"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Posgrado en Matemáticas

Espacios de Morrey discretos: propiedades y acotamiento de algunos operadores

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestra en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Itzia Iztlacihuatl Justo Robledo

Directora de tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, 12 de agosto del 2022

SINODALES

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Fernando Luque Vásquez
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jorge Rivera Noriega
ITAM, Ciudad de México, México

Esta tesis está dedicada a:

Mis papás Jaqueline y Gilberto, quienes han sido mi mayor motor en la vida.
A mi hermana Paola, la mejor compañía que puedo tener.
A mi tío Oscar en paz descanse.
Y a la Dra. Martha Guzmán, mi guía académica.

Agradecimientos

En la vida uno conoce a demasiadas personas, pero sólo unas pocas influyen de manera considerable en tu vida dejando una gran huella. Es por esto que quiero agradecer a las personas que de alguna manera influyeron en la realización de este trabajo.

Primero, agradezco a mis padres todo el amor que me han dado, el apoyo a lo largo de toda mi vida académica y las enseñanzas que me dieron para que fuera una mejor persona, sin ellos no habría llegado hasta donde estoy. También agradezco a mi hermana por todo su apoyo y amor, gracias a que ella siempre me escucha, motiva y reconforta pude seguir adelante.

Quiero agradecer a la Dra. Martha Guzmán por ser mi directora de tesis, por creer en mí, guiarme y hacer que este trabajo fuera posible. También le agradezco todo su apoyo, su tiempo y los consejos que me ha dado durante la licenciatura y la maestría, gracias a ella pude crecer como matemática.

Quiero agradecer a todos los profesores que le pusieron gran empeño y dedicación a la enseñanza, ya que gracias a eso tuve una buena formación académica.

Agradezco a los doctores Fernando Luque, Adolfo Minjárez y Jorge Rivera por ser mis sinodales, darse el tiempo de leer esta tesis y hacer los comentarios necesarios para mejorarla.

Por último, agradezco a mis amigos y compañeros que me apoyaron a lo largo de mi vida. En especial quiero agradecer a Aaron, Gaby, Germán, Ximena, Roger, Yitzhak, Javiercito y Félix por hacer amena mi estancia en la universidad.

Contenido

Símbolos y notación

$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales
$\mathbb{N}_0$	Conjunto de números naturales en unión con el cero
$\mathbb{Z}$	Conjunto de números enteros
$\mathbb{Z}^n$	Conjunto de n-adas con entradas enteras
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales
$\mathbb{C}$	Conjunto de números complejos
$\mathbb{R}^n$	Espacio euclidiano n-dimensional
$\mathbb{K}$	Campo, puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
d_X	Métrica en el espacio X
$\\|\cdot\\|_X$	Norma en el espacio X
$\\|T\\|_{X\to Y}$	Norma del operador $T : X \to Y$
ℓ^p	Espacio de sucesiones con norma p
ℓ^∞	Espacio de sucesiones acotadas
c	Espacio de sucesiones convergentes
c_0	Espacio de sucesiones convergentes a cero
ℓ^p_q	Espacio de Morrey discreto
L^p	Espacio de Lebesgue con norma p
L^p_{loc}	Espacio de funciones localmente L^p
$L^{p,\lambda}$	Espacio de Morrey
$\mathcal{M}^p_q$	Espacio de Morrey en la recta real
$A \setminus B$	Conjunto A menos el conjunto B
χ_A	Función característica del conjunto A
$\lfloor a \rfloor$	El entero más grande menor o igual a a
$\lceil a \rceil$	El entero más pequeño mayor o igual a a
$a \gg b$	a mucho mayor que b
$a \vee b$	La menor cota superior de a y b
$a \sim b$	a equivalente a b
$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$	Conjunto de funciones que van de $\mathbb{Z}^d$ a $\mathbb{R}$
$B_r(a)$	Bola de radio r y centro a

Introducción

En 1938, Charles B. Morrey introduce en [21] ciertos espacios de funciones con el objeto de estudiar el comportamiento local de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden. Posteriormente estos espacios fueron generalizados y denominados *espacios de Morrey*.

Los espacios de Morrey se denotan por $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ donde $1 \leq p < \infty$ y $\lambda \geq -\frac{1}{p}$ y se definen como el conjunto de funciones f en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} \left[\frac{1}{|B_r(a)|^{1+\lambda p}} \int_{B_r(a)} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

De la definición se puede ver fácilmente que para ciertos valores de λ los espacios de Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ coinciden con los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ (ver apéndice A, observación A.2), por lo que constituyen una generalización de los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$. Por esta razón, a lo largo de los años se ha estudiado el comportamiento de algunos operadores que inicialmente habían sido estudiados en $L^p(\mathbb{R}^n)$, pero ahora actuando sobre los espacios de Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ (ver [1, 3, 22, 24, 25]).

Recordemos que los espacios de sucesiones ℓ^p son la versión discreta de los espacios de Lebesgue L^p y que hay operadores en L^p que tienen análogos discretos en ℓ^p. De manera similar los espacios de Morrey tienen una versión discreta, a saber, los *espacios de Morrey discretos* (o a veces llamados espacios de sucesiones de Morrey), los cuales heredan algo de teoría de los espacios de Morrey clásicos, por ejemplo el acotamiento de versiones discretas de algunos operadores en $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Los espacios de Morrey discretos fueron introducidos recientemente en 2018. Desde entonces se han publicado diversos artículos donde se desarrolla la teoría sobre estos espacios. Este trabajo tiene como principal objetivo recopilar, organizar y dar a conocer parte de la teoría que se ha desarrollado sobre los espacios de Morrey discretos.

En el capítulo 1 veremos cómo se definen los espacios de Morrey discretos. Veremos que son una generalización de los espacios ℓ^p y demostraremos algunas propiedades importantes como la completitud con respecto a su norma y la inclusión entre dos espacios de Morrey discretos al variar alguno de sus parámetros. También demostraremos que son subespacios cerrados de los espacios de Morrey clásicos.

En el capítulo 2 estudiaremos el comportamiento de algunos operadores actuando sobre los espacios de Morrey discretos. Dos de ellos son: el operador maximal de Hardy-Littlewood y los potenciales de Riesz, los cuales son ejemplos de operadores que primero fueron estudiados en los espacios de Lebesgue L^p y que posteriormente fueron estudiados en $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ [1, 3].

En el capítulo 3 definiremos tres constantes geométricas que nos darán información sobre los espacios de Morrey discretos. La primera será la constante de Von Neumann-Jordan que nos dirá si un espacio es espacio de Hilbert y en caso de no serlo, nos mide qué tan cerca está de ser uno. La segunda será la constante de James la cual nos dirá si un espacio es reflexivo, es decir, si es isométrico a su doble dual bajo el mapeo natural. Y la tercera será la constante de Dunkl-Williams la cual nos da la misma información que las otras dos.

Por último, en el capítulo 4 veremos tres generalizaciones de los espacios de Morrey discretos y propiedades importantes de éstas, como su completitud, algunas propiedades de inclusión y en el caso de los espacios de Morrey discretos tipo débil demostraremos que son subespacios cerrados de los espacios de Morrey tipo débil.

También fueron incluidos dos apéndices. En el apéndice A se desarrolla teoría básica sobre espacios de Morrey como su definición, propiedades importantes y el acotamiento del operador maximal de Hardy-Littlewood. En el apéndice B se enuncian dos desigualdades importantes para este trabajo: la desigualdad integral de Minkowski y la desigualdad de Fefferman-Stein.

Capítulo 1

Espacios de Morrey discretos

Los espacios de Morrey discretos fueron introducidos en 2018 por Hendra Gunawan, Eder Kikianty y Christopher Schwanke en [11]. Este capítulo servirá de introducción a los espacios de Morrey discretos, pues además de su definición, veremos que son espacios de Banach y estudiaremos algunas propiedades de inclusión, las cuales pueden encontrarse en [11] y [19]. Finalmente demostraremos nuevamente su completitud pero vistos como subespacios de los espacios de Morrey clásicos [19].

1.1. Definición y completitud

Comenzaremos con algo de notación para posteriormente definir los espacios de Morrey discretos.
Sean $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos el conjunto $S_{m,N}$ como

$$S_{m,N} := \{m - N, \dots, m, \dots, m + N\}$$

el cual tiene cardinalidad $|S_{m,N}| = 2N + 1$.

Definición 1.1.1. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$. El* ***espacio de Morrey discreto****, denotado por $\ell_q^p = \ell_q^p(\mathbb{Z})$, se define como el conjunto de sucesiones $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tomando valores en $\mathbb{K}$ tales que $\|x\|_{\ell_q^p} < \infty$, donde*

$$\|x\|_{\ell_q^p} := \sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La siguiente observación se sigue inmediatamente de la definición.

Observación 1.1.2. *Para $q = p$, el espacio de Morrey discreto ℓ^p_q coincide con el espacio de sucesiones ℓ^p, es decir,*

$$\ell^p_p = \ell^p.$$

En efecto, tomando $q = p$ y $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tenemos que

$$\|x\|_{\ell^p_p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{\ell^p}$$

de aquí que $\ell^p_p \subset \ell^p$ y $\ell^p \subset \ell^p_p$.

La siguiente proposición nos dice que los espacios de Morrey discretos pertenecen a un tipo de espacios muy importantes en el análisis funcional, que son los espacios normados completos (Banach).

Proposición 1.1.3. *Para $1 \le p \le q < \infty$, el mapeo $\|\cdot\|_{\ell^p_q}$ define una norma en ℓ^p_q. Más aún, $(\ell^p_q, \|\cdot\|_{\ell^p_q})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. De la definición se sigue que $\|x\|_{\ell^p_q} \ge 0$ para toda $x \in \ell^p_q$.
Es fácil ver que $\|x\|_{\ell^p_q} = 0$ si y sólo si $x = 0$. Si $x = 0$ es claro que $\|x\|_{\ell^p_q} = 0$. Si $\|x\|_{\ell^p_q} = 0$ entonces $\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p = 0$ para toda $m \in \mathbb{Z}$ y toda $N \in \mathbb{N}_0$, entonces $x_k = 0$ para toda $k \in \mathbb{Z}$, por tanto $x = 0$.
También es evidente que $\|\alpha x\|_{\ell^p_q} = |\alpha|\|x\|_{\ell^p_q}$ para toda $x \in \ell^p_q$ y toda $\alpha \in \mathbb{K}$.
Por último, para cualesquiera $x, y \in \ell^p_q$, $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$, y usando la desigualdad de Minkowski se tiene que

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Luego al tomar supremos sobre $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$ obtenemos $\|x + y\|_{\ell^p_q} \le \|x\|_{\ell^p_q} + \|y\|_{\ell^p_q}$.
Así $\|\cdot\|_{\ell^p_q}$ define una norma en ℓ^p_q.

Ahora veamos que $(\ell_q^p, \|\cdot\|_{\ell_q^p})$ es un espacio de Banach.
Sea $\varepsilon > 0$ y $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ_q^p. Entonces existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ tal que $\|x^{(i)} - x^{(j)}\|_{\ell_q^p} < \varepsilon$ para toda $i, j \geq n_\varepsilon$, es decir,

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} \left| x_k^{(i)} - x_k^{(j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

para toda $i, j \geq n_\varepsilon$. De aquí que para toda $m \in \mathbb{Z}$ y toda $N \in \mathbb{N}_0$

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} \left| x_k^{(i)} - x_k^{(j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{1.1}$$

para toda $i, j \geq n_\varepsilon$. Luego, tomando $N = 0$ obtenemos que para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$\left| x_k^{(i)} - x_k^{(j)} \right| < \varepsilon$$

para toda $i, j \geq n_\varepsilon$. Así $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para cada $k \in \mathbb{Z}$.
Definamos $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ donde

$$x_k := \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Luego, haciendo $j \to \infty$ en (1.1) obtenemos

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} \left| x_k^{(i)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

para toda $i \geq n_\varepsilon$. Así $x^{(i)} - x \in \ell_q^p$, entonces $x = x^{(i)} - (x^{(i)} - x) \in \ell_q^p$. Además,

$$\|x^{(i)} - x\|_{\ell_q^p} \leq \varepsilon$$

para toda $i \geq n_\varepsilon$, por lo que $x^{(i)} \to x$ cuando $i \to \infty$.
Por lo tanto, $(\ell_q^p, \|\cdot\|_{\ell_q^p})$ es un espacio de Banach.

■

A continuación veremos cómo se relacionan los espacios de Morrey discretos ℓ_q^p con los espacios de sucesiones ℓ^p cuando $q > p$ y con ℓ^∞ para $1 \leq p \leq q < \infty$. Esto nos ayudará a ilustrar el comportamiento de las sucesiones en ℓ_q^p.

Proposición 1.1.4. *Para $1 \leq p \leq q < \infty$, tenemos que*

$$\ell^p \subseteq \ell^p_q$$

y $\|x\|_{\ell^p_q} \leq \|x\|_{\ell^p}$ para cada $x \in \ell^p$. Además, la inclusión es estricta para $1 \leq p < q < \infty$.

Demostración. Sea $x \in \ell^p$. Notemos que para toda $m \in \mathbb{Z}$ y toda $N \in \mathbb{N}_0$, se cumple que $0 < |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq 1$ ya que $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \leq 0$. Así

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

luego tomando supremos sobre $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$ obtenemos que $\|x\|_{\ell^p_q} \leq \|x\|_{\ell^p}$.
Por lo tanto $\ell^p \subseteq \ell^p_q$.

Ahora veamos que la inclusión es estricta cuando $1 \leq p < q < \infty$.
Consideremos la sucesión $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dada por $x_k = |k|^{-\frac{1}{q}}$ cuando $k \neq 0$ y $x_0 = 1$.
Como $\frac{p}{q} < 1$, entonces la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^p = 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k|^{-\frac{p}{q}} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{p}{q}}$$

diverge y así $x \notin \ell^p$.
Por otro lado, para toda $m \in \mathbb{Z}$ y toda $N \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \leq \sum_{k \in S_{0,N+1}} |x_k|^p = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N+1} k^{-\frac{p}{q}}$$

y usando la suma inferior de Riemann vemos que

$$\sum_{k=1}^{N+1} k^{-\frac{p}{q}} \leq 1 + \int_1^{N+1} x^{-\frac{p}{q}} dx = 1 + \left. \frac{x^{-\frac{p}{q}+1}}{-\frac{p}{q}+1} \right|_1^{N+1} = 1 + \left. \frac{q x^{\frac{q-p}{q}}}{q-p} \right|_1^{N+1}$$

$$= 1 + \frac{q(N+1)^{\frac{q-p}{q}} - q}{q-p} = 1 - \frac{q}{q-p} + \frac{q}{q-p}(N+1)^{1-\frac{p}{q}}.$$

Luego, como $(2N+1)^{\frac{p}{q}-1} \leq 1$ y $N+1 \leq 2N+1$, entonces

$$
\begin{aligned}
|S_{m,N}|^{\frac{p}{q}-1} \sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p &\leq (2N+1)^{\frac{p}{q}-1}\left(3 - \frac{2q}{q-p} + \frac{2q(N+1)^{1-\frac{p}{q}}}{q-p}\right) \\
&\leq (2N+1)^{\frac{p}{q}-1}\left(3 - \frac{2q}{q-p} + \frac{2q(2N+1)^{1-\frac{p}{q}}}{q-p}\right) \\
&\leq (2N+1)^{\frac{p}{q}-1}\left(3 + \frac{2q(2N+1)^{1-\frac{p}{q}}}{q-p}\right) \\
&\leq 3 + \frac{2q}{q-p},
\end{aligned}
$$

por último, tomando raíz p-ésima y supremo sobre toda $m \in \mathbb{Z}$ y toda $N \in \mathbb{N}_0$, obtenemos

$$
\sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(3 + \frac{2q}{q-p}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty
$$

por lo que $x \in \ell^p_q$.

■

Que la inclusión de ℓ^p en ℓ^p_q sea estricta para $q > p$ nos dice que hay sucesiones en ℓ^p_q que tienen un decaimiento no lo suficientemente rápido como para estar en ℓ^p. Sin embargo, estas sucesiones tienen que estar acotadas, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.5. *Para $1 \leq p \leq q < \infty$, tenemos que*

$$
\ell^p_q \subset \ell^\infty
$$

y $\|x\|_{\ell^\infty} \leq \|x\|_{\ell^p_q}$ para cada $x \in \ell^p_q$.

Demostración. Sea $x \in \ell^p_q$. Para toda $m \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$
|x_m| = |S_{m,0}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,0}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_{\ell^p_q},
$$

luego tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$ obtenemos

$$\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{m\in\mathbb{Z}} |x_m| \leq \|x\|_{\ell^p_q}$$

lo cual completa la prueba. ■

1.2. Propiedades de inclusión

En esta sección veremos las relaciones que hay entre dos espacios de Morrey discretos al variar los parámetros p y q.

Antes de ver dichas relaciones enunciaremos un lema que será se utilidad para demostrar algunas de ellas.

Lema 1.2.1. *Sean $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$. Para toda $m \in \mathbb{Z}$ y toda $N \in \mathbb{N}_0$, tenemos*

$$\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \tag{1.2}$$

donde $x_k \in \mathbb{K}$ para toda $k \in S_{m,N}$.

Demostración. Sean $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$. Por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1} &\leq \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} 1\right)^{1-\frac{p_1}{p_2}} \\
&= |S_{m,N}|^{1-\frac{p_1}{p_2}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \\
&= |S_{m,N}| \left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}},
\end{aligned}$$

de aquí que

$$\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

■

La primera relación entre dos espacios de Morrey discretos que veremos será cuando variamos p y dejamos fija q.

Proposición 1.2.2. *Sean* $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq q < \infty$. *Entonces*

$$\ell_q^{p_2} \subseteq \ell_q^{p_1}$$

y $\|x\|_{\ell_q^{p_1}} \leq \|x\|_{\ell_q^{p_2}}$ *para cada* $x \in \ell_q^{p_2}$.

Demostración. Reescribiendo (1.2)

$$|S_{m,N}|^{-\frac{1}{p_1}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq |S_{m,N}|^{-\frac{1}{p_2}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

luego, multiplicando a ambos lados por $|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}}$ y tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$ obtenemos

$$\|x\|_{\ell_q^{p_1}} \leq \|x\|_{\ell_q^{p_2}}$$

por lo que $\ell_q^{p_2} \subset \ell_q^{p_1}$. ■

Ahora veremos la inclusión de un espacio de Morrey discreto en otro al variar el parámetro q y dejar fija p.

Proposición 1.2.3. *Sean* $1 \leq p \leq q_2 \leq q_1 < \infty$. *Entonces*

$$\ell_{q_2}^{p} \subseteq \ell_{q_1}^{p}$$

y $\|x\|_{\ell_{q_1}^{p}} \leq \|x\|_{\ell_{q_2}^{p}}$ *para cada* $x \in \ell_{q_2}^{p}$.

Demostración. Sea $x \in \ell_{q_2}^p$. Para toda $m \in \mathbb{Z}$ y toda $N \in \mathbb{N}_0$, como $q_2 \leq q_1$ entonces

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q_1}} = (2N+1)^{\frac{1}{q_1}} \leq (2N+1)^{\frac{1}{q_2}} = |S_{m,N}|^{\frac{1}{q_2}}$$

y por tanto

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

y tomando supremos sobre $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$ obtenemos

$$\|x\|_{\ell_{q_1}^p} \leq \|x\|_{\ell_{q_2}^p}$$

lo cual completa la prueba.

■

Por último, podemos variar ambos parámetros y obtener la siguiente relación.

Proposición 1.2.4. *Sean* $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq q_2 \leq q_1 < \infty$. *Entonces*

$$\ell_{q_2}^{p_2} \subseteq \ell_{q_1}^{p_1}$$

y $\|x\|_{\ell_{q_1}^{p_1}} \leq \|x\|_{\ell_{q_2}^{p_2}}$ *para cada* $x \in \ell_{q_2}^{p_2}$.

Demostración. De las Proposiciones 1.2.2 y 1.2.3 se sigue que

$$\ell_{q_2}^{p_2} \subseteq \ell_{q_2}^{p_1} \subseteq \ell_{q_1}^{p_1},$$

y que

$$\|x\|_{\ell_{q_1}^{p_1}} \leq \|x\|_{\ell_{q_2}^{p_1}} \leq \|x\|_{\ell_{q_2}^{p_2}}.$$

■

1.3. ℓ^p_q como subespacio de $\mathcal{M}^p_q$

Recordemos que los espacios de Morrey discretos fueron introducidos en [11]. Este artículo fue presentado a modo de charla en la conferencia *Function Spaces XII* en Cracovia (julio de 2018). Ahí, gracias a la pregunta del profesor Y. Sawano, se observó que la propiedad de espacio de Banach de los espacios de Morrey discretos se deriva del hecho de que estos espacios son subespacios cerrados de los espacios de Morrey clásicos.

En esta sección, veremos la completitud de los espacios de Morrey discretos demostrando que son subespacios cerrados de los espacios de Morrey clásicos.

Definición 1.3.1. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$. El* ***espacio de Morrey*** *en la recta real, denotado por $\mathcal{M}^p_q = \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R})$, se define como el conjunto de funciones $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ tales que $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} < \infty$, donde*

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} := \sup_{a\in\mathbb{R}, r>0} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para poder mostrar lo deseado, necesitamos ver a los elementos de ℓ^p_q como elementos de $\mathcal{M}^p_q$, para ello haremos uso de la siguiente identificación.

Observación 1.3.2. *Cualquier sucesión $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ puede ser naturalmente identificada con una función $\bar{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\bar{x}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \chi_{[k,k+1)}(t)$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.3.3. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$. Entonces ℓ^p_q puede ser considerado como un subespacio cerrado de $\mathcal{M}^p_q$. Más aún, existen constantes $B, C > 0$ tal que para cada $x \in \ell^p_q$,*

$$B\|x\|_{\ell^p_q} \leq \|\bar{x}\|_{\mathcal{M}^p_q} \leq C\|x\|_{\ell^p_q}.$$

Demostración. Sea $x \in \ell_q^p$. Queremos demostrar que $\|\bar{x}\|_{\mathcal{M}_q^p} < \infty$. Para esto, tomemos $a \in \mathbb{R}$, $r \in (0,1)$ y consideremos los siguientes cinco casos mutuamente disjuntos.

Caso 1: $a \in \mathbb{Z}$.
Entonces

$$
\begin{aligned}
(2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |\bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} &= (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^p \chi_{[k,k+1)}(t) \right] dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|x_{a-1}|^p r + |x_a|^p r \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} r^{\frac{1}{p}} \left(|x_{a-1}|^p + |x_a|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} (2r)^{\frac{1}{p}} \left(|x_{a-1}|^p + |x_a|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (2r)^{\frac{1}{q}} \left(|x_{a-1}|^p + |x_a|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|x_{a-1}|^p + |x_a|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} (2 \cdot 1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-1}^{a+1} |\bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Caso 2: $a \notin \mathbb{Z}$, $r > a - \lfloor a \rfloor$ y $r > \lceil a \rceil - a$.

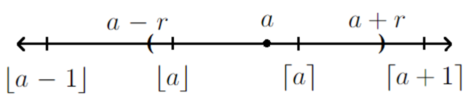

Figura 1.1: Caso 2

Entonces $r > \frac{1}{2}$ y así $(2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq 1$. Más aún, también tenemos $\lfloor a-r \rfloor = \lfloor a-1 \rfloor$ y $\lfloor a+r \rfloor = \lfloor a+1 \rfloor$.
Así, como $\bar{x}$ es una función escalonada, tenemos

$$
\begin{aligned}
&(2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |\bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad = (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[|x_{\lfloor a-r \rfloor}|^p (\lfloor a \rfloor - (a-r)) + |x_{\lfloor a \rfloor}|^p + |x_{\lfloor a+r \rfloor}|^p (a + r - \lceil a \rceil) \right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$\leq \left[|x_{\lfloor a-r\rfloor}|^p(\lfloor a\rfloor-(a-1))+|x_{\lfloor a\rfloor}|^p+|x_{\lfloor a+r\rfloor}|^p(a+1-\lceil a\rceil)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[|x_{\lfloor a-1\rfloor}|^p(\lfloor a\rfloor-(a-1))+|x_{\lfloor a\rfloor}|^p+|x_{\lfloor a+1\rfloor}|^p(a+1-\lceil a\rceil)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2^{\frac{1}{p}}(2\cdot 1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{a-1}^{a+1}|\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Caso 3: $a \notin \mathbb{Z}$, $r \leq a - \lfloor a\rfloor$ y $r \leq \lceil a\rceil - a$.

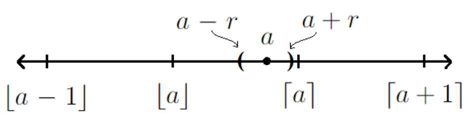

Figura 1.2: Caso 3

Entonces

$$(2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{a-r}^{a+r}|\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}|x_{\lfloor a\rfloor}|(2r)^{\frac{1}{p}} \;=\; (2r)^{\frac{1}{q}}|x_{\lfloor a\rfloor}| \;\leq\; 2^{\frac{1}{q}}|x_{\lfloor a\rfloor}| \;=\; 2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}|x_{\lfloor a\rfloor}|$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[|x_{\lfloor a-1\rfloor}|^p(\lfloor a\rfloor-(a-1))+|x_{\lfloor a\rfloor}|^p+|x_{\lfloor a+1\rfloor}|^p(a+1-\lceil a\rceil)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2^{\frac{1}{p}}(2\cdot 1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{a-1}^{a+1}|\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Caso 4: $a \notin \mathbb{Z}$ y $a - \lfloor a\rfloor < r \leq \lceil a\rceil - a$.

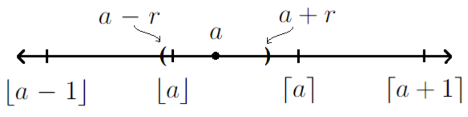

Figura 1.3: Caso 4

Notemos que $\lfloor a-r\rfloor = \lfloor a-1\rfloor$. Entonces

$$
\begin{aligned}
&(2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{a-r}^{a+r}|\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad = (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[|x_{\lfloor a-r\rfloor}|^p(\lfloor a\rfloor-(a-r))+|x_{\lfloor a\rfloor}|^p(a+r-\lfloor a\rfloor)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad = (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[|x_{\lfloor a-1\rfloor}|^p(\lfloor a\rfloor-(a-r))+|x_{\lfloor a\rfloor}|^p(a+r-\lfloor a\rfloor)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad \le (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[2r\,\text{máx}\left\{|x_{\lfloor a-1\rfloor}|^p,|x_{\lfloor a\rfloor}|^p\right\}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad = (2r)^{\frac{1}{q}}\left[\text{máx}\left\{|x_{\lfloor a-1\rfloor}|^p,|x_{\lfloor a\rfloor}|^p\right\}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad \le 2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\,\text{máx}\left\{|x_{\lfloor a-1\rfloor}|,|x_{\lfloor a\rfloor}|\right\}.
\end{aligned}
$$

Si $\text{máx}\left\{|x_{\lfloor a-1\rfloor}|,|x_{\lfloor a\rfloor}|\right\}=|x_{\lfloor a\rfloor}|$, entonces

$$
\begin{aligned}
&2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\,\text{máx}\left\{|x_{\lfloor a-1\rfloor}|,|x_{\lfloor a\rfloor}|\right\}=2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}|x_{\lfloor a\rfloor}|\\
&\qquad \le 2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[|x_{\lfloor a-1\rfloor}|^p(\lfloor a\rfloor-(a-1))+|x_{\lfloor a\rfloor}|^p+|x_{\lfloor a+1\rfloor}|^p(a+1-\lceil a\rceil)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad = 2^{\frac{1}{p}}(2\cdot 1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{a-1}^{a+1}|\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado si $\text{máx}\left\{|x_{\lfloor a-1\rfloor}|,|x_{\lfloor a\rfloor}|\right\}=|x_{\lfloor a-1\rfloor}|$, entonces

$$
\begin{aligned}
&2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\,\text{máx}\left\{|x_{\lfloor a-1\rfloor}|,|x_{\lfloor a\rfloor}|\right\}=2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}|x_{\lfloor a-1\rfloor}|\\
&\qquad \le 2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[|x_{\lfloor a-2\rfloor}|^p(\lfloor a-1\rfloor-(a-2))+|x_{\lfloor a-1\rfloor}|^p+|x_{\lfloor a\rfloor}|^p(a-\lceil a-1\rceil)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad = 2^{\frac{1}{p}}(2\cdot 1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{(a-1)-1}^{(a-1)+1}|\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Caso 5: $a\notin\mathbb{Z}$ y $\lceil a\rceil-a<r\le a-\lfloor a\rfloor$.

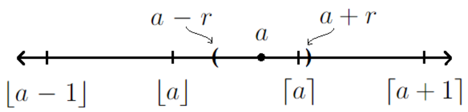

FIGURA 1.4: Caso 5

Este caso se desarrolla bajo un proceso similar al caso 4. Luego, de los cinco casos podemos concluir que

$$\|\bar{x}\|_{\mathcal{M}_q^p} \leq C \sup_{a\in\mathbb{R}, r\geq 1} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Además si $u \geq 1$, como $\frac{1}{q}-\frac{1}{p} \leq 0$ y $2u = u+u \geq u+1$ entonces $(2u)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq (u+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$, y así

$$(2u)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(2(u+1))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

Entonces para $a \in \mathbb{R}$ y $r \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}(2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq (2\lfloor r\rfloor)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-\lceil r\rceil}^{a+\lceil r\rceil} |\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(2\lceil r\rceil)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-\lceil r\rceil}^{a+\lceil r\rceil} |\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Así

$$\|\bar{x}\|_{\mathcal{M}_q^p} \leq C \sup_{a\in\mathbb{R}, r\in\mathbb{N}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora, sea $a \notin \mathbb{Z}$ y fijemos $r \in \mathbb{N}$. Entonces $\lfloor a\pm r\rfloor = \lfloor a\rfloor \pm r$ y $\lceil a\pm r\rceil = \lceil a\rceil \pm r$. Así,

$$\begin{aligned}&(2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |\bar{x}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad= (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=\lceil a-r\rceil}^{\lfloor a+r-1\rfloor} |x_i|^p + |x_{\lfloor a-r\rfloor}|^p(\lceil a-r\rceil-(a-r)) + |x_{\lfloor a+r\rfloor}|^p(a+r-\lfloor a+r\rfloor)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad= (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=\lceil a\rceil-r}^{\lfloor a\rfloor+r-1} |x_i|^p + |x_{\lfloor a\rfloor-r}|^p(\lceil a\rceil-a) + |x_{\lfloor a\rfloor+r}|^p(a-\lfloor a\rfloor)\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Definamos la función continua $g : [\lfloor a \rfloor, \lceil a \rceil] \to \mathbb{R}$ por

$$g(u) = (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=\lceil a \rceil - r}^{\lfloor a \rfloor + r - 1} |x_i|^p + |x_{\lfloor a \rfloor - r}|^p(\lceil a \rceil - u) + |x_{\lfloor a \rfloor + r}|^p(u - \lfloor a \rfloor) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observemos que g es monótona en $[\lfloor a \rfloor, \lceil a \rceil]$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
&(2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |\bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \leq \text{máx} \left\{ (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{\lfloor a \rfloor - r}^{\lfloor a \rfloor + r} |\bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{\lceil a \rceil - r}^{\lceil a \rceil + r} |\bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\bar{x}\|_{\mathcal{M}_q^p} \leq C \sup_{a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |\bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando (1.3) se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}\|_{\mathcal{M}_q^p} &\leq C \sup_{a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |\bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \sup_{a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{a,r} \setminus \{a+r\}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} C \left[\sup_{a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_0} (2r+2)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{a,r}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} C \left[\sup_{a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_0} (2r+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{a,r}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&= 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} C \|x\|_{\ell_q^p} < \infty.
\end{aligned}$$

Así, ℓ_q^p puede ser considerado un subconjunto de $\mathcal{M}_q^p$.
Para ver que es subconjunto cerrado, basta observar que toda sucesión de Cauchy en ℓ_q^p será una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}_q^p$ bajo esta identificación, por lo que al ser ℓ_q^p completo, visto como subconjunto de $\mathcal{M}_q^p$ también lo será.

Para el último enunciado de la prueba, fijemos $R_{m,N} = S_{m,N} \setminus \{m+N\}$ y observemos que

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0} (2N+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_m| \vee \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} (2N+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in R_{m,N}} |x_k|^p + |x_{m+N}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\bar{x}\|_{\mathcal{M}_q^p} \vee \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} (2N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{k\in R_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |x_{m+N}| \right)$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\bar{x}\|_{\mathcal{M}_q^p} \vee 2 \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} (2N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \text{máx} \left\{ \left(\sum_{k\in R_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, |x_{m+N}| \right\}.$$

Además

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} (2N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \text{máx} \left\{ \left(\sum_{k\in R_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, |x_{m+N}| \right\}$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} \text{máx} \left\{ (2N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in R_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, (4N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in R_{m,2N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

y

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} \text{máx} \left\{ (2N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in R_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, (4N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in R_{m,2N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$$\leq \text{máx} \left\{ \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} (2N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in R_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} (4N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in R_{m,2N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} (2N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in R_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} (2N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{m-N}^{m+N} |\bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{a\in\mathbb{R}, r>0} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{a-r}^{a+r} |\bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\bar{x}\|_{\mathcal{M}^p_q}.
\end{aligned}
$$

■

Como una consecuencia inmediata de este teorema tenemos la siguiente observación.

Observación 1.3.4. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces ℓ^p puede ser considerado un subespacio cerrado de L^p. Más aún, existen constantes $B, C > 0$ tales que para cada $x \in \ell^p$ se tiene*

$$B\|x\|_{\ell^p} \leq \|\bar{x}\|_{L^p} \leq C\|x\|_{\ell^p}.$$

Capítulo 2

Acotamiento y compacidad de operadores en ℓ_q^p

Parte del estudio de espacios normados es analizar el comportamiento de operadores actuando sobre ellos. En este capítulo analizaremos las propiedades de las versiones discretas de algunos operadores clásicos actuando sobre los espacios de Morrey discretos ℓ_q^p. Las propiedades que serán de nuestro interés serán la de acotamiento y compacidad.

Comenzaremos analizando el acotamiento de los operadores de multiplicación y convolución, para posteriormente ver la compacidad de su composición y el conmutador de estos operadores. Estos resultados fueron demostrados en [13].

Posteriormente analizaremos el acotamiento del operador maximal de Hardy-Littlewood en su versión discreta haciendo uso de la versión discreta de la desigualdad de Fefferman-Stein. Luego, como consecuencia de esto tendremos el acotamiento de algunos potenciales de Riesz en espacios de Morrey discretos. Esto fue demostrado en [12].

2.1. Operadores multiplicación y convolución

Comenzaremos demostrando que el operador multiplicación es acotado.

Proposición 2.1.1. *Sea $z \in \ell^\infty$ y $x \in \ell_q^p$ con $1 \leq p \leq q < \infty$. Entones el* ***operador multiplicación por*** **z** *definido por*

$$M_z(x) := xz = (x_k z_k)_{k\in\mathbb{Z}},$$

es un operador acotado de ℓ_q^p en sí mismo.

Demostración. Sea $x \in \ell_q^p$ y notemos que para cada $m \in \mathbb{Z}$ y cada $N \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_{\ell_q^p} |S_{m,N}|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

de aquí que

$$\left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k\in S_{m,N}} \|z\|_{\ell^\infty}^p |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|z\|_{\ell^\infty} \|x\|_{\ell_q^p} |S_{m,N}|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Por lo tanto $M_z(x) \in \ell_q^p$ y

$$\|M_z(x)\|_{\ell_q^p} \leq \|z\|_{\ell^\infty} \|x\|_{\ell_q^p}.$$

■

Veamos que el operador de convolución también es acotado.

Proposición 2.1.2. *Sea $y \in \ell^1$ y $x \in \ell_q^p$ con $1 \leq p \leq q < \infty$. Entonces el* ***operador de convolución con*** **y** *definido por*

$$C_y(x)(k) := x * y(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_{k-n},$$

es un operador acotado de ℓ_q^p en sí mismo.

Demostración. Notemos que para cualesquiera $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$, por la desigualdad de Minkowski para integrales se tiene que

$$\left(\sum_{k=m-N}^{m+N} |C_y(x)(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=m-N}^{m+N} \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j \; y_{k-j}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{k=m-N}^{m+N} \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} x_{k-l}\; y_l \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{s=m-N-l}^{m+N-l} |x_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} |y_l|$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{s=(m-l)-N}^{(m-l)+N} |x_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} |y_l|$$

$$\leq \|y\|_{\ell^1}\; \|x\|_{\ell^p_q}\; (2N+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

de aquí que

$$\|C_y(x)\|_{\ell^p_q} \leq \|y\|_{\ell^1} \|x\|_{\ell^p_q}$$

como queríamos probar. ∎

2.2. Composición y conmutador de M_z y C_y

En esta sección veremos la compacidad de la composición de M_z con C_y y el conmutador de ambos. Para demostrar la compacidad de la composición haremos uso de los siguientes dos lemas. El primero es una caracterización de cuándo un espacio métrico es totalmente acotado el cual fue demostrado en [14] y el segundo es un resultado de precompacidad para familias en ℓ^p_q, cuya demostración hará uso del primero.

Lema 2.2.1. *Sea X un espacio métrico. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existen $\delta > 0$, un espacio métrico W y un mapeo $\phi : X \to W$ donde $\phi(X)$ es totalmente acotado*[1]*. Además, si para $x, y \in X$ tales que $d_W(\phi(x), \phi(y)) < \delta$, se tiene que $d_X(x, y) < \varepsilon$. Entonces X es totalmente acotado.*

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ elegimos $\delta > 0$, un espacio métrico W y un mapeo ϕ como en las hipótesis del lema.
Como $\phi(X)$ es totalmente acotado, existe una δ-cubierta finita $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de $\phi(X)$. Luego, como $d_W(\phi(x), \phi(y)) < \delta$ implica que $d_X(x, y) < \varepsilon$ para cualesquiera $\phi(x), \phi(y) \in V_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces $\phi^{-1}(V_i)$ tiene diámetro a lo más ε para cada $i =$

[1] La definición de totalmente acotado puede encontrarse en [23] página 154.

$1, \ldots, n$.
Así $\{\phi^{-1}(V_1), \ldots, \phi^{-1}(V_n)\}$ es una ε-cubierta finita de X.
Por lo tanto, X es totalmente acotado. ■

Lema 2.2.2. *Sea $\mathcal{F} = \{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ un subconjunto de ℓ^p_q. Supongamos que las siguientes condiciones se cumplen:*

(a) Existe $C > 0$ tal que $\|x_\alpha\|_{\ell^p_q} \leq C$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

(b) Dado $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{|S_{m,N}|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \left(\sum_{\substack{k \in S_{m,N} \\ |k|>K}} |x_\alpha(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, cada $N \in \mathbb{N}_0$ y cada $m \in \mathbb{Z}$.

Entonces el conjunto $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

Demostración. Definamos $\phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^{2K+3}$ por

$$\phi(x_\alpha) = (x_\alpha(-K-1), \ldots, x_\alpha(K+1)).$$

Por la condición (a) tenemos que existe una constante $C_1 = C_1(K, p, q)$ tal que

$$\|\phi(x_\alpha)\|_{(\mathbb{R}^{2K+3}, \|\cdot\|_2)} \sim \left(\sum_{k=-K-1}^{K+1} |x_\alpha(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1$$

para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.
Como en espacios de dimensión finita es equivalente ser acotado y totalmente acotado, entonces concluimos que $\phi(\mathcal{F})$ es un subconjunto totalmente acotado de $\mathbb{R}^{2K+3}$.
Ahora, dado $\varepsilon > 0$, si $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ y

$$\|\phi(x_\alpha) - \phi(x_\beta)\|_{(\mathbb{R}^{2K+3}, \|\cdot\|_p)} < \varepsilon \tag{2.1}$$

entonces de la condición (b) y de (2.1) tendremos que para cualquier $N \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_\alpha(k) - x_\beta(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\substack{k \in S_{m,N} \\ |k| \leq K}} |x_\alpha(k) - x_\beta(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\substack{k \in S_{m,N} \\ |k| > K}} |x_\alpha(k) - x_\beta(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \varepsilon + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Así, $\|x_\alpha - x_\beta\|_{\ell^p_q} < 3\varepsilon$. Luego por el Lema 2.2.1, $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

■

Teorema 2.2.3. *Sean $y \in \ell^1$ y $z \in c_0$ donde c_0 es el espacio de sucesiones convergentes a cero. Entonces el operador $M_z C_y$ es compacto en ℓ^p_q.*

Demostración. Supongamos que $z \in c_0$ y sea B cualquier conjunto acotado de ℓ^p_q. Así, existe $M > 0$ tal que para cada $x \in B$, $\|x\|_{\ell^p_q} \leq M$.
Necesitamos demostrar que $\{M_z C_y(x) : x \in B\}$ es un subconjunto relativamente compacto de ℓ^p_q, es decir, que su cerradura es compacta. Para esto será suficiente probar que ambas condiciones del lema 2.2.2 se satisfacen, ya que si un conjunto es totalmente acotado entonces su cerradura es totalmente acotada y por tanto compacta.
Sean $x \in B$, $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$. Por la desigualdad de Minkowski para integrales tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k \in S_{m,N}} |M_z C_y(x)(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k \in S_{m,N}} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j \; y_{k-j} \; z_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|y\|_{\ell^1} \|x\|_{\ell^p_q} (2N+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|z\|_{\ell^\infty}
\end{aligned}$$

y esto implica

$$\|M_z C_y(x)\|_{\ell^p_q} \leq M \|z\|_{\ell^\infty} \|y\|_{\ell^1}$$

uniformemente en $x \in B$. Por lo tanto, la condición (a) del lema 2.2.2 se satisface. Ahora, sea $\varepsilon > 0$. Sea $K \in \mathbb{N}$ fijo cuyo tamaño se elegirá apropiadamente después. Entonces para cualesquiera $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$ tendremos que para toda $x \in B$

$$\left(\sum_{\substack{k \in S_{m,N} \\ |k|>K}} |M_z C_y(x)(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|y\|_{\ell^1} \|x\|_{\ell^p_q} (2N+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sup_{|k|>K} |z_k|$$
$$< M\varepsilon \|y\|_{\ell^1} (2N+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

siempre que se elija K suficientemente grande. Así la condición (b) del lema 2.2.2 se cumple, lo cual completa la prueba.

■

Para probar la compacidad del conmutador de M_z y C_y necesitaremos de un lema adicional.

Lema 2.2.4. *Para $z \in c_0$ y $y \in \ell^1$ definimos la sucesión*

$$\xi(n) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |z_n - z_{n-k}||y_k|$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $\xi \in c_0$.

Demostración. Claramente $\xi \in \ell^\infty$. Dado $\varepsilon > 0$ seleccionamos K_1 suficientemente grande de modo que

$$\sum_{|k|>K_1} |y_k| < \varepsilon.$$

Ahora, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\xi(n) = \sum_{|k| \leq K_1} |z_n - z_{n-k}||y_k| + \sum_{|k|>K_1} |z_n - z_{n-k}||y_k|$$
$$\leq \sum_{|k| \leq K_1} |z_n - z_{n-k}||y_k| + 2\varepsilon \|z\|_{\ell^\infty}.$$

Como $z \in c_0$, podemos elegir $K \gg K_1$ tal que para $|n| > K$

$$\sum_{|k| \leq K_1} |z_n - z_{n-k}||y_k| \leq \varepsilon \|y\|_{\ell^1}.$$

Finalmente, por las estimaciones previas obtenemos

$$0 \leq \xi(n) < \varepsilon \|y\|_{\ell^1} + 2\varepsilon \|z\|_{\ell^\infty}$$

para $|n| > K$, esto es, $\xi \in c_0$.

■

Observación 2.2.5. *Notemos que la demostración anterior funciona incluso para $z \in c$, el espacio de las sucesiones convergentes.*

Teorema 2.2.6. *Sean $z \in c_0$, $y \in \ell^1$ y $1 < p \leq q < \infty$. Entonces el **operador conmutador** $[\mathbf{M_z}, \mathbf{C_y}]$ es compacto en ℓ^p_q.*

Demostración. Por el lema 2.2.4, dado $\varepsilon > 0$ existe K suficientemente grande tal que

$$\sup_{|n|>K} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |z_n - z_{n-k}||y_k| < \varepsilon.$$

Recordemos que el conmutador de los operadores M_z y C_y está definido por

$$[M_z, C_y] := M_z C_y - C_y M_z.$$

Así dada una sucesión $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, para $n \in \mathbb{Z}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|[M_z, C_y](x)(n)| &= |M_z C_y(x)(n) - C_y M_z(x)(n)| \\
&= \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k}\ y_k\ z_n - \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k}\ y_k\ z_{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k}\ y_k\ (z_n - z_{n-k}) \right| \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_{n-k}|\ |y_k|\ |z_n - z_{n-k}| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_{n-k}|\ |y_k|^{\frac{1}{p}}\ |y_k|^{\frac{1}{p'}}\ |z_n - z_{n-k}|^{\frac{1}{p}}\ |z_n - z_{n-k}|^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_{n-k}|^p\ |y_k|^{\frac{p}{p}}\ |z_n - z_{n-k}|^{\frac{p}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |y_k|^{\frac{p'}{p'}}\ |z_n - z_{n-k}|^{\frac{p'}{p'}} \right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}}\|z\|_{\ell^\infty}^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x_{n-k}|^p\ |y_k|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|y_k|\ |z_n-z_{n-k}|\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.2}$$

Si T_K denota el operador de truncamiento, es decir

$$x\mapsto(\ldots,0,x_{-K},\ldots,x_K,0,\ldots)$$

e I denota el operador identidad, usando (2.2) tendremos que para $|n|>K$

$$|(I-T_K)[M_z,C_y](x)(n)|\leq(2\|z\|_{\ell^\infty})^{\frac{1}{p}}\sup_{|n|>K}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|z_n-z_{n-k}||y_k|\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x_{n-k}|^p|y_k|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(2\varepsilon^{\frac{p}{p'}}\|z\|_{\ell^\infty}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x_{n-k}|^p|y_k|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora, tomando en consideración que $(I-T_K)(\xi)(n)=0$ para $|n|\leq K$, para cualquier sucesión ξ, entonces para $x\in\ell^p_q$, para cada $m\in\mathbb{Z}$ y $N\in\mathbb{N}_0$ tenemos

$$\left(\sum_{n=m-N}^{m+N}|(I-T_K)[M_z,C_y](x)(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(2\varepsilon^{\frac{p}{p'}}\|z\|_{\ell^\infty}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=m-N}^{m+N}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x_{n-k}|^p|y_k|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(2\varepsilon^{\frac{p}{p'}}\|z\|_{\ell^\infty}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|y_k|\left(\sum_{j=m-N-k}^{m+N-k}|x_j|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(2\varepsilon^{\frac{p}{p'}}\|z\|_{\ell^\infty}\right)^{\frac{1}{p}}\|x\|_{\ell^p_q}\ \|y\|_{\ell^1}^{\frac{1}{p}}\ (2N+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

lo cual implica que

$$\|(I-T_K)[M_z,C_y]\|_{\ell^p_q\to\ell^p_q}\leq\left(2\varepsilon^{\frac{p}{p'}}\|z\|_{\ell^\infty}\|y\|_{\ell^1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

o equivalentemente

$$\|[M_z,C_y]-T_K[M_z,C_y]\|_{\ell^p_q\to\ell^p_q}\leq\left(2\varepsilon^{\frac{p}{p'}}\|z\|_{\ell^\infty}\|y\|_{\ell^1}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

Como el operador $T_K[M_z,C_y]$ es compacto al ser de rango finito, entonces (2.3) implica que $[M_z,C_y]$ es compacto.

■

2.3. Operador Maximal de Hardy-Littlewood

Hasta ahora hemos trabajado con espacios de Morrey discretos en dimensión uno, sin embargo, también podemos trabajar con espacios de Morrey discretos en dimensión finita arbitraria.
En esta sección estudiaremos el acotamiento del operador de Hardy-Littlewood en espacios de Morrey discretos en dimensión $d \geq 1$. Para ello retomaremos las definiciones de $S_{m,N}$ y de ℓ_q^p pero adaptadas a dimensiones superiores.

Definición 2.3.1. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$. El **espacio de Morrey discreto** $\ell_{\mathbf{q}}^{\mathbf{p}}(\mathbb{Z}^{\mathbf{d}})$ se define como el conjunto de todas las funciones $x : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ tales que*

$$\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} := \sup_{m \in \mathbb{Z}^d, N \in \mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

donde $S_{m,N} := \{k \in \mathbb{Z}^d \ : \ \|k-m\|_\infty \leq N\}$, con $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$, $N \in \mathbb{N}_0$ y cuya cardinalidad es $|S_{m,N}| = (2N+1)^d$.

A continuación tenemos un resultado análogo a la proposición 1.1.3, cuya demostración omitimos por ser totalmente similar.

Proposición 2.3.2. *Para $1 \leq p \leq q < \infty$, el mapeo $\|\cdot\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}$ define una norma en $\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$. Además $\left(\ell_q^p(\mathbb{Z}^d), \|\cdot\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}\right)$ es un espacio de Banach.*

Ahora, definamos el operador maximal de Hardy-Littlewood para espacios discretos y dos variantes de éste, las cuales serán de utilidad en demostraciones posteriores.

Definición 2.3.3. *Sean $x : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ (también puede escribirse $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$) y $m \in \mathbb{Z}^d$.*
*El **operador maximal de Hardy-Littlewood discreto** denotado por M está definido por*

$$Mx(m) := \sup_{N \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k \in S_{m,N}} |x(k)|.$$

*El **operador maximal de Hardy-Littlewood discreto par** denotado por $\hat{M}$ está definido por*

$$\hat{M}x(m) := \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{|R_{m,N}|} \sum_{k \in R_{m,N}} |x(k)|$$

donde $R_{m,N} := S_{m,N} \setminus \{(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : k_i = m_i + N$ *para algún* $1 \leq i \leq d\}$ *con* $m \in \mathbb{Z}^d$, $N \in \mathbb{N}$ *y cuya cardinalidad es* $|R_{m,n}| = (2N)^d$.

El ***operador maximal de Hardy-Littlewood discreto no centrado*** *denotado por* $\tilde{M}$ *está definido por*

$$\tilde{M}x(m) := \sup_{S \ni m} \frac{1}{|S|} \sum_{k \in S} |x(k)|$$

donde el supremo se toma sobre todos los conjuntos de la forma $S = S_{k,N}$ *para algún* $k \in \mathbb{Z}^d$ *y algún* $N \in \mathbb{N}_0$ *de modo que* $m \in S_{k,N}$.

A pesar de que pareciera que tenemos tres operadores de Hardy-Littlewood diferentes, en realidad estas tres versiones son equivalentes (como se demostrará en el siguiente lema), por lo que no tendremos problemas al tomar la versión que más nos convenga en cierto momento.
Recordemos que dos operadores $T_1, T_2 : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ son equivalentes si existen $C_1, C_2 > 0$ tales que para toda $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ y toda $k \in \mathbb{Z}^d$, se tiene $C_1 T_1 x(k) \leq T_2 x(k) \leq C_2 T_1 x(k)$.

Lema 2.3.4. *Los operadores* M, $\hat{M}$ *y* $\tilde{M}$ *son equivalentes por pares.*

Demostración. Primero veamos que M y $\hat{M}$ son equivalentes.
Sean $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ y $k \in \mathbb{Z}^d$. Notemos que si $N \geq 1$ entonces

$$(2N)^d \geq (N+1)^d = 2^{-d}(2(N+1))^d = 2^{-d}(2N+2)^d \geq 2^{-d}(2N+1)^d \tag{2.4}$$

por lo que

$$|R_{m,N}| \geq 2^{-d}|S_{m,N}|$$

para cualquier $m \in \mathbb{Z}^d$. De aquí que,

$$\frac{1}{|R_{m,N}|} \sum_{k \in R_{m,N}} |x(k)| \leq \frac{2^d}{|S_{m,N}|} \sum_{k \in R_{m,N}} |x(k)| \leq \frac{2^d}{|S_{m,N}|} \sum_{k \in S_{m,N}} |x(k)|,$$

por lo que tomando supremos sobre $N \in \mathbb{N}$

$$\hat{M}x(m) \leq 2^d \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k \in S_{m,N}} |x(k)| \leq 2^d \, Mx(m).$$

Ahora, para $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, $m \in \mathbb{Z}^d$ y $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}|x(k)| &\leq \frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in R_{m,N+1}}|x(k)|\\ &\leq \frac{1}{|R_{m,N}|}\sum_{k\in R_{m,N+1}}|x(k)|\\ &\leq \frac{2^d}{|R_{m,N+1}|}\sum_{k\in R_{m,N+1}}|x(k)|\end{aligned}$$

ya que, de (2.4) se tiene que $(2N)^d \geq 2^{-d}(2(N+1))^d$, lo cual implica que $(2N)^{-d} \leq 2^d(2(N+1))^{-d}$, es decir $|R_{m,N}|^{-1} \leq 2^d|R_{m,N+1}|^{-1}$.
Así, tomando supremos sobre $N \in \mathbb{N}_o$

$$Mx(m) \leq 2^d\hat{M}x(m).$$

Por lo tanto,

$$2^{-d}Mx(m) \leq \hat{M}x(m) \leq 2^d Mx(m) \tag{2.5}$$

Veamos que M y $\tilde{M}$ son equivalentes.
Sea $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Notemos que para cualquier $N \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}|x(k)| \leq \sup_{S\ni m}\frac{1}{|S|}\sum_{k\in S}|x(k)| = \tilde{M}x(m)$$

por lo que tomando supremo sobre $N \in \mathbb{N}_0$ obtenemos

$$Mx(m) \leq \tilde{M}x(m).$$

Por otro lado, sean $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ y $m \in \mathbb{Z}^d$. Tomamos $S = S_{k,N}$ para algún $k \in \mathbb{Z}^d$ y $N \in \mathbb{N}_0$ de modo que $m \in S$. Notemos que

$$\frac{1}{|S|}\sum_{l\in S}|x(l)| = \frac{1}{|S_{k,N}|}\sum_{l\in S_{k,N}}|x(l)| \leq \frac{1}{|S_{k,N}|}\sum_{l\in S_{m,2N}}|x(l)|.$$

Luego,

$$(2N+1)^d \geq 2^{-d}(2N+1)^d = 2^{-d}2^{-d}(2(2N+1))^d = 4^{-d}(2(2N)+2)^d \geq 4^{-d}(2(2N)+1)^d,$$

de aquí que

$$\frac{1}{|S_{k,N}|}\sum_{l\in S_{m,2N}}|x(l)|\leq\frac{4^d}{|S_{m,2N}|}\sum_{l\in S_{m,2N}}|x(l)|\leq 4^d Mx(m).$$

Así,

$$\frac{1}{|S|}\sum_{l\in S}|x(l)|\leq 4^d Mx(m)$$

para cualquier S de la forma $S_{k,N}$ tal que $m\in S$. De aquí se sigue que

$$\tilde{M}x(m)\leq 4^d Mx(m).$$

Por lo tanto

$$4^{-d}\tilde{M}x(m)\leq Mx(m)\leq\tilde{M}x(m). \tag{2.6}$$

Por último, para ver que $\hat{M}$ y $\tilde{M}$ son equivalentes, basta observar que de (2.5) y (2.6) se sigue que

$$\hat{M}x(m)\geq 2^{-d}Mx(m)\geq 2^{-d}4^{-d}\tilde{M}x(m)=8^{-d}\tilde{M}x(m)$$

y

$$\hat{M}x(m)\leq 2^d Mx(m)\leq 2^d\tilde{M}x(m)$$

es decir

$$8^{-d}\tilde{M}x(m)\leq\hat{M}x(m)\leq 2^d\tilde{M}x(m)$$

lo cual completa la prueba. ■

En 1987, Filippo Chiarenza y Michele Frasca demostraron el acotamiento de la función maximal de Hardy-Littlewood en espacios de Morrey clásicos [3]. Para esta demostración usaron una desigualdad demostrada por Charles Fefferman y Elias M. Stein en [6], la cual se conoce como *desigualdad de Fefferman-Stein* (ver apéndice B, teorema B.2).
Para demostrar el acotamiento del operador maximal de Hardy-Littlewood discreto en espacios de Morrey discretos, haremos uso de la versión discreta de la desigualdad de Fefferman-Stein, la cual fue enunciada y demostrada en [12].

Teorema 2.3.5. (Desigualdad de Fefferman-Stein discreta)
Sea $1<p<\infty$. Existe $K>0$ tal que para toda $x\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ y cada función no negativa $\phi\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$,

(a) $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (Mx(k))^p\,\phi(k) \le K \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |x(k)|^p M\phi(k)$,

(b) $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\hat{M}x(k))^p\phi(k) \le K \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |x(k)|^p \hat{M}\phi(k)$ *y*

(c) $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\tilde{M}x(k))^p\phi(k) \le K \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |x(k)|^p \tilde{M}\phi(k)$.

Demostración. Notemos que por el lema 2.3.4, basta con probar un inciso para tener los otros dos. Así que haremos la prueba de (b).
Para cada $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ definimos el cubo $d-$dimensional de volumen 1 por

$$c_k := \left\{(y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d : k_i \le y_i < k_i + 1 \text{ para toda } 1 \le i \le d\right\}.$$

Notemos que para cada $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ la función $\bar{a}$ definida por

$$\bar{a}(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a(k)\chi_{c_k}(t) \tag{2.7}$$

con $t \in \mathbb{R}^d$, es un elemento de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Además para $m \in \mathbb{Z}^d$ y $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k\in R_{m,N}} a(k) = \int_{Q_{m,N}} \bar{a}(t)dt \tag{2.8}$$

donde $Q_{m,N} = \left\{t \in \mathbb{R}^d : \|t - m\|_\infty \le N\right\}$. Por tanto tenemos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a(k) = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{a}(t)dt. \tag{2.9}$$

Sean $x, \phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ y supongamos que ϕ es positiva. Entonces $\bar{\phi}(t) \ge 0$ para toda $t \in \mathbb{R}^d$, luego por (2.7), (2.8) y (2.9) tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left(\hat{M}x(k)\right)^p \phi(k) &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left(\hat{M}x(k)\right)^p \phi(k)\chi_{c_k}(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left(\sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2N)^d} \sum_{i\in R_{k,N}} |x(i)|\right)^p \phi(k)\chi_{c_k}(t)dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{c_k} \left(\sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2N)^d} \int_{Q_{k,N}} |\bar{x}(s)|ds\right)^p \phi(k)dt.
\end{aligned}$$

Observemos que para cada $k \in \mathbb{Z}^d$ y toda $t \in c_k$ tenemos

$$\int_{Q_{k,N}} |\bar{x}(s)|\, ds \leq \int_{Q_{t,N+1}} |\bar{x}(s)|\, ds$$

pues $Q_{k,N} \subset Q_{t,N+1}$. Así

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{c_k} &\left(\sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2N)^d} \int_{Q_{k,N}} |\bar{x}(s)| ds \right)^p \phi(k) dt \\
&\leq 2^d \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{c_k} \left(\sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2(N+1))^d} \int_{Q_{t,N+1}} |\bar{x}(s)| ds \right)^p \phi(k) dt \\
&\leq 2^d \int_{\mathbb{R}^d} \left(\bar{M}\bar{x}(t)\right)^p \bar{\phi}(t) dt.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Fefferman-Stein (ver apéndice B, teorema B.2) existe $K > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\bar{M}\bar{x}(t)\right)^p \bar{\phi}(t) dt \leq K \int_{\mathbb{R}^d} |\bar{x}(t)|^p \bar{M}\bar{\phi}(t) dt.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left(\hat{M}x(k)\right)^p \phi(k) &\leq 2^d K \int_{\mathbb{R}^d} |\bar{x}(t)|^p \bar{M}\bar{\phi}(t) dt \\
&= 2^d K \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |x(k)|^p M(\bar{\phi}(t)) \chi_{c_k}(t) dt \\
&= 2^d K \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{c_k} |x(k)|^p \left(\sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^d} \int_{Q_{t,r}} \bar{\phi}(s) ds \right) dt. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Luego, sea $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ y $t = (t_1, \ldots, t_d) \in c_k$, de modo que $k_i = \lfloor t_i \rfloor$ para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$. Supongamos que $0 < r < \frac{1}{2}$ y sea

$$D = \{i \in \mathbb{Z}^d : Q_{t,r} \cap c_i \neq \emptyset\}.$$

Notemos que $D \neq \emptyset$, pues al menos $k \in D$. Es más

$$\frac{1}{(2r)^d} \int_{Q_{t,r}} \bar{\phi}(s) ds = \frac{1}{(2r)^d} \sum_{i\in D} \phi(i) \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_d$$

donde para cada $j \in \{1, \dots, d\}$ se tiene que $\varepsilon_j \leq 2r$. Así

$$\frac{1}{(2r)^d}\sum_{i\in D}\phi(i)\varepsilon_1\dots\varepsilon_d \;\leq\; \sum_{i\in D}\phi(i) \;\leq\; 4^d\frac{1}{(2\cdot 2)^d}\int_{Q_{k,2}}\bar{\phi}(s)ds.$$

También para $r \geq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{(2r)^d}\int_{Q_{k,r}}\bar{\phi}(s)ds \leq 5^d\frac{1}{(2\lceil r+1\rceil)^d}\int_{Q_{k,\lceil r+1\rceil}}\bar{\phi}(s)ds$$

pues

$$\begin{aligned}(2r)^d &\geq (r+\tfrac{1}{2})^d = 5^{-d}5^d(r+\tfrac{1}{2})^d \geq 5^{-d}4^d(r+\tfrac{1}{2})^d = 5^{-d}(4r+2)^d\\ &= 5^{-d}(2(2r+1))^d \geq 5^{-d}(2\lfloor 2r+1\rfloor)^d \geq 5^{-d}(2\lceil r+1\rceil)^d.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{c_k}|x(k)|^p\left(\sup_{r>0}\frac{1}{(2r)^d}\int_{Q_{t,r}}\bar{\phi}(s)ds\right)dt\\ &\quad\leq 5^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|x(k)|^p\left(\sup_{r>0}\frac{1}{(2\lceil r+1\rceil)^d}\int_{Q_{k,\lceil r+1\rceil}}\bar{\phi}(s)ds\right)\\ &\quad\leq 5^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|x(k)|^p\left(\sup_{N\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2N)^d}\sum_{i\in R_{k,N}}\phi(i)\right)\\ &\quad\leq 5^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|x(k)|^p\hat{M}\phi(k).\end{aligned}$$

De aquí y de (2.10) concluimos que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(\hat{M}x(k)\right)^p\phi(k) \leq (10)^d K\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|x(k)|^p\hat{M}\phi(k)$$

lo que completa la prueba. ■

Además de la desigualdad discreta de Fefferman-Stein, también haremos uso del siguiente lema.

Lema 2.3.6. *Para cualquier $x \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$ con $1 \leq p \leq q < \infty$, tenemos que $Mx \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ y $\|Mx\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)} \leq \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}$.*

Demostración. Sean $x \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$ y $m^* \in \mathbb{Z}^d$ fija. Entonces

$$Mx(m^*) = \sup_{N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{|S_{m^*,N}|} \sum_{k\in S_{m^*,N}} |x(k)| \leq \sup_{m\in\mathbb{Z}^d, N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)|.$$

Luego, bajo un proceso análogo al de la demostración del lema 1.2.1 tenemos que

$$\frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)| \leq \left(\frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Así

$$\begin{aligned}
\sup_{m\in\mathbb{Z}^d, N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)| &\leq \sup_{m\in\mathbb{Z}^d, N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{m\in\mathbb{Z}^d, N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}
\end{aligned}$$

lo que prueba el lema. ■

A continuación veremos el acotamiento del operador maximal de Hardy-Littlewood como operador de ℓ_q^p en sí mismo.

Teorema 2.3.7. *Sea $x \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$ con $1 \leq p \leq q < \infty$. Entonces $Mx \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$ y existe $C > 0$ tal que $\|Mx\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} \leq C\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}$ para toda $x \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$.*

Demostración. Sean $m \in \mathbb{Z}^d$ y $N \in \mathbb{N}$. Por el inciso (a) de la desigualdad de Fefferman-Stein discreta existe $K > 0$ tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (Mx(k))^p \chi_{S_{m,N}}(k) \leq K \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |x(k)|^p M\chi_{S_{m,N}}(k)$$

de aquí que

$$\sum_{k\in S_{m,N}} (Mx(k))^p \leq K\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|x(k)|^p M\chi_{S_{m,N}}(k)$$

$$= K\sum_{k\in S_{m,N}}|x(k)|^p M\chi_{S_{m,N}}(k) + K\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in S_{m,2^{j+1}N}\setminus S_{m,2^jN}}|x(k)|^p M\chi_{S_{m,N}}(k).$$

Luego, notemos que para cada $k\in\mathbb{Z}^d$ tenemos

$$M\chi_{S_{m,N}}(k) = \sup_{t\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{(2t+1)^d}\sum_{i\in S_{k,t}}\chi_{S_{m,N}}(i) = \sup_{t\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{(2t+1)^d}|S_{k,t}\cap S_{m,N}|.$$

Sea $j\in\mathbb{N}$ y supongamos que $k\in S_{m,2^{j+1}N}\setminus S_{m,2^jN}$, entonces $2^jN < \|k-m\|_\infty < 2^{j+1}N$ con $j\geq 1$, de aquí que $0 < 2^jN - N < \|k-m\|_\infty - N$ y por tanto $\|k-m\|_\infty - N > 0$.

Ahora observemos que

$$S_{k,t}\cap S_{m,N}\neq\emptyset \Leftrightarrow \|k-m\|_\infty - N\leq t \tag{2.11}$$

pues si $S_{k,t}\cap S_{m,N}\neq\emptyset$ entonces existe al menos una $l\in S_{k,t}\cap S_{m,N}$. Para esta l se tiene que $\|l-m\|_\infty\leq N$ y $\|l-k\|_\infty\leq t$, luego por la desigualdad del triángulo $\|k-m\|_\infty\leq\|m-l\|_\infty+\|l-k\|_\infty\leq N+t$, es decir, $\|k-m\|_\infty - N\leq t$. Por otro lado si $\|k-m\|_\infty - N\leq t$, entonces $|k_i-m_i|-N\leq t$ para toda $i\in\{1,\ldots,d\}$. Suponiendo que $k_i>m_i$ tendríamos que $k_i-(m_i-N)\leq t$. Similarmente, si suponemos $k_i<m_i$, entonces $(m_i-N)-k_i\leq t$. Definamos $l_i:=m_i-N$ si $k_i<m_i$ y $l_i:=m_i+N$ si $k_i>m_i$. Es claro que $l=(l_1,\ldots,l_d)\in S_{m,N}$. También es claro que $|l_i-k_i|\leq t$ para toda $i\in\{1,\ldots,d\}$. Así $l\in S_{k,t}$. Por lo que $S_{k,t}\cap S_{m,N}\neq\emptyset$.

También observemos que claramente

$$\|k-m\|_\infty + N\leq t \Rightarrow S_{k,t}\cap S_{m,N} = S_{m,N}. \tag{2.12}$$

De las observaciones (2.11) y (2.12) se sigue que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{(2t+1)^d}|S_{k,t}\cap S_{m,N}| &= \sup_{\|k-m\|_\infty-N\leq t\leq\|k-m\|_\infty+N}\frac{1}{(2t+1)^d}|S_{k,t}\cap S_{m,N}|\\ &\leq \frac{(2N+1)^d}{(2(\|k-m\|_\infty-N)+1)^d}\\ &\leq \frac{(2N+N)^d}{(2(\|k-m\|_\infty-N))^d}\\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^d\frac{N^d}{(\|k-m\|_\infty-N)^d}.\end{aligned}$$

Notemos que para cada $k\in\mathbb{Z}^d$ tenemos $M\chi_{S_{m,N}}(k)\leq M\mathbf{1}(k)=1$ donde $\mathbf{1}$ denota la función constante 1 en $\mathbb{Z}^d$.
Así

$$\begin{aligned}&K\sum_{k\in S_{m,2N}}|x(k)|^pM\chi_{S_{m,N}}(k)+K\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in S_{m,2^{j+1}N}\setminus S_{m,2^jN}}|x(k)|^pM\chi_{S_{m,N}}(k)\\ &\leq K\sum_{k\in S_{m,2N}}|x(k)|^p+(\tfrac{3}{2})^dK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in S_{m,2^{j+1}N}\setminus S_{m,2^jN}}|x(k)|^p\frac{N^d}{(\|k-m\|_\infty-N)^d}.\end{aligned}$$

Ahora, si $k\in S_{m,2^{j+1}N}\setminus S_{m,2^jN}$ entonces $\|k-m\|_\infty-N>2^jN-N\geq 2^{j-1}N$. Entonces

$$\begin{aligned}K\sum_{k\in S_{m,2N}}|x(k)|^p&+(\tfrac{3}{2})^dK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in S_{m,2^{j+1}N}\setminus S_{m,2^jN}}|x(k)|^p\frac{N^d}{(\|k-m\|_\infty-N)^d}\\ &\leq K\sum_{k\in S_{m,2N}}|x(k)|^p+(\tfrac{3}{2})^dK\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in S_{m,2^{j+1}N}}|x(k)|^p\frac{N^d}{(2^{j-1}N)^d}\\ &= K\sum_{k\in S_{m,2N}}|x(k)|^p+(\tfrac{3}{2})^dK\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2^d)^{j-1}}\sum_{k\in S_{m,2^{j+1}N}}|x(k)|^p.\end{aligned}$$

Luego, observemos que para cada $t\in\mathbb{Z}^d$ y toda $n\in\mathbb{N}_0$ tenemos

$$\sum_{k\in S_{t,n}} |x(k)|^p \le \|x\|^p_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}(2n+1)^{d-\frac{dp}{q}}.$$

Así

$$K\sum_{k\in S_{m,2N}} |x(k)|^p + (\tfrac{3}{2})^d K\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2^d)^{j-1}}\sum_{k\in S_{m,2^{j+1}N}}|x(k)|^p$$

$$\le K\|x\|^p_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}(4N+1)^{d-\frac{dp}{q}} + (\tfrac{3}{2})^d K\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2^d)^{j-1}}\|x\|^p_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}(2^{j+2}N+1)^{d-\frac{dp}{q}}$$

$$\le 2^{d-\frac{dp}{q}}K\|x\|^p_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}(2N+1)^{d-\frac{dp}{q}} + (\tfrac{3}{2})^d K\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2^{j+1})^{d-\frac{dp}{q}}}{(2^d)^{j-1}}\|x\|^p_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}(2N+1)^{d-\frac{dp}{q}}$$

$$= 2^{d-\frac{dp}{q}}K\|x\|^p_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}(2N+1)^{d-\frac{dp}{q}} + (3)^d\left(2^{d-\frac{dp}{q}}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{j(d-\frac{dp}{q})}}{(2^d)^j}\right)K\|x\|^p_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}(2N+1)^{d-\frac{dp}{q}}$$

$$\le C\|x\|^p_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}(2N+1)^{d-\frac{dp}{q}}$$

donde

$$\frac{C}{2} = \left(2^{d-\frac{dp}{q}}K\right)\vee\left(3^d\left(2^{d-\frac{2p}{q}}\right)\left(\frac{1}{1-2^{-\frac{dp}{q}}}-1\right)K\right).$$

Así para $m\in\mathbb{Z}^d$ y $N\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k\in S_{m,N}} (Mx(k))^p \le C\|x\|^p_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}(2N+1)^{d-\frac{dp}{q}},$$

es decir,

$$(2N+1)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}(Mx(k))^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C^{\frac{1}{p}}\|x\|_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}.$$

Que esta desigualdad se cumple para $N=0$ se sigue del lema 2.3.6.

Por lo tanto,

$$\|Mx\|_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)} \le \left(C^{\frac{1}{p}}\vee 1\right)\|x\|_{\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)}$$

lo que completa la prueba.

■

2.4. Potenciales de Riesz

En [3], Chiarenza y Frasca demostraron el acotamiento de los potenciales de Riesz en espacios de Morrey usando el acotamiento de la función maximal de Hardy-Littlewood en estos espacios.

En el caso de los espacios de Morrey discretos también tenemos el acotamiento de los potenciales de Riesz en ℓ_q^p como consecuencia del acotamiento del operador maximal de Hardy-Littlewood en ℓ_q^p.

Teorema 2.4.1. *Sean $0 < \alpha < d$ y $1 < p < q < \frac{d}{\alpha}$. Definimos para $x \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$ y $k \in \mathbb{Z}^d$*

$$I_\alpha x(k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d \setminus \{k\}} \frac{x(i)}{\|k-i\|_\infty^{d-\alpha}}. \tag{2.13}$$

Fijamos $s = \frac{dp}{d-\alpha q}$ y $t = \frac{qs}{p}$. Entonces $I_\alpha x \in \ell_t^s(\mathbb{Z}^d)$ para cada $x \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$. Además, existe una $C > 0$ tal que

$$\|I_\alpha x\|_{\ell_t^s(\mathbb{Z}^d)} \leq C \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}$$

para $x \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$.

Antes de la demostración veamos que s y t están bien definidas, es decir que $s > 1$ y $s < t$.
Notemos que $1 > 1 - \frac{\alpha q}{d}$, entonces $p > 1 - \frac{\alpha q}{d}$, luego multiplicando por d, $dp > d - \alpha q$, entonces $\frac{dp}{d-\alpha q} > 1$ y así $s > 1$.
Por otro lado, como $p < q$ entonces $\frac{dp}{d-\alpha q} < \frac{dq}{d-\alpha q}$, pero $\frac{dq}{d-\alpha q} = \frac{dpq}{p(d-\alpha q)} = \frac{qs}{p}$, entonces $\frac{dp}{d-\alpha q} < \frac{qs}{p}$, es decir, $s < t$.
Así, ℓ_t^s está bien definido.

Demostración. Sean $x \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$ y $m \in \mathbb{Z}^d$. Entonces

$$\begin{aligned} Mx(m) &= \sup_{N \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{k \in S_{m,N}} |x(k)| \\ &\leq |x(m)| \vee \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2N)^d} \sum_{k \in S_{m,N}} |x(k)| \end{aligned}$$

$$\leq 2^d \left(\frac{1}{2^d} \sum_{k\in S_{m,1}} |x(k)| \vee \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2N)^d} \sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)| \right)$$

$$\leq 2^d \sup_{r\geq 1} \frac{1}{(2r)^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d, \|m-k\|_\infty \leq r} |x(k)|.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\sup_{r\geq 1} \frac{1}{(2r)^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d, \|m-k\|_\infty \leq r} |x(k)| &\leq \sup_{r\geq 1} \frac{1}{(2\lfloor r\rfloor)^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d, \|m-k\|_\infty \leq \lfloor r\rfloor} |x(k)| \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2N)^d} \sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)| \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{(2N+1)^d}{(2N)^d(2N+1)^d} \sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)| \\
&\leq \left(\frac{3}{2}\right)^d \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)| \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^d Mx(m).
\end{aligned}$$

Así

$$\left(\frac{2}{3}\right)^d \sup_{r\geq 1} \frac{1}{(2r)^d} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d,\\ \|m-k\|_\infty \leq r}} |x(k)| \leq Mx(m) \leq 2^d \sup_{r\geq 1} \frac{1}{(2r)^d} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d,\\ \|m-k\|_\infty \leq r}} |x(k)|. \tag{2.14}$$

Ahora, sea $r \geq 1$ y fijemos $k \in \mathbb{Z}^d$. Entonces

$$I_\alpha x(k) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d\setminus\{k\}} \frac{x(i)}{\|k-i\|_\infty^{d-\alpha}} = \sum_{0<\|k-i\|_\infty \leq r} \frac{x(i)}{\|k-i\|_\infty^{d-\alpha}} + \sum_{\|k-i\|_\infty > r} \frac{x(i)}{\|k-i\|_\infty^{d-\alpha}}.$$

Definamos

$$I_1 := \sum_{0<\|k-i\|_\infty \leq r} \frac{x(i)}{\|k-i\|_\infty^{d-\alpha}} \qquad \text{e} \qquad I_2 := \sum_{\|k-i\|_\infty > r} \frac{x(i)}{\|k-i\|_\infty^{d-\alpha}}.$$

Observemos que

$$|I_1| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r2^{-j-1} < \|k-i\|_\infty \leq r2^{-j}} \frac{|x(i)|}{\|k-i\|_\infty^{d-\alpha}},$$

luego si $\|k-i\|_\infty > r2^{-j-1}$ entonces $\|k-i\|_\infty^{\alpha-d} < r^{\alpha-d}2^{-j\alpha+jd-\alpha+d}$, pues $\alpha < d$. Así

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r2^{-j-1}<\|k-i\|_\infty \leq r2^{-j}} \frac{|x(i)|}{\|k-i\|_\infty^{d-\alpha}} < \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r2^{-j-1}<\|k-i\|_\infty \leq r2^{-j}} |x(i)| r^{\alpha-d}2^{-j\alpha+jd-\alpha+d}$$

$$\leq r^\alpha 2^{d-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\alpha} \frac{1}{(r2^{-j})^d} \sum_{0<\|k-i\|_\infty \leq r2^{-j}} |x(i)|.$$

Sea $J = \max\{j \in \mathbb{N}_0 : r2^{-j} \geq 1\}$. Como $\sum_{0<\|k-i\|_\infty \leq r2^{-j}} |x(i)|$ es una suma vacía para toda $j > J$, tenemos

$$r^\alpha 2^{d-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\alpha} \frac{1}{(r2^{-j})^d} \sum_{0<\|k-i\|_\infty \leq r2^{-j}} |x(i)| = r^\alpha 2^{d-\alpha} \sum_{j=0}^{J} 2^{-j\alpha} \frac{1}{(r2^{-j})^d} \sum_{0<\|k-i\|_\infty \leq r2^{-j}} |x(i)|.$$

Usando (2.14) existe una constante C_0 para la cual

$$r^\alpha 2^{d-\alpha} \sum_{j=0}^{J} 2^{-j\alpha} \frac{1}{(r2^{-j})^d} \sum_{0<\|k-i\|_\infty \leq r2^{-j}} |x(i)| \leq C_0 r^\alpha Mx(k).$$

Ahora notemos que

$$|I_2| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{2^j r<\|k-i\|_\infty \leq 2^{j+1}r} \frac{|x(i)|}{\|k-i\|_\infty^{d-\alpha}}.$$

Si $\|k-i\|_\infty > 2^j r$ entonces $\|k-i\|_\infty^{\alpha-d} < (2^j r)^{\alpha-d}$. Así obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{2^j r<\|k-i\|_\infty \leq 2^{j+1}r} \frac{|x(i)|}{\|k-i\|_\infty^{d-\alpha}} < \sum_{j=0}^{\infty} (2^j r)^{\alpha-d} \sum_{\|k-i\|_\infty \leq 2^{j+1}r} |x(i)|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (2^j r)^{\alpha-d+\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} \left(\sum_{\|k-i\|_\infty \leq 2^{j+1}r} 1 \right)^{\frac{1}{p'}} (2^j r)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} \left(\sum_{\|k-i\|_\infty \leq 2^{j+1}r} |x(i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

donde $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Además, notando que

$$(2^j \lfloor r \rfloor)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} = \frac{(2^j \lfloor r \rfloor)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} (2^{j+2}\lfloor r \rfloor + 1)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}}}{(2^{j+2}\lfloor r \rfloor + 1)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}}} = \left(\frac{2^j \lfloor r \rfloor}{2^{j+2}\lfloor r \rfloor + 1} \right)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} (2^{j+2}\lfloor r \rfloor + 1)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}}$$

$$= \left(\frac{2^{j+2}\lfloor r\rfloor + 1}{2^j\lfloor r\rfloor}\right)^{\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} (2^{j+2}\lfloor r\rfloor + 1)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} = \left(2^2 + \frac{1}{2^j\lfloor r\rfloor}\right)^{\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} (2^{j+2}\lfloor r\rfloor + 1)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}}$$

$$\leq 8^{\frac{d}{p}-\frac{d}{q}}(2^{j+2}\lfloor r\rfloor + 1)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}},$$

tenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty}(2^j r)^{\alpha-d+\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} \left(\sum_{\|k-i\|_\infty \leq 2^{j+1}r} 1\right)^{\frac{1}{p'}} (2^j r)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} \left(\sum_{\|k-i\|_\infty \leq 2^{j+1}r} |x(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}(2^j r)^{\alpha-d+\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} \left(2^{j+2}r+1\right)^{\frac{d}{p'}} (2^j\lfloor r\rfloor)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} \left(\sum_{\|k-i\|_\infty \leq 2^{j+1}\lfloor r\rfloor} |x(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq 8^{\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} \sum_{j=0}^{\infty}(2^j r)^{\alpha-d+\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} \left(2^{j+2}r+1\right)^{\frac{d}{p'}} (2^{j+2}\lfloor r\rfloor+1)^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} \left(\sum_{i\in S_{k,2^{j+1}\lfloor r\rfloor}} |x(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq 8^{\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} \sum_{j=0}^{\infty}(2^j r)^{\alpha-d+\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} \left(2^{j+2}r+1\right)^{\frac{d}{p'}} \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}(2^{j+2}r+1)^{\frac{d}{p'}} &= (2^2 2^j r+1)^{\frac{d}{p'}} \leq (2^2 2^j r + 2^j r)^{\frac{d}{p'}} \\ &= (2^2+1)^{\frac{d}{p'}}(2^j r)^{\frac{d}{p'}},\end{aligned}$$

y que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned}8^{\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} \sum_{j=0}^{\infty}(2^j r)^{\alpha-d+\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} \left(2^{j+2}r+1\right)^{\frac{d}{p'}} \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} &\leq C_1 \sum_{j=0}^{\infty}(2^j r)^{\alpha-d+\frac{d}{p}-\frac{d}{q}+\frac{d}{p'}} \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} \\ &= C_1 \sum_{j=0}^{\infty}(2^j r)^{\alpha-\frac{d}{q}} \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} \\ &= C_2 \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} r^{\alpha-\frac{d}{q}},\end{aligned}$$

ya que $\alpha - \frac{d}{q} < 0$.
Así para $C_3 = C_0 \vee C_2$, se tiene que

$$|I_\alpha x(k)| \leq C_3 \left(r^\alpha Mx(k) + r^{\alpha-\frac{d}{q}}\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}\right). \tag{2.15}$$

Luego, suponiendo que $k \in \mathbb{Z}^d$ satisface $Mx(k) \neq 0$, por el lema 2.3.6 podemos tomar

$$r := \left(\frac{\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}}{Mx(k)} \right)^{\frac{q}{d}} \geq 1$$

en (2.15) y obtener

$$\begin{aligned}
|I_\alpha x(k)| &\leq C_3 \left[\left(\left(\frac{\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}}{Mx(k)} \right)^{\frac{q}{d}} \right)^{\alpha} Mx(k) + \left(\left(\frac{\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}}{Mx(k)} \right)^{\frac{q}{d}} \right)^{\alpha - \frac{d}{q}} \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} \right] \\
&= C_3 \left[\frac{\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}}}{(Mx(k))^{\frac{\alpha q}{d} - 1}} + \frac{\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}}}{(Mx(k))^{\frac{\alpha q}{d} - 1}} \right] \\
&= 2C_3 (Mx(k))^{1 - \frac{\alpha q}{d}} \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $Mx(k) = 0$ entonces $x = 0$ y entonces $I_\alpha x(k) = 0$.
Así, la desigualdad

$$|I_\alpha x(k)| \leq 2C_3 (Mx(k))^{1 - \frac{\alpha q}{d}} \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}}$$

es válida en este caso también. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha x\|_{\ell_t^s(\mathbb{Z}^d)} &= \sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{1}{(2N+1)^{d - \frac{ds}{t}}} \sum_{k \in S_{m,N}} |I_\alpha x(k)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{1}{(2N+1)^{d - \frac{ds}{t}}} \sum_{k \in S_{m,N}} \left| 2C_3 (Mx(k))^{1 - \frac{\alpha q}{d}} \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}} \right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= 2C_3 \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}} \sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{1}{(2N+1)^{d - \frac{ds}{qs/p}}} \sum_{k \in S_{m,N}} \left| (Mx(k))^{p\left(\frac{d - \alpha q}{dp}\right)} \right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= 2C_3 \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}} \sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{1}{(2N+1)^{d - \frac{dp}{q}}} \sum_{k \in S_{m,N}} \left| (Mx(k))^{\frac{p}{s}} \right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= 2C_3 \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}} \sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{1}{(2N+1)^{d - \frac{dp}{q}}} \sum_{k \in S_{m,N}} (Mx(k))^p \right)^{\frac{p}{ps}}
\end{aligned}$$

$$= 2C_3 \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}} \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{(2N+1)^{\frac{d}{p}-\frac{d}{q}}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} (Mx(k))^p \right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{s}}$$

$$= 2C_3 \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}} \|Mx\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{p}{s}}.$$

Luego por el teorema 2.3.7 existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 2\,C_3\,\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}} \|Mx\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{p}{s}} &\le C\,\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}} \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{p}{s}} \le C\,\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}+\frac{p}{s}} \\ &= C\,\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}+\frac{p(d-\alpha q)}{dp}} = C\,\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}^{\frac{\alpha q}{d}+1-\frac{\alpha q}{d}} \\ &= C\,\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|I_\alpha x\|_{\ell_t^s(\mathbb{Z}^d)} \le C\,\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}.$$

■

Capítulo 3

Constantes geométricas en ℓ_q^p

En este capítulo definiremos las siguientes tres constantes geométricas: la constante de Von Neumann-Jordan, la constante de James y la constante de Dunkl-Williams. Estas constantes están definidas en espacios de Banach y dependiendo de su valor nos dan cierta información sobre el espacio. En cada sección analizaremos cada una de las constantes para espacios de Banach en general y veremos su valor en los espacios de Morrey discretos.

3.1. Constante de Von Neumann-Jordan

En análisis funcional unos de los espacios más útiles en aplicaciones prácticas son los espacios de Hilbert. Por esta razón, muchas veces nos interesa saber si en un espacio de Banach dado, podemos definir un producto interior de modo que la norma del espacio, esté inducida por tal producto interior. Para ello tenemos diversas caracterizaciones, como la siguiente dada por P. Jordan y J. Von Neumann en [17] conocida como ley del paralelogramo.

Teorema 3.1.1. *Sea X un espacio normado con norma $\|\cdot\|$. Para que sea posible definir un productor interior $\langle x, y\rangle$ en X de forma que $\|\cdot\|$ sea la norma inducida por $\langle x, y\rangle$ la siguiente condición es necesaria y suficiente*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para toda $x, y \in X$.

En un espacio normado, es posible definir constantes que midan uniformemente su falta de cuadratura. Por ello, definiremos diferentes constantes, iniciando con la constante de Von Neumann-Jordan.

Definición 3.1.2. *Sea X un espacio normado. Denotaremos por $C_{NJ}(X)$ a la* ***constante de Von Neumann-Jordan****, definida por*

$$C_{NJ}(X) := \sup \left\{ \frac{\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2}{2\left(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2\right)} : x, y \in X \setminus \{0\} \right\}.$$

Usando la definición de la constante de Von Neumann-Jordan y restringiéndonos a espacios de Banach, podemos reescribir el teorema 3.1.1 como sigue.

Teorema 3.1.3. *Un espacio de Banach X es un espacio de Hilbert si y solo si $C_{NJ}(X) = 1$.*

Naturalmente uno podría preguntarse si $C_{NJ}(X)$ puede tomar cualquier valor. La respuesta es no. Los valores de $C_{NJ}(X)$ están acotados, como se enuncia en la siguiente observación cuya demostración puede consultarse en [17].

Observación 3.1.4. *Sea X un espacio de Banach, entonces*

$$1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2.$$

Un ejemplo de los valores que toma $C_{NJ}(X)$ cuando X es un espacio de Banach conocido es el siguiente demostrado por Clarkson en [4].

Ejemplo 3.1.5. *Para $L^p = L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq \infty$, tenemos*

$$C_{NJ}(L^p) = \text{máx}\{2^{\frac{2}{p}-1}, 2^{1-\frac{2}{p}}\}. \tag{3.1}$$

Notemos que $C_{NJ}(L^p) = 1$ si y sólo si $p = 2$. Es decir, el único espacio de Lebesgue que es espacio de Hilbert es L^2, lo cual ya sabíamos de la teoría de espacios de Hilbert.

Ahora, para los espacios de Morrey clásicos tenemos el siguiente resultado demostrado por Hendra Gunawan, Eder Kikianty, Yoshihiro Sawano y Christopher Schwanke en [10].

Teorema 3.1.6. *Si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $C_{NJ}(\mathcal{M}_q^p) = 2$.*

La condición $p < q$ es muy importante ya que si $p = q$ entonces $\mathcal{M}_q^p = L^p$ y por (3.1) sabemos $C_{NJ}(L^p) = 2$ si y sólo si $p \in \{1, \infty\}$.

Ahora, pasando al caso discreto, tenemos el siguiente resultado para espacios de Morrey discretos $\ell_q^p = \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$.

Teorema 3.1.7. *Si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $C_{NJ}(\ell_q^p) = 2$.*

Demostración. Sean $1 \leq p < q < \infty$ y consideremos primero el caso $d = 1$.
Sea $n \in \mathbb{Z}$ un número par con $n > 2^{\frac{q}{q-p}} - 1$, o equivalentemente $(n+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < 2^{-\frac{1}{p}}$.
Considere las sucesiones $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definidas por

$$x_k := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0, n \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 0, n \end{cases}$$

y

$$y_k := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ -1 & \text{si} \quad k = n \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 0, n. \end{cases}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell_q^p} &= \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \max\left\{ 1, |S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &= \max\left\{ 1, (n+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{p}} \right\}. \end{aligned}$$

Luego, por nuestra elección de n, tenemos que $(n+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{p}} < 1$ y por tanto $\|x\|_{\ell_q^p} = 1$. De manera análoga $\|y\|_{\ell_q^p} = 1$.

Adicionalmente, notemos que

$$\|x+y\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |S_{0,0}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|x_0 + y_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 2$$

y

$$\|x-y\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |S_{n,0}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 2,$$

por lo que

$$\frac{\|x+y\|_{\ell_q^p}^2 + \|x-y\|_{\ell_q^p}^2}{2\left(\|x\|_{\ell_q^p}^2 + \|y\|_{\ell_q^p}^2\right)} = \frac{2^2+2^2}{2\,(1^2+1^2)} = 2.$$

Por lo tanto

$$C_{NJ}(\ell_q^p(\mathbb{Z})) = 2.$$

Ahora consideremos el caso $d \geq 1$.
Sea $n \in \mathbb{Z}$ un número par con $n > 2^{\frac{q}{d(q-p)}} - 1$, o equivalentemente $(n+1)^{d(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} < 2^{-\frac{1}{p}}$.
Sean $x, y \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$ las funciones $x, y : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ tales que

$$x(k) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = (0,0,\ldots,0),(n,0,\ldots,0) \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

y

$$y(k) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = (0,0,\ldots,0) \\ -1 & \text{si} \quad k = (n,0,\ldots,0) \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell_q^p} &= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \text{máx}\left\{1, |S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\ &= \text{máx}\left\{1, (n+1)^{d(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\, 2^{\frac{1}{p}}\right\}. \end{aligned}$$

Luego, por la elección de n tenemos que $(n+1)^{d(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})\,2^{\frac{1}{p}}} < 1$, y así $\|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} = 1$. Análogamente $\|y\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} = 1$.

Más aún, de manera análoga al caso $d = 1$ obtenemos que

$$\|x+y\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} = 2 \qquad \text{y} \qquad \|x-y\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} = 2.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{\|x+y\|^2_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} + \|x-y\|^2_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}}{2\left(\|x\|^2_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} + \|y\|^2_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)}\right)} = \frac{2^2+2^2}{2\,(1^2+1^2)} = 2.$$

Y así

$$C_{NJ}(\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)) = 2.$$

■

Lo que nos dice el teorema 3.1.7, es que los espacios de Morrey discretos están muy lejos de ser espacios de Hilbert cuando q sea estrictamente mayor que p.

3.2. Constante de James

El concepto de *reflexividad* fue introducido por H. Hahn en 1927, ya que este concepto tuvo suma importancia en su estudio sobre ecuaciones lineales en espacios normados. La reflexividad se define de la siguiente manera.

Definición 3.2.1. *Un espacio normado X se dice* ***reflexivo*** *si es isométrico a su doble dual X^{**} bajo el mapeo natural*

$$\begin{aligned} \phi : X &\to X^{**} \\ x &\mapsto F_x \end{aligned}$$

donde $F_x(f) = f(x)$ para cada $f \in X^*$.

Para saber si un espacio normado X es reflexivo tenemos una caracterización dada por Robert C. James en [15]. Antes de enunciarla necesitaremos de la siguiente definición.

Definición 3.2.2. *La bola unitaria de un espacio normado se dice ser* ***uniformemente no-cuadrada*** *si y sólo si existe un número positivo δ tal que no existen elementos x y y de la bola unitaria para los cuales $\|\frac{1}{2}(x+y)\| > 1-\delta$ y $\|\frac{1}{2}(x-y)\| > 1-\delta$.*

Teorema 3.2.3. *Un espacio de Banach es reflexivo si su bola unitaria es uniformemente no-cuadrada.*

Gracias a este teorema, todo lo que tenemos que hacer para saber si un espacio de Banach es reflexivo es demostrar que su bola unitaria es uniformemente no-cuadrada, sin embargo, esto no parece una tarea fácil.

Para poder enunciar una caracterización que nos diga cuándo la bola unitaria de un espacio de Banach es uniformemente no-cuadrada definiremos la constante de James.

Definición 3.2.4. *Sea X un espacio normado. Denotaremos por $C_J(X)$ a la* ***constante de James****, definida por*

$$C_J(X) := \sup \left\{ \text{mín}\{\|x+y\|_X, \|x-y\|_X\} : x, y \in X,\ \|x\|_X = \|y\|_X = 1 \right\}.$$

El siguiente resultado puede consultarse en [18].

Teorema 3.2.5. *Un espacio de Banach X es uniformemente no-cuadrado (esto es, que su bola unitaria es uniformemente no-cuadrada) si y sólo si $C_J(X) < 2$.*

Es así que la constante de James nos ayuda a saber si un espacio de Banach es uniformemente no-cuadrado y por tanto saber si es reflexivo.

Como antes, uno podría preguntarse sobre el rango de valores que puede tomar la constante de James y para ilustrarlos tenemos la siguiente observación demostrada en [2].

Observación 3.2.6. *Sea X un espacio de Banach, entonces*

$$\sqrt{2} \leq C_J(X) \leq 2.$$

Veamos en los siguientes dos ejemplos los valores que toma la constante de James en algunos espacios [8].

Ejemplo 3.2.7. *Si X es un espacio de Hilbert, entonces $C_J(X) = \sqrt{2}$.*

Es importante aclarar que el recíproco no es verdadero, es decir, si $C_J(X) = \sqrt{2}$ no necesariamente X es Hilbert.

Ejemplo 3.2.8. *Para* $L^p = L^p(\mathbb{R}^d)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$*, tenemos*

$$C_J(L^p) = \max\{2^{\frac{1}{p}}, 2^{1-\frac{1}{p}}\}. \tag{3.2}$$

Su valor para espacios de Morrey clásicos también fue demostrado por Gunawan et al. en [10].

Ejemplo 3.2.9. *Si* $1 \leq p < q < \infty$*, entonces* $C_J(\mathcal{M}_q^p) = 2$*.*

Al igual que para la constante de Von Neumann-Jordan la condición $p < q$ es muy importante ya que si $p = q$ entonces $\mathcal{M}_q^p = L^p$ y por (3.2), $C_J(L^p) = 2$ si y sólo si $p \in \{1, \infty\}$.

A continuación, el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.2.10. *Si* $1 \leq p < q < \infty$*, entonces* $C_J(\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)) = 2$*.*

Demostración. Sean $1 \leq p < q < \infty$. Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $x, y \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$ como en la demostración del teorema 3.1.7. Es decir, $n \in \mathbb{Z}$ es un número par tal que $n > 2^{\frac{q}{d(q-p)}} - 1$, o equivalentemente $(n+1)^{d(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} < 2^{-\frac{1}{p}}$, y $x, y \in \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$ son las funciones $x, y : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ tales que

$$x(k) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = (0,0,\ldots,0), (n,0,\ldots,0) \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

y

$$y(k) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = (0,0,\ldots,0) \\ -1 & \text{si} \quad k = (n,0,\ldots,0) \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

De la demostración del teorema 3.1.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} &= 1, \\ \|y\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} &= 1, \\ \|x+y\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} &= 2 \quad \text{y} \\ \|x-y\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} &= 2. \end{aligned}$$

Así

$$C_J(\ell_q^p) = \sup\left\{\min\{\|x+y\|_{\ell_q^p}, \|x-y\|_{\ell_q^p}\} : x, y \in \ell_q^p,\ \|x\|_{\ell_q^p} = \|y\|_{\ell_q^p} = 1\right\} = 2$$

donde $\ell_q^p = \ell_q^p(\mathbb{Z}^d)$. ■

Lo que nos dice el teorema 3.2.10 que acabamos de demostrar es que los espacios de Morrey discretos ℓ_q^p con $p < q$ no son reflexivos, es decir, no son isométricos a su doble dual bajo el mapeo natural.

3.3. Constante de Dunkl-Williams

De la primera sección obtuvimos una constante que nos ayuda a saber si un espacio de Banach es un espacio de Hilbert. De la segunda sección obtuvimos otra constante que nos ayuda a saber si un espacio de Banach es reflexivo. En esta sección definiremos una constante que nos va a servir para ambas cosas a la cual llamaremos constante de Dunkl-Williams.
Las principales referencias para esta sección son [5], [16] y [10].

Definición 3.3.1. *Sea X un espacio normado. Denotaremos por $C_{DW}(X)$ a la* ***constante de Dunkl-Williams****, definida por*

$$C_{DW}(X) := \sup\left\{ \frac{\|x\|_X + \|y\|_X}{\|x-y\|_X} \left\| \frac{x}{\|x\|_X} - \frac{y}{\|y\|_X} \right\|_X : x, y \in X,\ x, y, x-y \neq 0 \right\}.$$

Al igual que con las constantes $C_{NJ}(X)$ y $C_J(X)$, el rango de valores de la constante de Dunkl-Williams es acotado [5].

Observación 3.3.2. *Sea X un espacio de Banach, entonces*

$$2 \leq C_{DW}(X) \leq 4.$$

Como primer resultado tendremos una relación entre los valores de la constante de James y la constante de Dunkl-Williams [16].

Teorema 3.3.3. *Sea X un espacio de Banach. Entonces $C_J(X) < 2$ si y sólo si $C_{DW}(X) <$ 4.*

De los teoremas 3.3.3, 3.2.3 y 3.2.5, se sigue la siguiente proposición.

Proposición 3.3.4. *Un espacio de Banach X es reflexivo si $C_{DW}(X) < 4$.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach tal que $C_{DW}(X) < 4$. Por el teorema 3.3.3 tenemos que $C_J(X) < 2$. Entonces por el teorema 3.2.5 X es uniformemente no-cuadrado y por el teorema 3.2.3 X es reflexivo. ■

Nuestro resultado para espacios de Hilbert es el siguiente (ver [5]).

Teorema 3.3.5. *Un espacio de Banach X es un espacio de Hilbert si y sólo si $C_{DW}(X) = 2$.*

Además, para espacios de Lebesgue (ver [16]) tenemos que

$$C_{DW}(L^1) = C_{DW}(L^\infty) = 4.$$

En espacios de Morrey clásicos tenemos el siguiente resultado demostrado por Gunawan et al. en [10].

Teorema 3.3.6. *Si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $C_{DW}(\mathcal{M}^p_q) = 4$.*

Y por último, para espacios de Morrey discretos

Teorema 3.3.7. *Si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $C_{DW}(\ell^p_q(\mathbb{Z}^d)) = 4$.*

Demostración. Así como en la demostración del teorema 3.1.7, se hará la demostración para el caso $d = 1$. El caso $d > 1$ será completamente análogo.
Sean $1 \leq p < q < \infty$. Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $x, y \in \ell^p_q$ como en la demostración del teorema 3.1.7, Es decir, n es un número par tal que $(n+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < 2^{-\frac{1}{p}}$, y $x, y \in \ell^p_q$ son las sucesiones $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definidas por

$$x_k := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0, n \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 0, n \end{cases}$$

y

$$y_k := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ -1 & \text{si} \quad k = n \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 0, n. \end{cases}$$

De la demostración del teorema 3.1.7 sabemos que $\|x\|_{\ell_q^p} = 1$ y que $\|x-y\|_{\ell_q^p} = 2$. Ahora, observemos que para $0 < r < 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x+ry\|_{\ell_q^p} &= \|(1+r,0,\dots,0,1-r,0,\dots)\|_{\ell_q^p} \\
&= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k+ry_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \text{máx}\left\{1+r, |S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}} |x_k+ry_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&= \text{máx}\left\{1+r, (n+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|1+r|^p+|1-r|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.
\end{aligned}$$

Luego, por la elección de n tenemos

$$\begin{aligned}
(n+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|1+r|^p+|1-r|^p\right)^{\frac{1}{p}} &< 2^{-\frac{1}{p}} \left(|1+r|^p+|1-r|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \left(\frac{|1+r|^p+|1+r|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 1+r.
\end{aligned}$$

Así $\|x+ry\|_{\ell_q^p} = 1+r$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\|x\|_{\ell_q^p}+\|x+ry\|_{\ell_q^p}}{\|x-x-ry\|_{\ell_q^p}} \left\|\frac{x}{\|x\|_{\ell_q^p}} - \frac{x+ry}{\|x+ry\|_{\ell_q^p}}\right\|_{\ell_q^p} &= \left(\frac{1+1+r}{r}\right) \left\|x - \frac{x+ry}{1+r}\right\|_{\ell_q^p} \\
&= \left(\frac{2+r}{r}\right) \left\|\frac{x+rx-x-ry}{1+r}\right\|_{\ell_q^p} \\
&= \left(\frac{2+r}{r}\right) \left(\frac{r\|x-y\|_{\ell_q^p}}{1+r}\right) \\
&= \left(\frac{2+r}{r}\right) \left(\frac{2r}{1+r}\right) \\
&= \frac{4+2r}{1+r}.
\end{aligned}$$

Luego haciendo $r \downarrow 0$, obtenemos que $C_{DW}(\ell_q^p) = 4$, como queríamos.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Generalizaciones de ℓ_q^p

En el capítulo 1 vimos que así como los espacios de Morrey son una generalización de los espacios L^p, los espacios de Morrey discretos ℓ_q^p también son una generalización de los espacios de sucesiones ℓ^p. En este capítulo veremos algunas generalizaciones pero de los espacios de Morrey discretos y algunos resultados similares a los vistos en el primer capítulo, los cuales también fueron demostrados por Gunawan et al. en [11].

Es importante aclarar que en este capítulo $\ell_q^p = \ell_q^p(\mathbb{Z})$.

4.1. Espacios de Morrey discretos tipo débil

Definición 4.1.1. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$. El* ***espacio de Morrey discreto tipo débil*** *denotado por $w\ell_q^p$, se define como el conjunto de sucesiones $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tomando valores en $\mathbb{K}$ tales que $\|x\|_{w\ell_q^p} < \infty$, donde*

$$\|x\|_{w\ell_q^p} := \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0, \\ \gamma>0}} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma \left|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}\right|^{\frac{1}{p}}.$$

Observación 4.1.2. *De la observación 1.1.2, claramente se sigue que para $q = p$*

$$w\ell_p^p = w\ell^p.$$

De hecho, $w\ell^p$ tiene más elementos que ℓ^p. Para ilustrar esto basta considerar la sucesión $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dada por $x_0 = 1$ y $x_k = |k|^{-\frac{1}{p}}$ con $k \neq 0$, la cual evidentemente no está en ℓ^p. Sin embargo, sí es un elemento de $w\ell^p$, pues para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \gamma < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\gamma\,|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} &\leq \gamma\,|\{k \in S_{0,N} : |x_k| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \gamma\left(1 + 2\left|\left\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq N,\ k^{-\frac{1}{p}} > \gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}}\right)\\ &\leq \gamma\left(1 + 2\left|\left\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq N,\ k < \gamma^{-p}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}\right)\\ &< \gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) < 3.\end{aligned}$$

Así

$$\|x\|_{w\ell^p_p} < \infty.$$

De manera análoga, $w\ell^p_q$ tiene más elementos que ℓ^p_q como enunciaremos y demostraremos en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.3. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$. Entonces*

$$\ell^p_q \subseteq w\ell^p_q.$$

Además $\|x\|_{w\ell^p_q} \leq \|x\|_{\ell^p_q}$ para cada $x \in \ell^p_q$.

Demostración. Sean $x \in \ell^p_q$, $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} &= |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N},|x_k|>\gamma}\gamma^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N},|x_k|>\gamma}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

y tomando supremos sobre $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$ obtenemos $\|x\|_{w\ell^p_q} \leq \|x\|_{\ell^p_q}$.
Por lo tanto $\ell^p_q \subseteq w\ell^p_q$. ■

A diferencia de ℓ_q^p, los espacios de Morrey discretos tipo débil no son espacios de Banach. Veremos que son espacios completos pero con respecto a la cuasi-norma $\|\cdot\|_{w\ell_q^p}$.

Teorema 4.1.4. *Para* $1 \leq p \leq q < \infty$*, el mapeo* $\|\cdot\|_{w\ell_q^p}$ *es una cuasi-norma, lo que hace a* $(w\ell_q^p, \|\cdot\|_{w\ell_q^p})$ *un espacio cuasi-normado.*

Demostración. De la definición de $\|\cdot\|_{w\ell_q^p}$ es claro que $\|x\|_{w\ell_q^p} \geq 0$ para toda $x \in w\ell_q^p$.
Sean $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$, si $x = 0$ entonces $\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\} = \emptyset$, de aquí que $|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} = 0$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$. Tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$ tenemos $\|x\|_{w\ell_q^p} = 0$.
Recíprocamente si $\|x\|_{w\ell_q^p} = 0$ entonces $|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}| = 0$ para toda $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$, es decir, $0 < |x_k| \leq \gamma$ para toda $k \in \mathbb{Z}$ y para toda $\gamma > 0$. Así $x = 0$.
Ahora, para $x \in w\ell_q^p$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, si $\alpha = 0$ claramente $\|\alpha x\|_{w\ell_q^p} = |\alpha|\|x\|_{w\ell_q^p}$. Supongamos que $\alpha \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_{w\ell_q^p} &= \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma|\{k \in S_{m,N} : |\alpha x| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \frac{\gamma}{|\alpha|}\right\}\right|^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

luego haciendo $\delta = \frac{\gamma}{|\alpha|}$

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \frac{\gamma}{|\alpha|}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}
&= \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0\\ \delta>0}} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\delta|\alpha|\,|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \delta\}|^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha|\|x\|_{w\ell_q^p}.
\end{aligned}$$

Por último, sean $x, y \in w\ell_q^p$. Para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$ observemos que

$$\begin{aligned}
\{k \in S_{m,N} : |x_k + y_k| > \gamma\} &\subseteq \{k \in S_{m,N} : |x_k| + |y_k| > \gamma\} \\
&\subseteq \left\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \frac{\gamma}{2}\right\} \cup \left\{k \in S_{m,N} : |y_k| > \frac{\gamma}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Así para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$ tenemos

$$\left(|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\right)^p |\{k \in S_{m,N} : |x_k + y_k| > \gamma\}| \leq \left(|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\right)^p \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|$$

$$+ \left(|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\right)^p \left|\left\{k \in S_{m,N} : |y_k| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|,$$

haciendo $\delta = \frac{\gamma}{2}$ a la derecha de la desigualdad

$$\left(|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\right)^p |\{k \in S_{m,N} : |x_k + y_k| > \gamma\}| \leq 2^p \left(|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\delta\right)^p |\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \delta\}|$$

$$+ 2^p \left(|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\delta\right)^p |\{k \in S_{m,N} : |y_k| > \delta\}|,$$

de donde

$$\begin{aligned} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma \, |\{k \in S_{m,N} : |x_k + y_k| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} &\leq 2|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\delta \, |\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \delta\}|^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + 2|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\delta \, |\{k \in S_{m,N} : |y_k| > \delta\}|^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\left[\|x\|_{w\ell^p_q} + \|y\|_{w\ell^p_q}\right], \end{aligned}$$

y tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$ obtenemos

$$\|x + y\|_{w\ell^p_q} \leq 2\left[\|x\|_{w\ell^p_q} + \|y\|_{w\ell^p_q}\right].$$

■

Proposición 4.1.5. *Para $1 \leq p \leq q < \infty$, $w\ell^p_q$ es completo con respecto a la cuasi-norma $\|\cdot\|_{w\ell^p_q}$.*

Demostración. Sean $1 \leq p \leq q < \infty$ y $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $w\ell^p_q$. Primero notamos que $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ debe estar acotada en $w\ell^p_q$. Luego, mostraremos que existe una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tomando valores en $\mathbb{K}$ tal que $x^{(n)}_k \to x_k$ cuando $n \to \infty$, para cada $k \in \mathbb{Z}$. Para hacerlo tomemos $0 < \varepsilon \leq 1$, elegimos $M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k_0 \in \mathbb{Z}$ y todas $i, j \geq M$

$$|S_{k_0,0}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\varepsilon \left|\left\{k \in S_{k_0,0} : \left|x^{(i)}_k - x^{(j)}_k\right| > \varepsilon\right\}\right|^{\frac{1}{p}} \leq \|x^{(i)} - x^{(j)}\|_{w\ell^p_q} < \varepsilon^{\frac{1}{p}+1}.$$

Notemos que $S_{k_0,0} = \{k_0\}$ para cada $k_0 \in \mathbb{Z}$. De aquí que para cada $k_0 \in \mathbb{Z}$ e $i, j \geq M$

$$\left|\left\{k \in S_{k_0,0} : \left|x^{(i)}_k - x^{(j)}_k\right| > \varepsilon\right\}\right| < \varepsilon,$$

esto implica que para cada $k_0 \in \mathbb{Z}$ e $i, j \geq M$

$$\left|x_{k_0}^{(i)} - x_{k_0}^{(j)}\right| \leq \varepsilon.$$

Así para cada $k \in \mathbb{Z}$, $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy tomando valores en $\mathbb{K}$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ existe para cada $k \in \mathbb{Z}$. Luego, para cada $k \in \mathbb{Z}$ definimos $x_k := \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ de modo que $x_k^{(n)} \to x_k$ cuando $n \to \infty$.
Afirmamos que $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in w\ell_q^p$. En efecto, sea $C > 0$ tal que $\|x^{(n)}\|_{w\ell_q^p} \leq C$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y sean $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$. Observemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{\gamma}{2} \left|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}\right|^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{\gamma}{2} \left(\left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k - x_k^{(n)}| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right| + \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k^{(n)}| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right| \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{\gamma}{2} \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k - x_k^{(n)}| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}} + |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{\gamma}{2} \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k^{(n)}| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Como $x_k^{(n)} \to x_k$ cuando $n \to \infty$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ y $S_{m,N}$ es finito podemos elegir un $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\left|x_k^{(n_0)} - x_k\right| \leq \frac{\gamma}{2}$ para $k \in S_{m,N}$. Entonces

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{\gamma}{2} \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k - x_k^{(n_0)}| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}} = 0,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{\gamma}{2} \left|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}\right|^{\frac{1}{p}} &\leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{\gamma}{2} \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k^{(n_0)}| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|x^{(n_0)}\|_{w\ell_q^p} \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

y tomando supremo sobre toda $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$ obtenemos $\frac{1}{2}\|x\|_{w\ell_q^p} \leq C < \infty$. Por lo tanto, $x \in w\ell_q^p$.
Finalmente mostraremos que $x^{(n)} \to x$ cuando $n \to \infty$ en la cuasi-norma $\|\cdot\|_{w\ell_q^p}$. Para esto, sea $\varepsilon > 0$ y fijemos $j \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$. Como para $k \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\left|x_k - x_k^{(j)}\right| = \lim_{i\to\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|$$

entonces $\left|x_k - x_k^{(j)}\right| > \gamma$ si y sólo si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| > \gamma$ para $i \geq M$. Usando esto se prueba fácilmente la identidad

$$\left\{k \in S_{m,N} : |x_k - x_k^{(j)}| > \gamma\right\} = \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{i=M}^{\infty} \left\{k \in S_{m,N} : |x_k^{(i)} - x_k^{(j)}| > \gamma\right\}.$$

Usando esta identidad y la continuidad de la medida de contar obtenemos

$$\begin{aligned} &|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k - x_k^{(j)}| > \gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad = |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma \left|\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{i=M}^{\infty} \left\{k \in S_{m,N} : |x_k^{(i)} - x_k^{(j)}| > \gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad = \lim_{M\to\infty} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma \left|\bigcap_{i=M}^{\infty} \left\{k \in S_{m,N} : |x_k^{(i)} - x_k^{(j)}| > \gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Luego, para cualquier $M \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma \left|\bigcap_{i=M}^{\infty} \left\{k \in S_{m,N} : |x_k^{(i)} - x_k^{(j)}| > \gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}} &\leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k^{(M)} - x_k^{(j)}| > \gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left\|x^{(M)} - x^{(j)}\right\|_{w\ell_q^p}. \end{aligned}$$

Como $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $w\ell_q^p$, entonces existe $P \in \mathbb{N}$ tal que si $M, j \geq P$, se tiene

$$\left\|x^{(M)} - x^{(j)}\right\|_{w\ell_q^p} < \varepsilon.$$

Así para $j \geq P$

$$\lim_{M\to\infty} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma \left|\bigcap_{i=M}^{\infty} \left\{k \in S_{m,N} : |x_k^{(i)} - x_k^{(j)}| > \gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Es decir, para $j \geq P$

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma \left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k - x_k^{(j)}| > \gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Por último, tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$, obtenemos que para $j \geq P$

$$\|x - x^{(j)}\|_{w\ell_q^p} < \varepsilon.$$

Así $x^{(n)} \to x$ cuando $n \to \infty$ en $w\ell_q^p$. ∎

Para finalizar la sección, veremos un resultado análogo al de la proposición 1.2.2.

Proposición 4.1.6. *Sean $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq q < \infty$. Entonces*

$$w\ell_q^{p_2} \subseteq w\ell_q^{p_1}$$

y $\|x\|_{w\ell_q^{p_1}} \leq \|x\|_{w\ell_q^{p_2}}$ para cada $x \in w\ell_q^{p_2}$.

Demostración. Sean $x \in w\ell_q^{p_2}$ y $\gamma > 0$. Por definición tenemos

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_2}}\gamma\,|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_2}} \leq \|x\|_{w\ell_q^{p_2}}$$

para cualesquiera $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$.
Suponiendo que $|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}| \neq 0$ tenemos que

$$\gamma \leq \frac{|S_{m,N}|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q}}}{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_2}}}\|x\|_{w\ell_q^{p_2}}.$$

Por lo tanto, para cualesquiera $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\begin{aligned}
|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\gamma\,|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_1}} &\leq \frac{|S_{m,N}|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}}{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}}\|x\|_{w\ell_q^{p_2}} \\
&= \left(\frac{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\|x\|_{w\ell_q^{p_2}} \\
&\leq \|x\|_{w\ell_q^{p_2}}.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad también se cumple si $|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}| = 0$. Así tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$ obtenemos $\|x\|_{w\ell_q^{p_1}} \leq \|x\|_{w\ell_q^{p_2}}$.
∎

Por último, veremos un resultado similar al teorema 1.3.3 pero para espacios de Morrey discretos débiles.

Antes de enunciar el teorema veamos la siguiente definición. Sean $1 \leq p \leq q < \infty$, el **espacio de Morrey tipo débil en la recta real** el cual es denotado por $w\mathcal{M}_q^p =$

$w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R})$ es el conjunto de funciones f tales que

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} := \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}, r>0\\ \gamma>0}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left(m\left\{t\in(a-r,a+r) : |f(t)|>\gamma\right\}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

donde m denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Teorema 4.1.7. *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$. Entonces $w\ell_q^p$ puede ser considerado como un subespacio cerrado de $w\mathcal{M}_q^p$. Además, existen constantes $B, C > 0$ tales que para cada $x \in w\ell_q^p$ se tiene*

$$B\|x\|_{w\ell_q^p} \leq \|\bar{x}\|_{w\mathcal{M}_q^p} \leq C\|x\|_{w\ell_q^p}.$$

Demostración. Sea $x \in w\ell_q^p$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}\|_{w\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}, r>0\\ \gamma>0}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left(m\left\{t\in(a-r,a+r) : |\bar{x}(t)|>\gamma\right\}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}, r>0\\ \gamma>0}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left(m\left\{t\in(\lfloor a\rfloor-\lceil r\rceil,\lfloor a\rfloor+\lceil r\rceil+1) : |\bar{x}(t)|>\gamma\right\}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{a\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{N}\\ \gamma>0}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left(m\left\{t\in(a-r,a+r+1) : |\bar{x}(t)|>\gamma\right\}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{a\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{N}\\ \gamma>0}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left|\left\{k\in S_{a,r} : |x_k|>\gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \sup_{\substack{a\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{N}\\ \gamma>0}} (2r+2)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left|\left\{k\in S_{a,r} : |x_k|>\gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \sup_{\substack{a\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{N}_0\\ \gamma>0}} (2r+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left|\left\{k\in S_{a,r} : |x_k|>\gamma\right\}\right|^{\frac{1}{p}} \\
&= C\|x\|_{w\ell_q^p} < \infty.
\end{aligned}$$

Así si $x \in w\ell_q^p$ entonces $\bar{x} \in w\mathcal{M}_q^p$. Luego como $w\ell_q^p$ es completo con respecto a la cuasi-norma $\|\cdot\|_{w\ell_q^p}$, se sigue que $w\ell_q^p$ puede ser considerado como un subespacio cerrado de $w\mathcal{M}_q^p$. Además, usando el hecho de que $(2r+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(2r+2)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ para $r > 0$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|x\|_{w\ell_q^p} &= \sup_{\substack{a\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{N}_0\\ \gamma>0}} (2r+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left|\{k\in S_{a,r} : |x_k|>\gamma\}\right|^{\frac{1}{p}}\\
&= \sup_{\substack{a\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{N}_0\\ \gamma>0}} (2r+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left(m\left\{t\in(a-r,a+r+1) : |\bar{x}(t)|>\gamma\right\}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{N}_0\\ \gamma>0}} (2r+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left(m\left\{t\in(a-(r+1),a+r+1) : |\bar{x}(t)|>\gamma\right\}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\sup_{\substack{a\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{N}_0\\ \gamma>0}} (2(r+1))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left(m\left\{t\in(a-(r+1),a+r+1) : |\bar{x}(t)|>\gamma\right\}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\sup_{\substack{a\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{N}\\ \gamma>0}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left(m\left\{t\in(a-r,a+r) : |\bar{x}(t)|>\gamma\right\}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\sup_{\substack{a\in\mathbb{R}, r>0\\ \gamma>0}} (2r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma\left(m\left\{t\in(a-r,a+r) : |\bar{x}(t)|>\gamma\right\}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\bar{x}\|_{w\mathcal{M}_q^p}.
\end{aligned}
$$

■

4.2. Espacios de Morrey discretos generalizados

En esta sección veremos los espacios de Morrey discretos generalizados, los cuales son otra generalización de ℓ_q^p. Para poder definirlos haremos uso de las siguientes definiciones.

Una función ψ es **casi decreciente** si existe $C>0$ tal que

$$\psi(x)\geq C\psi(y)$$

con $x<y$. Análogamente una función ψ es **casi creciente** si existe $C>0$ tal que

$$\psi(x)\leq C\psi(y)$$

con $x<y$.

Para $1 \leq p < \infty$, definimos $\mathcal{G}_p := \mathcal{G}_p(2\mathbb{N}_0 + 1)$ como el conjunto de todas las funciones

$$\phi : 2\mathbb{N}_0 + 1 \to (0, \infty)$$

tales que ϕ es casi decreciente y el mapeo

$$(2N+1) \mapsto (2N+1)^{\frac{1}{p}} \phi(2N+1)$$

es casi creciente.

Notemos que si $\phi \in \mathcal{G}_p$ entonces ϕ satisface la siguiente condición: existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\phi(2M+1)}{\phi(2N+1)} \leq C$$

siempre que $\frac{1}{2} \leq \frac{2M+1}{2N+1} \leq 2$.

Definición 4.2.1. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $\phi \in \mathcal{G}_p$. El* ***espacio de Morrey discreto generalizado*** *denotado por ℓ^p_ϕ, se define como el conjunto de todas las sucesiones $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ tomando valores en $\mathbb{K}$ tales que $\|x\|_{\ell^p_\phi} < \infty$, donde*

$$\|x\|_{\ell^p_\phi} := \sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\phi(2N+1)} \left(\frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observación 4.2.2. *Si tomamos la función $\phi(2N+1) = (2N+1)^{-\frac{1}{q}}$ con $N \in \mathbb{N}_0$ en ℓ^p_ϕ obtenemos el espacio de Morrey discreto ℓ^p_q.*

A diferencia de los espacios de Morrey discretos tipo débil, los espacios de Morrey generalizados ℓ^p_ϕ sí resultan ser espacios de Banach.

Proposición 4.2.3. *Para $1 \leq p < \infty$ y $\phi \in \mathcal{G}_p$, el mapeo $\|\cdot\|_{\ell^p_\phi}$ define una norma en ℓ^p_ϕ. Más aún, $(\ell^p_\phi, \|\cdot\|_{\ell^p_\phi})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Claramente $\|x\|_{\ell^p_\phi} \geq 0$ para toda $x \in \ell^p_\phi$. También es evidente que $\|x\|_{\ell^p_\phi} = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Ahora para $\alpha \in \mathbb{K}$ es claro que

$$\|\alpha x\|_{\ell_\phi^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\phi(2N+1)} \left(\frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k\in S_{m,N}} |\alpha x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_{\ell_\phi^p}.$$

Luego, para $x, y \in \ell_\phi^p$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\ell_\phi^p} &= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\phi(2N+1)} \left(\frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k\in S_{m,N}} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\phi(2N+1)} \left(\frac{1}{|S_{m,N}|} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&= \|x\|_{\ell_\phi^p} + \|y\|_{\ell_\phi^p}.
\end{aligned}$$

Así, $\|\cdot\|_{\ell_\phi^p}$ es una norma en ℓ_ϕ^p.

Ahora demostremos que ℓ_ϕ^p es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{\ell_\phi^p}$. Para ello consideremos $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ_ϕ^p, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ tal que para toda $i, j \geq n_\varepsilon$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\phi(2N+1)} \left(\frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k\in S_{m,N}} \left| x_k^{(i)} - x_k^{(j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{\phi(1)}.$$

De aquí que para cualesquiera $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ e $i, j \geq n_\varepsilon$

$$\frac{1}{\phi(2N+1)} \left(\frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k\in S_{m,N}} \left| x_k^{(i)} - x_k^{(j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon\phi(1)^{-1}, \tag{4.1}$$

en particular, si tomamos $N = 0$ para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$\left| x_k^{(i)} - x_k^{(j)} \right| < \varepsilon$$

con $i, j \geq n_\varepsilon$. Así $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para cada $k \in \mathbb{Z}$.
Definimos $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ donde $x_k := \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Si en (4.1) hacemos $j \to \infty$, obtenemos

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\phi(2N+1)} \left(\frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k\in S_{m,N}} \left| x_k^{(i)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{\phi(1)}.$$

Entonces $x^{(i)} - x \in \ell^p_\phi$ y por tanto $x = x^{(i)} - (x^{(i)} - x) \in \ell^p_\phi$. Así $x^{(i)} \to x$ cuando $i \to \infty$. Por lo tanto $(\ell^p_\phi, \|\cdot\|_{\ell^p_\phi})$ es un espacio de Banach.

■

El siguiente lema nos da una estimación para la norma de sucesiones características, la cual será útil más adelante.

Lema 4.2.4. *Sea $1 \le p < \infty$ y $\phi \in \mathcal{G}_p$. Para $m_0 \in \mathbb{Z}$ y $N_0 \in \mathbb{N}_0$ sea ξ^{m_0,N_0} la sucesión característica dada por*

$$\xi_k^{m_0,N_0} := \begin{cases} 1 & si \quad k \in S_{m_0,N_0} \\ 0 & en \quad otro\ caso. \end{cases}$$

Entonces existe $C > 0$ independiente de m_0 y N_0 tal que

$$\frac{1}{\phi(2N_0+1)} \le \|\xi_k^{m_0,N_0}\|_{\ell^p_\phi} \le \frac{C}{\phi(2N_0+1)}$$

para cada $N_0 \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Fijemos $m_0 \in \mathbb{Z}$ y $N_0 \in \mathbb{N}_0$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell^p_\phi} &= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\phi(2N+1)} \left(\frac{1}{|S_{m,N}|} \sum_{k\in S_{m,N}} \left| \xi_k^{m_0,N_0} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\ge \frac{1}{\phi(2N_0+1)} \left(\frac{|S_{m_0,N_0}|}{|S_{m_0,N_0}|} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{\phi(2N_0+1)}. \end{aligned}$$

Para la otra desigualdad tomamos $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$. Si $N \le N_0$ usamos el hecho de que ϕ es casi decreciente, entonces existe $C_1 > 0$ tal que $\phi(2N+1) \ge C_1\phi(2N_0+1)$ y que $\displaystyle\sum_{k\in S_{m_0,N}} \left| \xi_k^{m_0,N_0} \right|^p = |S_{m_0,N}|$. Así

$$\frac{1}{\phi(2N+1)}\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}\left|\xi_k^{m_0,N_0}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\phi(2N+1)}\left(\frac{1}{|S_{m_0,N}|}\sum_{k\in S_{m_0,N}}\left|\xi_k^{m_0,N_0}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \frac{1}{\phi(2N+1)}\left(\frac{|S_{m_0,N}|}{|S_{m_0,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{1}{C_1\phi(2N_0+1)}.$$

Si $N \geq N_0$ entonces existe $C_2 > 0$ tal que $(2N_0+1)^{\frac{1}{p}}\phi(2N_0+1) \leq C_2(2N+1)^{\frac{1}{p}}\phi(2N+1)$. En este caso tenemos

$$\frac{1}{\phi(2N+1)}\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}\left|\xi_k^{m_0,N_0}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_2(2N+1)^{\frac{1}{p}}}{(2N_0+1)^{\frac{1}{p}}\phi(2N_0+1)}\left(\frac{|S_{m_0,N_0}|}{|S_{m_0,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \frac{C_2}{\phi(2N_0+1)},$$

donde las constantes C_1 y C_2 son independientes de m_0, m, N_0 y N. Luego, tomando supremos sobre $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$ obtenemos

$$\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\phi^p} \leq \frac{C}{\phi(2N_0+1)}$$

donde $C = \max\left\{\frac{1}{C_1}, C_2\right\}$. ■

El siguiente teorema nos da una propiedad de inclusión entre espacios de Morrey discretos generalizados. Antes de enunciarlo introduciremos la siguiente notación.

Sea $X \neq \emptyset$. Para $f, g : X \to \mathbb{R}$ escribimos $f \lesssim g$ si existe una constante $C > 0$ tal que $f(x) \leq Cg(x)$ para cada $x \in X$.

Teorema 4.2.5. *Sea $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\phi_1 \in \mathcal{G}_{p_1}$ y $\phi_2 \in \mathcal{G}_{p_2}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\phi_2 \lesssim \phi_1$ (en $2\mathbb{N}_0 + 1$).

(b) $\|\cdot\|_{\ell^{p_1}_{\phi_1}} \lesssim \|\cdot\|_{\ell^{p_2}_{\phi_2}}$ *(en* $\ell^{p_2}_{\phi_2}$*).*

(c) $\ell^{p_2}_{\phi_2} \subseteq \ell^{p_1}_{\phi_1}$.

Demostración. Demostremos que (a) es equivalente a (b).
Supongamos que (a) se cumple. Sea $x \in \ell^{p_2}_{\phi_2}$, para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi_1(2N+1)}\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \frac{C}{\phi_2(2N+1)}\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ &\leq \frac{C}{\phi_2(2N+1)}\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}\end{aligned}$$

para algún $C > 0$ independiente de m y N.
Tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}_0$ obtenemos

$$\|\cdot\|_{\ell^{p_1}_{\phi_1}} \lesssim \|\cdot\|_{\ell^{p_2}_{\phi_2}}$$

en $\ell^{p_2}_{\phi_2}$.
Ahora supongamos que (b) se cumple. Sean $m_0 \in \mathbb{Z}$, $N_0 \in \mathbb{N}_0$ y ξ^{m_0,N_0} la sucesión característica. Por nuestra suposición

$$\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell^{p_1}_{\phi_1}} \leq C_1\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell^{p_2}_{\phi_2}}$$

para algún $C_1 > 0$. Por otra parte, por el lema 4.2.4

$$\frac{1}{\phi_1(2N_0+1)} \leq \|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell^{p_1}_{\phi_1}}$$

y

$$\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell^{p_2}_{\phi_2}} \leq \frac{C_2}{\phi_2(2N_0+1)}$$

para algún $C_2 > 0$. Tanto C_1 como C_2 son independientes de m_0 y N_0.
Concluimos que

$$\frac{1}{\phi_1(2N_0+1)} \leq \frac{C_1C_2}{\phi_2(2N_0+1)}$$

o equivalentemente

$$\phi_2(2N_0+1) \leq C_1C_2\phi_1(2N_0+1),$$

esto nos dice que $\phi_2 \lesssim \phi_1$ ya que esta última desigualdad se cumple para cualquier $N_0 \in \mathbb{N}$.

Ahora demostremos que (b) es equivalente a (c).
Claramente (b) implica (c). Probemos que (c) implica (b).
Para cualquier $x \in \ell_{\phi_2}^{p_2}$ tenemos $\|x\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}} < \infty$ y por hipótesis sabemos que $\|x\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}} < \infty$. Definamos

$$|||x||| := \|x\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}} + \|x\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}}$$

para cada $x \in \ell_{\phi_2}^{p_2}$. Notemos que $|||\cdot|||$ es una norma en $\ell_{\phi_2}^{p_2}$.
Que $|||x||| \geq 0$ para toda $x \in \ell_{\phi_2}^{p_2}$ y que $|||x||| = 0$ si y sólo si $x = 0$ se siguen inmediatamente de la definición de $|||\cdot|||$. Luego, para $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$|||\alpha x||| = \|\alpha x\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}} + \|\alpha x\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}} = |\alpha| \left[\|x\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}} + \|x\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}}\right] = |\alpha| |||x|||.$$

Por último para $x, y \in \ell_{\phi_2}^{p_2}$

$$\begin{aligned} |||x + y||| &= \|x + y\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}} + \|x + y\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}} \\ &\leq \|x\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}} + \|y\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}} + \|x\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}} + \|y\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}} \\ &= |||x||| + |||y||| \end{aligned}$$

Así, $|||\cdot|||$ es norma en $\ell_{\phi_2}^{p_2}$.

Más aún, $(\ell_{\phi_2}^{p_2}, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach.
En efecto, sea $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_{\phi_2}^{p_2}, |||\cdot|||)$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i, j \geq n_\varepsilon$

$$\left|\left|\left| x^{(i)} - x^{(j)} \right|\right|\right| < \varepsilon,$$

es decir

$$\left\| x^{(i)} - x^{(j)} \right\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}} + \left\| x^{(i)} - x^{(j)} \right\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}} < \varepsilon \tag{4.2}$$

de aquí que

$$\left\| x^{(i)} - x^{(j)} \right\|_{\ell_{\phi_r}^{p_r}} < \varepsilon$$

para $r = 1, 2$. Esto quiere decir que $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\ell_{\phi_r}^{p_r}, \|\cdot\|_{\ell_{\phi_r}^{p_r}})$. Como $(\ell_{\phi_r}^{p_r}, \|\cdot\|_{\ell_{\phi_r}^{p_r}})$ es de Banach para $r = 1, 2$, entonces existen $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $x' = (x'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tales que $x^{(n)} \to x$ en $(\ell_{\phi_1}^{p_1}, \|\cdot\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}})$ y $x^{(n)} \to x'$ en $(\ell_{\phi_2}^{p_2}, \|\cdot\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}})$ cuando $n \to \infty$. Como

$x_k^{(n)} \to x_k$ y $x_k^{(n)} \to x_k'$ cuando $n \to \infty$, entonces por unicidad del límite, $x_k = x_k'$ para toda $k \in \mathbb{Z}$.
Luego haciendo $j \to \infty$ en (4.2) tenemos

$$\left\|x^{(i)} - x\right\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}} + \left\|x^{(i)} - x\right\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}} < \varepsilon$$

para toda $i \geq n_\varepsilon$, es decir,

$$\left|\left|\left|x^{(i)} - x\right|\right|\right| < \varepsilon$$

para toda $i \geq n_\varepsilon$ y como $x \in (\ell_{\phi_2}^{p_2}, |||\cdot|||)$ concluimos que $x^{(n)} \to x$ cuando $n \to \infty$ en $(\ell_{\phi_2}^{p_2}, |||\cdot|||)$. Así $(\ell_{\phi_2}^{p_2}, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach.

Ahora, consideremos el mapeo identidad $I : (\ell_{\phi_2}^{p_2}, |||\cdot|||) \to (\ell_{\phi_2}^{p_2}, \|\cdot\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}})$.
Si $x^{(n)} \to x$ en $(\ell_{\phi_2}^{p_2}, |||\cdot|||)$ entonces $x^{(n)} \to x$ en $(\ell_{\phi_2}^{p_2}, \|\cdot\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}})$ pues $\|\cdot\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}} \leq |||\cdot|||$. Esto nos dice que I es un operador lineal continuo.
Evidentemente $(\ell_{\phi_2}^{p_2}, |||\cdot|||)$ es un subespacio cerrado de $(\ell_{\phi_2}^{p_2}, \|\cdot\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}})$. Luego por el teorema del mapeo abierto I es abierto, como I es biyectivo sabemos que I^{-1} es continuo y por tanto acotado.
Se sigue que existe $C > 0$ tal que $|||x||| \leq C \|x\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}}$ para cada $x \in \ell_{\phi_2}^{p_2}$. Por tanto

$$\|x\|_{\ell_{\phi_1}^{p_1}} \leq |||x||| \leq C \|x\|_{\ell_{\phi_2}^{p_2}}$$

para cada $x \in \ell_{\phi_2}^{p_2}$, lo cual completa la prueba.

■

4.3. Espacios de Morrey discretos generalizados tipo débil

La última generalización que veremos son los espacios de Morrey discretos generalizados tipo débil, los cuales no sólo son una generalización de ℓ_q^p sino también una generalización de ℓ_ϕ^p.

Definición 4.3.1. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $\phi \in \mathcal{G}_p$. El* ***espacio de Morrey discreto generalizado tipo débil*** *denotado por $w\ell_\phi^p$, se define como el conjunto de todas las* *sucesiones* $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *tomando valores en* $\mathbb{K}$ *tales que* $\|x\|_{w\ell^p_\phi} < \infty$, *donde*

$$\|x\|_{w\ell^p_\phi} := \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} \frac{\gamma}{\phi(2N+1)} \left(\frac{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Estos espacios resultan ser son completos con respecto a la cuasi-norma $\|\cdot\|_{w\ell^p_\phi}$ como se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 4.3.2. *Para* $1 \leq p < \infty$ *y* $\phi \in \mathcal{G}_p$, $(w\ell^p_\phi, \|\cdot\|_{w\ell^p_\phi})$ *es un espacio cuasi-Banach.*

Demostración. Primero veamos que el mapeo $\|\cdot\|_{w\ell^p_\phi}$ es una cuasi-norma.
De la definición se sigue inmediatamente que $\|x\|_{w\ell^p_\phi} \geq 0$ para toda $x \in w\ell^p_\phi$.
Si $x = 0$ entonces $|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}| = 0$ para toda $m \in \mathbb{Z}$, para toda $N \in \mathbb{N}_0$ y para toda $\gamma > 0$, entonces $\|x\|_{w\ell^p_\phi} = 0$. Por otro lado si $\|x\|_{w\ell^p_\phi} = 0$ entonces $|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}| = 0$ para toda $m \in \mathbb{Z}$, para toda $N \in \mathbb{N}_0$ y para toda $\gamma > 0$, de aqui que $0 < |x_k| \leq \gamma$ para toda $\gamma > 0$ y para toda $k \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $x_k = 0$ para toda $k \in \mathbb{Z}$ y así $x = 0$.
Ahora consideremos $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in w\ell^p_\phi$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_{w\ell^p_\phi} &= \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} \frac{\gamma}{\phi(2N+1)} \left(\frac{|\{k \in S_{m,N} : |\alpha x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} \frac{\gamma}{\phi(2N+1)} \left(\frac{\left|\left\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \frac{\gamma}{|\alpha|}\right\}\right|}{|S_{m,N}|} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0\\ \delta>0}} \frac{|\alpha|\delta}{\phi(2N+1)} \left(\frac{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \delta\}|}{|S_{m,N}|} \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|x\|_{w\ell^p_\phi}.
\end{aligned}$$

Por último, sean $x, y \in w\ell^p_\phi$. Como

$$\{k \in S_{m,N} : |x_k + y_k| > \gamma\} \subseteq \{k \in S_{m,N} : |x_k| > \tfrac{\gamma}{2}\} \cup \{k \in S_{m,N} : |y_k| > \tfrac{\gamma}{2}\}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_{w\ell^p_\phi} &= \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} \frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{|\{k\in S_{m,N}:|x_k+y_k|>\gamma\}|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} \frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{|\{k\in S_{m,N}:|x_k|>\frac{\gamma}{2}\}|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad + \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} \frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{|\{k\in S_{m,N}:|x_k|>\frac{\gamma}{2}\}|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} \frac{2\delta}{\phi(2N+1)}\left(\frac{|\{k\in S_{m,N}:|x_k|>\delta\}|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad + \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} \frac{2\delta}{\phi(2N+1)}\left(\frac{|\{k\in S_{m,N}:|x_k|>\delta\}|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= 2\left(\|x\|_{w\ell^p_\phi}+\|y\|_{w\ell^p_\phi}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\|\cdot\|_{w\ell^p_\phi}$ es una cuasi-norma.

Ahora veamos la completitud de $w\ell^p_\phi$ con respecto a esta cuasi-norma.
Tomemos $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $w\ell^p_\phi$. Notemos que $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ debe estar acotada en $w\ell^p_\phi$. Sea $0<\varepsilon\leq 1$ y elegimos $M\in\mathbb{N}$ tal que para cada $k_0\in\mathbb{Z}$ y para toda $i,j\geq M$

$$
\frac{\varepsilon}{\phi(1)}\left(\frac{\left|\left\{k\in S_{k_0,0}:\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|>\varepsilon\right\}\right|}{|S_{k_0,0}|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|x^{(i)}-x^{(j)}\right\|_{w\ell^p_\phi} < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}+1}}{\phi(1)}.
$$

Notemos que $S_{k_0,0}=\{k_0\}$ para cada $k_0\in\mathbb{Z}$, entonces

$$
\left|\left\{k\in S_{k_0,0}:\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|>\varepsilon\right\}\right|<\varepsilon
$$

para cada $k_0\in\mathbb{Z}$ e $i,j\geq M$. Esto implica que

$$
\left|x_{k_0}^{(i)}-x_{k_0}^{(j)}\right|\leq\varepsilon
$$

para toda $k_0 \in \mathbb{Z}$ e $i, j \geq M$.
Así $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces existe $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que $x_k^{(n)} \to x_k$ cuando $n \to \infty$.
Sea $C > 0$ tal que $\|x^{(n)}\|_{w\ell^p_\phi} \leq C$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$, observemos que

$$\frac{\gamma}{2\phi(2N+1)}\left(\frac{|\{k\in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\gamma}{2\phi(2N+1)}\left(\frac{\left|\left\{k\in S_{m,N} : \left|x_k - x_k^{(n)}\right| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\frac{\gamma}{2\phi(2N+1)}\left(\frac{\left|\left\{k\in S_{m,N} : \left|x_k^{(n)}\right| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $x_k^{(n)} \to x_k$ cuando $n \to \infty$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ y $S_{m,N}$ es finito, entonces podemos elegir un $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $|x_k^{(n_0)} - x_k| \leq \frac{\gamma}{2}$ para toda $k \in S_{m,N}$. Entonces

$$\frac{\gamma}{2\phi(2N+1)}\left(\frac{\left|\left\{k\in S_{m,N} : \left|x_k - x_k^{(n_0)}\right| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Luego, tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\|x\|_{w\ell^p_\phi} \leq \|x^{(n)}\|_{w\ell^p_\phi} \leq C,$$

y así $x \in w\ell^p_\phi$.
Resta ver que $x^{(n)} \to x$ en la cuasi-norma $\|\cdot\|_{w\ell^p_\phi}$.
Sea $\varepsilon > 0$, fijemos $j \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$. Como para $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\left|x_k - x_k^{(j)}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|$$

obtenemos que $|x_k - x_k^{(j)}| > \gamma$ si y sólo si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}| > \gamma$ para toda $i \geq M$.
Usando esto se prueba fácilmente la identidad

$$\left\{k\in S_{m,N} : \left|x_k - x_k^{(j)}\right| > \gamma\right\} = \bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcap_{i=M}^{\infty}\left\{k\in S_{m,N} : \left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| > \gamma\right\}.$$

Luego, usando la continuidad de la medida de contar obtenemos

$$\frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{\left|\left\{k\in S_{m,N}:\left|x_k-x_k^{(j)}\right|>\gamma\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{\left|\bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcap_{i=M}^{\infty}\left\{k\in S_{m,N}:\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|>\gamma\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\lim_{M\to\infty}\frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{\left|\bigcap_{i=M}^{\infty}\left\{k\in S_{m,N}:\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|>\gamma\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}},$$

y para cada $M\in\mathbb{N}$ tenemos

$$\frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{\left|\bigcap_{i=M}^{\infty}\left\{k\in S_{m,N}:\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|>\gamma\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{\left|\left\{k\in S_{m,N}:\left|x_k^{(M)}-x_k^{(j)}\right|>\gamma\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left\|x^{(M)}-x^{(j)}\right\|_{w\ell^p_\phi}.$$

Como $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $w\ell^p_\phi$, existe $P\in\mathbb{N}$ independiente de m, N y γ tal que si $M,j\geq P$, entonces

$$\left\|x^{(M)}-x^{(j)}\right\|_{w\ell^p_\phi}<\varepsilon.$$

Así, para $j\geq P$

$$\lim_{M\to\infty}\frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{\left|\bigcap_{i=M}^{\infty}\left\{k\in S_{m,N}:\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|>\gamma\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon,$$

entonces para toda $j \geq P$

$$\frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{\left|\left\{k \in S_{m,N} : \left|x_k - x_k^{(j)}\right| > \gamma\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

y tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$

$$\left\|x - x^{(j)}\right\|_{w\ell_\phi^p} < \varepsilon.$$

Así $x^{(n)} \to x$ cuando $n \to \infty$ en $w\ell_\phi^p$.

■

La siguiente proposición relaciona los espacios de Morrey discretos generalizados con los espacios de Morrey discretos generalizados tipo débil.

Proposición 4.3.3. *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $\phi \in \mathcal{G}_p$. *Entonces*

$$\ell_\phi^p \subseteq w\ell_\phi^p.$$

Además $\|x\|_{w\ell_\phi^p} \leq \|x\|_{\ell_\phi^p}$ *para cada* $x \in \ell_\phi^p$.

Demostración. Sean $x \in \ell_\phi^p$, $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{\phi(2N+1)}\left(\frac{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}} &= \frac{1}{\phi(2N+1)}\left(\frac{\gamma^p\,|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{\phi(2N+1)}\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k \in S_{m,N}, |x_k| > \gamma} \gamma^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{\phi(2N+1)}\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k \in S_{m,N}, |x_k| > \gamma} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{\phi(2N+1)}\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|x\|_{\ell_\phi^p}
\end{aligned}$$

y tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$ obtenemos

$$\|x\|_{w\ell^p_\phi} \leq \|x\|_{\ell^p_\phi}$$

y por tanto $\ell^p_\phi \subseteq w\ell^p_\phi$.

$\blacksquare$

El siguiente lema es similar al lema 4.2.4 y será usado para demostrar un análogo al teorema 4.2.5.

Lema 4.3.4. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $\phi \in \mathcal{G}_p$. Si $m_0 \in \mathbb{Z}$, $N_0 \in \mathbb{N}_0$ y ξ^{m_0,N_0} es la sucesión característica, entonces existe $C > 0$ independiente de m_0 y N_0 tal que*

$$\frac{1}{2\phi(2N_0+1)} \leq \left\|\xi^{m_0,N_0}\right\|_{w\ell^p_\phi} \leq \frac{C}{\phi(2N_0+1)}.$$

Demostración. Sean $m_0 \in \mathbb{Z}$ y $N_0 \in \mathbb{N}_0$. Por definición tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\xi^{m_0,N_0}\right\|_{w\ell^p_\phi} &= \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}_0,\\ \gamma>0}} \frac{\gamma}{\phi(2N+1)} \left(\frac{\left|\left\{k \in S_{m,N} : |\xi^{m_0,N_0}_k| > \gamma\right\}\right|}{|S_{m,N}|}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \frac{1}{2\phi(2N_0+1)} \left(\frac{\left|\left\{k \in S_{m_0,N_0} : |\xi^{m_0,N_0}_k| > \frac{1}{2}\right\}\right|}{|S_{m_0,N_0}|}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{2\phi(2N_0+1)} \left(\frac{|S_{m_0,N_0}|}{|S_{m_0,N_0}|}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{2\phi(2N_0+1)}.
\end{aligned}$$

Luego, usando el lemma 4.2.4 y la proposición 4.3.3 existe $C > 0$ independiente de m_0 y N_0 tal que

$$\left\|\xi^{m_0,N_0}\right\|_{w\ell^p_\phi} \leq \left\|\xi^{m_0,N_0}\right\|_{\ell^p_\phi} \leq \frac{C}{\phi(2N_0+1)}$$

lo cual completa la prueba.

$\blacksquare$

Teorema 4.3.5. *Sean $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\phi_1 \in \mathcal{G}_{p_1}$ y $\phi_2 \in \mathcal{G}_{p_2}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\phi_2 \lesssim \phi_1$ *(en* $2\mathbb{N}_0 + 1$*).*

(b) $\|\cdot\|_{w\ell^{p_1}_{\phi_1}} \lesssim \|\cdot\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}}$ *(en* $w\ell^{p_2}_{\phi_2}$*).*

(c) $w\ell^{p_2}_{\phi_2} \subseteq w\ell^{p_1}_{\phi_1}$.

Demostración. Demostremos que (a) es equivalente a (b).
Supongamos que (a) se cumple. Sean $x \in w\ell^{p_2}_{\phi_2}$, $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$. Por definición tenemos que

$$\frac{\gamma}{\phi_2(2N+1)} \left(\frac{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \|x\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}}.$$

Suponiendo que $|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}| \neq 0$,

$$\frac{\gamma}{\phi_2(2N+1)} \leq \left(\frac{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|} \right)^{-\frac{1}{p_2}} \leq \|x\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}},$$

de aquí que

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{\phi_1(2N+1)} \left(\frac{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|} \right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \frac{C\gamma}{\phi_2(2N+1)} \left(\frac{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leq C \left(\frac{|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}|}{|S_{m,N}|} \right)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|x\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}} \\ &\leq C\|x\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}}\end{aligned}$$

para alguna $C > 0$ independiente de m, N y γ. Notemos que esta desigualdad también se cumple cuando $|\{k \in S_{m,N} : |x_k| > \gamma\}| = 0$.
Tomando supremo sobre $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma > 0$, obtenemos

$$\|x\|_{w\ell^{p_1}_{\phi_1}} \leq C\|x\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}}.$$

Así (b) se cumple.
Recíprocamente, supongamos que (b) se cumple. Sea $m_0 \in \mathbb{Z}$, $N_0 \in \mathbb{N}_0$ y ξ^{m_0,N_0} la sucesión característica. Entonces tenemos

$$\left\|\xi^{m_0,N_0}\right\|_{w\ell^{p_1}_{\phi_1}} \leq C_1 \left\|\xi^{m_0,N_0}\right\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}}$$

para algún $C_1 > 0$ independiente de m_0 y N_0. Luego por el lema 4.3.4 tenemos

$$\frac{1}{2\phi_1(2N_0+1)} \leq \left\|\xi^{m_0,N_0}\right\|_{w\ell^{p_1}_{\phi_1}}$$

y

$$\|\xi^{m_0,N_0}\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}} \leq \frac{C_2}{\phi_2(2N_0+1)}$$

para alguna $C_2 > 0$ independiente de m_0 y N_0. Concluimos que

$$\frac{1}{\phi_1(2N_0+1)} \leq \frac{C}{\phi_2(2N_0+1)}$$

o equivalentemente

$$\phi_2(2N_0+1) \leq C\phi_1(2N_0+1)$$

para algún $C > 0$ independiente de N_0. Como N_0 es arbitrario entonces (a) se cumple.

Demostremos que (b) es equivalente a (c).
Que (b) implica (c) es evidente.
Supongamos que (c) se cumple. Sea $x \in w\ell^{p_2}_{\phi_2}$. Entonces $\|x\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}} < \infty$ y por hipótesis también $\|x\|_{w\ell^{p_1}_{\phi_1}} < \infty$.
Definimos

$$|||x||| := \|x\|_{w\ell^{p_1}_{\phi_1}} + \|x\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}}$$

para $x \in w\ell^{p_2}_{\phi_2}$. Bajo argumentos completamente análogos a los realizados en la demostración del teorema 4.2.5 podemos demostrar que $|||\cdot|||$ es una cuasi-norma en $w\ell^{p_2}_{\phi_2}$ y $(w\ell^{p_2}_{\phi_2}, |||\cdot|||)$ es un espacio cuasi-Banach.
Luego, consideremos el mapeo identidad $I : (w\ell^{p_2}_{\phi_2}, |||\cdot|||) \to (w\ell^{p_2}_{\phi_2}, \|\cdot\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}})$. Notemos que si $x^{(n)} \to x$ en $(w\ell^{p_2}_{\phi_2}, |||\cdot|||)$ entonces $x^{(n)} \to x$ en $(w\ell^{p_2}_{\phi_2}, \|\cdot\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}})$, pues $\|\cdot\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}} \leq |||\cdot|||$.
Así I es un operador lineal continuo. Observemos que $(w\ell^{p_2}_{\phi_2}, |||\cdot|||)$ es un subespacio cerrado de $(w\ell^{p_2}_{\phi_2}, \|\cdot\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}})$. Luego, por el teorema del mapeo abierto el cual también se cumple para espacios cuasi-Banach, se sigue que I es abierto. Como I es biyectivo, I^{-1} es continuo y por tanto acotado. Así, existe $C > 0$ tal que $|||x||| \leq C\|x\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}}$ para cada $x \in w\ell^{p_2}_{\phi_2}$.
Por tanto

$$\|x\|_{w\ell^{p_1}_{\phi_1}} \leq |||x||| \leq C\|x\|_{w\ell^{p_2}_{\phi_2}}$$

para cada $x \in w\ell^{p_2}_{\phi_2}$. Lo cual completa la prueba.

■

Conclusiones

A pesar de que los espacios de Morrey discretos son subespacios cerrados de los espacios de Morrey clásicos, vimos que considerados como espacios normados independientes de sus contrapartes continuas, se puede desarrollar una extensa teoría.

Primero mostramos que los espacios de Morrey discretos ℓ_q^p (con $1 \leq p \leq q < \infty$) son espacios de Banach, también que son una generalización de los espacios ℓ^p teniendo las siguientes inclusiones:

$$\ell^p \subseteq \ell_q^p \subset \ell^\infty$$

donde la primera inclusión se vuelve estricta si $q > p$. Por otro lado, probamos que al tomar dos espacios de Morrey discretos y variar sus parámetros tenemos las siguientes inclusiones: para $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq q_2 \leq q_1 < \infty$ se tiene

$$\ell_{q_2}^{p_2} \subseteq \ell_{q_2}^{p_1} \subseteq \ell_{q_1}^{p_1}.$$

También demostramos el acotamiento de los operadores de multiplicación, convolución, del operador maximal de Hardy-Littlewood y potenciales de Riesz, obteniendo las siguientes estimaciones: sean $x \in \ell_q^p$ con $1 \leq p \leq q < \infty$, $y \in \ell^1$ y $z \in \ell^\infty$, entonces

$$\|M_z(x)\|_{\ell_q^p} \leq \|z\|_{\ell^\infty} \|x\|_{\ell_q^p},$$

$$\|C_y(x)\|_{\ell_q^p} \leq \|y\|_{\ell^1} \|x\|_{\ell_q^p},$$

$$\|Mx\|_{\ell_q^p} \leq C_1 \|x\|_{\ell_q^p} \text{ para algún } \; C_1 > 0 \quad \text{y}$$

$$\|I_\alpha x\|_{\ell_t^s(\mathbb{Z}^d)} \leq C_2 \|x\|_{\ell_q^p(\mathbb{Z}^d)} \text{ para algún } \; C_2 > 0,$$

donde en la última línea $0 < \alpha < d$, $1 < p < q < \frac{d}{\alpha}$, $s = \frac{dp}{d - \alpha q}$ y $t = \frac{qs}{p}$.

Posteriormente con ayuda de las constantes geométricas $C_{NJ}(\ell^p_q)$, $C_J(\ell^p_q)$ y $C_{DW}(\ell^p_q)$, descubrimos que los espacios de Morrey discretos ℓ^p_q con $1 \leq p < q < \infty$ están lejos de ser espacios de Hilbert, es decir, no podríamos definir un producto interior en ellos y que no son reflexivos, o en otras palabras, no son isométricos a su doble dual bajo el mapeo natural.

Por último, los espacios de Morrey discretos pueden ser generalizados pero al hacerlo podemos perder algunas propiedades como el ser espacio normado, lo cual sucede con los espacios de Morrey discretos tipo débil y con los espacios de Morrey discretos generalizados tipo débil que resultaron ser espacios cuasi-normados.

A comparación de otros espacios, la teoría desarrollada con respecto a los espacios de Morrey discretos parece ser poca, sin embargo, hay que considerar lo recientes que son estos resultados, por lo que claramente hay mucho que desarrollar en esta área.

Apéndice A

Espacios de Morrey

Definición A.1. *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $-\frac{1}{p} \leq \lambda$. *El* ***espacio de Morrey*** *denotado por* $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *se define de la siguiente manera:*

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

donde

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{a \in \mathbb{R}^n, r>0} \left[\frac{1}{|B_r(a)|^{1+\lambda p}} \int_{B_r(a)} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Variando los valores de λ tenemos las siguientes observaciones.

Observación A.2.

(a) Si $\lambda = -\frac{1}{p}$ *entonces* $L^{p,-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) Si $\lambda = 0$ *entonces* $L^{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(c) Si $\lambda > 0$ *entonces* $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

Demostración. Sea $f \in L^p$. Notemos que

$$\left[\int_{B_r(a)} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

y como

$$\|f\|_{L^{p,-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} \left[\int_{B_r(a)} |f(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

entonces

$$\|f\|_{L^{p,-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

Así $f \in L^{p,-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Por otro lado, sea $f \in L^{p,-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ y notemos que para toda $r_i > 0$,

$$\left[\int_{B_{r_i}(a)} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^{p,-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Luego, haciendo $r_i \to \infty$ obtenemos

$$\|f\|_{L^p} < \infty.$$

Por lo tanto $f \in L^p$, lo que demuestra (a).

Para demostrar (b) notemos que para $f \in L^{p,0}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{L^{p,0}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} \left[\frac{1}{|B_r(a)|}\int_{B_r(a)} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Luego por el teorema de diferenciación de Lebesgue

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^{p,0}(\mathbb{R}^n)}$$

casi en todas partes, luego $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Recíprocamente si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\left[\frac{1}{|B_r(a)|}\int_{B_r(a)} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\frac{1}{|B_r(a)|}\int_{B_r(a)} \|f\|_\infty^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_\infty < \infty.$$

Así $f \in L^{p,0}(\mathbb{R}^n)$.

Por último, para $\lambda > 0$ tenemos que

$$\frac{1}{|B_r(a)|^{\lambda}}\left[\frac{1}{|B_r(a)|}\int_{B_r(a)}|f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

para toda $a \in \mathbb{R}^n$ y para toda $r > 0$. Notemos que esto no se cumple a menos que $f = 0$, ya que si hacemos $r \to 0$ y usamos el Teorema de Diferenciación de Lebesgue obtenemos algo no acotado.
Por lo tanto $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ si $\lambda > 0$.

■

De esta observación se siguen dos cosas. Primero, que los espacios de Morrey son una generalización de los espacios L^p. Segundo, que los espacios de Morrey de nuestro interés serán aquellos que tengan $-\frac{1}{p} < \lambda < 0$.

El siguiente teorema nos habla sobre la completitud de los espacios de Morrey.

Teorema A.3. *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $-\frac{1}{p} < \lambda < 0$. *Entonces* $(L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de Cauchy, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $j, k \geq N$

$$\|f_j - f_k\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon,$$

de aquí que para toda $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $j, k \geq N$

$$\left[\frac{1}{|B_r(a)|^{1+\lambda p}}\int_{B_r(a)}|f_j(x) - f_k(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|f_j - f_k\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon,$$

en particular para toda $j, k \geq N$

$$\left[\frac{1}{|B_r(0)|^{1+\lambda p}}\int_{B_r(0)}|f_j(x) - f_k(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

luego, como $|B_r(0)| = c_n r^n$

$$\left[\int_{B_r(0)}|f_j(x) - f_k(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon C_n r^{n(\frac{1}{p}+\lambda)}.$$

Así, para cada $r > 0$, $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(B_r(0))$ y como $L^p(B_r(0))$ es completo, entonces $(f_j|_{B_r(0)})_{j=1}^{\infty}$ converge en $L^p(B_r(0))$. Denotaremos por $f^{B_r(0)}$ al límite de $(f_j|_{B_r(0)})_{j=1}^{\infty}$.

Consideremos una sucesión creciente de radios $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ tales que $r_j \uparrow \infty$ y definamos

$$f(x) := f^{B_{r_j}(0)}(x)$$

si $x \in B_{r_j}(0)$.
Veamos que f está bien definida. Tomemos $k > j$ y $x \in B_{r_j}(0) \subset B_{r_k}(0)$, entonces

$$f_m|_{B_{r_j}(0)} \to f^{B_{r_j}(0)}$$

cuando $m \to \infty$ en $L^p(B_{r_j}(0))$, y también

$$f_m|_{B_{r_j}(0)} \to f^{B_{r_k}(0)}$$

cuando $m \to \infty$ en $L^p(B_{r_k}(0))$ pues $f_m|_{B_{r_j}(0)} = (f_m|_{B_{r_k}(0)})|_{B_{r_j}(0)}$. Luego, por unicidad del límite en $L^p(B_{r_j}(0))$ se sigue que

$$f^{B_{r_k}(0)}|_{B_{r_j}(0)} = f^{B_{r_j}(0)}$$

casi en todas partes.

Por último, veamos que f_j converge a f en $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.
Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Supongamos que $r < r_l$ para algún $l \in \mathbb{N}$, de forma que $B_r(a) \subset B_{r_l}(0)$.
Como $f_j|_{B_r(a)} \to f$ cuando $j \to \infty$ en $L^p(B_r(a))$, existe una subsucesión $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(f_j|_{B_r(a)})_{j=1}^{\infty}$ convergente a f casi en todas partes en $B_r(a)$.
Así, para $j \in \mathbb{N}$ fija

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{|B_r(a)|^{1+\lambda p}} \int_{B_r(a)} |f_j(x) - f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\frac{1}{|B_r(a)|^{1+\lambda p}} \int_{B_r(a)} \liminf_{k\to\infty} |f_j(x) - f_{n_k}(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \left[\frac{1}{|B_r(a)|^{1+\lambda p}} \int_{B_r(a)} |f_j(x) - f_{n_k}(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

para j y k suficientemente grandes.

De aquí que

$$\|f_j - f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$$

para j suficientemente grande.
Como $f_j - f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y $f_j \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y por tanto

$$f_j \to f \text{ en } L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

cuando $j \to \infty$.

■

A continuación veremos el acotamiento de la función maximal de Hardy-Littlewood actuando sobre los espacios de Morrey.

Definamos la función maximal de Hardy-Littlewood.

Definición A.4. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. La* ***Función Maximal de Hardy-Littlewood*** *para f se define así:*

$$Mf(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|dy.$$

La continuidad de esta función sobre espacios de Morrey se enuncia en el siguiente teorema, el cual fue demostrado por Filippo Chiarenza y Michele Frasca en [3].

Teorema A.5. *Sean $1 < p < \infty$ y $-\frac{1}{p} < \lambda < 0$. Entonces la función maximal M es acotada en $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

La demostración de este resultado hace uso de la siguiente desigualdad a la que llamaremos **desigualdad de Fefferman-Stein** y que probaremos en el siguiente apéndice.

Si f y φ son funciones medibles con valores reales y $\varphi \geq 0$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \varphi(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M\varphi(x)dx \tag{A.1}$$

Demostración. Sea $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi = \chi_{B_r(a)}$. Usando (A.1) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_r(a)} (Mf(x))^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \varphi(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M\varphi(x) dx \\ &= C \int_{B_{2r}(a)} |f(x)|^p M\varphi(x) dx + C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{2^{k+1}r}(a) \setminus B_{2^k r}(a)} |f(x)|^p M\varphi(x) dx\end{aligned}$$

Luego, por definición

$$\begin{aligned}M\varphi(x) &= \sup_{\rho>0} \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} \chi_{B_r(a)}(y) dy \\ &\leq \sup_{\rho>0} \frac{|B_r(a) \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} \\ &\leq 1\end{aligned}$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$ en particular para $x \in B_{2r}(a)$.

Ahora, notemos que para que la intersección $B_r(a) \cap B_\rho(x)$ exista cuando $2^k r \leq |x-a| \leq 2^{k+1}r$ necesitamos que $\rho > (2^{k+1}-1)r$. Para tales x tendremos que

$$\begin{aligned}M\varphi(x) &\leq \sup_{\rho>(2^{k+1}-1)r} \frac{|B_r(a) \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} \\ &\leq \frac{r^n}{(2^{k+1}-1)^n r^n} \\ &\leq \frac{r^n}{(|x-a|-r)^n}.\end{aligned}$$

Sustituyendo estas estimaciones en la primer desigualdad obtenemos:

$$\int_{B_r(a)} (Mf(x))^p dx \leq C \left[\int_{B_{2r}(a)} |f(x)|^p dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{2^{k+1}r}(a) \setminus B_{2^k r}(a)} |f(x)|^p \frac{r^n}{(|x-a|-r)^n} dx \right].$$

Luego, como $\frac{1}{|x-a|-r} < \frac{1}{(2^k-1)r} \leq \frac{1}{2^{k-1}r}$ para $k = 1, 2, \ldots$, tendremos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(a)} (Mf(x))^p dx &\leq C \left[\int_{B_{2r}(a)} |f(x)|^p dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^n}{(2^{k-1}r)^n} \int_{B_{2^{k+1}r}(a)} |f(x)|^p dx \right] \\
&\leq C \left[|B_{2r}(a)|^{1+\lambda p} \|f\|^p_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k-1})^n} |B_{2^{k+1}r}(a)|^{1+\lambda p} \|f\|^p_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \right] \\
&= C \|f\|^p_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \left[r^{n(1+\lambda p)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{kn-n}} 2^{(k+1)n(1+\lambda p)} r^{n(1+\lambda p)} \right] \\
&\leq C \|f\|^p_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} r^{n(1+\lambda p)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kn} 2^{kn(1+\lambda p)} 2^n 2^{n(1+\lambda p)} \right] \\
&\leq C \|f\|^p_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} r^{n(1+\lambda p)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kn\lambda p} \right] \\
&\leq C \|f\|^p_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} |B_r(a)|^{1+\lambda p},
\end{aligned}$$

ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{kn\lambda p}$ converge porque $\lambda p < 0$ y donde $C = C(n, \lambda, p)$.

Hemos mostrado que para toda $a \in \mathbb{R}^n$ y para toda $r > 0$

$$\left[\frac{1}{|B_r(a)|^{1+\lambda p}} \int_{B_r(a)} (Mf(x))^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq C \|f\|^p_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)},$$

esto es, M es acotada en $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$ y $-\frac{1}{p} < \lambda < 0$.

■

Apéndice B

Desigualdades importantes

La desigualdad de Minkowski para integrales es una generalización de la desigualdad de Minkowski. Su demostración puede consultarse en [7], página 194.

Teorema B.1. (Desigualdad de Minkowski para integrales)
Suponga que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *son espacios de medida* σ*-finitos, y sea* f *una función* $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$*-medible en* $X \times Y$*.*

(a) Si $f \geq 0$ *y* $1 \leq p < \infty$*, entonces*

$$\left[\int \left(\int f(x,y) d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\int f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

(b) Si $1 \leq p \leq \infty$*,* $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ *para casi toda* y*, y la función* $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ *está en* $L^1(\nu)$*, entonces* $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ *para casi toda* x*, la función* $x \mapsto \int f(x,y) d\nu(y)$ *está en* $L^p(\mu)$ *y*

$$\left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p \, d\nu(y).$$

Claramente la parte (a) es la que usamos en este trabajo ya que siempre tenemos $1 \leq p < \infty$.

La siguiente desigualdad demostrada en [6] es usada para demostrar el acotamiento de la función maximal de Hardy-Littlewood.

La demostración aquí presentada se puede consultar en [9] (capítulo 2, teorema 2.12) y hace uso del teorema de interpolación de Marcinkiewicz[1], de la descomposición de Calderón-Zygmund y otros resultados que se pueden consultar en [9].

Teorema B.2. (Desigualdad de Fefferman-Stein)
Sean f y ϕ funciones medibles real-valuadas con $\phi \geq 0$. Sea M la función maximal de Hardy-Littlewood. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \phi(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M\phi(x)dx, \tag{B.1}$$

donde C es una constante que sólo depende de p.

Demostración. Cuando $M\phi(x) = \infty$ c.t.p. la desigualdad (B.1) se cumple trivialmente. Cuando no es así, $M\phi$ es la densidad de una medida positiva μ (es decir, $d\mu(x) = M\phi(x)dx$) y ϕ es la densidad de otra medida positiva ν (es decir, $d\nu(x) = \phi(x)dx$). De este modo (B.1) significa que M es un operador acotado de $L^p(\mu)$ en $L^p(\nu)$.
Esto claramente se cumple para $p = \infty$. De hecho, si $M\phi(x) = 0$ para alguna x, entonces $\phi(x) = 0$ c.t.p. y $L^\infty(\nu) = 0$, por lo que nada necesita ser probado.
Por otro lado, si $M\phi(x) > 0$ para cada x y $\alpha > \|f\|_{L^\infty(\mu)}$, tenemos que

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\alpha\}} M\phi(x)dx = 0$$

y consecuentemente $|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| = 0$, o lo que es lo mismo, $|f(x)| \leq \alpha$ c.t.p. por lo cual $Mf(x) \leq \alpha$ c.t.p. Así $\|Mf\|_{L^\infty(\nu)} \leq \alpha$ y finalmente

$$\|Mf\|_{L^\infty(\nu)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

Teniendo que M es de tipo débil (∞, ∞), si demostramos que M es de tipo débil $(1, 1)$ con respecto a la pareja (ν, μ), entonces por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz obtendríamos (B.1). Así, todo lo que necesitamos es probar que:

$$\int_{\{x:Mf(x)>t\}} \phi(x)dx \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(M\phi)(x)dx \tag{B.2}$$

[1] Ver [9], página 148, teorema 2.11.

Claramente podemos suponer que $f \geq 0$. También podemos suponer que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De hecho, podemos encontrar una sucesión $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ de funciones integrables tales que $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ y $f_j \uparrow f$ c.t.p. Observemos que

$$\{x : Mf(x) > t\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x : Mf_j(x) > t\}.$$

Luego, como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \geq 0$, dado $t > 0$ por la descomposición de Calderón-Zygmund existe una familia de cubos $\{Q_j\}$ que no se traslapan tales que para cada j se tiene que

$$\frac{t}{4^n} < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x)dx \leq \frac{t}{2^n},$$

además

$$\{x : Mf(x) > t\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^3$$

donde Q_j^3 denota al cubo con el mismo centro que Q_j pero con longitud de lado 3 veces la longitud de lado de Q_j.

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\{x:Mf(x)>t\}} \phi(x)dx &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j^3} \phi(x)dx \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|Q_j^3|} \int_{Q_j^3} \phi(x)|Q_j^3|dx \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|Q_j^3|} \int_{Q_j^3} \phi(x) \left[\frac{3^n 4^n}{t} \int_{Q_j} f(y)dy\right] dx \\
&= \frac{3^n 4^n}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} f(y) \left[\frac{1}{|Q_j^3|} \int_{Q_j^3} \phi(x)dx\right] dy \\
&\leq \frac{3^n 4^n}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} f(y)(M\phi)(y)dy \\
&\leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(M\phi)(x)dx.
\end{aligned}$$

■

Bibliografía

[1] D. R. Adams. A note on Riesz potentials. *Duke Mathematical Journal*, 42(4):765–778, 1975.

[2] E. Casini. About some parameters of normed linear spaces. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti*, 80:11–15, 1986.

[3] F. Chiarenza and M. Frasca. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function. *Rend. Mat.*, 7:273–279, 1987.

[4] J. A. Clarkson. The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue spaces. *Ann. of Math.*, 38:114–115, 1937.

[5] C. F. Dunkl and K. S. Williams. A simple norm inequality. *The American Mathematical Monthly*, 71(1):53–54, 1964.

[6] C. Fefferman and E. M. Stein. Some maximal inequalities. *American Journal of Mathematics*, 93(1):107–115, 1971.

[7] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications.* John Wiley & Sons, 2nd edition, 1999.

[8] J. Gao and K.-S. Lau. On the geometry of spheres in normed linear spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 48(1):101–112, 1990.

[9] J. Garcia-Cuerva and J.L. Rubio De Francia. *Weighted norm inequalities and related topics.* Notas de matematica 104 North-Holland mathematics studies 116. North-Holland, 1985.

[10] H. Gunawan, E. Kikianty, Y. Sawano, and C. Schwanke. Three geometric constants for Morrey spaces. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2019.

[11] H. Gunawan, E. Kikianty, and C. Schwanke. Discrete Morrey spaces and their inclusion properties. *Math. Nachr.*, 291:1283–1296, (2018).

[12] H. Gunawan and C. Schwanke. The Hardy-Littlewood maximal operator on discrete Morrey spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 16(1):1–12, 2019.

[13] M. Guzmán-Partida. Boundedness and compactness of some operators on discrete Morrey spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 62(2):151–158, 2021.

[14] H. Hanche-Olsen and H. Holden. The Kolmogorov-Riesz compactness theorem. *Expositiones Mathematicae*, 28(4):385–394, 2010.

[15] R. C. James. Uniformly non-square Banach spaces. *Annals of Mathematics*, pages 542–550, 1964.

[16] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster, and E. M. Mazcunán-Navarro. The Dunkl-Williams constant, convexity, smoothness and normal structure. *Journal of mathematical analysis and applications*, 342(1):298–310, 2008.

[17] P. Jordan and J. von Neumann. On inner products in linear metric spaces. *Annals of Mathematics*, pages 719–723, 1935.

[18] M. Kato and L. Maligranda. On James and Jordan-von Neumann constants of Lorentz sequence spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, 258(2):457–465, 2001.

[19] E. Kikianty and C. Schwanke. Discrete Morrey spaces are closed subspaces of their continuous counterparts. *Banach Center Publications*, 119:223–231, 2019.

[20] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1991.

[21] C. B. Morrey. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43(1):126–166, 1938.

[22] E. Nakai. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces. *Mathematische Nachrichten*, 166(1):95–103, 1994.

[23] H. Royden and P. Fitzpatrick. *Real analysis*. Macmillan New York, 1988.

[24] Y. Sawano, S. Sugano, and H. Tanaka. Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363(12):6481–6503, 2011.

[25] Y. Sawano and H. Tanaka. Morrey spaces for non–doubling measures. *Acta Mathematica Sinica*, 21(6):1535–1544, 2005.