10 obtenemos que para todo $A \in C([0,1])$,

$\mu^{-1}(A) \in C(X)$. Así que para todo $[t,s] \in C([0,1])$ con $0 \leq t < s < 1$ tenemos que $\mu^{-1}([t,s]) \in C(X)$.

Con esto, concluimos que $\mu^{-1}([t,s])$ es un continuo.

■

Ahora sí, éste es un buen momento para ver algunos ejemplos de bloques de Whitney para ciertos continuos. Iniciemos viendo cómo son los bloques de Whitney para el continuo más sencillo que conocemos: el intervalo unitario.

Ejemplo 4.0.3. Los bloques de Whitney para $X = [0,1]$ son 2-celdas.

Supongamos que $X = [0,1]$ y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,s])$ con $0 \leq t < s < 1$. Mostraremos que $\mathcal{A}$ es una 2-celda.

Sea $A \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A} \subseteq C([0,1])$ tenemos que A es un subintervalo de $[0,1]$, digamos que $A = [c,d]$ con $c, d \in [0,1]$. Notemos que $\mu(A) \in [t,s]$ así que $t \leq \mu(A) \leq s$.

Sea

$$\sigma(A) = \tfrac{c}{1-d+c}.$$

La función σ cumple lo siguiente:

i) σ es una función continua.

ii) $\sigma(A) = 0$ si y sólo si $c = 0$.

iii) $\sigma(A) = 1$ si y sólo si $d = 1$.

Definamos $\varphi : \mathcal{A} \to [0,1]^2$ como

$$\varphi([c,d]) = (\sigma([c,d]), \tfrac{\mu([c,d])-t}{s-t})$$

Queremos probar que φ es un homeomorfismo. Notemos que la función φ es continua, así que falta probar que φ es una función biyectiva.

Primero veamos que φ es sobreyectiva.

Sea $(x,y) \in [0,1]^2$. Notemos que existe $r \in [t,s]$ tal que $\frac{r-t}{s-t} = y$ desde que $r = y(s-t)+t \in [t,s]$.

Usando arcos ordenados es posible encontrar $a, b \in [0,1]$ tal que $\mu([0,a]) = r = \mu([b,1])$. De esta manera,

$$\varphi([0,a]) = (\sigma([0,a]), \tfrac{\mu([0,a])-t}{s-t}) = (0, \tfrac{r-t}{s-t}) = (0,y)$$

y

$$\varphi([b,1]) = (\sigma([b,1]), \tfrac{\mu([b,1])-t}{s-t}) = (\tfrac{b}{1-1+b}, \tfrac{r-t}{s-t}) = (1,y)$$

Como $\mu^{-1}(r)$ es conexo y $\varphi(\mu^{-1}(r)) \subseteq [0,1] \times \{y\}$ entonces el conexo $\varphi(\mu^{-1}(r)) = [0,1] \times \{y\}$, es decir, $(x,y) \in \varphi(\mu^{-1}(r))$ o bien que existe $A \in \mu^{-1}(r)$ tal que $\varphi(A) = (x,y)$. Por lo tanto, φ es sobreyectiva.

Para ver que φ es inyectiva, supongamos $[c,d] \neq [a,b]$ así que podemos suponer que $c < a$. Si $\mu([c,d]) \neq \mu([a,b])$ entonces $\varphi([c,d]) \neq \varphi([a,b])$.

Supongamos que $\mu([c,d]) = \mu([a,b])$. Notemos que si $b = d$ tenemos $\mu([c,d]) > \mu([a,b])$ lo cual no pude pasar. Luego, si $b < d$ tenemos que $\mu([c,d]) > \mu([a,b])$ lo cual tampoco puede pasar. Así que $c < a$ y $d < b$.

Como $c < a$ y $1-b < 1-d$ tenemos que $c(1-b) < a(1-d)$, de aquí que $c(1-b+a) < a(1-d+c)$. Con esto, $\frac{c}{1-d+c} < \frac{a}{1-b+a}$. Es decir, $\sigma([c,d]) < \sigma([a,b])$ por lo que $\sigma([c,d]) \neq \sigma([a,b])$.

De esta forma concluimos que $\varphi([c,d]) \neq \varphi([a,b])$. Por lo tanto, φ es inyectiva.

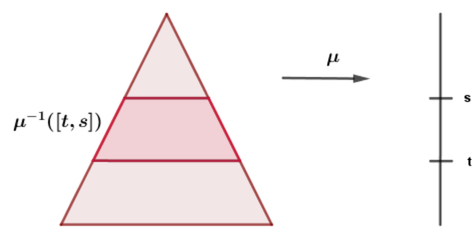


Figura 4.1

Lo siguiente es ver como son los bloques de Whitney cuando el continuo es la circunferencia unitaria. Veremos que en este caso los bloques de Whitney son anillos. Recordemos que un anillo es un continuo homeomorfo a $S \times [0,1]$.

Ejemplo 4.0.4. Los bloques de Whitney para $X = S$ son anillos.

Sea $\mu : C(S) \to [0,1]$ una función de Whitney, $0 \leq t < s < 1$ y $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,s])$ un bloque de Whitney.

Sea $m : C(S) - \{S\} \to S$ dada por

$$m(A) = \text{punto medio de } A.$$

la cual es una función continua.

Definamos $\phi : \mathcal{A} \to S \times [0,1]$ dada por

$$\phi(A) = (m(A), \tfrac{\mu(A)-t}{s-t})$$

Queremos probar que ϕ es un homeomorfismo. Sabemos que una función continua y biyectiva que va de un espacio compacto a un espacio Hausdorff es un homeomorfismo. Notemos que ϕ es continua. Falta probar que ϕ es biyectiva.

Primero veamos que ϕ es sobreyectiva.

Sea $(x, y) \in S \times [0, 1]$. En este caso, existe $r \in [t, s]$ tal que $\frac{r-t}{s-t} = y$, ya que, $r = y(s-t)+t \in [t, s]$.

Sea $\alpha : [0, 1] \to C(S)$ un arco ordenado desde $\{x\}$ hasta S tal que la imagen de α es

$$\{S\} \cup \{A \in C(S) - \{S\} : m(A) = x\}$$

Tomemos $A \in Im\ \alpha$ tal que $\mu(A) = r$. En este caso,

$$\phi(A) = (m(A), \tfrac{\mu(A)-t}{s-t}) = (x, \tfrac{r-t}{s-t}) = (x, y).$$

Por lo tanto, ϕ es sobreyectiva.

Veamos ahora que ϕ es inyectiva. Notemos que la inyectividad de ϕ se sigue del hecho de que dos subcontinuos distintos de S difieren de su punto medio o de su imagen bajo μ.

En efecto, sean $A, B \in C(S) - \{S\}$ con $A \neq B$. Si $m(A) = m(B)$ entonces $\mu(A) \neq \mu(B)$ ya que $A \neq B$. Ahora si $\mu(A) = \mu(B)$ entonces $A, B \in F_1(S)$ digamos que $A = \{y\}$ y $B = \{z\}$ así $m(A) = \{y\}$ y $m(B) = \{z\}$ y como $A \neq B$ tenemos que $m(A) \neq m(B)$. Por lo tanto, ϕ es inyectiva.

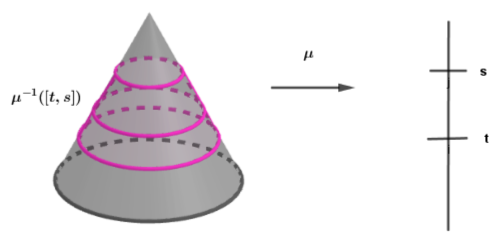


Figura 4.2

Por último analizaremos cómo son los bloques de Whitney cuando el continuo es un triodo simple.

Ejemplo 4.0.5. Bloques de Whitney para $X = T$ donde T es un triodo simple.

Sea $T = \{te_i : t \in [0, 1], i \in \{1, 2, 3\}\}$ donde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$. Si $A \in C(T)$ entonces A cumple alguno de los siguientes casos:

i) A se encuentra en una sola patita del triodo. Es decir, existen $a, b \in [0, 1]$ tal que $A = \{te_i : t \in [a, b]\}$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}\}$.

ii) A se encuentra en mas de una patita del triodo y tiene al vértice $0 = (0, 0, 0)$. De manera que existen $a_1, a_2, a_3 \in [0, 1]$ tal que $A = \{te_i : t \in [0, a_i], i \in \{1, 2, 3\}\}$.

Definimos a la función de Whitney $\mu : C(T) \to [0, 1]$ como:

$$\mu(A) = \tfrac{b-a}{3} \text{ si } A \text{ es como en el caso i)}$$

$$\mu(A) = \tfrac{a_1+a_2+a_3}{3} \text{ si } A \text{ es como en el caso ii).}$$

Sea $t \in [0,1]$. Supongamos que $t \geq \frac{1}{3}$, en este caso, $\mu^{-1}(t) \subseteq \{A \in C(T) : 0 \in A\} = \mathcal{C}$.

Si $0 \in A$ entonces existen escalares $a_1, a_2, a_3 \in [0,1]$ tales que $A = \{te_i : t \in [0, a_i], i \in \{1,2,3\}\}$. De esta manera podemos definir $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ como $f(A) = (a_1, a_2, a_3)$, la cual es una función continua e inyectiva.

Además, $f(\mathcal{C}) = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ es una 3-celda que es homeomorfo a un cubo que denotaremos como I^3.

En este caso, $f(\mu^{-1}(t))$ es un espacio homeomorfo a $\mu^{-1}(t)$. Notemos que

$$\begin{aligned} f(\mu^{-1}(t)) &= f(\{A \in C(T) : \mu(A) = t\}) \\ &= \{(a_1, a_2, a_3) : \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = t\} \cap I^3 \\ &= \{(a_1, a_2, a_3) : a_1 + a_2 + a_3 = 3t\} \cap I^3 \end{aligned}$$

esto último representa un plano en I^3.

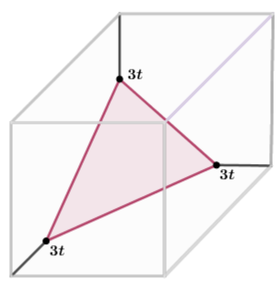


Figura 4.3

Si $\frac{1}{3} \leq t < s < 1$ entonces $\mu^{-1}([t,s]) = \bigcup\limits_{k \in [t,s]} \mu^{-1}(k)$.

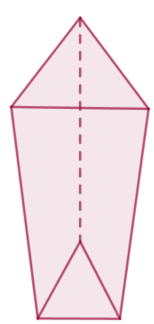


Figura 4.4

Supongamos ahora que $0 < s < \frac{1}{3}$. En este caso,

$$\mu^{-1}(s) \cong \{\{te_1 : t \in [a,b]\} : \frac{b-a}{3} = s\} \cup \{\{te_2 : t \in [a,b]\} : \frac{b-a}{3} = s\} \cup \{\{te_3 : t \in [a,b]\} : \frac{b-a}{3} = s\} \cup \{\{te_i : t \in [0,a_i], i \in \{1,2,3\}\} : \frac{a_1+a_2+a_3}{3} = s\}.$$

Sea $\mathcal{C}_1 = \{\{te_1 : t \in [a,b]\} : \frac{b-a}{3} = s\}$ y sea $A = \{\{te_1 : t \in [a,b]\} \in \mathcal{C}_1$ con $\frac{b-a}{3} = s\}$ $(0 \leq a < b \leq 1)$.

Definimos $f_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathbb{R}^3$ como $f_1(A) = (b,0,0)$ la cual es una función continua e inyectiva, como $\mathcal{C}_1$ es compacto y va a un espacio Hausdorff tenemos que $f_1 : \mathcal{C}_1 \to f_1(\mathcal{C}_1)$ es un homeomorfismo.

Así $\mathcal{C}_1 \cong \{(x,0,0) : x \in [3s,1]\}$. De forma similar se define $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ para calcular que

$$\mu^{-1}(s) = \{(x,y,z) \in I^3 : \frac{x+y+z}{3} = s\} \cup \{(x,0,0) : x \in [3s,1]\} \cup \{(0,y,0) : y \in [3s,1]\} \cup \{(0,0,z) : z \in [3s,1]\}$$

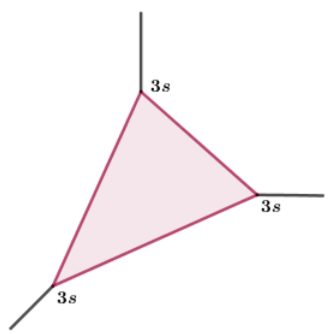


Figura 4.5

Entonces si $0 < t < s \leq \frac{1}{3}$, $\mu^{-1}([t,s]) = \bigcup_{k \in [t,s]} \mu^{-1}(k)$

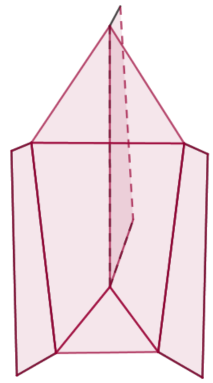


Figura 4.6

y si ahora $t = 0$ y $0 < s \leq \frac{1}{3}$,

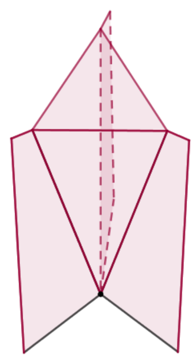


Figura 4.7

Combinando lo anterior, si $0 < t < \frac{1}{3} < s < 1$ tenemos $\mu^{-1}([t, s]) = \mu^{-1}([t, \frac{1}{3}]) \cup \mu^{-1}([\frac{1}{3}, s])$

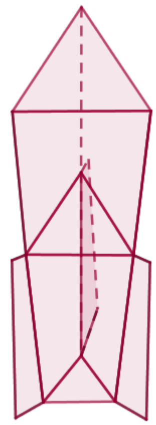


Figura 4.8

Y en el caso en que $t = 0$ y $\frac{1}{3} < s < 1$,

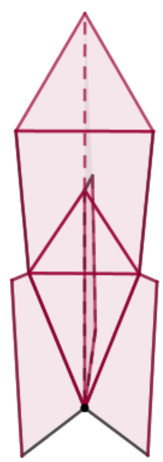


Figura 4.9

4.1. Propiedades de Whitney para los bloques de Whitney

En esta sección nos dedicaremos a estudiar las propiedades topológicas que son propiedades de Whitney para los bloques de Whitney.

Sea P una propiedad topológica. Diremos que P es una propiedad de Whitney para los bloques de Whitney si para cada continuo X y cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ se tiene que, si X cumple P entonces $\mu^{-1}([0,t])$ cumple P para todo $t \in (0,1)$.

Trabajar con bloques de Whitney es abrir una ventana a un área bastante extensa, es por esta razón que en este capítulo vamos a asumir algunos resultados para poder probar otros, sin embargo, dejaremos indicadas sus referencias en caso de que se quieran consultar.

La primera propiedad que estudiaremos es la arco conexidad. Veremos que la propiedad de ser arco-conexo es una propiedad de Whitney para los bloques de Whitney.

Teorema 4.1.1. Si X es un continuo arco-conexo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, entonces para cada t y s con $0 \leq t < s \leq 1$ se cumple que $\mu^{-1}([t,s])$ es conexo por trayectorias y por ende es arco-conexo.

Demostración:
Sean $A, B \in \mu^{-1}([t,s])$ y sean $\alpha : [0,1] \to C(X)$ y $\beta : [0,1] \to C(X)$ dos arcos ordenados tales que $\alpha(0) = A, \alpha(1) = X, \beta(0) = B$ y $\beta(1) = X$.

Por el teorema de valor intermedio existen $t_A, t_B \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(t_A)) = s = \mu(\beta(t_B))$. De esta manera, $\alpha|_{[0,t_A]}$ y $\beta|_{[0,t_B]}$ son dos trayectorias en $\mu^{-1}([t,s])$ que conectan a A con $\alpha(t_A)$ y B con $\beta(t_B)$ respectivamente.

Como $\alpha(t_A), \beta(t_B) \in \mu^{-1}(s)$ por el teorema 2.1.3 sabemos que $\mu^{-1}(s)$ es conexo por trayectorias así que existe $\sigma : [0,1] \to \mu^{-1}(s)$ una trayectoria tal que $\sigma(0) = \alpha(t_A)$ y $\sigma(1) = \beta(t_B)$.

Sea $h : [0,1] \to \mu^{-1}([t,s])$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} \alpha|_{[0,t_A]}(3t_A t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \sigma(3t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \beta|_{[0,t_B]}(-3t_B t + 3t_B) & \text{si } t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

la cual es una función continua y bien definida. Además $h(0) = \alpha(0) = A$ y $h(1) = \beta(0) = B$.

Por lo tanto, $\mu^{-1}([t,s])$ es conexo por trayectorias.

■

La próxima propiedad que estudiaremos es la conexidad local. Antes de probar que la propiedad de ser localmente conexo es una propiedad de Whitney para los bloques de Whitney, enunciaremos el siguiente lema.

Lema 4.1.2. Sea X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$ con $A \subseteq B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta$ entonces $H(A, B) < \epsilon$.

Demostración:
Hagamos la prueba por contradicción. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $A_n, B_n \in C(X)$ tal que

i) $A_n \subseteq B_n$

ii) $\mu(B_n) - \mu(A_n) < \frac{1}{n}$

iii) $H(A_n, B_n) \geq \epsilon$

Como $C(X)$ es compacto podemos suponer que las sucesiones $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes, es decir, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ con $A, B \in C(X)$.

Por i) $A_n \subseteq B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces por el teorema 1.0.7 $A \subseteq B$. Sabemos que $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función continua y por ii) $\mu(B_n) - \mu(A_n) < \frac{1}{n}$ y como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ tenemos que $\mu(B) - \mu(A) \leq 0$.

Puesto que $A \subseteq B$, $\mu(B) - \mu(A) \geq 0$ por lo que obtenemos que $0 \leq \mu(B) - \mu(A) \leq 0$, esto es, $\mu(B) - \mu(A) = 0$ o bien $\mu(B) = \mu(A)$. De aquí que $A = B$. De lo contrario, si $A \subsetneq B$ tendríamos que $\mu(A) < \mu(B)$ lo que nos lleva a una contradicción.

Por otro lado, $H(A_n, B_n) \geq \epsilon$ y como H es continua tenemos que $H(A, B) \geq \epsilon > 0$ lo cual nos lleva a una contradicción ya que $A = B$.

■

Un resultado esencial que necesitaremos para probar que la conexidad local es una propiedad de Whitney para los bloques de Whitney es que los continuos conexos en pequeño son localmente conexos y esto nos lo verifica el siguiente teorema.

Definición 4.1.3. Diremos que un espacio X es **conexo en pequeño** en $p \in X$ si para cada abierto U de X tal que $p \in U$, existe un conjunto conexo V tal que $p \in int\ V \subseteq V \subseteq U$.

Observemos que si un continuo X es conexo en pequeño en un punto $p \in X$ entonces X es localmente conexo en p. Aún más, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1.4. Si X es conexo en pequeño en todo punto $p \in X$, entonces X es localmente conexo.

Demostración:
Supongamos que X es conexo en pequeño en todo punto $p \in X$. Queremos probar que X es localmente conexo.

Sea U un abierto de X y V una componente de U. Probemos que V es abierto.

Sea $p \in V$. Como $V \subseteq U$, $p \in U$ y por hipótesis sabemos que X es conexo en pequeño en p por lo que existe un conjunto conexo W tal que $p \in int_X\ W \subseteq W \subseteq U$. Puesto que V es la componente de U que contiene a p tenemos $W \subseteq V$. Así $p \in int_X\ W \subset W \subseteq V \subseteq U$, es decir, $p \in int_X\ W \subseteq V$.

Por lo tanto, V es abierto por lo que concluimos que X es localmente conexo.

■

Ahora sí podemos proceder a probar que la propiedad de ser un continuo localmente conexo es una propiedad de Whitney para los bloques de Whitney.

Teorema 4.1.5. Si X es un continuo locamente conexo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney entonces para cada t y s con $0 \leq t < s \leq 1$ se cumple que $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,s])$ es localmente conexo.

Demostración:
Sea $A \in \mathcal{A} = \mu^{-1}([t,s])$. Tenemos dos casos:

i) Si $A \in \mu^{-1}((t,s))$ entonces A se encuentra en el abierto $\mu^{-1}((t,s)) \subseteq C(X)$.

Como X es localmente conexo tenemos que $C(X)$ es localmente conexo por [17, Teorema 1.92, p. 134].

Luego, para cada abierto U de $\mathcal{A}$ tal que $A \in U$ existe V un abierto de $C(X)$ tal que $U = V \cap \mu^{-1}([t,s])$. De esta manera, $A \in V \cap \mu^{-1}((t,s)) \subseteq U$ y como $V \cap \mu^{-1}((t,s))$ es un abierto en $C(X)$ existe W un conjunto abierto y conexo de $C(X)$ tal que $A \in W \subseteq V \cap \mu^{-1}((t,s)) \subseteq U$.

Ya que $W \subseteq \mu^{-1}((t,s)) \subseteq \mathcal{A}$, W es abierto y conexo en $\mathcal{A}$. Así tenemos que $\mathcal{A}$ es localmente conexo.

ii) Si $A \in \mu^{-1}(\{t,s\})$. Supongamos que $A \in \mu^{-1}(t)$, el otro caso es similar.

Sea U un conjunto abierto de $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,s])$ tal que $A \in U$. Por el teorema 2.6.3 sabemos que $\mu^{-1}(t)$ es localmente conexo así que, en particular, $\mu^{-1}(t)$ es localmente conexo en A.

Sea V un abierto en $C(X)$. Como $U \cap \mu^{-1}(t)$ es un abierto en $\mu^{-1}(t)$ y $A \in U \cap \mu^{-1}(t)$ existe un conjunto abierto y conexo $V \cap \mu^{-1}(t)$ de $\mu^{-1}(t)$ tal que $A \in V \cap \mu^{-1}(t) \subseteq U \cap \mu^{-1}(t) \subseteq U \cap \mu^{-1}([t,s])$.

Puesto que V es abierto en $C(X)$ y $A \in V$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B^H(2\epsilon, A) \subseteq V$.

Por el lema anterior existe $\eta > 0$ tal que si $B, C \in C(X)$ con $B \subseteq C$ y $\mu(C) - \mu(B) < \eta$ entonces $H(B,C) < \epsilon$.

Como $\mu : C(X) \to [0,1]$ es unifomemente continua tenemos que para $\eta > 0$ existe $0 < \delta < \text{mín}\{\eta, \epsilon\}$ tal que si $H(A,B) < \delta$ entonces $|\mu(A) - \mu(B)| < \eta$.

Sea $\mathcal{C}$ la componente de U tal que $A \in \mathcal{C}$, en este caso, $A \in V \cap \mu^{-1}(t) \subseteq \mathcal{C}$.

Probemos que $\mathcal{A}$ es conexo en pequeño, es decir, $A \in int_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C} \subseteq U$. Para mostrar esto veamos que $B^H(\delta, A) \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$.

Sea $B \in B^H(\delta, A) \cap \mathcal{A}$ y sea $b \in B$. Tomemos un arco ordenado en $C(X)$ desde $\{b\}$ hasta B, como $B \in \mathcal{A} = \mu^{-1}([t,s])$ tenemos que $t \leq \mu(B)$ así que existe B_1 un elemento de dicho arco ordenado tal que $\mu(B_1) = t$, es decir, existe $B_1 \in C(X)$ tal que $\{b\} \subseteq B_1 \subseteq B$ y $\mu(B_1) = t$.

Sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\alpha(0) = B_1$ y $\alpha(1) = B$. Dado $C \in Im\ \alpha$,

$$\mu(B) - \mu(C) \leq \mu(B) - t = \mu(B) - \mu(A) < \eta$$

como $C \subseteq B$ y $\mu(B) - \mu(C) < \eta$ entonces $H(C, B) < \epsilon$. De esto último, como $C \in Im\ \alpha$ fue arbitrario tenemos que $Im\ \alpha \subseteq B^H(\epsilon, B)$.

Como $H(A, B) < \delta < \epsilon$ y $H(Im\ \alpha, B) \leq \epsilon$ tenemos por la desigualdad del triángulo

$$H(Im\ \alpha, A) \leq H(Im\ \alpha, B) + H(B, A) \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

así que $Im\ \alpha \subseteq B^H(2\epsilon, A)$. De aquí tenemos que $Im\ \alpha \subseteq B^H(2\epsilon, A) \cap \mathcal{A} \subseteq V \cap \mathcal{A} \subseteq U$.

Puesto que $B_1 \in Im\ \alpha \subseteq B^H(2\epsilon, A) \subseteq V$ tenemos que $B_1 \in \mu^{-1}(t) \cap V$, de esta manera, $Im\ \alpha \subseteq \mathcal{C}$ y así $B \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $B^H(\delta, A) \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$.

■

A continuación presentamos un teorema que nos dice que la propiedad de ser unicoherente es una propiedad de Whitney para la clase de los continuos localmente conexos. Este resultado se encuentra en [10, Teorema A, p. 253].

Teorema 4.1.6. Sea X un continuo localmente conexo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Si X es unicoherente entonces $\mu^{-1}(t)$ es unicoherente.

El teorema anterior lo añadimos en esta sección porque nos va a ayudar a probar que la propiedad de ser unicoherente para los continuos localmente conexos es una propiedad de Whitney para los bloques de Whitney.

Para este mismo fin, enunciaremos algunos resultados cuya prueba no presentaremos pero dejamos la referencia de donde se pueden consultar.

A continuación definiremos la propiedad (b). Esta propiedad será de utilidad ya que la propiedad de ser unicoherente es equivalente a tener la propiedad (b) cuando estamos en espacios localmente conexos, como se indica en el próximo teorema.

Definición 4.1.7. Sea Z un espacio topológico conexo y S la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$. Una función continua $f : Z \to S$ tiene un **levantamiento**, si existe una función continua $h : Z \to \mathbb{R}$ tal que $f = exp \circ h$ donde $exp : \mathbb{R} \to S$ es la función definida por $exp(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$.

Diremos que un espacio topológico Z tiene la **propiedad (b)** si cada función continua $f : Z \to S$ tiene un levantamiento.

La prueba del teorema que se presenta a continuación se puede encontrar en [8, Teorema 3, p. 70], éste es un resultado importante ya que nos permite caracterizar a los continuos unicoherentes con la propiedad (b) cuando estamos en la clase de los continuos localmente conexos.

Teorema 4.1.8. Sea Z un espacio métrico y localmente conexo. Entonces Z es unicoherente si y sólo si Z tiene la propiedad (b).

Para facilitar la prueba del próximo resultado, presentamos un teorema que nos dice que es equivalente que una función tenga un levantamiento y que esta función sea homotópica a una función constante. Este es un resultado de S. Eilenberg y se puede encontrar en [6, Teorema 5.1, p. 361].

Teorema 4.1.9. Sean Z un espacio topológico y $f : Z \to S$ una función continua. Entonces f tiene un levantamiento si y sólo si f es homotópica a una función constante.

Definición 4.1.10. Sea Z un espacio topológico, $A \subset Z$ un subespacio y $id_A : A \to A$ la función identidad. Se dice que A es un **retracto** de Z si existe una función continua $r : Z \to A$ tal que $r|_A = id_A$ y a esta función se le llama retracción.

Si $A \subseteq B \subseteq Z$, decimos que A es un **retracto por deformación** de B en Z si la función identidad $id_B : B \to B$ es homotópica en Z a una retracción $r : B \to A$.

Teorema 4.1.11. Sea Z un espacio topológico conexo y Y un retracto por deformación de Z. Entonces Z tiene la propiedad (b) si y sólo si Y tiene la propiedad (b).

Demostración:
Por hipótesis tenemos que existen una retracción $r : Z \to Y$ y una función continua $G : Z \times [0,1] \to Z$ tal que $G(z,0) = z$ y $G(z,1) = r(z)$ para cada $z \in Z$.

Supongamos que Z tiene la propiedad (b). Tomemos una función continua $g : Y \to S$. Veamos que g es homotópica a una función constante.

Definimos la función $f : Z \to S$ como $f(z) = g(r(z))$ la cual es una función continua. Como Z tiene la propiedad (b), f tiene un levantamiento y por el teorema 4.1.9 f es homotópica a una función constante. De manera que existen $p \in S$ y una función continua $F : Z \times [0,1] \to S$ tales que $F(z,0) = f(z) = g(r(z))$ y $F(z,1) = p$ para cada $z \in Z$.

Notemos que la función $F|_{Y\times[0,1]} : Y \times [0,1] \to S$ es continua y, para cada $y \in Y$ se cumple que $F|_{Y\times[0,1]}(y,0) = g(r(y)) = g(y)$ y $F|_{Y\times[0,1]}(y,1) = p$. Esto nos dice que g es homotópica a una función constante, de modo que, por el teorema 4.1.9 g tiene un levantamiento. Por lo tanto, Y tiene la propiedad (b).

Supongamos que Y tiene la propiedad (b). Sea $g : Z \to S$ una función continua. Veamos que g es homotópica a una función constante.

Notemos que $g|_Y : Y \to S$ es una función continua. Como Y tiene la propiedad (b), $g|_Y$ tiene un levantamiento y por el teorema 4.1.9 $g|_Y$ es homotópica a una función constante. Así que, existen $p \in S$ y una función continua $F : Y \times [0,1] \to S$ tales que $F(y,0) = g|_Y(y)$ y $F(y,1) = p$ para cada $y \in Y$.

Definimos la función $K : Z \times [0,1] \to S$ como:

$$K(z,t) = \begin{cases} g(G(z,2t)) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F(r(z), 2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

observemos que

$$g(G(z, 2(\tfrac{1}{2})) = g(G(z,1)) = g(r(z)) \text{ y}$$
$$F(r(z), 2(\tfrac{1}{2}) - 1) = F(r(z), 0) = g|_Y(r(z)) = g(r(z))$$

así que K es una función continua.

Tomemos $z \in Z$. Notemos que $K(z,0) = g(G(z,0)) = g(z)$ y $K(z,1) = F(r(z),1) = p$, esto nos dice que g es homotópica a una función constante. Así que por el teorema 4.1.9 g tiene un levantamiento. Por lo tanto, Z tiene la propiedad (b).

■

El siguiente resultado que presentamos nos dice que para la clase de los continuos localmente conexos el nivel de Whitney resulta ser un retracto por deformación del bloque de Whitney, la prueba de este teorema se puede ver en [3, Lema 2.3.5, p. 40].

Teorema 4.1.12. Sea X un continuo localmente conexo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Entonces $\mu^{-1}(t)$ es un retracto por deformación de $\mu^{-1}([0,t])$.

Con los resultados anteriores obtenemos el siguiente corolario, el cual nos muestra que es equivalente a que el nivel de Whitney sea unicoherente y que el bloque de Whitney sea unicoherente para la clase de los continuos localmente conexos.

Corolario 4.1.13. Sea X un continuo localmente conexo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Entonces $\mu^{-1}(t)$ es unicoherente si y sólo si $\mu^{-1}([0,t])$ es unicoherente.

Demostración:
Como X es localmente conexo tenemos que $\mu^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}([0,t])$ son localmente conexos. Entonces por el teorema 4.1.8, $\mu^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}([0,t])$ son unicoherentes si y sólo si tienen la propiedad (b).

Como X es localmente conexo, el teorema anterior nos dice que $\mu^{-1}(t)$ es retracto por deformación de $\mu^{-1}([0,t])$. Así que por el teorema 4.1.11 tenemos que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad (b) si y sólo si $\mu^{-1}([0,t])$ tiene la propiedad (b).

Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es unicoherente si y sólo si $\mu^{-1}([0,t])$ es unicoherente.

■

Ahora sí podemos decir que si estamos en la clase de los continuos localmente conexos, la propiedad de ser unicoherente es una propiedad de Whitney para los bloques de Whitney.

Teorema 4.1.14. Sea X un continuo localmente conexo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Si X es unicoherente entonces $\mu^{-1}([0,t])$ es unicoherente.

Demostración:
Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Como X es localmente conexo y unicoherente, por el teorema 4.1.6 $\mu^{-1}(t)$ es unicoherente. Y por el teorema anterior concluimos que $\mu^{-1}([0,t])$ es unicoherente.

■

Lo siguiente será probar que la propiedad de ser encadenable por continuos es una propiedad de Whitney para los bloques de Whitney. A continuación damos la definición de ser un continuo encadenable por continuos.

Definición 4.1.15. Un continuo X se dice ser **encadenable por continuos** si para todo $p, q \in X$, $p \neq q$ y $\epsilon > 0$ existe $\{A_1, ..., A_n\}$ una familia finita de elementos en $C(X)$ tal que $p \in A_1$, $q \in A_n$, diam $A_i < \epsilon$ para cada $i = 1, ..., n$ y $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y sólo $|i - j| \leq 1$.

Enseguida presentamos un resultado que nos muestra que es suficiente que el bloque de Whitney tenga un nivel de Whitney conexo por trayectorias para que todo el bloque de Whitney sea conexo por trayectorias.

Proposición 4.1.1. Si X es un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t_0 \in [0,1]$ cumple que $\mu^{-1}(t_0)$ es conexo por trayectorias entonces para cada t y s con $0 \leq t \leq t_0 \leq s \leq 1$ y $t < s$ se cumple que $\mu^{-1}([t,s])$ es conexo por trayectorias.

Demostración:
Sean $A, B \in \mu^{-1}([t,s])$, de esta manera tenemos que, $t \leq \mu(A) \leq s$ y $t \leq \mu(B) \leq s$.

Si $\mu(A) \leq t_0$ existe $A' \in \mu^{-1}(t_0) \cap C(X)$ tal que $A \subseteq A'$ y si $t_0 < \mu(A)$ existe $A' \in \mu^{-1}(t_0) \cap C(X)$ tal que $A' \subseteq A$. En cuaquier caso, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to \mu^{-1}([t,s]) \subseteq C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = A'$.

De forma similar existe $B' \in \mu^{-1}(t_0) \cap C(X)$ y un arco oredenado $\beta : [0,1] \to \mu^{-1}([t,s]) \subseteq C(X)$ tal que $\beta(0) = B'$ y $\beta(1) = B$.

Como $A', B' \in \mu^{-1}(t_0)$ y por hipótesis $\mu^{-1}(t_0)$ es conexo por trayectorias existe $\eta : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0) \subseteq \mu^{-1}([t,s])$ una trayectoria tal que $\eta(0) = A'$ y $\eta(1) = B'$.

Sea $h : [0,1] \to \mu^{-1}([t,s])$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} \alpha(3t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \eta(3t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \beta(3t-2) & \text{si } t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

es una trayectoria en $\mu^{-1}([t,s])$ tal que $h(0) = \alpha(0) = A$ y $h(1) = \beta(1) = B$.

■

Con el siguiente lema podemos ver que la clase de los continuos arco-conexos son encadenables por continuos.

Lema 4.1.16. Si X es un continuo arco-conexo entonces X es encadenable por continuos.

Demostración:
Sean $p, q \in X$ con $p \neq q$, como X es arco-conexo existe $\alpha : [0,1] \to X$ una función continua e inyectiva tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$.

Como α es uniformemente continua para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|s - t| < \delta$ entonces $d(\alpha(s), \alpha(t)) < \epsilon$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$.

Sea $P = \{[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], ..., [\frac{n-1}{n}, 1]\}$ una partición de $[0,1]$ y observemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ tenemos $diam([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) = \frac{1}{n} < \delta$, $0 \in [0, \frac{1}{n}]$, $1 \in [\frac{n-1}{n}, 1]$ y $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \cap [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$.

Para cada i, sea $A_i = \alpha([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}])$ y notemos que $A_i \in C(X)$. Veamos que $\{A_1, ..., A_n\}$ es la familia de subcontinuos buscada.

Como $diam([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) < \delta$ tenemos que $diam(A_i) = diam(\alpha([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}])) < \epsilon$. Además, $p = \alpha(0) \in \alpha([0, \frac{1}{n}]) = A_1$ y $q = \alpha(1) \in \alpha([\frac{n-1}{n}, 1]) = A_n$ y $A_i \cap A_{i+1} = \alpha([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) \cap \alpha([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$.

Por lo tanto, X es encadenable por continuos.

■

Resulta que cuando tenemos un continuo que es encadenable por continuos, sus niveles de Whitney son arco-conexos como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.17. Si X es encadenable por continuos y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney entonces para cada $t \in (0,1)$, $\mu^{-1}(t)$ es un continuo arco-conexo.

Demostración:
Supongamos que X es encadenabe por continuos. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Probemos que $\mu^{-1}(t)$ es arco-conexo.

Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$. Sean $a \in A$ y $b \in B$. Como $t > 0$ y μ es continua en cada punto de $F_1(X)$ existe $\epsilon_c > 0$ tal que si $H(D, \{c\}) < \epsilon_c$ entonces $|\mu(D) - \mu(\{c\})| < t$ así $\mu(D) < t$.

Notemos que $F_1(X) \subseteq \cup_{c \in X} B^H(\epsilon_c, \{c\})$, como $F_1(X)$ es compacto existen $c_1, ..., c_m \in X$ tal que $F_1(X) \subseteq \cup_{i=1}^m B^H(\frac{1}{2}\epsilon_{c_i}, \{c_i\})$.

Sea $0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min\{\epsilon_{c_i} : i = 1, ..., m\}$ y sea $C \in C(X)$ tal que $diam\ C < \epsilon$.

Si $c \in C$ entonces $H(\{c\}, C) < \epsilon$ y además existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $\{c\} \in B^H(\frac{1}{2}\epsilon_{c_i}, \{c_i\})$ con lo cual tenemos que

$$H(C, \{c_i\}) \leq H(C, \{c\}) + H(\{c\}, \{c_i\}) < \epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon_{c_i} < \tfrac{1}{2}\epsilon_{c_i} + \tfrac{1}{2}\epsilon_{c_i} = \epsilon_{c_i}$$

y así $\mu(C) < t$.

Por hipótesis existe una familia $\{A_1, ..., A_n\}$ en $C(X)$ tal que $a \in A_1$, $b \in A_n$, $diam\ A_i < \epsilon$ para cada $i = 1, ..., n$ y $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

Para cada i, $\mu(A_i) < t$. Sea $\alpha_i : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\alpha_i(0) = A_i$ y $\alpha_i(1) = X$. Así existe $t_i \in (0,1)$ tal que $\mu(\alpha_i(t_i)) = t$.

Sea $D_i = \alpha_i(t_i)$. En este caso para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $A_i \subseteq D_i$, así $\emptyset \neq A_j \cap A_{j+1} \subseteq D_j \cap D_{j+1}$, es decir, $D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset$.

Notemos también que

$$a \in A_1 \subseteq \alpha_1(t_1) = D_1 \text{ así } a \in A \cap D_1$$
$$b \in A_n \subseteq \alpha_n(t_n) = D_n \text{ así } b \in B \cap D_n$$

con esto, $A \cap D_1 \neq \emptyset$ y $B \cap D_n \neq \emptyset$.

Como $A \cap D_1 \neq \emptyset$ y $A, D_1 \in \mu^{-1}(t)$ tenemos una trayectoria en $\mu^{-1}(t)$ que conecta a A con D_1.

Como $D_n \cap B \neq \emptyset$ y $D_n, B \in \mu^{-1}(t)$ tenemos una trayectoria en $\mu^{-1}(t)$ que conecta a D_n con B.

Así mismo como $D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset$ y $D_j, D_{j+1} \in \mu^{-1}(t)$ existe una trayectoria en $\mu^{-1}(t)$ que conecta a D_j con D_{j+1}.

Es decir, cada uno de los pares $\{A, D_1\}, \{D_1, D_2\}, ..., \{D_{n-1}, D_n\}, \{D_n, B\}$ pueden conectarse por una trayectoria en $\mu^{-1}(t)$, con esto tenemos que A y B se pueden conectar por una trayectoria en $\mu^{-1}(t)$.

Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es conexo por trayectorias y así $\mu^{-1}(t)$ es arco-conexo.

■

Además notemos que con el teorema anterior y el lema 4.1.16 obtenemos que la propiedad de ser encadenable por continuos es una propiedad de Whitney para los niveles de Whitney.

Corolario 4.1.18. Sea X un continuo encadenable por continuos, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$ entonces $\mu^{-1}(t)$ es encadenable por continuos.

Finalmente, con la ayuda de los resultados previos podemos concluir que la propiedad de ser encadenable por continuos es una propiedad de Whitney para los bloques de Whitney.

Corolario 4.1.19. Si X es un continuo encadenable por continuos y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney entonces para toda t y s con $0 \leq t < s \leq 1$ se cumple que $\mu^{-1}([t,s])$ es arco-conexo y así encadenable por continuos.

Demostración:
Como X es encadenable por continuos por el teorema anterior tenemos que para toda función de Whitney μ para $C(X)$ y toda $t \in (0,1)$, $\mu^{-1}(t)$ es arco-conexo. Y por proposición 4.1.1 obtenemos que $\mu^{-1}([t,s])$ es arco-conexo, lo cual quiere decir, $\mu^{-1}([t,s])$ es encadenable por continuos.

■

4.2. Propiedades de Whitney reversibles para los bloques de Whitney

En esta sección estudiaremos las propiedades topológicas que son propiedades de Whitney reversibles para los bloques de Whitney.

Sea P una propiedad topológica. Diremos que P es una propiedad reversible de Whitney para los bloques de Whitney si para cada continuo X y cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ se tiene que, si $\mu^{-1}([0,t])$ cumple P para todo $t \in (0,1)$ entonces se cumple que X tiene la propiedad P.

También estudiaremos propiedades fuerte Whitney reversibles para los bloques de Whitney. Diremos que una propiedad P es fuerte Whitney reversible para los bloques de Whitney si siempre que existe una sucesión de bloques de Whitney en $C(X)$ que tienen la propiedad P y que convergen a $F_1(X)$, se cumple que X tiene la propiedad P.

Empecemos probando que la propiedad de ser localmente conexo es una propiedad de Whitney reversible para los bloques de Whitney. Para esta demostaración es esencial recordar que los continuos conexos en pequeño son localmente conexos como se vio en el teorema 4.1.4.

Teorema 4.2.1. Sea X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney tal que para cada $t \in (0,1)$ se cumple que $\mu^{-1}([0,t])$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.

Demostración:
Sea $p \in X$ y $\epsilon > 0$. Como $\{p\} \in \mu^{-1}([0,t])$ existe un conjunto abierto y conexo U de $\mu^{-1}([0,t])$ tal que $\{p\} \in U \subseteq B^H(\frac{\epsilon}{2}, \{p\}) \cap \mu^{-1}([0,t])$.

Notemos que $Cl_{C(X)}(U)$ es un subcontiuo de $C(X)$. Sea

$$M = \cup\{A \in C(X) : A \in Cl_{C(X)}(U)\}$$

por el lema 1.3.4 obtenemos que $M \in C(X)$ y desde que $\{p\} \in U \subseteq Cl_{C(X)}(U)$ tenemos que $p \in M$.

Queremos probar que X es localmente conexo, para esto, probaremos que X es conexo en pequeño en todo $p \in X$. Es decir, veremos que $p \in int_X\ M \subseteq M \subseteq B^X(\epsilon, \{p\})$.

Primero veamos que $p \in int_X\ M$.

Como U es abierto en $\mu^{-1}([0,t])$ y $\{p\} \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $\mu^{-1}([0,t]) \cap B^H(\delta, \{p\}) \subseteq U$.

Sea $q \in X$ tal que $d_X(p,q) < \delta$ así, $H(\{p\},\{q\}) < \delta$. De esta manera, $\{q\} \in \mu^{-1}([0,t]) \cap B^H(\delta, \{p\})$ entonces $\{q\} \in U \subseteq Cl_{C(X)}(U)$ por lo que $q \in M$, con esto tenemos, $B^X(\delta, p) \subseteq M$. Por tanto, $p \in int_X\ M$.

Falta probar que $M \subseteq B^X(\epsilon, p)$.

Sea $x \in M$ entonces existe $A \in Cl_{C(X)}(U)$ tal que $x \in A$. De aquí que, para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $B \in U$ tal que $H(A, B) < \frac{\epsilon}{2}$.

Puesto que $U \subseteq B^H(\frac{\epsilon}{2}, \{p\}) \cap \mu^{-1}([0, t])$ tenemos $H(B, \{p\}) < \frac{\epsilon}{2}$, aplicando la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$H(A, \{p\}) \leq H(A, B) + H(B, \{p\}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

es decir, $H(A, \{p\}) < \epsilon$.

Así $A \subseteq N(\epsilon, \{p\})$, esto quiere decir, $x \in N(\epsilon, \{p\}) = B^X(\epsilon, p)$. Por lo que concluimos que, $M \subseteq B^X(\epsilon, p)$.

En resumen, para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto conexo M de X tal que $p \in int_X M \subseteq M \subseteq B^X(\epsilon, p)$. Como p fue arbitrario en X tenemos que X es conexo en pequeño en todo $p \in X$ y por lo tanto X es localmente conexo.

■

A continuación damos la definición de propiedad de Kelley ya que más adelante veremos que ésta es una propiedad de Whitney reversible para los bloques de Whitney.

Definición 4.2.2. Un continuo X tiene la **propiedad de Kelley** en $p \in X$ si para cada sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $\lim_{n \to \infty} p_n = p$ y para cada $A \in C(X)$ tal que $p \in A$, existe $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $p_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \to \infty} A_n = A$.

Además, diremos que un espacio X tiene la propiedad de Kelley si X tiene la propiedad de Kelley en p para todo $p \in X$.

El siguiente lema nos muestra una manera equivalente de definir a la propiedad de Kelley.

Lema 4.2.3. Un continuo X tiene la propiedad de Kelley si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $p, q \in X$ y $d(p, q) < \delta$ entonces para todo $A \in C(X)$ con $p \in A$ existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A, B) < \epsilon$.

Demostración:
($\Leftarrow$) Supongamos que $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\lim_{n \to \infty} p_n = p$. Sea $A \in C(X)$ tal que $p \in A$. Debemos probar que existe $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $p_n \in A_n$ y $\lim_{n \to \infty} A_n = A$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, como $\frac{1}{m} > 0$ existe $\delta_m > 0$ tal que si $d(p, q) < \delta_m$ entonces existe $B_q^m \in C(X)$ tal que $H(A, B_q^m) < \frac{1}{m}$. Como $\lim_{n \to \infty} p_n = p$ existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, p_n) < \delta_m$ para cada $n \geq N_m$, es decir, existe para cada $n \geq N_m$, $B_{p_m}^m \in C(X)$ tal que $H(A, B_{p_n}^m) < \frac{1}{m}$.

Podemos suponer que $N_1 < N_2 < N_3 < ....$ Construimos $A_n \in C(X)$ con $p_n \in A_n$ como sigue:

i) si $n < N_1$, sea A_n cualquier continuo en $C(X)$ tal que $p_n \in A_n$.

ii) si $n \geq N_1$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $N_m \leq n < N_{m+1}$. En este caso, sea $A_n = B^m_{p_n}$, es decir, $H(A_n, A) < \frac{1}{m}$.

Con esta construcción tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in A_n$ y además $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

($\Rightarrow$) Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley.

Sea $\epsilon > 0$. Probemos que existe $\delta > 0$ tal que si $p, q \in X$ con $d(p, q) < \delta$ y $p \in A \in C(X)$ entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A, B) < \epsilon$.

Hagámoslo por contradicción. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $p_n, q_n \in X$ tal que $d(p_n, q_n) < \frac{1}{n}$ y existe $A_n \in C(X)$ tal que $p_n \in A_n$ y $H(A_n, B_n) \geq \epsilon$ para cada $B_n \in C(X)$ con $q_n \in B_n$.

Como X y $C(X)$ son compactos podemos suponer que, $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ con $p \in X$ y que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ con $A \in C(X)$, de esta manera, $p \in A$.

Puesto que $d(p_n, q_n) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} q_n = p$. Como X tiene la propiedad de Kelley en p, existe $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $q_n \in B_n$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = A$.

En particular, $H(A_n, B_n) \geq \epsilon$ y como H es continua tenemos $H(A, A) \geq \epsilon > 0$ con lo cual llegamos a una contradicción.

$\blacksquare$

Con ayuda del lema anterior podemos proceder a probar que la propiedad de Kelley es una propiedad de Whitney reversible para los bloques de Whitney.

Teorema 4.2.4. Si X es un continuo, $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y existe $s \in (0, 1)$ tal que $\mu^{-1}([0, s])$ tiene la propiedad de Kelley entonces X tiene la propiedad de Kelley.

Demostración:
Sea $\epsilon > 0$. Como $\mu^{-1}([0, s])$ tiene la propiedad de Kelley existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in \mu^{-1}([0, s])$ con $H(A, B) < \delta$ y $\mathcal{A} \in C(\mu^{-1}([0, s]))$ tal que $A \in \mathcal{A}$ existe $\mathcal{B} \in C(\mu^{-1}([0, s]))$ tal que $B \in \mathcal{B}$ y $H^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \epsilon$.

Sean $p, q \in X$ tal que $d(p, q) < \delta$. Sea $A \in C(X)$ tal que $p \in A$. Probemos que existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A, B) < \epsilon$.

Notemos que $\{p\}, \{q\} \in \mu^{-1}([0, s])$ tal que $H(\{p\}, \{q\}) = d(p, q) < \delta$ y $F_1(A) = \{\{a\} : a \in A\} \subseteq \mu^{-1}([0, s])$ por lo que $F_1(A) \in C(\mu^{-1}([0, s]))$.

Ya que $\{p\} \in F_1(A)$ existe $\mathcal{B} \in C(\mu^{-1}([0, s]))$ tal que $\{q\} \in \mathcal{B}$ y $H^2(F_1(A), \mathcal{B}) < \epsilon$. Como $\mathcal{B} \subseteq \mu^{-1}([0, s]) \subseteq C(X)$ cumple que $\mathcal{B}$ es cerrado y conexo entonces por el lema 1.3.4, $B = \cup\mathcal{B}$ es un subcontinuo de X que además cumple que $q \in B$.

Falta ver que $H(A, B) < \epsilon$. Para esto, probaremos que $A \subseteq N(\epsilon, B)$ y $B \subseteq N(\epsilon, A)$.

Si $a \in A$ entonces $\{a\} \in F_1(A)$ así que existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $H(\{a\}, C) < \epsilon$ ya que $H^2(F_1(A), \mathcal{B}) < \epsilon$. De esta manera, existe $c \in C$ tal que $d(a, c) < \epsilon$. Como $c \in C$ y $C \in \mathcal{B}$ tenemos que $c \in B = \cup\mathcal{B}$, es decir, $a \in N(\epsilon, B)$. Por tanto, $A \subseteq N(\epsilon, B)$.

Si $b \in B = \cup\mathcal{B}$ existe $K \in \mathcal{B}$ tal que $b \in K$. Como $K \in \mathcal{B} \subseteq N^H(\epsilon, F_1(A))$ existe $\{x\} \in F_1(A)$ tal que $H(K, \{x\}) < \epsilon$. En particular, $K \subseteq N^d(\epsilon, \{x\})$ y como $b \in K$, $d(b, x) < \epsilon$. Esto quiere decir que, $b \in N(\epsilon, A)$ así que $B \subseteq N(\epsilon, A)$.

Por lo tanto, $H(A, B) < \epsilon$.

■

En la sección anterior definimos a la propiedad de ser encadenable por continuos. A continuación, probaremos que la propiedad de ser encadenable por continuos es una propiedad fuerte Whitney reversible.

Teorema 4.2.5. Si existe una sucesión $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de bloques de Whitney iniciales que convergen a $F_1(X)$ tal que cada continuo $\mathcal{A}_n$ es encadenable por continuos, entonces X es encadenable por continuos.

Demostración:
Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y $s_n \in (0, 1)$. Supongamos que $\{\mu^{-1}([0, s_n])\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de bloques de Whitney iniciales tales que $\lim_{n\to\infty} \mu^{-1}([0, s_n]) = F_1(X)$ y $\mu^{-1}([0, s_n])$ es encadenable por continuos para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sean $p, q \in X$ con $p \neq q$ y $\epsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} \mu^{-1}([0, s_n]) = F_1(X)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H^2(\mu^{-1}([0, s_N]), F_1(X)) < \frac{\epsilon}{4}$. Como $\{p\}, \{q\} \in \mu^{-1}([0, s_N])$ existe una sucesión de subcontinuos $\{\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n\}$ de $\mu^{-1}([0, s_N])$ tal que $\{p\} \in \mathcal{C}_1, \{q\} \in \mathcal{C}_n$, *diam* $\mathcal{C}_i < \frac{\epsilon}{4}$ para cada $i = 1, ..., n$ y $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \emptyset$ si $|i - j| \leq 1$.

Para cada $i = 1, ..., n$ sea $C_i = \cup\mathcal{C}_i$, de esta manera, $C_i \in C(X)$ para $i = 1, ..., n$ y se cumple que $p \in C_1$, $q \in C_n$. Además, como $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$ podemos encontrar $A \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$ así $A \subseteq \cup\mathcal{C}_i \cap \cup\mathcal{C}_j = C_i \cap C_j$, es decir, $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

Sea $D_i \in \mathcal{C}_i$, como $\mathcal{C}_i \subseteq \mu^{-1}([0, s_N])$ y $H^2(\mu^{-1}([0, s_N]), F_1(X)) < \frac{\epsilon}{4}$ existe $\{x\} \in F_1(X)$ tal que $H(D_i, \{x\}) < \frac{\epsilon}{4}$.

Si $A \in \mathcal{C}_i$ y como *diam* $\mathcal{C}_i < \frac{\epsilon}{4}$ tenemos que $H(A, D_i) < \frac{\epsilon}{4}$ así, $A \subseteq N(\frac{\epsilon}{4}, D_i)$. Notemos que si $x \in C_i = \cup\mathcal{C}_i$ existe $A \in \mathcal{C}_i$ tal que $x \in A$ así $H(A, D_i) < \frac{\epsilon}{4}$ y $x \in A \subseteq N(\frac{\epsilon}{4}, D_i)$, con esto tenemos, $\cup\mathcal{C}_i \subseteq N(\frac{\epsilon}{4}, D_i)$. Es decir, $C_i = \cup\mathcal{C}_i \subseteq N(\frac{\epsilon}{4}, D_i)$.

Finalmente, sean $x, y \in N(\frac{\epsilon}{4}, D_i)$ así que existen $x', y' \in D_i$ tal que $d(x, x') < \frac{\epsilon}{4}$ y $d(y, y') < \frac{\epsilon}{4}$. Aplicando la desigualdad del triángulo tenemos

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = 3\frac{\epsilon}{4} < \epsilon.$$

De aquí que , *diam* $N(\frac{\epsilon}{4}, D_i) < \epsilon$. Por lo tanto, *diam* $C_i < \epsilon$.

■

Enseguida veremos un resultado que nos ayudará a probar que la propiedad de ser irreducible y la propieded de tener la propiedad cubriente son propiedades de Whitney reversibles para los bloques de Whitney.

Este resultado muestra que no existe un continuo tal que sus bloques de Whitney sean irreducibles.

Teorema 4.2.6. Sea X un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$, entonces $\mu^{-1}([0,t])$ no es irreducible.

Demostración:
Sean $A, B \in \mu^{-1}([0,t])$ tal que $A \neq B$. Probaremos que $\mu^{-1}([0,t])$ no es irreducible, es decir, que existe un subcontinuo propio de $\mu^{-1}([0,t])$ tal que contiene a A y a B.

Llamemos $\mathcal{A} = \mu^{-1}(\mu(A))$ y notemos que $\mathcal{A}$ es un continuo.

Consideremos dos casos:

i) $\mu(A) = \mu(B)$.

En este caso, $\mathcal{A} = \mu^{-1}(\mu(A)) = \mu^{-1}(\mu(B))$ así que $\mathcal{A}$ es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}([0,t])$ que contiene a A y B.

ii) $\mu(B) < \mu(A)$.

Como $B \subsetneq X$ por el teorema 1.2.4 existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $B \subsetneq C$ y por el teorema 1.2.5 existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to \mu^{-1}([\mu(B), \mu(A)])$ de B a C.

Como $C \in \mathcal{A} \cap Im\ \alpha$ y $\mathcal{A} \cup Im\ \alpha \subseteq \mu^{-1}([0,t])$ tenemos $\mathcal{A} \cup Im\ \alpha \in C(\mu^{-1}([0,t]))$.

Notemos que $\mu^{-1}(\mu(B))$ es un continuo no degenerado por lo que existe $D \in \mu^{-1}(\mu(B)) - \{B\}$. Como $\mu(B) < \mu(A)$, $B \notin \mathcal{A}$.

Si tomamos $r \in (0,1]$ entonces $B = \alpha(0) \subsetneq \alpha(r)$, de aquí que $\mu(B) < \mu(\alpha(r))$ lo cual nos dice que $D \neq \alpha(r)$. Si $r = 0$, $\alpha(0) = B$ y $D \neq B$. Por tanto, $D \notin Im\ \alpha$.

Con lo anterior hemos obtenido que $D \notin \mathcal{A} \cup Im\ \alpha$ así que $\mathcal{A} \cup Im\ \alpha$ es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}([0,t])$ que contiene a A y B.

Por lo tanto, $\mu^{-1}([0,t])$ no es irreducible.

■

Corolario 4.2.7. La propiedad de ser irreducible es una propiedad de Whitney reversible para los bloques de Whitney.

Demostración:
Por el teorema anterior sabemos que no existe un continuo X tal que $\mu^{-1}([0,t])$ sea irreducible para alguna función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y algún $t \in (0,1)$.

Por lo tanto, la propiedad de ser irreducible es una propiedad de Whitney reversible para los bloques de Whitney.

■

El siguiente teorema nos dice que no existe un continuo tal que sus bloques de Whitney tengan la propiedad cubriente. Recordemos que la propiedad cubriente la denotamos como CP.

Teorema 4.2.8. Sea X un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$, entonces $\mu^{-1}([0,t]) \notin CP$.

Demostración:
Por el teorema 4.2.6 sabemos que $\mu^{-1}([0,t])$ no es irreducible así que por el corolario 2.5.9 podemos concluir que $\mu^{-1}([0,t]) \notin CP$.

■

Corolario 4.2.9. La propiedad cubriente es una propiedad de Whitney reversible para los bloques de Whitney.

Demostración:
Por el teorema anterior sabemos que no existe un continuo X tal que $\mu^{-1}([0,t]) \in CP$ para alguna función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y algún $t \in (0,1)$.

Por lo tanto la propiedad cubriente es una propiedad de Whitney reversible para los bloques de Whitney.

■

A continuación, probaremos que la propiedad de ser unicoherente es una propiedad fuerte Whitney reversible para los bloques de Whitney. Antes de esto, veamos algunos resultados que serán de utilidad para esta prueba.

Teorema 4.2.10. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y supongamos que $\{\mu^{-1}([0,t_n])\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de bloques de Whitney tal que $\lim_{n\to\infty} \mu^{-1}([0,t_n]) = F_1(X)$ entonces $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

Demostración:
Sea $\epsilon > 0$. Como μ es uniformemente continua existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$ cumplen que $H(A,B) < \delta$ entonces $|\mu(A) - \mu(B)| < \epsilon$.

Ya que $\lim_{n\to\infty} \mu^{-1}([0,t_n]) = F_1(X)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H^2(F_1(X), \mu^{-1}([0,t_n])) < \delta$ para cada $n \geq N$, de aquí que $\mu^{-1}([0,t_n]) \subseteq N(\delta, F_1(X))$ para cada $n \geq N$.

Sea $m \geq N$ y tomemos un elemento $A_m \in \mu^{-1}(t_m)$. Como $\mu^{-1}(t_m) \subseteq \mu^{-1}([0,t_m]) \subseteq N(\delta, F_1(X))$ existe $x_m \in X$ tal que $H(A_m, \{x_m\}) < \delta$. Así que, $|\mu(A_m) - \mu(\{x_m\})| < \epsilon$ es decir, $t_m = \mu(A_m) < \epsilon$.

De esta manera concluimos que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

■

Ahora veamos la siguiente proposición, la cual nos permite obtener subcontinuos del bloque de Whitney.

Proposición 4.2.1. Sea X un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Si $\mathcal{A} = \mu^{-1}([0,t])$ es un bloque de Whitney para $C(X)$ y $E \in C(X)$ entonces $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap E \neq \emptyset\}$ es un subcontinuo de $\mathcal{A}$.

Demostración:
Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{A \in \mathcal{A} : A \cap E \neq \emptyset\} \\ &= \mathcal{A} \cap \{A \in 2^X : A \cap E \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Por el teorema 1.0.10 tenemos que $\mathcal{B}$ es cerrado en el compacto $\mathcal{A}$ por lo que $\mathcal{B}$ es un subconjunto compacto en $\mathcal{A}$.

Falta probar que $\mathcal{B}$ es conexo.

Sea $B \in \mathcal{B}$ entonces $B \cap E \neq \emptyset$ así que existe $\{p\} \in B \cap E$.

Si $B = \{p\}$ definimos $\alpha_B : [0,1] \to \mu^{-1}([0,t])$ como la función constante $\alpha_B(r) = B$ para cada $r \in [0,1]$. De esta forma, $Im\ \alpha_B \subseteq \mathcal{B}$.

Ahora, si $\{p\} \subsetneq B$ existe un arco ordenado $\alpha_B : [0,1] \to \mu^{-1}([0,\mu(B)])$ de $\{p\}$ a B. Como $\mu(B) \leq t$ tenemos que $Im\ \alpha_B \subseteq \mu^{-1}([0,t])$.

Como α_B es un arco ordenado se cumple que $\{p\} = \alpha_B(0) \subseteq \alpha_B(r)$ para cada $r \in [0,1]$, de modo que, $\alpha_B(r) \cap E \neq \emptyset$ para cada $r \in [0,1]$. Así $Im\ \alpha_B \subseteq \mathcal{B}$.

Notemos $F_1(E) \subseteq \mathcal{B}$ ya que $\mu(\{p\}) = 0$ y $\{z\} \cap E \neq \emptyset$ para cada $z \in E$. De aquí que

$$\mathcal{B} = \cup_{B \in \mathcal{B}} (Im\ \alpha_B \cup F_1(E))$$

puesto que $Im\ \alpha_B$ y $F_1(E)$ son conexos y $\{p\} \in Im\ \alpha_B \cap E$ tenemos que $Im\ \alpha_B \cup F_1(E)$ es conexo y así $\mathcal{B}$ es conexo.

■

Diremos que una propiedad topológica P es una propiedad de Whitney para los bloques pequeños de Whitney si para cada continuo X con la propiedad P y para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ existe $s \in (0,1)$ tal que para cada $t \leq s$, se cumple que $\mu^{-1}([0,t])$ tiene la propiedad P.

Teorema 4.2.11. La propiedad de no ser unicoherente es una propiedad de Whitney para los bloques pequeños de Whitney.

Demostración:
Sea X un continuo no unicoherente y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Sean $A, B \in C(X)$ tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo, entonces existen subconjuntos cerrados H y K de X que son ajenos y no vacíos tal que $A \cap B = H \cup K$.

Consideremos el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(H,K) &= \{E \in C(X) : E \cap H \neq \emptyset \text{ y } E \cap K \neq \emptyset\} \\ &= \{E \in C(X) : E \cap H \neq \emptyset\} \cap \{E \in C(X) : E \cap K \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

el cual es cerrado por el teorema 1.0.10.

Como $\mathcal{D}(H,K)$ es cerrado y μ es una función continua existe $E_0 \in \mathcal{D}(H,K)$ tal que $\mu(E_0) = \min\{\mu(R) : R \in \mathcal{D}(H,K)\}$. Notemos que $A, B \in \mathcal{D}(H,K)$ así que $\mu(E_0) \leq \mu(A)$ y $\mu(E_0) \leq \mu(B)$.

Además $\mu(E_0) > 0$, ya que si $\mu(E_0) = 0$ entonces $E_0 = \{x\}$ para algún $x \in X$ y como $E_0 \in \mathcal{D}(H,K)$, $x \in H \cap K$ con lo que tenemos una contradicción ya que H y K son ajenos.

Sea $t \in (0, \mu(E_0))$, de manera que, $t < \mu(E_0) \leq \mu(A)$. Como A es un subcontinuo no degenerado de X, $(\mu|_{C(A)})^{-1}([0,t])$ es un continuo no degenerado. Definimos

$$\mathcal{C}(A) = (\mu|_{C(A)})^{-1}([0,t])$$

de manera que $\mathcal{C}(A)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$.

Por la proposición anterior sabemos que el conjunto

$$\mathcal{D}(B) = \{D \in \mu^{-1}([0,t]) : D \cap B \neq \emptyset\}$$

es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$.

A continuación, veremos que $\mu^{-1}([0,t]) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{D}(B)$.

Claramente, $\mathcal{C}(A) \subseteq \mu^{-1}([0,t])$ y $\mathcal{D}(B) \subseteq \mu^{-1}([0,t])$ así que $\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{D}(B) \subseteq \mu^{-1}([0,t])$.

Sólo falta probar que $\mu^{-1}([0,t]) \subseteq \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{D}(B)$. Sea $F \in \mu^{-1}([0,t])$. Si $F \subseteq A$ entonces $F \in \mathcal{C}(A)$. Si $F \nsubseteq A$ existe $x \in F - A$. Como $X = A \cup B$, $x \in B$ por lo que $x \in F \cap B$, es decir, $F \cap B \neq \emptyset$. Con esto tenemos que $F \in \mathcal{D}(B)$. Por lo que concluimos que, $\mu^{-1}([0,t]) \subseteq \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{D}(B)$.

Por lo tanto, $\mu^{-1}([0,t]) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{D}(B)$.

Ahora veamos que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ es no conexo. Definamos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{H} = \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \subseteq A \text{ y } E \cap H \neq \emptyset\}$$

y

$$\mathcal{K} = \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \subseteq A \text{ y } E \cap K \neq \emptyset\}$$

por el teorema 1.0.10 tenemos que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son cerrados.

Como $H \neq \emptyset$ podemos tomar $x \in H$. Notemos que $\{x\} \subseteq A \cap B \subseteq A$ y $\mu(\{x\}) = 0$ entonces $\{x\} \in \mathcal{H}$ así que $\mathcal{H} \neq \emptyset$. De manera similar tenemos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

Veamos que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$.

Tomemos $E \in \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ entonces $E \subseteq A$ y $E \cap B \neq \emptyset$. Observemos que $E \cap B \subseteq A \cap B = H \cup K$. Ya que $H \cap K = \emptyset$ tenemos que $(E \cap B) \cap H \neq \emptyset$ o $(E \cap B) \cap K \neq \emptyset$. Con esto obtenemos que $E \cap H \neq \emptyset$ o $E \cap K \neq \emptyset$ así que $E \in \mathcal{H}$ o $E \in \mathcal{K}$. Por tanto, $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$.

Probemos que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Sea $E \in \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ entonces $E \subseteq A$ así que $E \in \mathcal{C}(A)$. De aquí tenemos:

$$E \cap H \subseteq E \cap (H \cup K) = E \cap (A \cap B) \subseteq E \cap B$$

y

$$E \cap K \subseteq E \cap (H \cup K) = E \cap (A \cap B) \subseteq E \cap B.$$

Si $E \cap H \neq \emptyset$ tenemos que $E \cap B \neq \emptyset$ así que $E \in \mathcal{D}(B)$. Luego, si $E \cap K \neq \emptyset$ obtenemos que $E \in \mathcal{D}(B)$. Con esto tenemos que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$

Así concluimos que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.

Además, $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Si $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ entonces existe $E \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$, esto quiere decir que, $E \cap H \neq \emptyset$ y $E \cap K \neq \emptyset$. Así que, $E \in \mathcal{D}(H, K)$. Como $E \in \mu^{-1}([0, t])$ tenemos que $\mu(E) \leq t$. Por la elección de t sabemos que $t < \mu(E_0)$, de aquí que, $\mu(E) < \mu(E_0)$ con lo que tenemos una contradicción. Por tanto $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

En resumen, existen $\mathcal{C}(A), \mathcal{D}(B) \in C(\mu^{-1}([0, t]))$ tal que $\mu^{-1}([0, t]) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{D}(B)$ y $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ es no conexo.

Por lo tanto, $\mu^{-1}([0, t])$ no es unicoherente.

■

Finalmente, con ayuda de los resultados mostrados previamente obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.12. La propiedad de ser unicoherente es una propiedad fuerte Whitney reversible para los bloques de Whitney.

Demostración:
Sea X un continuo, $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y $t_n \in (0, 1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\{\mu^{-1}([0, t_n])\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de bloques de Whitney en $C(X)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu^{-1}([0, t_n])$ es unicoherente y $\lim_{n \to \infty} \mu^{-1}([0, t_n]) = F_1(X)$.

Supongamos que X no es unicoherente, por el teorema anterior sabemos que la propiedad de no ser unicoherente es una propiedad de Whitney para los bloques pequeños de Whitney así que existe $s \in (0,1)$ tal que para cada $t \in (0,s]$ se cumple que $\mu^{-1}([0,t])$ no es unicoherente.

Por otra parte, por el teorema 4.2.10 tenemos que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n < s$ para cada $n \geq N$. De manera que $\mu^{-1}([0,t_n])$ no es unicoherente para cada $n \geq N$, con lo que tenemos una contradicción.

Por lo tanto, X es unicoherente.

$\blacksquare$

Capítulo 5

Conclusiones

Una herramienta poderosa para estudiar continuos son las funciones de Whitney, en este trabajo estudiamos a estas funciones y las utilizamos para estudiar propiedades topológicas importantes de los continuos a través de los niveles y bloques de Whitney.

Estudiamos a las propiedades que un continuo X le hereda a los niveles de Whitney, es decir, propiedades de Whitney como son: ser arco, ser círculo, ser arco-conexo, ser localmente conexo, ser descomponible, entre otras. Además, vimos que hay propiedades que son propiedades de Whitney cuando el continuo tiene la propiedad cubriente como es el caso de la propiedad de ser indescomponible.

También estudiamos propiedades que los niveles de Whitney le heredan a un continuo X, es decir, propiedades fuerte Whitney reversibles y propiedades de Whitney reversibles como son: ser arco, ser círculo, ser indescomponible, ser localmente conexo, ser unicoherente, ser irreducible, tener la propiedad cubriente, entre otras.

En el cuadro 5.1 mostramos de una manera sintética todas las propiedades de Whitney, fuerte Whitney reversibles y Whitney reversibles que obtuvimos en este trabajo. Además mencionamos en este mismo cuadro propiedades topológicas que no son propiedades de Whitney ni propiedades de Whitney reversibles y agregamos la referencias de dónde se pueden consultar.

Notemos que hay propiedades topológicas que son tanto propiedades de Whitney como propiedades de Whitney reversibles como son la propiedad de ser arco, ser círculo, ser hereditariamente indescomponible, ser localmente conexo y ser pseudo-arco.

En el último capítulo de este trabajo nos dedicamos a estudiar un concepto más fuerte que el de nivel de Whitney: los bloques de Whitney para $C(X)$, una propiedad importante de éstos es que son subcontinuos de $C(X)$ al igual que los niveles de Whitney.

Los bloques de Whitney nos permitieron analizar más ampliamente a las propiedades topológicas de un continuo, con ayuda de las funciónes de Whitney estudiamos algunas propiedades de Whitney y propiedades de Whitney reversibles. Estudiamos propiedades que ya habíamos analizado con los niveles de Whitney pero también otras propiedades como es la propiedad de Kelley y la encadenabilidad por continuos, la primera es una propiedad fuerte Whitney reversible y la última resulta ser tanto una propiedad de Whitney como una propiedad de Whitney reversible.

Observamos que hay propiedades como la propiedad de ser arco-conexo y la propiedad de ser localmente conexo que siguen siendo propiedades de Whitney al estudiarlas con bloques de Whitney, así mismo hay propiedades de Whitney reversibles que se mantienen como son la propiedad de ser localmente conexo, ser irreducible y tener la propiedad cubriente.

En el cuadro 5.2 se muestra un resumen de las propiedades de Whitney y Whitney reversibles para el caso de los bloques de Whitney, también agregamos las propiedades topológicas que se conoce que no son propiedades de Whitney ni propiedades de Whitney reversibles e incluimos la referencias dónde se puede encontrar este resultado.

Propiedades para niveles de Whitney

Propiedades topológicas	Propiedad de Whitney	Propiedad fuerte Whitney reversible	Propiedad de Whitney reversible
Ser continuo	Si [Teorema 2.0.1]		
Ser arco	Si [Teorema 2.1.1]	Si [Corolario 3.1.5]	
Ser círculo	Si [Teorema 2.1.2]	Si [Corolario 3.1.6]	
Ser arco-conexo	Si [Teorema 2.1.3]		No [9]
Ser descomponible	Si [Teorema 2.2.10]		No [11]
Ser indescomponible	No [14]	Si [Corolario 3.1.2]	
Ser encadenable	Si [Teorema 2.3.8]		
Ser tipo círculo propio	Si [Teorema 2.3.9]		
Ser encadenable e indescomponible	Si [Teorema 2.3.11]		
Ser hereditariamente indescomponible	Si [Corolario 2.4.5]	Si [Teorema 3.3.14]	
Ser pseudo-arco	Si [Corolario 2.4.6]	Si [Teorema 3.3.16]	
Ser localmente conexo	Si [Teorema 2.6.3]	Si [Teorema 3.1.1]	
No ser arco		Si [Corolario 3.3.7]	
No ser círculo		Si [Corolario 3.3.8]	
No ser hereditariamente indescomponible		Si [Corolario 3.3.3]	
No ser pseudo-arco		Si [Corolario 3.3.4]	
No ser encadenable		Si [Corolario 3.3.5]	
No ser tipo círculo propio		Si [Corolario 3.3.6]	
No ser arco-conexo		Si [Corolario 3.3.9]	
No ser localmente conexo		Si [Corolario 3.3.10]	
No ser indescomponible y encadenable		Si [Corolario 3.3.11]	
No contener arcos		Si [Teorema 3.3.12]	
No contener círculos		Si [Teorema 3.3.13]	
No contener triodos		Si [Corolario 3.1.1]	
Ser unicoherente		Si [Teorema 3.2.2]	
Ser unicoherente para los continuos localmente conexos	Si [Teorema 4.1.6]		
Ser encadenable por continuos	Si [Corolario 4.1.18]		
Ser indescomponible para los continuos que tienen CP	Si [Corolario 2.5.4]		
Ser irreducible	No [7]		Si [Teorema 3.4.3]
Tener CP	No [5]		Si [Teorema 3.4.4]

Cuadro 5.1

Propiedades para bloques de Whitney

Propiedades topológicas	Propiedad de Whitney	Propiedad fuerte Whitney reversible	Propiedad de Whitney reversible
Ser arco-conexo	Si [Teorema 4.1.1]	No [1, Teorema 3.2.8, p. 60]	
Ser localmente conexo	Si [Teorema 4.1.5]		Si [Teorema 4.2.1]
Unicoherente		Si [Teorema 4.2.12]	
Unicoherente para los continuos localmente conexos	Si [Teorema 4.1.14]		
Encadenable por continuos	Si [Corolario 4.1.19]	Si [Teorema 4.2.5]	
Irreducible	No [1, Corolario 3.2.127, p. 203]		Si [Corolario 4.2.7]
Tener CP	No [1, Corolario 3.2.137, p. 205]		Si [Corolario 4.2.9]
Propiedad de Kelley	No [1, Teorema 3.2.28, p. 77]		Si [Teorema 4.2.4]

Cuadro 5.2

Bibliografía

[1] M. E. Aguilera. 2013. *Bloques pequeños de Whitney.* Tesis de Doctorado. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. México. D.F.

[2] M. E. Aguilera. 2017. *Whitney blocks.* Topology and its Appl. 221, 449-464.

[3] J. G. Anaya. 2007. *Agujeros en hiperespacios.* Tesis de doctorado. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. México. D.F.

[4] F. Casarrubias y A. Tamariz. 2012. *Elementos de Topología General.* Aportaciones Matemáticas 37. SMM. México. D.F.

[5] W. J. Charatonik. 1983. *Some counterexamples concerning Whitney levels.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 31, 385-391.

[6] J. Dugundji. 1996. *Topology.* Allyn and Bacon series in advanced mathematics. Boston.

[7] C. Eberhart and S. B. Nadler, Jr. 1980. *Irreducible Whitney levels.* Houston J. Math. 6, 355-363.

[8] S. Eilenberg. 1936. *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan.* Fund. Math 26, 61-112.

[9] C. L. Hagopian and L. G. Oversteegen. 1995. *Continuum chainability without arcs.* Houston J. Math. 21, 407-411.

[10] A. Illanes. 1996. *Multicoherence of Whitney levels.* Topology and its Appl. 68, 251-265.

[11] A. Illanes and S. B Nadler, Jr. 1999. *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. New York.

[12] A. Illanes. 2004. *Hiperespacios de continuos.* Aportaciones Matemáticas 37. SMM. México. D.F.

[13] J. Kelley. 1942. *Hyperspaces of a continumm.* Trans. Amer. Math. Soc. 52, 22-36.

[14] J. Krasinkiewicz and S. B. Nadler, Jr. 1978. *Whitney properties.* Fund. Math. 98, 165–180.

[15] G. Lugo. 2021. *Niveles de Whitney en Hiperespacios de Continuos.* Tesis de Licenciatura. Universidad de Sonora. División de Ciencias Exactas y Naturales. México. Hermosillo.

[16] J. R. Munkres. 2002. *Topología*. 2da Edición. Prentice Hall. Madrid, España.

[17] S. B. Nadler, Jr. 1987. *Hyperspaces of sets*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York.

[18] S. B Nadler, Jr. 1992. *Continuum theory: an introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc. New York.

[19] J. T. Rogers, Jr. 1975. *Whitney continua in the hyperspace C(X)* . Pacific J. Math. 58, 569-584.

[20] H. Whitney. 1933. *Regular families of curves*. Annals Math. 244-270.