



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Maestría en Matemáticas

GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA DE SIMETRÍAS DEL
OSCILADOR ARMÓNICO CON RESONANCIA

T E S I S

Para obtener el título de:
Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Lic. Jhonny Kama Mamani

Director de tesis: **Dr. Misael Avendaño Camacho**

Codirector: **Dr. José Crispín Ruiz Pantaleón**

Hermosillo, Sonora, México, 25 de agosto de 2022

SINODALES

Dr. Yuri Vorobev

Universidad de Sonora

Dr. Andrés Pedroza

Universidad de Colima

Dr. Misael Avendaño Camacho

Universidad de Sonora

Dr. José Crispín Ruiz Pantaleón

Universidad de Sonora

*Dedicado a las personas más
importantes en mi vida, mi familia.
A mis queridos padres Carlos y Maruja
y a mis hermanos Yhovana, Richar, Eva y Nelson
los quiero a todos más de lo que puedo expresar con palabras ★*

Agradecimientos

En principio quiero agradecer a Dios por haberme dado salud a mí y mi familia, y por haberme permitido alcanzar este objetivo y cumplir este sueño en mi vida. Agradecer a mis queridos padres Carlos y Maruja a quienes les debo todo lo que soy, gracias por el apoyo incondicional, paciencia y confianza.

Agradecer también a mis queridos hermanos Yhovana, Richar, Eva y Nelson, quienes desde la distancia me alentaron, apoyaron con sus palabras. Agradecer de manera muy especial a Jessica Pilar Ticona Lopez quien desde el comienzo de este objetivo me brindó su apoyo incondicional, por darme felicidad, paciencia, comprensión, confianza, aún desde la distancia, gracias por todo su cariño y por todo su amor.

Este presente trabajo de tesis no hubiera sido posible realizar sin la guía, orientación académica de mi estimado profesor Misael Avendaño Camacho, gracias por toda su paciencia, por todas sus sugerencias y sobre todo por toda la confianza depositada en mí.

Finalmente quiero agradecer también a todos los profesores del Posgrado que han contribuido en mi formación, en especial quiero agradecer a los profesores Yuri Vorobev, Ruben Flores, José Crispin Pantaleon.

Johnny Kama Mamani

Julio, 2022.

Índice general

Agradecimientos	II
Introducción	V
1. Variedades de Poisson y Sistemas Hamiltonianos	1
1.1. Ecuaciones de Hamilton en \mathbb{R}^{2n} : Definición, propiedades y ejemplos	2
1.2. Corchete de Poisson en \mathbb{R}^{2n} y transformaciones canónicas	8
1.3. Sistemas Hamiltonianos integrables en \mathbb{R}^{2n}	13
1.4. Variedades de Poisson: nociones básicas	15
1.5. Estructuras de Poisson en \mathbb{R}^3	20
2. El oscilador armónico con dos grados de libertad	23
2.1. Modelo Hamiltoniano: Oscilador armónico con 1-grado de libertad	23
2.2. Modelo Hamiltoniano: Oscilador armónico con 2-grados de libertad	25
2.3. Trayectorias del oscilador armónico con 2-grados de libertad en el espacio de configuraciones	27
2.4. Simetrías y álgebra de integrales primeras del oscilador armónico	32
2.5. Subvariedades invariantes del oscilador armónico	38
2.6. Dinámica del oscilador armónico sobre los toros de Liouville	43
3. Teoría de reducción invariante para el oscilador armónico con resonancia	52
3.1. Espacios reducidos para variedades de Poisson	58
3.2. Teoría de funciones suaves G -invariantes	60
3.3. Teoría de reducción para el oscilador armónico resonante	62
3.4. Espacio reducido para conjuntos de nivel de la aplicación momentum	69
3.5. Fibración de Hopf, resonancia 1:1	72
4. Aplicaciones: Teoría de perturbaciones para el oscilador armónico con resonancia	80
4.1. Equilibrios relativos para campos vectoriales G -invariantes	80
4.2. Equilibrios relativos para sistemas Hamiltonianos	82
4.3. Método de Promedios en Variedades	86
4.4. Perturbaciones de campos vectoriales con flujo periódico	87
4.5. órbitas periódicas para sistemas Hamiltonianos perturbados	90

4.6. Perturbaciones del oscilador armónico con resonancias	92
A. Grupos de Lie y Acciones de Grupos	98
A.1. Grupos de Lie	98
A.2. Definiciones y propiedades	98
A.3. Acciones de Grupos de Lie	100
Bibliografía	104

Introducción

El oscilador armónico 2-dimensional o con 2-grados de libertad es un modelo bien conocido y elemental tanto en física como en matemáticas. Por ejemplo, aparece como modelo lineal en el estudio de oscilaciones, que es un área de interés común de ambas disciplinas. También lo podemos encontrar en mecánica clásica y cuántica, ya que es uno de los sistemas Hamiltonianos más elementales [2],[10].

El oscilador armónico con 2-grados de libertad es un sistema Hamiltoniano en \mathbb{R}^4 dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\omega_1^2 q_1 & \dot{p}_2 &= -\omega_2^2 q_2 \\ \dot{q}_1 &= p_1 & \dot{q}_2 &= p_2 \end{aligned} \quad (1)$$

con función Hamiltoniana

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) \quad (2)$$

con ω_1, ω_2 parámetros reales llamadas frecuencias. Uno de los propósitos de este trabajo es describir con cierto nivel de detalle algunos aspectos geométricos, dinámicos y algebraicos del oscilador armónico con 2-grados de libertad. Estos aspectos tienen una marcada dependencia con la relación entre las frecuencias $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ la cual pretendemos resaltar en este trabajo; identificando las diferencias más notorias entre el caso resonante $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ del no resonante $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ [1], [13]. Las principales propiedades del oscilador armónico con dos grados de libertad que se analizan en este trabajo son los siguientes:

- 1.- El flujo del oscilador armónico (1) en el espacio fase \mathbb{R}^4 .
- 2.- La geometría de los conjuntos invariantes del oscilador armónico dados los conjuntos de nivel del Hamiltoniano H (2) y los toros de Liouville del oscilador armónico.
- 3.- El comportamiento dinámico de oscilador armónico sobre los toros de Liouville.
- 4.- El álgebra de simetrías del oscilador armónico que se define por

$$\mathcal{A}_H := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^4) \mid \{H, f\} = 0\}, \quad (3)$$

donde el corchete $\{\cdot, \cdot\}$ es la estructura de Poisson canónica en $\mathbb{R}_{p,q}^4$ dada por

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

para todo $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{p,q}^4)$.

Estudiando el flujo del oscilador armónico (1) rápidamente es posible destacar la diferencia entre los casos resonante y no resonante: el oscilador armónico (1) tiene flujo periódico y sólo si $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$. Además de esta característica, estudiamos el flujo del oscilador armónico en el espacio de configuraciones \mathbb{R}_{q_1, q_2}^2 en donde obtenemos las llamadas curvas de Lissajous (curvas planas) que nos permiten apreciar de las trayectorias en el caso no resonante.

El flujo del oscilador armónico tiene tres tipos de conjuntos invariantes que es importante resaltar, principalmente porque son subvariedades regulares: a) Los llamados modos normales que son trayectorias cerradas del oscilador que se obtienen sobre los planos $p_1 = q_1 = 0$ y $p_2 = q_2 = 0$. b) los toros de Liouville, variedades 2-dimensionales determinadas por conjuntos de nivel de integrales primeras del oscilador armónico y que son un reflejo de que el sistema sea integrable. c) Los conjuntos de nivel regulares del Hamiltoniano del oscilador armónico, los cuales resultan ser variedades tres dimensionales difeomorfas a la 3-esfera. En este trabajo describimos como están relacionadas los tres tipos de conjuntos invariantes que se mencionaron anteriormente. Específicamente, mostramos que cada conjunto de nivel regular del Hamiltoniano H contiene exactamente 2 modos normales y el resto está foliado sobre por toros de Liouville. También se describe la dinámica del oscilador armónico sobre los conjuntos invariantes destacando otra diferencia notable entre los casos resonante y no resonante. En el caso resonante cada toro de Liouville está foliado por órbitas periódicas del oscilador armónico, mientras que en el caso no resonante, cada órbita del oscilador en un toro de Liouville lo cubre densamente.

Para el álgebra de simetrías \mathcal{A}_H (3) se muestra que este conjunto es una subálgebra de Poisson de $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{p,q}^4), \{\cdot, \cdot\})$. Más aún, probamos que es una \mathbb{R} -álgebra finitamente generada, es decir, existe un número finito de integrales primeras (base de Hilbert) que cualquier otra función $f \in \mathcal{A}_H$ se expresa en terminos de los elementos de esa base. Además, implementamos un procedimiento solo aplicable al oscilador armónico que permite obtener fórmulas explícitas para los generadores del álgebra \mathcal{A}_H . Aquí también encontramos otra diferencia importante entre los casos resonante y no resonante. En el último, el conjunto generador tiene exactamente dos elementos mientras que el caso resonante tiene cuatro funciones generadores. Además, en el caso resonante el álgebra \mathcal{A}_H coincide con el álgebra de funciones invariantes bajo la acción de \mathbb{S}^1 en $\mathbb{R}_{p,q}^4$ inducida bajo el flujo del oscilador armónico. En este caso, se hace uso de las funciones generadores $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$ para construir la aplicación de Hilbert $\mathcal{H} : \mathbb{R}_{p,q}^4 \rightarrow \mathbb{R}_\nu^4$ como

$$\mathcal{H}(p, q) := (\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q), \nu_4(p, q)).$$

Por sus propiedades, la aplicación de Hilbert nos ayuda a construir un modelo para el espacio de órbitas, estudiar sus propiedades y hacer teoría de reducción Hamiltoniana.

La imagen de la aplicación de Hilbert es una subvariedad real semialgebraica, es decir, es descrita por un número finito de ecuaciones polinomiales y desigualdades. Esto convierte a la imagen de la aplicación de Hilbert en un candidato para el espacio reducido de la acción de \mathbb{S}^1 en $\mathbb{R}_{p,q}^4$. Sin embargo la imagen de la aplicación de Hilbert puede tener

singularidades por lo que no es posible que sea una subvariedad regular. Una forma de resolver este inconveniente para utilizar la aplicación de Hilbert para construir un modelo de espacio reducido, es considerar un subconjunto de la imagen de \mathcal{H} que tenga la propiedad de ser una subvariedad regular de \mathbb{R}_ν^4 . En este caso, la aplicación de Hilbert nos proporcionará un espacio reducido para la acción de \mathbb{S}^1 en $\mathbb{R}_{p,q}^4$, restringida al subespacio invariante $W \subset \mathbb{R}_{p,q}^4$, tal que $\mathcal{H}(W) \subset \mathbb{R}_\nu^4$ sea una subvariedad regular.

El presente trabajo está dividido en cuatro capítulos y un apéndice. En el primer capítulo se analizan las nociones básicas sobre los sistemas Hamiltonianos, se establece la notación, y se introducen algunas propiedades importantes. De la misma forma estudiamos las propiedades y nociones básicas sobre las variedades de Poisson. En el segundo capítulo, comenzaremos motivando el oscilador armónico con 1-grado de libertad. Luego, veremos la geometría y la dinámica del oscilador armónico con 2-grados de libertad como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en \mathbb{R}^4 , describiremos el comportamiento cualitativo en el espacio de configuraciones de las trayectorias que dependen de la relación aritmética entre sus frecuencias. Uno de los resultados importantes que presentaremos es que el álgebra de integrales primeras del oscilador armónico es finitamente generada. Utilizaremos algunas integrales primeras para determinar los conjuntos invariantes del oscilador armónico los cuales en su gran mayoría resultan ser toros 2-dimensionales y subvariedades 3-dimensionales, luego se estudia la dinámica del sistema sobre los toros de Liouville y se exhibe la gran dependencia cualitativa que esta tiene de una relación aritmética entre sus frecuencias, pasando a tener, orbitas periódicas en los toros a tener trayectorias densas sobre éstos. En el tercer capítulo dedicaremos a la teoría de reducción invariante, donde en una primera parte estudiaremos la teoría en general considerando el espacio fase una variedad diferencial M , y en una segunda parte desarrollaremos la teoría de reducción invariante para el oscilador armónico con 2-grados de libertad caso resonante, donde nuestro espacio fase es $\mathbb{R}_{p,q}^4$, para ello con la ayuda de los polinomios generadores del álgebra de simetrías del oscilador armónico construiremos la aplicación \mathcal{H} de Hilbert, ya que esta aplicación es muy útil para proporcionar un modelo para el espacio de órbitas $\mathbb{R}_{p,q}^4/\mathbb{S}^1$ de una \mathbb{S}^1 -acción lineal en $\mathbb{R}_{p,q}^4$, inducida por el flujo de oscilador armónico, por las siguientes propiedades. \mathcal{H} es propia, separa órbitas y además la imagen de la aplicación de Hilbert es homeomorfo a $\mathbb{R}_{p,q}^4/\mathbb{S}^1$. Esto convierte a la imagen de la aplicación de Hilbert en un candidato para el espacio reducido de la acción de \mathbb{S}^1 en $\mathbb{R}_{p,q}^4$. Sin embargo la imagen de \mathcal{H} puede tener singularidades, por lo que restringuiremos a un subespacio invariante. Finalmente en el último capítulo como aplicación desarrollamos teoría de perturbaciones para el oscilador armónico con resonancia.

CAPÍTULO 1

Variedades de Poisson y Sistemas Hamiltonianos

Los sistemas Hamiltonianos son sistemas dinámicos que surgen dentro de una formalización matemática de la descripción de problemas mecánicos. En este capítulo vamos a estudiar un formalismo matemático, el formalismo hamiltoniano, que se puede usar también para derivar las leyes de la mecánica clásica, y que fue desarrollado por el matemático, físico y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton (1805 – 1865).

Además, el propósito de este capítulo es describir las propiedades básicas de los sistemas Hamiltonianos en \mathbb{R}^{2n} . Por mencionar algunos ejemplos básicos, pero relevantes, como el oscilador armónico con 1-grado de libertad, con 2-grados de libertad y las ecuaciones de movimiento para la segunda ley de Newton se puede expresar usando el formalismo Hamiltoniano.

El siguiente capítulo está dividido en cinco secciones: en la primera sección empezaremos introduciendo la definición de un sistema Hamiltoniano, enseguida veremos algunas propiedades y ejemplos, además veremos cómo identificar los sistemas Hamiltonianos. En la segunda sección definiremos un corchete de Poisson en el conjunto de funciones diferenciales de \mathbb{R}^4 , que lo denotamos por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, y con esta noción reescribiremos de manera compacta un sistema Hamiltoniano en términos del corchete de Poisson y además veremos cómo generar integrales primeras para campos Hamiltonianos a partir de otras dadas, además estudiaremos una noción importante que son las transformaciones canónicas, que dejan invariante a los sistemas Hamiltonianos. En la tercera sección estudiaremos los sistemas Hamiltonianos integrables, aquellas que bajo un cambio de variable se pueden resolver por cuadraturas. En la cuarta sección dedicaremos a las nociones básicas de variedades de Poisson donde citaremos conceptos y propiedades importantes que utilizaremos en el último capítulo. Finalmente en la última sección estudiaremos sin mucho detalle las estructuras de Poisson en \mathbb{R}^3 .

SECCIÓN 1.1

Ecuaciones de Hamilton en \mathbb{R}^{2n} : Definición, propiedades y ejemplos

Consideremos el espacio Euclideo $\mathbb{R}^{2n} = \{(p, q) \mid p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n)\}$. Sea $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Un sistema Hamiltoniano autónomo con n -grados de libertad es un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \end{aligned} \quad (1.1)$$

que describe la dinámica de una partícula, con $i = 1, \dots, n$. Donde la función (llamada Hamiltoniano) H es la energía total. El campo vectorial X_H definido por el sistema (1.1) es llamado campo Hamiltoniano asociado a H . Explicitamente, este campo viene dado por

$$X_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}(p, q), \frac{\partial H}{\partial p}(p, q) \right).$$

En mecánica clásica, el espacio Euclideo $\mathbb{R}_{(p,q)}^{2n}$ es llamado el espacio fase del sistema, el espacio \mathbb{R}_q^n se conoce como el espacio de configuración y los vectores $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ y $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ son llamados vector momentos y vector de posición respectivamente.

A continuación el sistema (1.1) lo reescribiremos en forma simplificada como:

$$\dot{z} = J\nabla H \quad \text{donde} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Considerando $z = (p, q)$, $z_i = p_i$, $z_{i+n} = q_i$ y además $\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \right)$. Donde el campo Hamiltoniano del sistema (1.1) esta dado por

$$X_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right).$$

Observación 1.1. *Dada una función en $\mathbb{R}_{(p,q)}^{2n}$ siempre se puede construir el campo Hamiltoniano y luego el sistema Hamiltoniano asociado. El caso reciproco no es tan trivial, es decir dado un sistema no siempre es inmediato ver que el sistema es un sistema Hamiltoniano.*

Uno de los resultados importantes que se obtiene en esta sección es como identificar los sistemas Hamiltonianos. Para ello antes desarrollaremos una teoría previa.

Definición 1.1. *Sea $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un campo vectorial suave, donde $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{2n} . Una función $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ se dice ser una integral primera del*

campo X si para cada trayectoria $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ del sistema (1.1), se cumple que

$$F(\gamma(t)) = \text{constante}, \quad \forall t \in I.$$

Geométricamente, esto significa que las trayectorias $\gamma(t)$ del sistema dinámico (1.1) están contenidas en los conjuntos de nivel de la función F . Enseguida tenemos un criterio muy importante para hacer los cálculos y para verificar si una función es integral primera o no.

Proposición 1.1. *Dada $F \in C^\infty(\mathcal{U})$, es una integral primera del campo X si y sólo si $\mathcal{L}_X F = 0$.*

Demostración. Sea γ una curva integral, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) &= \frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_n(t) \\ &= X_1(\gamma(t)) \frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma(t)) + \dots + X_n(\gamma(t)) \frac{\partial F}{\partial x_n}(\gamma(t)) \\ &= (\mathcal{L}_X F)(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, F es una integral primera si y sólo si $\mathcal{L}_X F = 0$ como queríamos. \square

En la proposición anterior y en el resto del trabajo \mathcal{L}_X denota la derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial suave X . Todos los sistemas Hamiltonianos son conservativos en el sentido de que la función Hamiltoniana o la energía total $H(p, q)$ permanece constante a lo largo de trayectorias del sistema (1.1).

Teorema 1.1 (Conservación de energía). *La función Hamiltoniana H es una integral primera del sistema Hamiltoniano (1.1).*

Demostración. Del sistema (1.1) el campo Hamiltoniano está dado por

$$X_H(p, q) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q},$$

luego se tiene

$$L_{X_H} H = -\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = 0.$$

como se quería. \square

A continuación mencionamos un criterio importante, que si tenemos un sistema Hamiltoniano entonces se puede afirmar que la divergencia del campo es cero, el recíproco en general no siempre es válido.

Proposición 1.2. *Dado el sistema Hamiltoniano en \mathbb{R}^{2n}*

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}\end{aligned}$$

con $X_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$ campo Hamiltoniano asociado al sistema, entonces $\operatorname{div}(X_H) = 0$.

Demostración. Dado el campo Hamiltoniano X_H tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(X_H) &= \nabla \cdot (X_H) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}\right) \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right) \\ &= -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = 0.\end{aligned}$$

Donde ∇ es el operador gradiente. □

El recíproco del resultado anterior es válido solo si consideramos sistemas en el plano. Es decir un sistema en el plano es sistema Hamiltoniano si y sólo si tiene divergencia cero.

Proposición 1.3. *Sea $X = (X_1, X_2)$ el campo asociado al siguiente sistema en el plano*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X_1 \\ \dot{y} &= X_2\end{aligned}\tag{1.3}$$

el sistema (1.3) es Hamiltoniano si y sólo si $\operatorname{div}(X) = 0$: Y además la función Hamiltoniana está dada por

$$H(x, y) = \int_{\gamma} X_2 dx - X_1 dy\tag{1.4}$$

donde γ es una curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, suave por pedazos $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma(1) = (x, y)$.

En seguida citaremos un resultado importante que consiste en como construir sistemas Hamiltonianos en el plano: Esto es una consecuencia del resultado anterior.

Teorema 1.2. *Un sistema lineal $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$ en el plano es Hamiltoniano si y sólo si la $\operatorname{tr}(A) = 0$. En este caso, la función Hamiltoniana es cuadrática.*

Demostración. Consideremos el sistemas lineal en el plano

$$\dot{x} = Ax; \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\tag{1.5}$$

luego el sistema (1.5) es equivalente a

$$\begin{aligned}\dot{p} &= ap + bq \\ \dot{q} &= cp + dq\end{aligned}$$

el campo del sistema esta dada por: $X(p, q) = (X_1(p, q), X_2(p, q)) = (ap + bq, cp + dq)$; así, tenemos

$$\operatorname{div} (X) = \frac{\partial X_1}{\partial p} + \frac{\partial X_2}{\partial q} = a + d.$$

Por lo tanto (1.5) es Hamiltoniano si y sólo si $\operatorname{tr}(A) = 0$ y además la función Hamiltoniana viene dada por

$$H(p, q) = \frac{1}{2}cp^2 - \frac{1}{2}bq^2 - apq.$$

□

Llegamos a la parte donde citaremos uno de los teoremas importante que caracteriza a los sistemas Hamiltonianos, para ello antes mencionaremos dos resultados que serán utilizados en la prueba del teorema.

Recordemos que una forma diferencial es un operador multilineal antisimétrico definido sobre el espacio vectorial tangente en cada punto de una variedad.

Teorema 1.3. (*Lema de Poincaré*). *Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto de \mathbb{R}^n en forma de estrella con respecto a $0 \in \mathbb{R}^n$, entonces toda forma diferencial cerrada en \mathcal{A} es exacta.*

Lema 1.1. *Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{2n}$, una forma de estrella con respecto $p = 0$ y dada $\beta(t) = p + t(x - p)$ una curva que conecta a p con x y además*

$$\omega = \sum_{i=1}^{2n} a_i dx_i$$

ω es una 1-forma cerrada. Entonces, se tiene que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n} \int_0^1 a_i(\beta(t))(x_i) dt = \int_0^1 \langle a(\beta(t)), x \rangle dt$$

donde $a = (a_1, \dots, a_n)$ es vector componente de ω .

Teorema 1.4. *Un campo vectorial $X(x) = (X_1(x), \dots, X_{2n}(x))$ en \mathbb{R}^{2n} es Hamiltoniano si y sólo si*

$$J \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^T J = 0 \tag{1.6}$$

donde $\frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) \right)$ (Matriz de Jacobi de X). Y además el Hamiltoniano correspondiente viene dada por

$$H(x) = - \int_0^1 \langle J X(tx), x \rangle dt. \tag{1.7}$$

Demostración. Supongamos que el campo $X(x) = (X_1(x), \dots, X_{2n}(x))$ es Hamiltoniano, es decir es de la forma, $X = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right)$, luego se tiene el sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = J \nabla H = X$$

Entonces

$$\frac{\partial X}{\partial x} = J \begin{bmatrix} H_{pp} & H_{pq} \\ H_{qp} & H_{qq} \end{bmatrix} = JHess(H), \quad (1.8)$$

y también

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^T = [Hess(H)]^T J^T = Hess(H)J^T. \quad (1.9)$$

De las ecuaciones (1.8) y (1.9) se tiene que

$$\begin{aligned} J \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^T J &= J[JHess(H)] + [Hess(H)J^T] J \\ &= J^2 Hess(H) + Hess(H)J^T J = 0 \end{aligned}$$

pues $J^2 = -I$ y $JJ^T = I$.

Ahora supongamos que $J \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^T J = 0$, de donde se quiere mostrar que $X = J\nabla H$. En efecto, definamos la siguiente 1-forma diferencial asociado al campo $X(x) = (X_1(x), \dots, X_{2n}(x))$

$$\sum_{i=1}^n X_{n+i} dx_i - \sum_{i=1}^n X_i dx_{i+n} := \alpha \quad (1.10)$$

Por lo tanto α debe ser exacta: Luego por el lema de Poincare basta mostrar que α sea cerrada, es decir $d\alpha = 0$, veamos

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i=1}^n dX_{n+i} \wedge dx_i - \sum_{i=1}^n dX_i \wedge dx_{i+n} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial X_{n+i}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_{n+i}}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j + \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_{k+n}} - \frac{\partial X_k}{\partial x_{i+n}} \right) dx_{k+n} \wedge dx_{i+n} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial X_{n+i}}{\partial x_{k+n}} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_{j+n} = 0. \end{aligned}$$

Ya que $J \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^T J = 0$. por lo tanto existe H tal que $dH = \alpha$, así $X = J\nabla H$. Aplicando el Lema (1.1) a la 1-forma

$$\sum_{i=1}^n X_{n+i} dx_i - \sum_{i=1}^n X_i dx_{i+n} := \alpha$$

donde $a = (X_{n+1}, \dots, X_{2n}, -X_1, \dots, -X_n) = -JX$. Tenemos

$$H(x) = - \int_0^1 \langle JX(tx), x \rangle dt.$$

□

Observación 1.2. En el caso $n = 1$ la condición (1.6) es equivalente a que $\text{div}(X) = 0$.

A continuación citamos algunos ejemplos de sistemas Hamiltonianos que estudiaremos con más detalle en el Capítulo (2).

Ejemplo 1.1 (Oscilador armónico con 1-grado de libertad). *El oscilador armónico con 1-grado de libertad es un sistema dinámico en \mathbb{R}^2 determinado por la ecuación diferencial de segundo orden*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (1.11)$$

con $q \in \mathbb{R}$, donde ω es una constante real positiva. Si introducimos la variable $p = \dot{q}$ la ecuación (1.11) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\omega^2 q \\ \dot{q} &= p. \end{aligned}$$

El oscilador armónico con 1-grado de libertad es un sistema Hamiltoniano con

$$H(p, q) = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2).$$

Ejemplo 1.2 (Oscilador armónico con 2-grados de libertad). *El oscilador armónico con 2-grados de libertad consiste de dos osciladores armónicos 1-dimensionales no acoplados, es decir, es el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en el plano \mathbb{R}^2 dado por*

$$\ddot{q}_1 + \omega_1 q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + \omega_2 q_2 = 0 \quad (1.12)$$

$(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$, con ω_1 y ω_2 constantes positivas. De manera análoga al caso 1-dimensional, si introducimos las variables $p_1 = \dot{q}_1$, $p_2 = \dot{q}_2$ el sistema de ecuaciones (1.12) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en \mathbb{R}^4

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\omega_1^2 q_1 & \dot{p}_2 &= -\omega_2^2 q_2 \\ \dot{q}_1 &= p_1 & \dot{q}_2 &= p_2. \end{aligned}$$

El oscilador armónico 2-dimensional resulta ser un sistema Hamiltoniano (con dos grados de libertad) con la función Hamiltoniana

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2} (p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2} (p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2).$$

Ejemplo 1.3. *El movimiento de una partícula en el espacio cuya masa es $m > 0$ y que se mueve en el campo potencial $V(q)$ donde $q \in \mathbb{R}^3$, es descrito por la segunda ley de Newton*

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

tal que $i = 1, 2, 3$; $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$: donde $q = (q_1, q_2, q_3)$ es vector posición, de donde $\dot{q} = v(t)$ y $\ddot{q} = a(t)$. Ahora definiendo el vector momento $p = m\dot{q}$ el sistema anterior es equivalente al sistema lineal en el plano (p, q) dado por:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial V}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{1}{m} p \end{aligned}$$

Este último es un sistema Hamiltoniano, determinado por la función Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H(p, q) &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2m} p_i^2 + V(q) \\ &= \frac{1}{2m} \|p\|^2 + V(q). \end{aligned}$$

En General el problema anterior es válido en \mathbb{R}^n .

SECCIÓN 1.2

Corchete de Poisson en \mathbb{R}^{2n} y transformaciones canónicas

En esta sección empezaremos dando una definición algebraica de la noción de corchete de Poisson, para ello, consideremos el espacio \mathbb{R}^{2n} y el espacio vectorial de funciones diferenciables en \mathbb{R}^n con valores en \mathbb{R} , $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Definición 1.2. Sean $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. El corchete de Poisson canónico en \mathbb{R}^{2n} es una operación \mathbb{R} -bilineal

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

dada por

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) = \langle J\nabla f, \nabla g \rangle. \quad (1.13)$$

Con esta operación más adelante caracterizaremos de manera algebraica a las integrales primeras, en particular estudiaremos el conjunto de todas ellas que en efecto van a formar un álgebra de Poisson. Además esta operación satisface las siguientes propiedades:

P1). Antisimetría

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

P2). \mathbb{R} -lineal

$$\{\lambda_1 f + \lambda_2 g, h\} = \lambda_1 \{f, h\} + \lambda_2 \{g, h\}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

P3). Identidad de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

P4). Regla de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

P5). No degeneración

$$\{f, g\} = 0 \quad \forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \quad \text{entonces} \quad f \equiv \text{const.}$$

La verificación de las propiedades P1-P5 es inmediato empleando la definición. De donde tenemos que $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{, \})$ es un álgebra de Poisson y si omitimos el producto de funciones diferenciales $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{, \})$ es un álgebra de Lie.

Definición 1.3. *Dos funciones $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, se dice que conmutan con respecto al corchete de Poisson si $\{f, g\} = 0$.*

Proposición 1.4. *Una función g es una integral primera del campo Hamiltoniano $X_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$ si y sólo si $\{H, g\} = 0$.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_H}g &= \sum_{k=1}^n -\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \\ &= \{H, g\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{L}_{X_H}g = 0$ si y sólo si $\{H, g\} = 0$. □

Fijando f definimos la siguiente aplicación.

$$D_f : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

dada por

$$D_f(g) := \{f, g\},$$

para $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Como el corchete de Poisson es \mathbb{R} -lineal y satisface la regla de Leibniz, la aplicación anterior satisface las siguientes propiedades:

- 1). D_f es \mathbb{R} - lineal.
- 2). D_f satisface la regla de Leibniz.

Por lo tanto, D_f es una derivación del álgebra de funciones diferenciales $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Luego sabemos que a una derivación siempre es posible asociar un campo, es decir tenemos $D_f \in \text{Der}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}))$, así $D_f \leftrightarrow X_f$, además $D_f(g) = \mathcal{L}_{X_f}g$. Por lo tanto si

$$X_f = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial}{\partial q_k} \tag{1.14}$$

y sabiendo que $D_f(g) = \mathcal{L}_{X_f}g$ es inmediato determinar los coeficientes del campo

$$a_k = -\frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad b_k = \frac{\partial f}{\partial p_k}.$$

Así, en la ecuación (1.14) tenemos

$$X_f = \sum_{k=1}^n -\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} = J\nabla f.$$

Lo cual es el campo Hamiltoniano asociado a f .

El argumento anterior nos muestra que es natural pensar que el campo Hamiltoniano del sistema (1.1) se puede reescribir en términos del corchete de Poisson canónico.

Observación 1.3. *De la definición del corchete de Poisson es inmediato ver que $\{H, p_i\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ y $\{H, q_i\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Por lo tanto el sistema (1.1) en términos del corchete de Poisson esta dada por*

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= \{H, p_i\} \\ \dot{q}_i &= \{H, q_i\}\end{aligned}$$

A continuación definiremos el álgebra de integrales primeras de un campo Hamiltoniano, y también fijando un integral primera veremos como generar integrales primeras a partir de ella. Para ello consideremos lo siguiente:

Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ y sea $\gamma(t) = (p(t), q(t))$, una trayectoria del campo Hamiltoniano, $X_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$, luego se tiene la siguiente relación

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = (L_{V_H}f)(\gamma(t)) = \{H, f\}(\gamma(t))$$

de donde

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}.$$

Definición 1.4. *Fijando $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Definimos el conjunto de las integrales primeras del campo Hamiltoniano X_H , como*

$$\mathcal{A}_H := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \{H, f\} = 0\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

$\mathcal{A}_H \neq \emptyset$; pues $H \in \mathcal{A}_H$.

Proposición 1.5. \mathcal{A}_H es un subálgebra de $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{A}_H$ y tomando $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

- $\{H, \lambda f + g\} = \lambda\{H, f\} + \{H, g\} = 0$.
- $\{H, f \cdot g\} = \{H, f\}g + f\{H, g\} = 0$.

En la igualdad anterior usamos el hecho de que el corchete de Poisson es lineal y satisface la regla de Leibniz. □

Proposición 1.6. \mathcal{A}_H es un subálgebra de Poisson de $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Demostración. Tomando $f, g \in \mathcal{A}_H$, se quiere mostrar que $\{f, g\} \in \mathcal{A}_H$. En efecto: Por la identidad de Jacobi tenemos que

$$\{H, \{f, g\}\} + \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = 0$$

de donde, $\{H, \{f, g\}\} = 0$. Como queríamos. □

Lema 1.2. Sean $H, f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Entonces

$$\{H, \phi \circ f\} = \frac{d\phi}{dt}(f) \cdot \{H, f\}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial p_i} (\phi \circ f)(p, q) = \frac{d\phi}{dt}(f(p, q)) \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (\phi \circ f)(p, q) = \frac{d\phi}{dt}(f(p, q)) \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

de donde

$$\{H, \phi \circ f\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial (\phi \circ f)}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial (\phi \circ f)}{\partial p_i} \right) = \frac{d\phi}{dt}(f) \cdot \{H, f\}$$

como queríamos. \square

Proposición 1.7. Sea $f \in \mathcal{A}_H$ y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, entonces $g := \phi \circ f \in \mathcal{A}_H$.

Demostración. Como se tiene que $f \in \mathcal{A}_H$ y por el Lema anterior tenemos que

$$\{H, g\} = \{H, \phi \circ f\} = \frac{d\phi}{dt}(f) \cdot \{H, f\} = 0$$

como se esperaba. \square

A continuación estudiaremos e introduciremos una noción importante que son las transformaciones canónicas o simplecticas, ya que estas transformaciones tienen la propiedad de dejar invariante a los sistemas Hamiltonianos.

Definición 1.5. Una función suave $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$, se dice ser canónico o simplectica si su matriz Jacobina $\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$, satisface

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x) \right] \cdot J \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x) \right]^T = J. \quad (1.15)$$

Si F es un difeomorfismo, el cambio de variable

$$x = (p, q) \mapsto \tilde{x} = (\tilde{p}, \tilde{q})$$

donde $\tilde{x} = F(x)$, transforma el sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = J\nabla H$$

en el siguiente sistema que también es Hamiltoniano

$$\dot{\tilde{x}} = J\nabla \tilde{H}, \quad \text{donde} \quad \tilde{H} := H \circ F^{-1}.$$

Ejemplo 1.4. Dada la función, $H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2q^2$ donde $\omega > 0$ constante, cuyo sistema Hamiltoniano asociado esta dada por:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\omega^2q \\ \dot{q} &= p\end{aligned}\tag{1.16}$$

Haciendo el cambio de variable

$$p = \sqrt{2\omega I} \cos \theta \quad q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta$$

1. Expresar $H = H(I, \theta)$ en nuevas variables. En efecto:

$$\begin{aligned}H(p, q) &= H\left(\sqrt{2\omega I} \cos \theta, \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\omega I} \cos \theta\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2\left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta\right)^2 = \omega I.\end{aligned}$$

2. Expresar el sistema Hamiltoniano (1.16) en las nuevas variables. En efecto, derivando p y q luego en el sistema (1.16), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2\omega}}{2I^{\frac{1}{2}}}\cos \theta \dot{I} - \sqrt{2\omega}I^{\frac{1}{2}}\sin \theta \dot{\theta} &= -\omega^2\sqrt{\frac{2}{\omega}}I^{\frac{1}{2}}\sin \theta \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\omega I}}\sin \theta \dot{I} + \sqrt{\frac{2}{\omega}}I^{\frac{1}{2}}\cos \theta \dot{\theta} &= \sqrt{2\omega}I^{\frac{1}{2}}\cos \theta\end{aligned}$$

la igualdad anterior es equivalente

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2I}} \cos \theta & -\sqrt{2\omega I} \sin \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2\omega I}} \sin \theta & \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2\omega^3 I} \sin \theta \\ \sqrt{2\omega I} \cos \theta \end{pmatrix}$$

de donde se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{I} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2I}}{\sqrt{\omega}} \cos \theta & \sqrt{2\omega I} \sin \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{2\omega I}} \sin \theta & \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2I}} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2\omega^3 I} \sin \theta \\ \sqrt{2\omega I} \cos \theta \end{pmatrix}$$

Finalmente, se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{I} &= 0 \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}$$

un sistema Hamiltoniano, con la función Hamiltoniana

$$H(I, \theta) = \omega I.$$

Sistemas Hamiltonianos integrables en \mathbb{R}^{2n}

En esta sección presentaremos la noción de integrabilidad para sistemas Hamiltonianos, como la integrabilidad de Liouville-Arnold. Explícitamente hablando, un sistema de ecuaciones diferenciales se dice ser integrable si podemos, mediante alguna serie de transformaciones, reducciones y cambios de coordenadas, resolverlo analíticamente ó por cuadraturas. El célebre Teorema (1.5) de Liouville-Arnold establece que si un sistema Hamiltoniano con n -grados de libertad posee n integrales primeras funcionalmente independientes y en involución, bajo ciertas condiciones, el sistema admite un cambio de coordenadas bajo los cuales el sistema es integrable por cuadraturas. Más aún el teorema también establece la existencia de una familia de toros n -dimensionales en el espacio fase que son invariantes bajo las órbitas del sistema Hamiltoniano en cuestión, con lo que queda mejor definida la dinámica del sistema.

Consideremos el espacio fase $\mathbb{R}^{2n} = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{R}^n\}$ dotado de una estructura llamada corchete canónico de Poisson definida por (1.19)

Definición 1.6. *El conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ donde $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ para $i = 1, 2, \dots, n$ es funcionalmente independientes y estan en involución si se cumple lo siguiente*

- i) $df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$.
- ii) $\{f_i, f_j\} = 0$, para $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Recordemos que un campo vectorial $X : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ suave se dice ser completo si para cada $x^0 \in \mathbb{R}^{2n}$ la trayectoria del sistema dinámico $\dot{x} = X(x)$ con $x(0) = x^0$, que pasa por x^0 está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dada la función Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos el campo Hamiltoniano asociado que denotaremos por X_H .

Definición 1.7. *Un sistema Hamiltoniano se dice ser completamente integrable en \mathbb{R}^{2n} si el campo X_H tiene n integrales primeras f_1, f_2, \dots, f_n en involución tales que*

- a) *El conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es funcionalmente independiente en un abierto denso U .*
- b) *Los campos Hamiltonianos X_{f_i} son completos.*

Teorema 1.5. *(Teorema de integrabilidad de Liouville-Arnold). Sea X_H un sistema Hamiltoniano completamente integrable y f_1, f_2, \dots, f_n integrales primeras de X_H funcionalmente independientes en un abierto denso U , en involución. Sea $c \in \mathbb{R}^n$ tal que el conjunto de nivel*

$$S_c = \{x \in U \mid f_1 = c_1, f_2 = c_2, \dots, f_n = c_n\}$$

es no vacío, entonces:

- i) S_c es una subvariedad n -dimensional de \mathbb{R}^n la cual es invariante bajo el flujo de X_H .
- ii) Si S_c es compacto y conexo, existe una vecindad W de c en \mathbb{R}^n y un difeomorfismo $\Psi : N \rightarrow W \times \mathbb{T}^n$ de una vecindad N de S_c tal que para cada $\tilde{c} \in W$, el conjunto de nivel $S_{\tilde{c}}$ es difeomorfo al n -toro \mathbb{T}^n , es decir

$$S_c = \Psi^{-1}(\tilde{c} \times \mathbb{T}^n).$$

- iii) El difeomorfismo Ψ definido en el inciso anterior es un morfismo de Poisson de $(N, \{\cdot, \cdot\}_{can})$ a $W \times \mathbb{T}^n = \{(I_1, I_2, \dots, I_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \mid I_i \in \mathbb{R}, \varphi_i \in \mathbb{S}^1\}$ con corchete de Poisson

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\}_{W \times \mathbb{T}^n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial I_i} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial I_i} \right)$$

tal que el sistema Hamiltoniano X_H donde $H(p, q)$ es transformado al sistema Hamiltoniano $\tilde{H}(I) = H \circ \Psi^{-1}$ cuyo sistema esta dado por

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= 0, \\ \dot{\varphi}_i &= \omega_i(I), \end{aligned}$$

donde $\omega_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}(I)$.

La prueba de este resultado se puede consultar en el texto de Arnold [18]. A continuación citamos algunos sistemas dinámicos que son completamente integrables.

Ejemplo 1.5 (Sistemas Hamiltonianos con 1-grado de libertad). . Consideremos un sistema Hamiltoniano en el plano $\mathbb{R}^2 = \{(p, q)\}$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned}$$

con función Hamiltoniana $H \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Recordemos que la función Hamiltoniana es siempre una integral primera es decir $\{H, H\} = 0$, se tiene que los sistemas Hamiltonianos con 1-grado de libertad son completamente integrables siempre que sus flujos sean completos. Sea $E \in \mathbb{R}$ y definimos

$$S_E = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid H(p, q) = E\}$$

el conjunto de nivel de E de la función Hamiltoniana H .

Supongamos que para cierto $E_0 \in \mathbb{R}$ tal que $S_{E_0} \neq \emptyset$ es compacta, conexa y regular. Esta última condición quiere decir que

$$\left(-\frac{\partial H}{\partial q}(p, q), \frac{\partial H}{\partial p}(p, q) \right) \neq 0, \quad \forall (p, q) \in S_{E_0}.$$

En este caso, el Teorema de Liouville-Arnold (1.5) nos da la siguiente información:

- i) S_{E_0} es una trayectoria periódica del sistema Hamiltoniano. Más aún, existe una vecindad N de S_{E_0} en \mathbb{R}^2 tal que $N = (E_0 - \delta, E_0 + \delta) \times \mathbb{S}^1$ y para cada $E \in (E_0 - \delta, E_0 + \delta)$ el conjunto de nivel S_E es también una trayectoria periódica con período $T(E) = 2\pi/\omega(E)$.
- ii) En N existen coordenadas acción ángulo (I, φ) y estas se pueden definir de la siguiente forma. Para cada $E \in (E_0 - \delta, E_0 + \delta)$, denotemos por $\mathcal{D}(E)$ el dominio en \mathbb{R}^2 que está acotado por la trayectoria S_E . Sea $A(E) = \oint_{S_E} pdq$ el área del dominio $\mathcal{D}(E)$. Entonces el período $T(E)$ de la trayectoria S_E está dado por $T(E) = \frac{\partial A}{\partial E}$. Por último, las coordenadas acción-ángulo se definen por

$$I = \frac{1}{2\pi}A(E), \quad \varphi = \frac{2\pi t}{T(E)}.$$

Ejemplo 1.6 (Oscilador armónico con n -grados de libertad). *El oscilador armónico con n -grados de libertad es un sistema Hamiltoniano en \mathbb{R}^{2n} definido por la siguiente función Hamiltoniana*

$$H(p, q) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 q_i^2,$$

con ω_i constantes reales. El conjunto de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ donde:

$$f_i(p, q) = \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2),$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ es un conjunto de integrales primeras para el oscilador armónico que están en involución $\{f_i, f_j\} = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Además este conjunto es funcionalmente independiente en el conjunto $U = \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} \mid p_i, q_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$ el cual es un abierto y denso. Por último, cada campo Hamiltoniano X_{f_i} tiene trayectorias periódicas con período $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ y por lo tanto el campo es completo. Así el oscilador armónico con n -grados de libertad es un sistema Hamiltoniano integrable.

SECCIÓN 1.4

Variedades de Poisson: nociones básicas

Los sistemas dinámicos que estudiaremos en los siguientes capítulos, se estudian en espacios fase que son las variedades de Poisson.

Una variedad de Poisson es un par $(M, \{\cdot, \cdot\})$ que consiste de una variedad diferencial M equipada con una operación binaria, llamada corchete de Poisson

Definición 1.8. *Un corchete de Poisson en una variedad M es una operación binaria $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ dada por $(f, g) \mapsto \{f, g\}$, tal que para cualesquiera $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ satisface las siguientes propiedades*

P1). *Antisimetría*

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

P2). *\mathbb{R} -bilineal*

$$\{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + b\{f, h\}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$:

P3). *Regla de Leibniz*

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

P4). *Identidad de Jacobi*

$$\mathfrak{S}_{(f,g,h)} \{f, \{g, h\}\} = 0$$

donde el símbolo \mathfrak{S} denota la suma cíclica sobre las funciones f, g y h .

Por lo tanto $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ es una álgebra de Lie, la cual es llamada una álgebra de Poisson.

Definición 1.9. Sea $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ y $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ dos variedades de Poisson. Una transformación de Poisson es una aplicación suave $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ tal que el pull-back conserva los corchetes de Poisson, es decir

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \varphi \quad (1.17)$$

para todo $f, g \in C^\infty(M_2)$.

Ejemplo 1.7. En \mathbb{R}^{2n} con coordenadas lineales $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ la fórmula

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \quad (1.18)$$

define un corchete de Poisson como se vio en la segunda Sección, y esto es llamada corchete de Poisson canónico en \mathbb{R}^{2n} .

Este corchete de Poisson está completamente caracterizado por sus valores en las funciones de coordenadas:

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_i^j. \quad (1.19)$$

Si $n \geq m$ la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ dada por $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \mapsto (p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m)$ es una transformación de Poisson.

Ejemplo 1.8. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz antisimétrica. Entonces podemos definir un corchete de Poisson cuadrático en \mathbb{R}^n por la fórmula:

$$\{f, g\}_A := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}. \quad (1.20)$$

Considerando la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$\begin{aligned}\varphi(p_i, q_i) &= x_i \\ &= e^{q_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j}.\end{aligned}$$

Luego afirmamos que φ es una transformación de Poisson cuando equipamos a \mathbb{R}^{2n} con el corchete canónico de Poisson (1.18). Esto se sigue del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}\{x_i \circ \varphi, x_j \circ \varphi\}_{\mathbb{R}^{2n}} &= \{e^{q_i - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k}, e^{q_j - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n a_{jl} p_l}\}_{\mathbb{R}^{2n}} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_{ik} + a_{jk}) p_k} \{e^{q_i}, e^{q_j}\}_{\mathbb{R}^{2n}} + e^{q_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k} \{e^{q_i}, e^{-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n a_{jl} p_l}\}_{\mathbb{R}^{2n}} \\ &\quad + e^{q_i - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n a_{jl} p_l} \{e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k}, e^{q_j}\}_{\mathbb{R}^{2n}} + e^{q_i + q_j} \{e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k}, e^{-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n a_{jl} p_l}\}_{\mathbb{R}^{2n}} \\ &= -\frac{1}{2} a_{ji} e^{q_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k} e^{q_i - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n a_{jl} p_l} + \frac{1}{2} a_{ij} e^{q_i - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n a_{jl} p_l} e^{q_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k} \\ &= a_{ij} e^{q_i - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k} e^{q_j - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n a_{jl} p_l} \\ &= a_{ij} (x_i \circ \varphi)(x_j \circ \varphi) = \{x_i, x_j\}_{A \circ \varphi}\end{aligned}$$

en la prueba anterior se utilizó las propiedades del corchete de Poisson canónico y las relaciones (1.19).

A continuación introduciremos una noción de campos vectoriales Hamiltonianos, para el efecto la identidad de Leibniz para un corchete de Poisson conduce a la siguiente definición:

Definición 1.10. *Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson. El campo vectorial Hamiltoniano de $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es el campo vectorial $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ definido por*

$$X_H(f) = \mathcal{L}_{X_H}(f) := \{H, f\} \quad (1.21)$$

para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. La función H se llama función Hamiltoniana.

la asignación $\mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por $f \mapsto X_f$, es un morfismo del álgebra de Lie.

Proposición 1.8. *Para cualquier $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$:*

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

Demostración. Considerando $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, tenemos

$$\begin{aligned}[X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{\{f, h\}, g\} + \{f, \{g, h\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\} = X_{\{f, g\}}(h)\end{aligned}$$

donde usamos la propiedad de antisimetría del corchete de Poisson y luego la identidad de Jacobi. \square

Recordemos que una función f se llama integral primera de un campo vectorial X si f es constante a lo largo de cualquier órbita de X y esto sucede si y sólo si $X(f) = \mathcal{L}_X(f) = 0$.

Proposición 1.9. *Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson y fijemos alguna función hamiltoniana $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Entonces:*

- (i) f es una integral primera de X_H si y sólo si $\{H, f\} = 0$
- (ii) H es siempre una primera integral de X_H
- (iii) Si f_1 y f_2 son integrales primeras de X_H entonces $\{f_1, f_2\}$ es también una integral primera de X_H .

Demostración. La parte (i) se deriva de la definición de X_H . La parte (ii) se deriva de (i) y de la antisimetría de $\{\cdot, \cdot\}$. La parte (iii) se deriva de (i) y de la identidad de Jacobi. \square

Definición 1.11. *Una función suave $K \in \mathcal{C}^\infty(M)$ en una variedad de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$ es llamada una función de Casimir si $\{K, f\} = 0$, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.*

Notemos que la definición anterior implica que una función de Casimir es una integral primera para todo campo Hamiltoniano, es por ello que son importantes este tipo de funciones. Además el campo asociado es igual a cero, es decir $X_K = 0$.

Definición 1.12. *Un campo vectorial Z en M se dice ser un campo vectorial de Poisson si su derivada de Lie es una derivación del álgebra de Lie $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$*

$$\mathcal{L}_Z\{F_1, F_2\} = \{\mathcal{L}_Z F_1, F_2\} + \{F_1, \mathcal{L}_Z F_2\}$$

para todo $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Proposición 1.10. *Todo campo Hamiltoniano es un campo de Poisson.*

Demostración. Sea $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ un campo Hamiltoniano, luego $\mathcal{L}_{X_H} F = \{H, F\}$ para todo $F \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_H}\{F_1, F_2\} &= \{H, \{F_1, F_2\}\} \\ &= -\{F_1, \{F_2, H\}\} - \{F_2, \{H, F_1\}\} \\ &= \{H, F_1\}, F_2\} + \{F_1, \{H, F_2\}\} \\ &= \{\mathcal{L}_{X_H} F_1, F_2\} + \{F_1, \mathcal{L}_{X_H} F_2\} \end{aligned}$$

para todo $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$. \square

El recíproco de la proposición anterior en general no es válido, es decir no todo campo de Poisson es campo Hamiltoniano.

Proposición 1.11. *Sea Φ_t un flujo en una variedad de Poisson M y sea $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave sobre M . Entonces*

a) *Para cualquier $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, \mathcal{U} abierto en M ,*

$$\frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t) = \{f, H\} \circ \Phi_t = \{f \circ \Phi_t, H\}$$

o, para abreviar,

$$\dot{f} = \{f, H, \} \text{ para cualquier } f \in C^\infty(\mathcal{U}), \mathcal{U} \text{ abierto en } M$$

si y sólo si Φ_t es el flujo de X_H .

b) *Si Φ_t es el flujo de X_H , entonces $H \circ \Phi_t = H$.*

La prueba de esta proposición se puede consultar en [15]. La proposición anterior nos permite mostrar que el flujo de un campo Hamiltoniano es una transformación de Poisson.

Teorema 1.6. *Si $\Phi_t := Fl_{X_H}^t$ es el flujo de X_H , entonces*

$$\Phi_t^* \{f, g\} = \{\Phi_t^* f, \Phi_t^* g\},$$

en otras palabras

$$\{f, g\} \circ \Phi_t = \{f \circ \Phi_t, g \circ \Phi_t\}.$$

Así, los flujos de campos vectoriales Hamiltonianos conservan la estructura de Poisson.

Demostración. Sabiendo que X_H es un campo Hamiltoniano y por otro lado considerando que $u = \{f \circ \Phi_t, g \circ \Phi_t\} - \{f, g\} \circ \Phi_t$, lo que se quiere probar es que $u = 0$. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{d}{dt}(\{f \circ \Phi_t, g \circ \Phi_t\}) - \frac{d}{dt}(\{f, g\} \circ \Phi_t) \\ &= \left\{ \frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t), g \circ \Phi_t \right\} + \left\{ f \circ \Phi_t, \frac{d}{dt}(g \circ \Phi_t) \right\} - \frac{d}{dt}(\{f, g\} \circ \Phi_t), \end{aligned}$$

por la proposición (1.11) y utilizando la identidad de Jacobi tenemos

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \{\{f \circ \Phi_t, H\}, g \circ \Phi_t\} + \{f \circ \Phi_t, \{g \circ \Phi_t, H\}\} - \{\{f, g\} \circ \Phi_t, H\} \\ &= \{\{f \circ \Phi_t, g \circ \Phi_t\}, H\} - \{\{f, g\} \circ \Phi_t, H\} \\ &= \{\{f \circ \Phi_t, g \circ \Phi_t\} - \{f, g\} \circ \Phi_t, H\} \\ &= \{u, H\} = X_H(u). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{du}{dt} = X_H(u)$$

de donde la única solución de esta ecuación es $u_t = u_0 \circ \Phi_t$. Como $u_0 = 0$, obtenemos que $u = 0$. Por lo tanto

$$\{f, g\} \circ \Phi_t = \{f \circ \Phi_t, g \circ \Phi_t\},$$

Como queríamos. □

Definición 1.13. Sea $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ una variedad de Poisson y $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ función suave sobreyectiva. Si existe una estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_2$ en M_2 tal que φ es Poisson, la estructura $\{\cdot, \cdot\}_2$ se dice ser coinducida por φ .

A continuación citamos una proposición, que usaremos en el Capítulo (3), para demostrar que el espacio de órbitas M/G es una variedad de Poisson.

Proposición 1.12. Si $\varphi : (M_1, \{\cdot, \cdot\}_1) \rightarrow M_2$ es sobreyectiva, M_2 tiene una estructura coinducida si y sólo si $\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1$ es constante a lo largo de las fibras de φ , para todo $f, g \in C^\infty(M_2)$.

Demostración. Para la prueba indirecta supongamos que $\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1$ es constante por fibras de φ para todo $f, g \in C^\infty(M_2)$. Definimos

$$\{f, g\}_2(x) := \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1(y), \quad y \in \varphi^{-1}(x)$$

$\{f, g\}_2$ esta bien definida: pues para $\tilde{y} \in \varphi^{-1}(x)$

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1(\tilde{y}) = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1(y)$$

entonces $\{f, g\}_2(x)$ no depende de $y \in \varphi^{-1}(x)$, por definición

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1(y) = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_2\varphi(y).$$

Finalmente es inmediato verificar que $\{\cdot, \cdot\}_2$ es un corchete de Poisson. □

SECCIÓN 1.5

Estructuras de Poisson en \mathbb{R}^3

En esta sección vamos a estudiar como construir una familia de estructuras de Poisson que se pueden definir en \mathbb{R}^3 con coordenadas (y^1, y^2, y^3) . Sea $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$. Luego definamos una aplicación binaria $\{\cdot, \cdot\}_\Psi : C^\infty(\mathbb{R}^3) \times C^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$\{f, g\}_\Psi := \langle \Psi, \nabla f \times \nabla g \rangle \tag{1.22}$$

para todo $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

El punto aquí es establecer bajo que condiciones (1.22) define una estructura de Poisson en \mathbb{R}^3 . De un cálculo directo, se tiene que $\{y^1, y^2\}_\Psi = \Psi_3$, $\{y^2, y^3\}_\Psi = \Psi_1$ y $\{y^3, y^1\}_\Psi = \Psi_2$. por lo tanto $\{\cdot, \cdot\}_\Psi$ (1.22) define una estructura de Poisson si y sólo si

$$\mathfrak{S}_{(y^1, y^2, y^3)} \{\{y^1, y^2\}, y^3\} = 0. \tag{1.23}$$

Proposición 1.13. $\{\cdot, \cdot\}_\Psi$ (1.22) define una estructura de Poisson si y sólo si $\langle \Psi, \text{rot}(\Psi) \rangle = 0$ para $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$.

Demostración. Tenemos los siguientes

$$\begin{aligned}\{\{y^1, y^2\}, y^3\} &= \{\Psi_3, y^3\} = \Psi_1 \frac{\partial \Psi_3}{\partial y^2} - \Psi_2 \frac{\partial \Psi_3}{\partial y^1}, \\ \{\{y^2, y^3\}, y^1\} &= \{\Psi_1, y^1\} = \Psi_2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial y^3} - \Psi_3 \frac{\partial \Psi_1}{\partial y^2}, \\ \{\{y^3, y^1\}, y^2\} &= \{\Psi_2, y^2\} = \Psi_3 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y^1} - \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y^3}.\end{aligned}$$

Luego en (1.23) se tiene

$$\Psi_1 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y^3} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial y^2} \right) + \Psi_2 \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial y^1} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y^2} \right) + \Psi_3 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial y^1} \right) = 0$$

como queriamos probar. \square

Una consecuencia directa de esta proposición es la siguiente: Si $\Psi = \nabla K$ tal que $K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ entonces $\{\cdot, \cdot\}_\Psi$ define una estructura de Poisson en \mathbb{R}^3 , ya que $\text{rot}\Psi = 0$.

Dada una función $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que X_H es el campo Hamiltoniano asociado. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_H} f &= \{H, f\} \\ &= \langle \Psi, \nabla H \times \nabla f \rangle \\ &= \begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \\ \frac{\partial H}{\partial y^1} & \frac{\partial H}{\partial y^2} & \frac{\partial H}{\partial y^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y^1} & \frac{\partial f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y^1} & \frac{\partial f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y^3} \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \\ \frac{\partial H}{\partial y^1} & \frac{\partial H}{\partial y^2} & \frac{\partial H}{\partial y^3} \end{vmatrix} \\ &= \langle \Psi \times \nabla H, \nabla f \rangle = (\Psi \times \nabla H)_1 \frac{\partial f}{\partial y^1} + (\Psi \times \nabla H)_2 \frac{\partial f}{\partial y^2} + (\Psi \times \nabla H)_3 \frac{\partial f}{\partial y^3} \\ &= \mathcal{L}_{\Psi \times \nabla H} f.\end{aligned}$$

Para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Así un campo Hamiltoniano en \mathbb{R}^3 viene dado por

$$X_H = \Psi \times \nabla H.$$

Proposición 1.14. *Los vectores Ψ (de Poisson) en \mathbb{R}^3 tal que $\langle \Psi, \text{rot}(\Psi) \rangle = 0$ tienen la propiedad de invarianza conforme, es decir $\tilde{\Psi} = m\Psi$ con $m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, entonces $\tilde{\Psi}$ es Poisson, es decir*

$$\langle \tilde{\Psi}, \text{rot}(\tilde{\Psi}) \rangle = 0.$$

Demostración. Para $m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ y Ψ función vectorial se tiene que:

$$\text{rot}(m\Psi) = m \text{rot}(\Psi) - \Psi \times \nabla(m),$$

donde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Así tenemos

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Psi}, \text{rot}(\tilde{\Psi}) \rangle &= \langle m \Psi, \text{rot}(m \Psi) \rangle \\ &= \langle m \Psi, m \text{rot}(\Psi) - \Psi \times \nabla(m) \rangle \\ &= m^2 \langle \Psi, \text{rot}(\Psi) \rangle - m \langle \Psi, \Psi \times \nabla(m) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Como queríamos probar. □

CAPÍTULO 2

El oscilador armónico con dos grados de libertad

Este capítulo está dedicado a estudiar las propiedades geométricas y dinámicas del oscilador armónico con dos grados de libertad. Algunas de ellas, son propiedades típicas de los sistemas Hamiltonianos integrables como la existencia de toros invariables (de Liouville) por mencionar una de ellas.

El presente capítulo está dividido en seis secciones. En la primera sección se presenta el oscilador armónico con 1-grado de libertad, y junto con sus propiedades fundamentales, su flujo y el retrato fase. Esto con el fin de motivar el estudio del oscilador armónico con 2-grados de libertad. En la segunda sección estudiaremos ampliamente el oscilador armónico con 2-grados de libertad. Donde mostraremos que es un sistema Hamiltoniano en \mathbb{R}^4 y analizaremos las principales propiedades, como ser el flujo, donde indicaremos bajo qué condiciones el flujo es periódico. En la tercera sección estudiaremos el comportamiento geométrico y cualitativo de las trayectorias del oscilador armónico con 2-grados de libertad para el caso resonante, y no resonante, en el espacio de configuraciones \mathbb{R}_{q_1, q_2}^2 . En la cuarta sección presentaremos los aspectos algebraicos del oscilador armónico con 2-grados de libertad, donde enunciaremos uno de los resultados importantes, que dice que el conjunto de integrales primeras es un \mathbb{R} -álgebra finitamente generada. En la quinta sección describiremos los conjuntos invariantes del oscilador armónico con 2-grados de libertad que resultaran ser, subvariedades tres dimensionales (difeomorfos a \mathbb{S}^3) y subvariedades dos dimensionales (difeomorfos a \mathbb{T}^2). Finalmente en la última sección estudiaremos el comportamiento cualitativo y dinámico de las trayectorias del oscilador armónico en las subvariedades regulares invariantes mencionadas en la sección anterior.

SECCIÓN 2.1

Modelo Hamiltoniano: Oscilador armónico con 1-grado de libertad

Como motivación para estudiar el oscilador armónico con 2-grados de libertad en \mathbb{R}^4 , estudiamos primero las propiedades más importantes del oscilador armónico con 1-grado de libertad en \mathbb{R}^2 .

El oscilador armónico con 1-grado de libertad es el sistema dinámico en \mathbb{R}^2 determinado por la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (2.1)$$

donde $q \in \mathbb{R}$ y ω es una constante real positiva. Introduciendo la variable adecuado $p = \dot{q}$, la ecuación (2.1) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en el plano

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\omega^2 q, \\ \dot{q} &= p. \end{aligned} \quad (2.2)$$

El sistema (2.2) resulta ser un sistema Hamiltoniano en \mathbb{R}^2 con respecto a la función Hamiltoniana

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2). \quad (2.3)$$

En mecánica, el oscilador armónico con 1-grado de libertad (2.2) aparece modelando el movimiento de una masa m colgada de un resorte en el que se desprecia cualquier fuerza de fricción (ver figura (2.1)). En este contexto, la variable q representa el desplazamiento

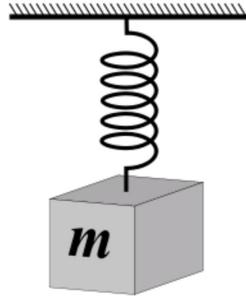


Figura 2.1: Sistema físico modelado por el oscilador armónico.

vertical de la masa con respecto a su posición de equilibrio y la variable p representa el momento de la masa. Es claro que el movimiento de la masa sujeta al resorte resulta ser periódico, pues estamos despreciando cualquier efecto de fricción. Por lo que ω representa la frecuencia del movimiento.

Analíticamente, la curva integral o la trayectoria $\alpha(t) = (p(t), q(t))$ del sistema lineal (2.2) que pasa por el punto (p_0, q_0) al tiempo $t_0 = 0$ está dada por

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\omega \operatorname{sen} \omega t \\ \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

De donde tenemos que las órbitas del sistema son periódicas, con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y por lo tanto las trayectorias del sistema son curvas cerradas, con excepción de la trayectoria que pasa por el origen. Además, como la función Hamiltoniana (2.3) es una integral primera del oscilador armónico con 1-grado de libertad (2.2), las trayectorias del sistema están contenidas en los conjuntos de nivel de H . Por lo tanto, para cada número real positivo

$E > 0$, el conjunto de nivel de H en E esta dada por:

$$\begin{aligned} H^{-1} &= \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid H(p, q) = E\} \\ &= \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid p^2 + \omega^2 q^2 = E\} \end{aligned}$$

de donde claramente es una curva cerrada, concretamente, una elipse. En consecuencia, las trayectorias del oscilador armónico con 1-grado de libertad son exactamente las elipses que describen los conjuntos de nivel regulares de la función H (ver Figura (2.2)).

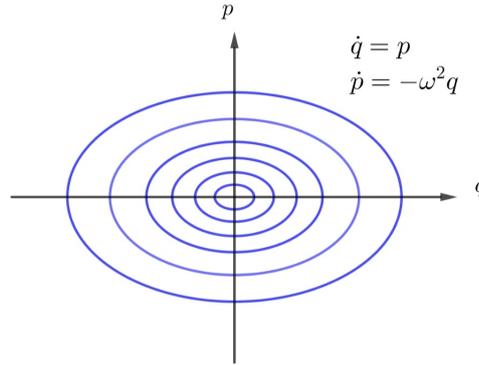


Figura 2.2: Trayectorias del oscilador armónico con 1-grado de libertad.

SECCIÓN 2.2

Modelo Hamiltoniano: Oscilador armónico con 2-grados de libertad

En la presente sección, estudiaremos con todo detalle la dinámica de las curvas integrales del sistema dinámico llamado oscilador armónico con 2-grados de libertad en el espacio de configuraciones, es decir como evolucionan las trayectorias del sistema.

El oscilador armónico 2-dimensional consiste de dos osciladores armónicos con 1-grado de libertad no acoplados, es decir, es el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en el plano \mathbb{R}^2 dado por

$$\ddot{q}_1 + \omega_1 q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + \omega_2 q_2 = 0 \tag{2.5}$$

donde $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$; con ω_1 y ω_2 son constantes positivas.

De manera análoga como en el caso del oscilador armónico con 1-grado de libertad, si introducimos las variables $p_1 = \dot{q}_1$, $p_2 = \dot{q}_2$ el sistema de ecuaciones (2.5) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\omega_1^2 q_1, & \dot{p}_2 &= -\omega_2^2 q_2, \\ \dot{q}_1 &= p_1, & \dot{q}_2 &= p_2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Notemos que el oscilador armónico con 2-grados de libertad es un sistema Hamiltoniano

clásico, con respecto a la siguiente función Hamiltoniana

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2} (p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2} (p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2). \quad (2.7)$$

El campo Hamiltoniano asociado al oscilador armónico con 2-grados de libertad esta dado por

$$X_H = (-\omega_1^2 q_1, -\omega_2^2 q_2, p_1, p_2)$$

y su flujo por

$$Fl_{X_H}^t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cos \omega_1 t - q_1 \omega_1 \sin \omega_1 t \\ p_2 \cos \omega_2 t - q_2 \omega_2 \sin \omega_2 t \\ \frac{p_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t + q_1 \cos \omega_1 t \\ \frac{p_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t + q_2 \cos \omega_2 t \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

En este punto podemos destacar que aparece la principal diferencia entre el oscilador armónico con 1-grado de libertad con respecto al de dos grados de libertad. En el primer caso, sin importar el valor de la frecuencia $\omega > 0$, el flujo del oscilador armónico siempre tiene flujo periódico, con período $\frac{2\pi}{\omega}$, (ver ecuación (2.4)). En el caso de dos grados de libertad, existen valores para las frecuencias ω_1 y ω_2 para los cuales el flujo del oscilador no es periódico.

Sin embargo, el oscilador armónico con dos grados de libertad posee dos familias de trayectorias periódicas, independientes de los valores de las frecuencias ω_1, ω_2 . Estas familias de órbitas periódicas son llamadas *modos normales*. Las órbitas periódicas o modos normales para el oscilador armónico con dos grados de libertad aparecen tomando las siguientes condiciones iniciales en (2.8).

- i) Si consideramos $p_1 = a, q_1 = b$ y $p_2 = q_2 = 0$, con a, b reales no nulos, en el flujo (2.8) se tiene una familia de órbitas periódicas de período

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

- ii) Si tomamos $p_1 = q_1 = 0$ y $p_2 = a, q_2 = b$ en el flujo (2.8) se tiene una familia de órbitas periódicas de período

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

A continuación presentamos una proposición donde se presentan condiciones necesarias y suficientes, para que, el flujo (2.8) sea periódico.

Proposición 2.1 (Caso resonante). *El flujo del oscilador armónico (2.8) es periódico si y sólo si $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es un número racional.*

Demostración. Fijemos $(p, q) \in \mathbb{R}^4$ y consideremos la siguiente función $\Gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$

dada por

$$\Gamma(s, \tau) = \begin{pmatrix} p_1 \cos \omega_1 s - q_1 \omega_1 \operatorname{sen} \omega_1 s \\ p_2 \cos \omega_2 \tau - q_2 \omega_2 \operatorname{sen} \omega_2 \tau \\ \frac{p_1}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 s + q_1 \cos \omega_1 s \\ \frac{p_2}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 \tau + q_2 \cos \omega_2 \tau \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Γ es una función cuasi-periódica con períodos $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ y $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ es decir

$$\Gamma(s + T_1, \tau) = \Gamma(s, \tau), \quad \text{y} \quad \Gamma(s, \tau + T_2) = \Gamma(s, \tau), \quad \text{para todo } s, \tau.$$

Notemos que existe un período común T en s y τ para Γ si y sólo si $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{Z}^+$. En este caso, el período común $T = mT_1 = nT_2$. Como $Fl_{\Gamma}^t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \Gamma(t, t)$ para todo $(p, q) \in \mathbb{R}^4$, se sigue el resultado deseado. \square

SECCIÓN 2.3

Trayectorias del oscilador armónico con 2-grados de libertad en el espacio de configuraciones

Ahora vamos a analizar las trayectorias del oscilador armónico con 2-grados de libertad en el espacio de configuraciones, es decir describiremos de manera cualitativa las trayectorias del sistema de ecuaciones de segundo orden (2.5) en el espacio de posiciones \mathbb{R}_{q_1, q_2}^2 .

Teniendo el flujo (2.8) lo que quisieramos es estudiar cualitativamente el comportamiento de ello, análogamente como se hizo en el caso del oscilador armónico con 1-grado de libertad en \mathbb{R}^2 . Sin embargo en este caso no podemos visualizar en \mathbb{R}^4 , pero lo que si podemos ver es como es el comportamiento cualitativo de la trayectorias en el espacio de configuraciones ya que es 2-dimensional. Es decir, vamos analizar cualitativamente el comportamiento de las trayectorias del oscilador armónico en el espacio de posiciones q_1, q_2 . Para ello consideremos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f_1(p_1, p_2, q_1, q_2) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2), \\ f_2(p_1, p_2, q_1, q_2) &= \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2), \end{aligned} \quad (2.10)$$

que también son integrales primeras del oscilador armónico con 2-grados de libertad. Es decir tanto f_1 como también f_2 son constantes a lo largo de las soluciones o curvas integrales del oscilador armónico con 2-grados de libertad dadas por (2.8). En efecto, si componemos f_i con el flujo del campo Hamiltoniano X_H , obtenemos nuevamente la función f_i :

$$\begin{aligned} f_i \circ Fl_{X_H}^t(p_1, p_2, q_1, q_2) &= \frac{1}{2} \left((p_i \cos \omega_i t - q_i \omega_i \operatorname{sen} \omega_i t)^2 + \omega_i^2 (q_i \cos \omega_i t + \frac{p_i}{\omega_i} \operatorname{sen} \omega_i t)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) = f_i(p_1, p_2, q_1, q_2), \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Además las integrales primeras f_1 y f_2 del oscilador armónico con 2-grados de libertad no son independientes del Hamiltoniano H ya que se verifica que $H = f_1 + f_2$. Luego, estas dos integrales primeras son de mucha importancia pues los flujos asociados a sus campos Hamiltonianos conmutan, es decir para todo $t, s \in \mathbb{R}$ se satisface la siguiente relación

$$Fl_{X_{f_1}}^t \circ Fl_{X_{f_2}}^s = Fl_{X_{f_2}}^s \circ Fl_{X_{f_1}}^t.$$

Sea $\gamma(t) = (q_1(t), q_2(t))$ la solución particular del sistema de ecuaciones de segundo orden (2.5) con condiciones iniciales $\gamma(0) = (a_1, a_2)$ y $\dot{\gamma}(0) = (b_1, b_2)$. Usando el flujo del oscilador armónico (2.8), se tiene que $\gamma(t)$ tiene la forma siguiente

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (q_1(t), q_2(t)) \\ &= \left(\frac{b_1}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t + a_1 \cos \omega_1 t, \frac{b_2}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t + a_2 \cos \omega_2 t \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Vamos a mostrar que $\gamma(t)$ esta contenida en una elipse en \mathbb{R}^2 determinada por las condiciones iniciales. En efecto, dada que la función Hamiltoniana (2.7) es una integral primera de H y que $\gamma(t) = (p_1(t), p_2(t))$, se tiene

$$H(\dot{\gamma}(t), \gamma(t)) = H(a_1, a_2, b_1, b_2) := E, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde E es una constante positiva. De la igualdad anterior se tiene que

$$\frac{1}{2}(p_1^2(t) + \omega_1^2 q_1^2(t)) + \frac{1}{2}(p_2^2(t) + \omega_2^2 q_2^2(t)) = E,$$

de donde se deduce la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2}(\omega_1^2 q_1^2(t) + \omega_2^2 q_2^2(t)) \leq E \quad (2.12)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Notemos que $\gamma(t)$ la solución o la curva integral del oscilador armónico con 2-grados de libertad en el plano (q_1, q_2) esta contenida en el interior de la elipse de ecuación

$$\frac{q_1^2}{2E/\omega_1^2} + \frac{q_2^2}{2E/\omega_2^2} = 1. \quad (2.13)$$

Pues, de la desigualdad (2.12) tenemos que

$$\frac{1}{2}(\omega_1^2 q_1^2(t) + \omega_2^2 q_2^2(t)) \leq E \Leftrightarrow \frac{q_1^2(t)}{2E/\omega_1^2} + \frac{q_2^2(t)}{2E/\omega_2^2} \leq 1.$$

Más aún, existe un rectángulo inscrito en la elipse (2.13) que contiene en su interior a la solución particular $\gamma(t)$. Para el efecto consideremos las funciones (2.10) que mencionamos anteriormente y sabiendo que estas funciones son integrales primeras del oscilador armónico tenemos lo siguiente

$$f_i(\dot{\gamma}(t), \gamma(t)) = f_i(a_1, a_2, b_1, b_2) := E_i$$

para $i = 1, 2$. Donde E_i son constantes positivas. Como $\dot{\gamma}(t) = (p_1(t), p_2(t))$, se concluye

que

$$\frac{1}{2}(p_i^2(t) + \omega_i^2 q_i^2(t)) = E_i$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica que $\frac{1}{2}\omega_i^2 q_i^2(t) \leq E_i$. Es decir $|q_i(t)| \leq A_i$, para todo t , con $A_i := \frac{\sqrt{2E_i}}{\omega_i}$. Por lo tanto la solución particular $\gamma(t)$ está contenida en el rectángulo

$$\mathcal{R} = \{(q_1, q_2) \mid |q_1| \leq A_1, |q_2| \leq A_2\}. \quad (2.14)$$

Finalmente, mostraremos que el rectángulo está inscrito en la elipse de ecuación (2.13) (Ver figura (2.3)). Notemos que los vértices del rectángulo \mathcal{R} son los puntos de coordenadas $(\pm A_1, \pm A_2)$. Como $A_1 = \frac{\sqrt{2E_1}}{\omega_1}$, $A_2 = \frac{\sqrt{2E_2}}{\omega_2}$ y $E = E_1 + E_2$, obtenemos

$$\frac{A_1^2}{2E/\omega_1^2} + \frac{A_2^2}{2E/\omega_2^2} = \frac{2E_1/\omega_1^2}{2E/\omega_1^2} + \frac{2E_2/\omega_2^2}{2E/\omega_2^2} = \frac{E_1 + E_2}{E} = 1.$$

Cabe mencionar que la región \mathcal{R} (2.14), depende tanto del valor de las frecuencias ω_1, ω_2

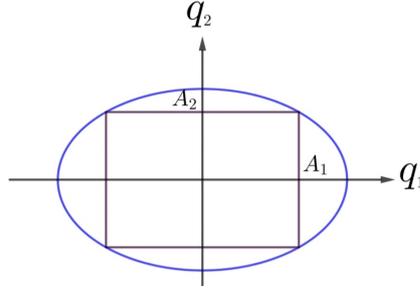


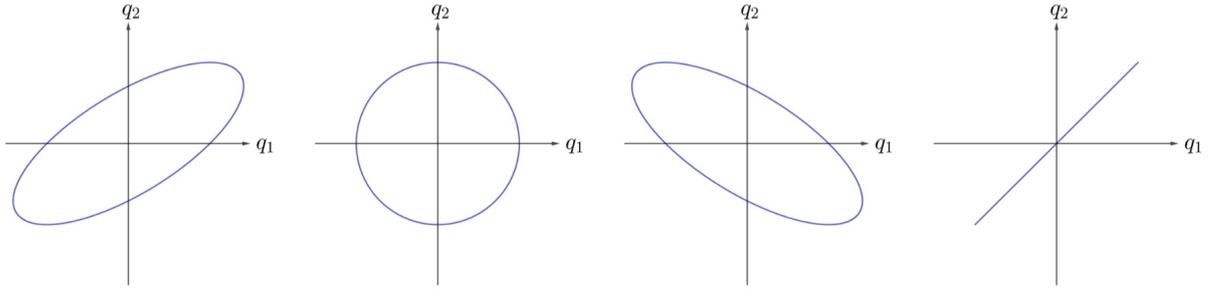
Figura 2.3: Rectángulo \mathcal{R} que contiene a la solución $\gamma(t)$.

como de las condiciones iniciales de la solución particular $\gamma(t)$ en (2.11).

Acabamos de mostrar que la curva $\gamma(t)$ (2.11) está contenida en la región \mathcal{R} (2.14). Ahora analizaremos el comportamiento cualitativo de $\gamma(t)$ dentro del rectángulo \mathcal{R} , es decir, la cuestión ahora es tener una idea de cómo es la dinámica de la solución particular $\gamma(t)$ del sistema (2.5) dentro del rectángulo \mathcal{R} (2.14). El análisis cualitativo que vamos a desarrollar muestra que la curva solución de (2.5) resulta ser altamente sensible, del cociente de las frecuencias $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ y de las condiciones iniciales que se fijen para ésta solución. La traza de las curvas $\gamma(t)$ (2.14) son llamadas *curvas de Lissajous*. Consideremos primero el caso en el que $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$. Las curvas de Lissajous en este caso son elipses, incluyendo los casos particulares de círculos ó segmentos de rectas, como se puede observar en las gráficas que aparecen en la figura (2.4). Para justificar de porque las trazas de $\gamma(t)$ son elipses, círculos y segmentos de rectas, consideremos las siguientes integrales primeras

$$\begin{aligned} \alpha_1(p_1, p_2, q_1, q_2) &= p_1^2 + q_1^2 & \alpha_2(p_1, p_2, q_1, q_2) &= p_2^2 + q_2^2 \\ \alpha_3(p_1, p_2, q_1, q_2) &= p_1 q_2 - p_2 q_1 & \alpha_4(p_1, p_2, q_1, q_2) &= p_1 p_2 + q_1 q_2 \end{aligned}$$

de $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2)$ tenemos que $\{H, \alpha_i\} = 0$. Notemos que las integrales primeras α_i satisfacen la relación


 Figura 2.4: Curvas de Lissajous para $\omega_1 = \omega_2$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_3^2 + \alpha_4^2 \quad (2.15)$$

lo cual implica que estos generadores son dependientes.

En la sección (2.4) discutiremos ampliamente el álgebra de simetrías ó de integrales primeras para el Hamiltoniano del oscilador armónico. Ahí mostraremos un algoritmo para construir las integrales primeras $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 y deduciremos de donde aparece la relación (2.15).

Sea $\gamma(t) = (q_1(t), q_2(t))$ la curva dada por (2.11) que es solución del sistema de ecuaciones (2.5). Recordemos que $(\dot{\gamma}(t), \gamma(t))$ es una curva integral del oscilador armónico. Tomando en cuenta que α_1 es integral primera de X_H , definamos $a \geq 0$ por $a := \alpha_1(\dot{\gamma}(t), \gamma(t))$. De aquí se sigue que

$$p_1^2(t) = a - q_1^2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Análogamente, utilizando la integral primera α_2 , definimos la constante $b \geq 0$ por $b := \alpha_2(\dot{\gamma}(t), \gamma(t))$. De donde obtenemos la siguiente relación

$$p_2^2(t) = b - q_2^2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Finalmente, definamos la constante $c \geq 0$ por $c := \alpha_3(\dot{\gamma}(t), \gamma(t))$, la cual nos conduce a la siguiente igualdad

$$p_1(t)p_2(t) = c - q_1(t)q_2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Sustituyendo (2.16) y (2.17) en (2.18) se tiene que $(a - q_1^2(t))(b - q_2^2(t)) = (c - q_1(t)q_2(t))^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Desarrollando, tenemos que la curva $\gamma(t)$ esta contenida en la curva cuadrática de ecuación

$$bq_1^2 - 2q_1q_2 + aq_2^2 = c^2 - ab \quad (2.19)$$

El lugar geométrico que determina (2.19) en \mathbb{R} está determinado por las relaciones entre los parametros a, b y c . Por lo tanto tenemos que

* *Circunferencia*: para $4 - 4ba < 0$ y $b = a$.

* *Elipse*: para $4 - 4ba < 0$ y $b \neq a$.

* *Hipérbola:* para $4 - 4ba > 0$.

* *Parábola:* Para $4 - 4ba = 0$ y $b = 0$ o $a = 0$.

Trayectorias del oscilador armónico: Caso Resonante. En la figura (2.5) se muestran algunas soluciones del sistema dinámico (2.5) con coeficientes de frecuencias $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ un número racional distinto de uno.

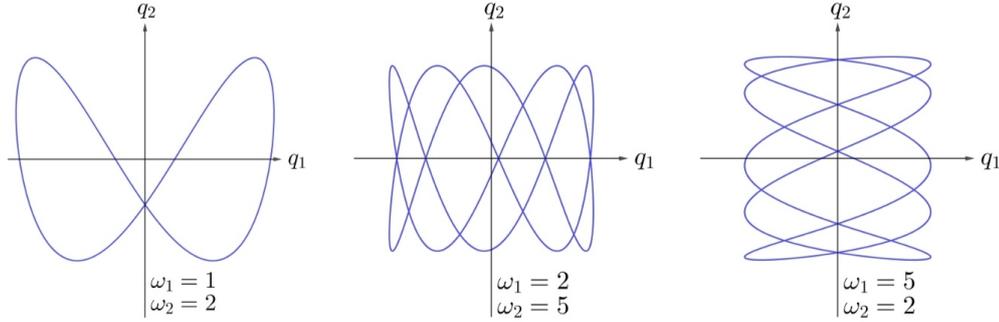


Figura 2.5: Adaptado del artículo [1]. Caso $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ racional

Trayectorias del oscilador armónico: Caso no resonante. Por otro lado en el caso que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ sea irracional la situación puede ser muy distinta, al caso cuando es racional. Si $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es irracional entonces las curvas solución del sistema (2.5) son densas en el rectángulo \mathcal{R} definido por (2.14) como se puede ver en la figura (2.6). Este hecho comprobaremos más adelante en el Corolario (2.1).

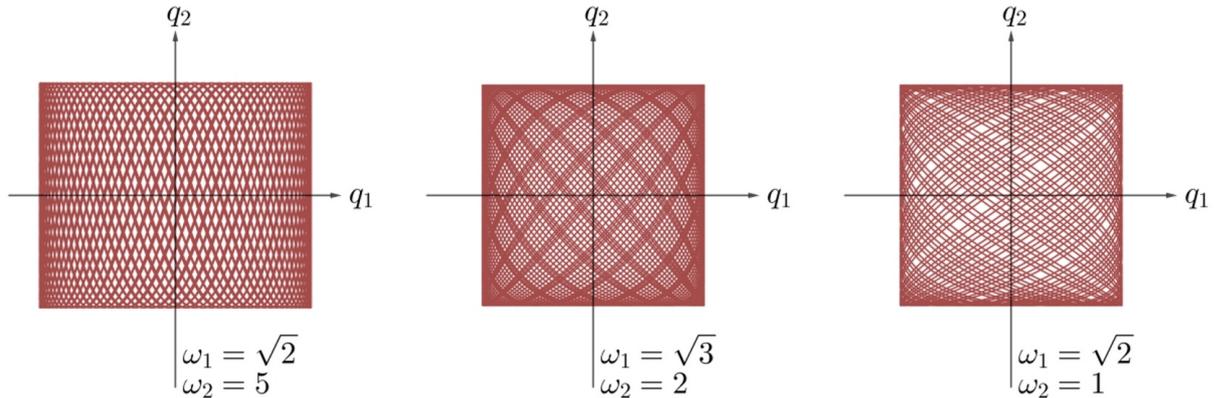


Figura 2.6: Adaptado del artículo [1]. Caso $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ irracional

En la siguiente sección de manera algebraica vamos a estudiar una clase de funciones especiales, aquellas que son constantes a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico (2.5), y este tipo de funciones son llamadas integrales primeras del sistema dinámico (2.5).

Simetrías y álgebra de integrales primeras del oscilador armónico

En el capítulo anterior definimos \mathcal{A}_H como el conjunto de integrales primeras en general para cualquier campo Hamiltoniano. En esta sección estudiaremos en particular el álgebra de integrales primeras del oscilador armónico con 2-grados de libertad y demostraremos uno de los resultados fundamentales que indica que el conjunto de todas ellas es un álgebra finitamente generada y además emplearemos un algoritmo para encontrar los generadores de dicha álgebra.

Para este propósito, consideremos el corchete de Poisson canónico en $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}_p^2 \times \mathbb{R}_q^2$, dado por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \quad (2.20)$$

para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$.

Sea $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2)$ el Hamiltoniano del oscilador armónico. Denotemos por \mathcal{A}_H al conjunto de simetrías ó integrales primeras de H ,

$$\mathcal{A}_H := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4) \mid \{H, f\} = 0\}. \quad (2.21)$$

Se verifica inmediatamente que el conjunto de integrales primeras del oscilador armónico con 2-grados de libertad \mathcal{A}_H es una subálgebra de Poisson, es decir, el conjunto \mathcal{A}_H es cerrado bajo la suma, producto y corchete de Poisson de funciones. En general para cualquier Hamiltoniano ya verificamos estas propiedades en el Capítulo (1).

Además de las propiedades de \mathcal{A}_H mencionadas anteriormente, se tiene que el álgebra \mathcal{A}_H es un conjunto finitamente generado. Esto significa que existe un conjunto finito $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ de integrales primeras tales que cualquier función $f \in \mathcal{A}_H$ se expresa como función de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Teorema 2.1. *El álgebra \mathcal{A}_H es un \mathbb{R} -álgebra finitamente generada, es decir, existe un número finito de funciones $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathcal{A}_H$ tal que para cada $f \in \mathcal{A}_H$, existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$ tal que*

$$f = g \circ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k).$$

La prueba del teorema (2.1) desarrollaremos por partes. En el caso resonante, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$, el flujo del oscilador armónico X_H induce una acción de \mathbb{S}^1 con generador infinitesimal

$$\Upsilon = \frac{1}{\omega} X_H,$$

donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con T periodo del flujo de X_H . En efecto, para $(p, q) \in \mathbb{R}^4$,

$$Fl_{\Upsilon}^{t+2\pi} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = Fl_{\frac{1}{\omega}X_H}^{t+2\pi} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = Fl_{X_H}^{\omega t+T} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = Fl_{X_H}^{\omega t} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = Fl_{\Upsilon}^t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Luego, la acción $\Phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{(p,q)}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{(p,q)}^4$ definida por

$$\Phi(\theta, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}) := Fl_{\Upsilon}^{\theta} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Lema 2.1. *En el caso resonante, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$, \mathcal{A}_H coincide con el álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)^{\mathbb{S}^1}$ de funciones constantes a lo largo de las órbitas de la \mathbb{S}^1 -acción (2.22) (\mathbb{S}^1 -invariantes).*

Demostración. Como $\Upsilon = \frac{1}{\omega}X_H$ con $\omega > 0$ constante, los campos Υ y X_H tienen el mismo retrato fase (con curvas parametrizadas de forma distinta). Para $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$, tenemos que

$$f \left(Fl_{\Upsilon}^t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) = f \left(Fl_{X_H}^{\tau} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right),$$

para todo $(p, q) \in \mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$ con $\tau = \omega t$. De aquí se sigue rápidamente que $\mathcal{A}_H = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)^{\mathbb{S}^1}$. \square

En el caso no resonante, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ el flujo de X_H ya no es periódico. En este caso, consideremos las siguientes integrales primeras de H .

$$f_1(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) \quad \text{y} \quad f_2(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2).$$

Los campos vectoriales $\Upsilon_1 := \frac{1}{\omega_1}X_{f_1}$, $\Upsilon_2 := \frac{1}{\omega_2}X_{f_2}$ conmutan

$$[\Upsilon_1, \Upsilon_2] = \frac{1}{\omega_1\omega_2} [X_{f_1}, X_{f_2}] = \frac{1}{\omega_1\omega_2} X_{\{f_1, f_2\}} = 0,$$

y tienen flujo 2π -periódico. Por lo tanto, podemos definir una acción de \mathbb{T}^2 en \mathbb{R}^4 de la siguiente forma $\Psi : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$\Psi((\theta_1, \theta_2), \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}) := Fl_{\Upsilon_1}^{\theta_1} \circ Fl_{\Upsilon_2}^{\theta_2} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Lema 2.2. *En el caso no resonante, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$, \mathcal{A}_H coincide con el álgebra de funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)^{\mathbb{T}^2}$ de funciones constantes a lo largo de las órbitas de la \mathbb{T}^2 -acción (2.23) (\mathbb{T}^2 -invariante).*

Demostración. Las órbitas de \mathbb{T}^2 -acción (2.23) son precisamente los conjuntos de nivel de la función $F(p, q) := (f_1(p, q), f_2(p, q))$. Como $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_H$, la contención $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)^{\mathbb{T}^2} \subset \mathcal{A}_H$ se sigue inmediatamente. Como las curvas integrales del oscilador armónico X_H son densas en las órbitas de la \mathbb{T}^2 -acción (2.23) (ver sección (2.6), caso no resonante), por argumentos de continuidad se sigue que $\mathcal{A}_H \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)^{\mathbb{T}^2}$. \square

Demostración. (Del Teorema (2.1)) Observemos que tanto en el caso resonante como no-resonante, el álgebra de integrales primeras \mathcal{A}_H coincide con el álgebra de funciones invariante $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)^G$ para $G = \mathbb{S}^1$ ó \mathbb{T}^2 , con respecto a las acciones definidas por (2.22) y (2.23), respectivamente. Por el Teorema de Schwarz-Mather, (3.6) existe un conjunto de funciones polinomiales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)^G$ tales que la aplicación $\mathcal{H} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por

$$\mathcal{H}(p, q) := (\alpha_1(p, q), \alpha_2(p, q), \dots, \alpha_k(p, q)),$$

es \mathcal{C}^∞ y

$$\mathcal{H}^* : \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)^G$$

es sobreyectiva. En consecuencia, para toda función $f \in \mathcal{A}_H = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)^G$ existe una función $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$ tal que $f = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$. \square

Nota 2.1. *El número k de funciones depende de la acción de \mathbb{S}^1 ó \mathbb{T}^2 .*

Generadores de álgebra de simetrías. El Teorema de Schwarz-Mather que se utilizó en la prueba del Teorema (2.1) hace referencia a la existencia de una base (polinomial) de Hilbert para el álgebra de funciones G -invariantes. De la prueba del Teorema (2.1) se deriva que dicha base de Hilbert resulta ser el conjunto generador del álgebra de simetría \mathcal{A}_H para el oscilador armónico. A continuación presentamos un procedimiento que nos permite obtener explícitamente un conjunto generador para el álgebra de simetrías \mathcal{A}_H . Estos generadores serán de utilidad en los siguientes capítulos de este trabajo.

Consideremos el espacio complejo $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}_\xi^2 \times \mathbb{C}_\eta^2$ con estructura de variedad diferencial inducida por su estructura de espacio vectorial real. Sea $N = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^4 \mid \eta = \bar{\xi}\}$. Notemos que N es una subvariedad regular. Definamos $\Psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow N$ definida por

$$\Psi(p_1, p_2, q_1, q_2) := (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2),$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_1 &= p_1 + i \omega_1 q_1 & \xi_2 &= p_2 + i \omega_2 q_2 \\ \eta_1 &= p_1 - i \omega_1 q_1 & \eta_2 &= p_2 - i \omega_2 q_2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$\Psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow N$ es un difeomorfismo con inverso $\Psi^{-1}(\xi, \eta) = (p, q)$ definida por

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\xi_1 + \eta_1}{2} & p_2 &= \frac{\xi_2 + \eta_2}{2} \\ q_1 &= \frac{\xi_1 - \eta_1}{2i\omega_1} & q_2 &= \frac{\xi_2 - \eta_2}{2i\omega_2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Entonces existe una única estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_N$ tal que es una transformación de Poisson.

Para todo $F, G \in \mathcal{C}^\infty(N)$ se cumple

$$\Psi^* \{F, G\}_N = \{\Psi^* F, \Psi^* G\}_{\mathbb{R}^4} \quad (2.26)$$

De hecho, la expresión (2.26) determina el corchete de Poisson en N .

$$\{F, G\}_N = \{\Psi^*F, \Psi^*G\} \circ \Psi^{-1}.$$

De las relaciones (2.24) y (2.25) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{i}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{i}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \quad (2.27)$$

Para $F, G \in \mathcal{C}^\infty(N)$, calculando el corchete de Ψ^*F, Ψ^*G obtenemos

$$\begin{aligned} \{\Psi^*F, \Psi^*G\}_{\mathbb{R}^4} &= \{F \circ \Psi, G \circ \psi\} \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} \right). \end{aligned}$$

Por (2.27), se tiene

$$\{\Psi^*F, \Psi^*G\} = \left[\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \right) \left(i\omega_j \frac{\partial G}{\partial \xi_j} - \frac{\partial G}{\partial \eta_j} \right) - \left(i\omega_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j} - \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_j} + \frac{\partial G}{\partial \eta_j} \right) \right] \circ \Psi$$

sustituyendo la igualdad de encima en (2.26) y simplificando términos

$$\{F, G\}_N = 2i \sum_{j=1}^2 \omega_j \left(\frac{\partial F}{\partial \eta_j} \frac{\partial G}{\partial \xi_j} - \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial G}{\partial \eta_j} \right). \quad (2.28)$$

Por otra parte, la función $H = \frac{1}{2}(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)$ es una función suave en N . tal que $H = \Psi^*\tilde{H}$. Por lo tanto, si $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ y $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^\infty(N)$ tales que $P = \Psi^*\mathcal{P}$

$$\{H, P\}_{\mathbb{R}^4} = 0 \text{ si y sólo si } \{\tilde{H}, \mathcal{P}\}_N = 0.$$

Así, encontrar integrales primeras del oscilador armónico H es equivalente a encontrar integrales primeras para \tilde{H} . Además, como el cambio de variables (2.24) es lineal, si P es una función polinomial entonces \mathcal{P} también es polinomial.

Como el Teorema de Schwarz-Mather (3.6), implica que los generadores de \mathcal{A}_H son funciones polinomiales, nos restringiremos a buscar integrales primeras de \tilde{H} que sean polinomios.

Proposición 2.2. *Sean j_1, j_2, k_1, k_2 enteros no negativos. El polinomio homogéneo*

$$\mathcal{P} = \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \eta_1^{k_1} \eta_2^{k_2} \quad (2.29)$$

es integral primera de \tilde{H} si y sólo si sus exponentes satisfacen la ecuación diofantina

$$\omega_1(j_1 - k_1) + \omega_2(j_2 - k_2) = 0$$

Demostración. Dada $\mathcal{P} = \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \eta_1^{k_1} \eta_2^{k_2}$ polinomio homogéneo, entonces

$$\begin{aligned} \{\tilde{H}, \mathcal{P}\}_{\mathbb{C}} &= \{\tilde{H}, \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \eta_1^{k_1} \eta_2^{k_2}\}_{\mathbb{C}} \\ &= i\omega_1 j_1 \xi_1^{j_1-1} \xi_2^{j_2} \eta_1^{k_1} \eta_2^{k_2} - i\omega_1 k_1 \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \eta_1^{k_1-1} \eta_2^{k_2} + i\omega_2 j_2 \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2-1} \eta_1^{k_1} \eta_2^{k_2} - i\omega_2 k_2 \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \eta_1^{k_1} \eta_2^{k_2-1} \\ &= i[\omega_1(j_1 - k_1) + \omega_2(j_2 - k_2)] \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{\tilde{H}, \mathcal{P}\}_{\mathbb{C}} = 0$ si y sólo si $\omega_1(j_1 - k_1) + \omega_2(j_2 - k_2) = 0$ como queríamos probar. \square

En la prueba de la proposición anterior se mostro que para el polinomio homogéneo \mathcal{P} (2.29)

$$\{\tilde{H}, \mathcal{P}\} = i[\omega_1(j_1 - k_1) + \omega_2(j_2 - k_2)] \mathcal{P}.$$

De ésta observación y de la proposición (2.2) se sigue que un polinomio es integral primera de \tilde{H} si y sólo si cada uno de sus terminos son integrales primeras de \tilde{H} .

Por lo que debemos escoger los exponentes del polinomio (2.29) homogéneo de grado k para que sea un integral primera de \tilde{H} . Lo cual equivale a encontrar los generadores de las soluciones de la ecuación diofántica

$$\omega_1 r + \omega_2 s = 0. \quad (2.30)$$

Para obtener los generadores de las integrales primeras de \tilde{H} , donde $r = j_1 - k_1 > 0$ y $s = j_2 - k_2 < 0$.

- En particular $r = s = 0$ siempre es solución (trivial) de la ecuación diofántica (2.30), así en (2.29) obtenemos que

$$\mathcal{P} = (\xi_1 \eta_1)^{k_1} (\xi_2 \eta_2)^{j_2}, \quad (2.31)$$

con k_1, j_2 enteros no negativos, es una integral primera de \tilde{H} . Tomando en particular $k_1 = 1$ y $j_2 = 0$, tenemos que $\mathcal{P}_1 = \xi_1 \eta_1$, por otro lado si $k_1 = 0$ y $j_2 = 1$ se tiene que $\mathcal{P}_2 = \xi_2 \eta_2$. Estos polinomios generan a (2.31), es decir $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1)^{k_1} (\mathcal{P}_2)^{j_2}$.

- Si $j_1 = r + k_1$ y $k_2 = -s + j_2$ luego en la ecuación (2.29) tenemos

$$\mathcal{P} = (\xi_1 \eta_1)^{k_1} (\xi_2 \eta_2)^{j_2} (\xi_1^r \eta_2^{-s}).$$

Tomando en particular $k_1 = j_2 = 0$ se tiene $\mathcal{P}_3 = \xi_1^r \eta_2^{-s}$ que es una integral primera de \tilde{H} .

- Si consideramos que $k_1 = r + j_1$ y $j_2 = k_2 - s$ luego en (2.29) se tiene

$$\mathcal{P} = (\xi_1 \eta_1)^{j_1} (\xi_2 \eta_2)^{k_2} (\xi_2^{-s} \eta_1^r).$$

si tomamos $j_1 = k_2 = 0$ se tiene $\mathcal{P}_4 = \xi_2^{-s} \eta_1^r$ que también es una integral primera de \tilde{H} . En resumen para una solución (r, s) no trivial los polinomios homogéneos

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ generan a \mathcal{P} .

Proposición 2.3. *La ecuación diofántina $\omega_1 r + \omega_2 s = 0$ tiene solución distinta a la trivial si y sólo si $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$, tal que $\text{mcd}(m, n) = 1$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Por lo tanto los generadores del conjunto de integrales primeras del oscilador armónico \mathcal{A}_H , se citan a continuación por casos:

- *Caso no resonante:* para este caso los generadores vienen dados como sigue

$$\mathcal{P}_1 = \xi_1 \eta_1; \quad \mathcal{P}_2 = \xi_2 \eta_2.$$

Toda integral primera de \tilde{H} , es polinomio de las variables \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 .

- *Caso resonante:* es decir si $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $\text{mcd}(m, n) = 1$. tenemos

$$\mathcal{P}_1 = \xi_1 \eta_1; \quad \mathcal{P}_2 = \xi_2 \eta_2; \quad \mathcal{P}_3 = \xi_1^n \eta_2^m; \quad \mathcal{P}_4 = \xi_2^m \eta_1^n.$$

Donde $n = r$ y $m = -s$, así toda integral primera de \tilde{H} , es polinomio de las variables $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ y \mathcal{P}_4 .

Notemos $\overline{\mathcal{P}}_3 = \mathcal{P}_4$. Luego definimos $\hat{\mathcal{P}}_3 = \mathcal{R}e(\mathcal{P}_3) = \mathcal{R}e(\xi_1^n \eta_2^m)$ y $\hat{\mathcal{P}}_4 = \mathcal{I}m(\mathcal{P}_3) = \mathcal{I}m(\xi_1^n \eta_2^m)$.

En resumen los polinomios homogéneos que generan a \tilde{H} en N son los siguientes:

$$\mathcal{P}_1 = \xi_1 \eta_1; \quad \mathcal{P}_2 = \xi_2 \eta_2; \quad \hat{\mathcal{P}}_3 = \mathcal{R}e(\xi_1^n \eta_2^m); \quad \hat{\mathcal{P}}_4 = \mathcal{I}m(\xi_1^n \eta_2^m). \quad (2.32)$$

luego, usando Ψ^{-1} obtenemos que los generadores de H son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \Psi^* \mathcal{P}_1 = p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2, \\ \alpha_2 &= \Psi^* \mathcal{P}_2 = p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2, \\ \alpha_3 &= \Psi^* \hat{\mathcal{P}}_3 = \mathcal{R}e[(p_1 + i \omega_1 q_1)^n (p_2 - i \omega_2 q_2)^m], \\ \alpha_4 &= \Psi^* \hat{\mathcal{P}}_4 = \mathcal{I}m[(p_1 + i \omega_1 q_1)^n (p_2 - i \omega_2 q_2)^m]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Notemos que los generadores (2.33) no son una base de Hilbert libre es decir la relación que hay entre estos generadores es la siguiente

$$\begin{aligned} \alpha_1^n \cdot \alpha_2^m &= (\xi_1 \eta_1)^n (\xi_2 \eta_2)^m = (\xi_1^n \eta_2^m) (\xi_2^m \eta_1^n) = (\xi_1^n \eta_2^m) (\overline{\xi_1^n \eta_2^m}) \\ &= [\mathcal{R}e(\xi_1^n \eta_2^m)]^2 + [\mathcal{I}m(\xi_1^n \eta_2^m)]^2 = \hat{\alpha}_3^2 + \hat{\alpha}_4^2 \end{aligned}$$

En la siguiente sección vamos a estudiar la contraparte geométrica, es decir utilizando algunas de las integrales primeras que obtuvimos vamos a describir los conjuntos que son invariantes bajo el flujo del oscilador armónico.

Subvariedades invariantes del oscilador armónico

En esta sección, analizaremos la geometría detrás del oscilador armónico con 2-grados de libertad. Describiremos algunos conjuntos invariantes bajo el flujo del oscilador armónico. Primero, se estudian las subvariedades tres-dimensionales dadas por los conjuntos de nivel regulares del Hamiltoniano del oscilador armónico y que resultan ser difeomorfos a \mathbb{S}^3 . Después, mostramos que el espacio fase \mathbb{R}^4 está densamente foliado por subvariedades 2-dimensionales compactas y conexas, es decir 2-toros \mathbb{T}^2 . Este hecho es consecuencia de que el oscilador armónico con dos grados de libertad es un sistema Hamiltoniano completamente integrable. Precisamente, los 2-toros (de Liouville) son generados por los valores regulares de las integrales primeras $f_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2)$ y $f_2 = \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2)$. Los valores críticos de estas integrales primeras, son excepción del origen, resultan ser curvas cerradas del oscilador armónico conocidos como modos normales. concluimos esta sección mostrando como están relacionados estos conjuntos invariantes: cada conjunto de nivel regular del oscilador armónico está foliado por dos toros de Liouville que se "acumulan" sobre dos modos normales. En la sección estudiamos como es la dinámica del oscilador armónico sobre los 2-toros de Liouville.

Las subvariedades tres dimensionales invariantes las generamos con los conjuntos de nivel de H ,

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2).$$

Para ello, determinaremos los valores regulares de H . Calculando el gradiente de H

$$\nabla H = (p_1, p_2, \omega_1^2 q_1, \omega_2^2 q_2)$$

tenemos que 0 es el único valor singular de H . Entonces, para $E > 0$ fijo, por el teorema de rango constante [19] $H^{-1}(E)$ es una subvariedad regular invariante en \mathbb{R}^4 de dimensión 3. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} H^{-1}(E) &= \{(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^4 \mid H(p_1, p_2, q_1, q_2) = E\} \\ &= \{(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^4 \mid p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2 + p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2 = 2E\} \end{aligned}$$

es una subvariedad regular tres-dimensional difeomorfa a \mathbb{S}^3 , casi todo el espacio fase \mathbb{R}^4 está foliado por esta $H^{-1}(H)$ subvariedades.

Por otro lado para generar las subvariedades dos dimensionales consideremos la función $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por las integrales primeras del oscilador armónico (2.10)

$$F(p_1, p_2, q_1, q_2) = (f_1(p_1, p_2, q_1, q_2), f_2(p_1, p_2, q_1, q_2)) \tag{2.34}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2), \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) \right). \tag{2.35}$$

Como f_1 y f_2 son integrales primeras del oscilador armónico, las curvas solución del oscilador armónico dadas por (2.8) están contenidos en los conjuntos de nivel de la función F , es decir, los conjuntos de nivel de F son conjuntos invariantes bajo el flujo del campo Hamiltoniano X_H del oscilador armónico.

Tomando en cuenta que f_i es constante a lo largo del flujo del campo Hamiltoniano X_H , si $f_1 \circ Fl_{X_H}^t(p_1, p_2, q_1, q_2)^T = E_1$ y $f_2 \circ Fl_{X_H}^t(p_1, p_2, q_1, q_2)^T = E_2$ entonces

$$F \circ Fl_{X_H}^t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = (f_1 \circ Fl_{X_H}^t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, f_2 \circ Fl_{X_H}^t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}) = (E_1, E_2), \text{ con } E_1, E_2 \geq 0$$

Recíprocamente, para E_1, E_2 reales no-negativos el conjunto de nivel de $F^{-1}(E_1, E_2)$, está foliado por curvas integrales del oscilador armónico.

Ahora describamos los conjuntos de nivel de la función F para determinar cómo son los conjuntos invariantes del oscilador armónico. Es claro que $f_1, f_2 \geq 0$, luego $F^{-1}(E_1, E_2) \neq \emptyset$ si y sólo si $E_1, E_2 \geq 0$. Recordemos que un punto $(E_1, E_2) \in \mathbb{R}^2$ es un valor regular de F si para cada $(p, q) \in F^{-1}(E_1, E_2)$, la matriz Jacobina de F tiene rango máximo. Por el teorema de rango constante [19], si (E_1, E_2) es un valor regular de F entonces el conjunto de nivel $F^{-1}(E_1, E_2)$ es una subvariedad regular dos dimensional en \mathbb{R}^4 .

Ahora vamos a determinar los valores regulares de F y como F se contruye con integrales primeras de X_H , los conjuntos de nivel regulares son subvariedades regulares invariantes. Para ello, empecemos calculando el Jacobiano de la función F en el punto (p, q)

$$DF(p, q) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \omega_1^2 q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \omega_2^2 q_2 \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz Jacobiana tiene rango máximo en (p_1, p_2, q_1, q_2) si y sólo si $(p_1, q_1) \neq 0$ y $(p_2, q_2) \neq 0$. Por lo tanto, $(E_1, E_2) \in \mathbb{R}^2$ es un valor regular de F si y sólo si $E_1, E_2 \geq 0$.

Ahora, vamos a mostrar que los conjuntos de nivel que corresponden a valores regulares de F son superficies regulares difeomorfas a toros dos dimensionales en \mathbb{R}^4 . En efecto, fijando una pareja de reales positivos E_1, E_2 , tenemos

$$\begin{aligned} F^{-1}(E_1, E_2) &= \{(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^4 \mid F(p_1, p_2, q_1, q_2) = (E_1, E_2)\} \\ &= \{(p_1, q_1) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(p_1, p_2, q_1, q_2) = E_1\} \times \{(p_2, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f_2(p_1, p_2, q_1, q_2) = E_2\} \\ &= \left\{ (p_1, q_1) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{p_1^2}{2E_1} + \omega_1^2 \frac{q_1^2}{2E_1} = 1 \right\} \times \left\{ (p_2, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{p_2^2}{2E_2} + \omega_2^2 \frac{q_2^2}{2E_2} = 1 \right\} \\ &\cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2. \end{aligned}$$

Además en caso que E_1 ó E_2 sean cero (valor singular de F), se tiene que $F^{-1}(E_1, E_2)$ es una curva cerrada (trayectoria periódica del oscilador armónico con 2-grados de libertad) y si ambos son cero en este caso $F^{-1}(E_1, E_2)$ consiste de un solo punto (el origen).

Como $F^{-1}(\{(E_1, E_2) \mid E_1, E_2 \geq 0\}) = \mathbb{R}^4$, el conjunto donde el rango de F es máximo es denso en \mathbb{R}^4 . Por lo que casi todo el espacio fase del sistema está foliado por subvariedades invariantes dos dimensionales llamados *toros de Liouville*, mientras que las, *hojas singulares*, llamadas así porque tienen menor dimensión que los toros que las rodean, son curvas cerradas o un punto. Estas singularidades corresponden al caso en que alguno de los osciladores (o ambas) se encuentran en posición de equilibrio, ($E_1 = 0$ ó $E_2 = 0$) y estas corresponden a los modos normales.

Hasta este punto, hemos destacado las siguientes subvariedades invariantes: subvariedades tres-dimensionales dadas por conjunto de nivel de H , 2-toros de Liouville invariantes definidos por los conjuntos de nivel regulares de F (2.34), los modos normales del oscilador armónico y el origen. En el siguiente resultado vamos a establecer como están relacionadas estas subvariedades invariantes.

Proposición 2.4. *Cada subvariedad regular tres dimensionales $H^{-1}(E)$, están foliadas por dos modos normales de X_H y por toros de Liouville.*

Demostración. Fijemos $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^4$. Definamos $E = H(p_1, p_2, q_1, q_2)$, $E_1 = f_1(p_1, p_2, q_1, q_2)$ y $E_2 = f_2(p_1, p_2, q_1, q_2)$. Como $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = f_1(p_1, p_2, q_1, q_2) + f_2(p_1, p_2, q_1, q_2)$, tenemos que $E = E_1 + E_2$. Entonces

$$\begin{aligned} z \in F^{-1}(E_1, E_2) &\Rightarrow \begin{cases} f_1(z) = E_1 \\ f_2(z) = E_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow H(z) = E \\ &\Rightarrow z \in H^{-1}(E), \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $E_1, E_2 \geq 0$ tales que $E = E_1 + E_2$ se tiene que $F^{-1}(E_1, E_2) \subset H^{-1}(E)$, lo que implica que $H^{-1}(E)$ esta foliada por 2-toros de Liouville y dos modos normales definidos por $E_1 = E, E_2 = 0$ y $E_1 = 0, E_2 = E$. \square

En la figura (2.7) se ilustra la relación que hay entre subvariedades tres dimensionales y las subvariedades dos dimensionales en el espacio fase \mathbb{R}^4 que se probó en la proposición anterior.

Utilizando la proyección estereográfica es posible visualizar la foliación de subvariedades invariantes por toros de Liouville y modos normales. Vamos a ilustrar esto con el oscilador armónico con resonancia 1 : 1. Esto porque los conjuntos de nivel de H son precisamente 3-esferas en \mathbb{R}^4 . La proyección estereográfica es un difeomorfismo entre \mathbb{S}^3/N y \mathbb{R}^3 . Por lo que en \mathbb{R}^3 podemos visualizar la foliación por toros de Liouville.

Sean $\mathbb{S}^3 = \{p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 = 1\}$ plano $\mathbb{P} = \{(p_1, q_1, p_2, 0)\} \cong \mathbb{R}_{x,y,z}^3$ y $N = (0, 0, 0, 1)$.

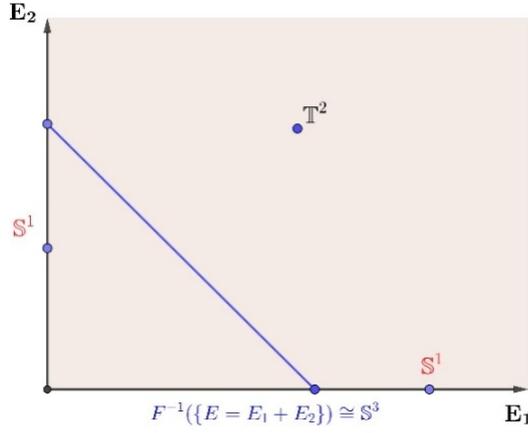


Figura 2.7: Relación entre subvariedades tres y dos dimensionales.

Definimos la proyección estereográfica de \mathbb{S}^3 sobre $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$ como la aplicación

$$\begin{aligned} P : \mathbb{S}^3/N &\rightarrow \mathbb{R}_{x,y,z}^3 \\ (p_1, p_2, q_1, q_2) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

dada por:

$$x = \frac{p_1}{1 - q_2}, \quad y = \frac{q_1}{1 - q_2}, \quad z = \frac{p_2}{1 - q_2}. \quad (2.36)$$

Consideremos el Hamiltoniano del oscilador armónico con resonancia 1 : 1,

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2).$$

Notemos que

$$H^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \{(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^4 \mid p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 = 1\} = \mathbb{S}^3$$

es claro que \mathbb{S}^3 es una subvariedad regular invariante bajo el flujo del oscilador armónico, donde la $\dim(\mathbb{S}^3) = 3$. Además por la Proposición (2.4) la subvariedad \mathbb{S}^3 está foliada por dos modos normales y por toros (de Liouville). Luego sabemos que $H = f_1 + f_2$ tal que $f_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) = E_1$ y $f_2 = \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) = E_2$. Definamos

$$E_1 := \frac{1}{2}h^2, \quad E_2 := \frac{1}{2}(1 - h^2), \quad \text{con } h \in [0, 1].$$

Esto permite parametrizar los 2-toros en $H^{-1}(\frac{1}{2})$, como viene a continuación

$$F^{-1}(E_1, E_2) = \{(p, q) \mid p_1^2 + q_1^2 = h^2; p_2^2 + q_2^2 = 1 - h^2\} = \mathbb{T}_h^2, \quad (2.37)$$

para $h \in (0, 1)$. Además notemos que para $h = 1, 0$ tenemos los modos normales del oscilador armónico en \mathbb{S}^3 , dados por:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, 0, \sin t, 0), \quad \text{para } h = 1,$$

y

$$\gamma_2(t) = (0, -\operatorname{sen} t, 0, \cos t) \text{ para } h = 0.$$

$\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ son las órbitas periódicas de X_H que pasan por el punto $N = (1, 0, 0, 0)$ y $S = (0, 0, 0, 1)$, respectivamente. Por lo tanto utilizando la proyección estereográfica (2.36) tenemos que

(i) Si $h = 1$, la curva γ_1 es transformada por (2.36) en la curva en \mathbb{R}^3 definida por:

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

(ii) Si $h = 0$ la proyección estereográfica (2.36) transforma la curva $\gamma_2(t)$ en la curva parametrizada en \mathbb{R}^3

$$\beta(t) = \left(0, 0, \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t - 1}\right)$$

para $0 < t < 2\pi$, cuya traza es todo el eje z .

(iii) Si $0 < h < 1$ tenemos el 2-toro en \mathbb{R}^4 dado por $p_1^2 + q_1^2 = h^2$ y $p_2^2 + q_2^2 = 1 - h^2$. Luego, de (2.36) tenemos que

$$x^2 + y^2 = \frac{p_1^2}{(1 - q_2)^2} + \frac{q_1^2}{(1 - q_2)^2} = \frac{h^2}{(1 - q_2)^2} \quad (2.38)$$

y $z = \frac{p_2}{1 - q_2}$, es decir $z^2(1 - q_2)^2 = p_2^2$ de donde se tiene

$$(z^2 + 1)q_2^2 - 2z^2q_2 + (z^2 + h^2 - 1) = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para q_2 tenemos $q_2 = \frac{z^2 \pm \sqrt{1 - h^2(z^2 + 1)}}{z^2 + 1}$, luego en la ecuación (2.38) se tiene $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{h(z^2 + 1)}{1 \pm \sqrt{1 - h^2(z^2 + 1)}}$. Reduciendo esta última expresión tenemos que $\mathbb{T}_h^2 \subset \mathbb{R}^4$ es transformado en el 2-toro en \mathbb{R}^3 de ecuación

$$(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2$$

donde $R = \frac{1}{h}$, $r^2 = \frac{1 - h^2}{h^2}$.

La figura (2.8) ilustra la foliación de 2-toros de Liouville en \mathbb{R}^3 vía la proyección estereográfica.

En resumen hasta este momento se ha demostrado que casi todas las trayectorias del oscilador armónico con 2-grados de libertad viven en toros dos dimensionales en \mathbb{R}^4 , en la siguiente sección analizaremos como es el comportamiento cualitativo y dinámico de las trayectorias del oscilador armónico sobre los toros de Liouville.

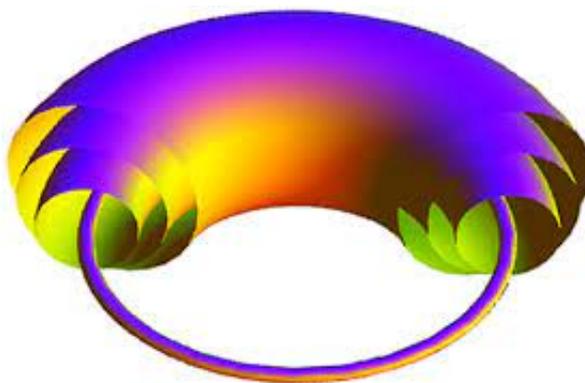


Figura 2.8: Relación de Toros de Liouville con órbitas periódicas.

SECCIÓN 2.6

Dinámica del oscilador armónico sobre los toros de Liouville

En esta última sección estudiaremos cualitativamente el comportamiento dinámico de las trayectorias del oscilador armónico sobre los toros de Liouville. El comportamiento cualitativo de las trayectorias depende de la relación aritmética de las frecuencias ω_1, ω_2 . Por lo tanto se tiene los siguientes casos.

- (i) Si $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es racional, todas las trayectorias del oscilador armónico con 2-grados de libertad son periódicas. Como los toros son conjuntos invariantes, estos están foliados por las órbitas periódicas.
- (ii) Si $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es irracional, las trayectorias del oscilador armónico no todas son periódicas. En particular, las órbitas que viven en los toros invariantes no son periódicas. Así, cada trayectoria con un punto inicial en un toro de Liouville se enrolla sobre dicho toro pero nunca vuelve al punto inicial. En este caso las trayectorias del oscilador armónico llenan densamente a los toros de Liouville.

Para analizar cualitativamente el comportamiento dinámico de las trayectorias del oscilador armónico con 2-grados de libertad sobre los toros de Liouville y verificar que, efectivamente se presentan las situaciones descritas previamente, emplearemos un cambio de coordenadas que simplificará el análisis del sistema dinámico (2.5). Vamos a introducir unas coordenadas especiales $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$ para el espacio fase $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, llamadas coordenadas acción-ángulo.

Sabemos de la sección (2.2) que el plano $p_2 = q_2 = 0$ en \mathbb{R}^4 está foliado por órbitas periódicas del oscilador armónico con 2-grados de libertad, a saber los modos normales. Más aun esta familia de curvas satisface la condición de que $f_2 \circ Fl_{X_H}^t(p_1, 0, q_1, 0) = 0$. Por lo tanto tomemos un número real positivo E_1 fijo y denotemos por $\mathcal{D}(E_1)$ al dominio en el plano $p_2 = q_2 = 0$ acotado por la trayectoria $\gamma_{E_1}(t) = Fl_{X_H}^t(0, 0, 2E_1/\omega_1, 0)$. Sea

$$A(E_1) = \int_{\mathcal{D}(E_1)} dp_1 \wedge dq_1 = \oint_{\gamma_{E_1}(t)} p_1 dq_1,$$

el área del dominio $\mathcal{D}(E_1)$. Así, el período $T(E_1)$ de la curva es dado por $T(E_1) = \frac{\partial A(E_1)}{\partial E_1}$. Definimos un par de coordenadas acción-ángulo por

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} A(E_1), \quad \varphi_1 = \frac{2\pi t}{T(E_1)}, \quad I_1 > 0, \quad \varphi_1 \in \mathbb{S}^1. \quad (2.39)$$

De forma análoga ocurre en el plano $p_1 = q_1 = 0$. Luego, repitiendo el análisis anterior definimos otro par de coordenadas acción-ángulo por

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} A(E_2), \quad \varphi_2 = \frac{2\pi t}{T(E_2)}, \quad I_2 > 0, \quad \varphi_2 \in \mathbb{S}^1. \quad (2.40)$$

Por lo tanto, usando las fórmulas (2.39), (2.40) y el flujo del oscilador armónico con 2-grados de libertad (2.30) se construye un cambio de coordenadas $\Psi : (I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \mapsto (p_1, p_2, q_1, q_2)$ dado por

$$p_i = \sqrt{2\omega_i I_i} \cos(\varphi_i), \quad q_i = \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \sin(\varphi_i), \quad (2.41)$$

para $i = 1, 2$. Luego el Hamiltoniano del oscilador armónico (2.29) en estas nuevas coordenadas acción-ángulo (2.41) está dada por:

$$H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2. \quad (2.42)$$

Derivando p_i, q_i con respecto a t en (2.41) y sustituyendo en el sistema (2.6), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2\omega_i}}{2I_i^{\frac{1}{2}}} \cos(\varphi_i) \dot{I}_i - \sqrt{2\omega_i} I_i^{\frac{1}{2}} \sin(\varphi_i) \dot{\varphi}_i &= -\omega_i^2 \sqrt{\frac{2}{\omega_i}} I_i^{\frac{1}{2}} \sin(\varphi_i) \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega_i I_i}} \sin(\varphi_i) \dot{I}_i + \sqrt{\frac{2}{\omega_i}} I_i^{\frac{1}{2}} \cos(\varphi_i) \dot{\varphi}_i &= \sqrt{2\omega_i} I_i^{\frac{1}{2}} \cos(\varphi_i) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Así la igualdad anterior es equivalente a

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_i}}{\sqrt{2I_i}} \cos(\varphi_i) & -\sqrt{2\omega_i I_i} \sin(\varphi_i) \\ \frac{1}{\sqrt{2\omega_i I_i}} \sin(\varphi_i) & \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \cos(\varphi_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_i \\ \dot{\varphi}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2\omega_i^3 I_i} \sin(\varphi_i) \\ \sqrt{2\omega_i I_i} \cos(\varphi_i) \end{pmatrix}$$

de donde tenemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2I_i}}{\sqrt{\omega_i}} \cos(\varphi_i) & \sqrt{2\omega_i I_i} \sin(\varphi_i) \\ -\frac{1}{\sqrt{2\omega_i I_i}} \sin(\varphi_i) & \frac{\sqrt{\omega_i}}{\sqrt{2I_i}} \cos(\varphi_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2\omega_i^3 I_i} \sin(\varphi_i) \\ \sqrt{2\omega_i I_i} \cos(\varphi_i) \end{pmatrix}$$

Finalmente, el oscilador armónico (2.6) en coordenadas acción-ángulo toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 0, & \dot{I}_2 &= 0, \\ \dot{\varphi}_1 &= \omega_1, & \dot{\varphi}_2 &= \omega_2, \end{aligned} \quad (2.43)$$

para $I_1, I_2 \in \mathbb{R}^+$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{S}^1$. Además es un sistema Hamiltoniano, con función Hamiltoniana $H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$.

Notemos que el sistema (2.43) es integrable por cuadraturas y es más simple de resolver a diferencia del sistema original (2.6). La solución al problema (2.43) sujeto al valor inicial $(E_1, E_2, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^2$ en $t = 0$ está dada por

$$\begin{aligned} I_i(t) &= E_i, \\ \varphi_i(t) &= \omega_i t + \theta_i \pmod{2\pi} \quad \text{para } i = 1, 2. \end{aligned}$$

donde E_i, θ_i son constantes. Así la curva integral sobre el toro (E_1, E_2) en coordenadas acción ángulo está dada como $(I_1(t), I_2(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$. Como $I_i(t) = E_i$ para $i = 1, 2$ nos indican el toro de Liouville en el que esta la trayectoria de X_H nos restringimos a analizar en la curva

$$\gamma(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (\omega_1 t + \theta_1, \omega_2 t + \theta_2) \quad (2.44)$$

con $\gamma(0) = (\theta_1, \theta_2)$, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Geométricamente, el conjunto $I_1 = E_1, I_2 = E_2$, para un par de números reales positivos (E_1, E_2) en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ determina un 2-toro invariante del oscilador armónico (2.6). Así este toro está parametrizado por las coordenadas angulares (φ_1, φ_2) . De (2.44) se sigue que la dinámica del oscilador armónico con 2-grados de libertad en el toro $I_1 = E_1, I_2 = E_2$, es lineal, pero como mencionamos al inicio el comportamiento dinámico de las trayectorias es altamente sensible de la relación entre las frecuencias ω_1, ω_2 , como mostraremos a continuación.

Para efecto, primero fijemos un toro invariante, es decir, tomemos $I_1 = E_1, I_2 = E_2$ con $E_1, E_2 > 0$ constantes. Consideremos el sistema de coordenadas $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, para este toro. La dinámica del oscilador armónico sobre el toro $I_1 = E_1, I_2 = E_2$ está determinada por la ecuación (2.43). Por lo tanto, es conveniente pensar en las variables (φ_1, φ_2) como variables en un cuadrado de longitud 2π , e identificando los lados opuestos $\varphi_2 = 0$ con $\varphi_2 = 2\pi$ y $\varphi_1 = 0$ con $\varphi_1 = 2\pi$ construimos un toro como se ve en la figura (2.9).

De la ecuación (2.43), se sigue que el oscilador armónico induce en el cuadrado el siguiente sistema dinámico

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (2.45)$$

Cuyas soluciones en el plano (φ_1, φ_2) son rectas dadas por $\varphi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \varphi_1 + \alpha$ donde $\alpha \in \mathbb{S}^1$ es una constante y de pendiente $\frac{\omega_2}{\omega_1}$.

Notemos que cuando una solución alcanza el lado $\varphi_1 = 2\pi$ (supongamos que cuando esto ocurre $\varphi_2 = \alpha$) está solución instantáneamente aparece en el lado $\varphi_1 = 0$ (en el punto con coordenada $\varphi_2 = \alpha$), y entonces la solución continua sobre la recta con pendiente $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. De forma análoga se repite cuando la solución alcanza el lado $\varphi_2 = 2\pi$. En la figura (2.9) se ilustra la situación previamente descrita.

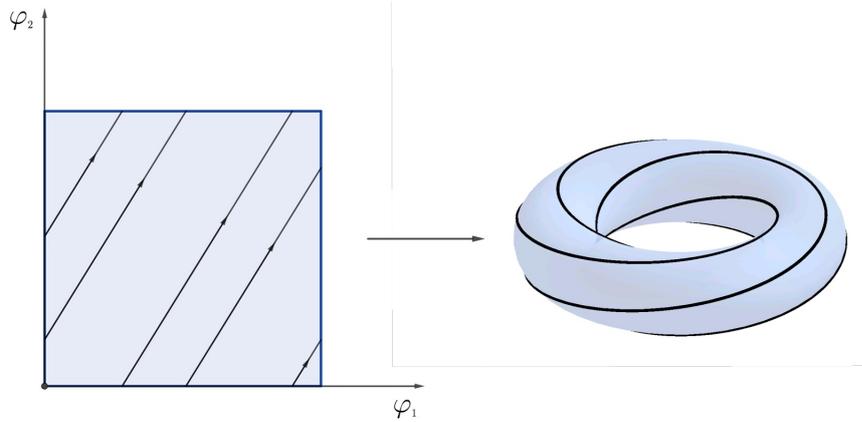


Figura 2.9: Adaptado del artículo [1] Dinámica del oscilador armónico sobre un toro invariante.

Para demostrar las afirmaciones descritas en (i) – (ii), fijemos \mathcal{C} el círculo $\varphi_1 = 0$ en el toro $I_1 = E_1$, $I_2 = E_2$, es decir el lado izquierdo del cuadrado que respresenta nuestro toro en la figura (2.9).

Caso Resonante. Primero consideremos el caso cuando $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es un número racional, digamos $\omega_1 = k$ y $\omega_2 = l$ es decir $\frac{k}{l}$ donde $k, l \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, la solución $\varphi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_1 + \alpha$ de la ecuación (2.45) que inicie en un punto (θ_1, θ_2) en el toro (dentro del cuadrado de la figura (2.9)), recorrerá en el plano (φ_1, φ_2) k veces de manera horizontal y l de manera vertical antes de regresar al punto inicial en el cociente. Luego estas son la soluciones periódicas que mencionamos y citamos anteriormente. Esto en particular implica que la solución va intersectar al círculo \mathcal{C} en un conjunto finito de puntos.

Recíprocamente, si una solución en el toro corta al círculo \mathcal{C} en un conjunto finito de puntos entonces esa solución (y además todas) tienen pendiente $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ racional.

En resumen esto muestra que los toros de Liouville están foliados por órbitas periódicas del oscilador armónico con 2-grados de libertad.

Caso No Resonante. El análisis para este caso no es tan trivial como en el caso anterior. Suponiendo que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es un número irracional entonces cada solución $\varphi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_1 + \alpha$ de la ecuación (2.45) intersectará al círculo \mathcal{C} en un número infinito de puntos. Por lo tanto nuestro propósito será mostrar que el conjunto de puntos de intersección es denso en el círculo \mathcal{C} . De donde se sigue que las trayectorias del oscilador armónico con 2-grados de libertad llenan densamente al toro invariante $I_1 = E_1$, $I_2 = E_2$ y por lo tanto a todos los toros de Liouville.

Proposición 2.5. *Para todo $E_1, E_2 > 0$, cada curva integral de X_H es densa en el toro $I_1 = E_1, I_2 = E_2$ en el caso no resonante.*

Demostración. Para ello fijemos un punto en el círculo \mathcal{C} tomando $\varphi_2 = \alpha$ para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Así considerando la solución $\varphi_2 = \varphi_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} + \alpha$ de la ecuación (2.45) que pasa por el punto $(0, \alpha)$. Cuando la solución $\varphi_2 = \varphi_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} + \alpha$ alcanza al círculo $\varphi_1 = 2\pi$, está lo intersecta en el punto

$$\varphi_2 = 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} + \alpha \pmod{2\pi}$$

en el círculo \mathcal{C} . Lo cuál nos permite definir una función del círculo \mathcal{C} en sí mismo, como a continuación

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$$

dada por

$$f(\alpha) := \alpha + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} \pmod{2\pi}. \quad (2.46)$$

Notemos que f es una isometría en el círculo \mathcal{C} con respecto la distancia que induce la métrica euclideana en \mathbb{R} en el espacio cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. En efecto, para $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi]$, tenemos que se satisface lo siguiente

$$|f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| = |(\alpha_1 + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} \pmod{2\pi}) - (\alpha_2 + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} \pmod{2\pi})| = |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Es decir, si en el círculo \mathcal{C} tomamos dos puntos y luego hacemos rotar un ángulo $\phi = 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}$ entonces la distancia de las imágenes siguen siendo iguales. Así geoméricamente, la función f en (2.46) sobre el círculo \mathcal{C} se interpreta como la rotación de puntos por un ángulo $\phi = 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

Tomando un punto θ_0 arbitrario en el círculo \mathcal{C} y consideremos su órbita bajo la función f , que está dada por

$$\begin{aligned} \text{Orb}(\theta_0) &= \{\theta_n \mid \theta_n = f(\theta_{n-1}), n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{\theta_0, f(\theta_0), f^2(\theta_0), \dots, f^n(\theta_0), \dots\}. \end{aligned}$$

El conjunto $\text{Orb}(\theta_0)$ coincide con la intersección del círculo \mathcal{C} en el toro $I_1 = E_1, I_2 = E_2$ con la trayectoria del oscilador armónico que pasa por el punto $(0, \theta_0)$. Así se sigue que la $\text{Orb}(\theta_0)$ es un conjunto infinito, pues en el caso contrario si tuviera un conjunto finito de puntos la trayectoria del oscilador armónico con 2-grados de libertad que pasa por el punto $(0, \theta_0)$ sería periódica y esto es una contradicción.

Finalizamos la prueba mostrando que $\text{Orb}(\theta_0)$ es denso en \mathcal{C} . Para ello sea α un punto en el círculo \mathcal{C} y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Probemos que existe un θ_n tal que $|\theta_n - \alpha| < \varepsilon$. Como $\text{Orb}(\theta_0)$ es infinita, existen enteros $k > l$ tal que $|\theta_k - \theta_l| < \varepsilon$ ya que el círculo tiene circunferencia finita. Por el hecho de que f es una isometría se tiene que $|\theta_0 - \theta_{k-l}| < \varepsilon$. En efecto, sabiendo que $\theta_k = f^{k-l}(\theta_l)$ y $\theta_l = f^l(\theta_0)$ de la definición de la órbita de θ_0 ,

tenemos que

$$|\theta_k - \theta_l| = |f^{k-l}(\theta_l) - \theta_l| = |f^l(f^{k-l}(\theta_0)) - f^l(\theta_0)| = |f^{k-l}(\theta_0) - \theta_0| = |\theta_{k-l} - \theta_0|.$$

Por tanto, $|\theta_{k-l} - \theta_0| < \varepsilon$. Ahora, por definición de f (2.46) θ_{k-l} se obtiene rotando θ_0 por el ángulo $(k-l)2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}$ módulo 2π , que menor que ε . Realizando repetidamente una rotación por este ángulo, obtenemos una sucesión de puntos en $\text{Orb}(\theta_0)$, definida por

$$\vartheta_r = \theta_0 + r(k-l)2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1} \pmod{2\pi}.$$

Esta sucesión tiene la propiedad de que $|\vartheta_r - \vartheta_{r-1}| < \varepsilon$ para todo natural r , ya que

$$|(k-l)2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1} \pmod{2\pi}| < \varepsilon.$$

Para α un punto arbitrario en el círculo \mathcal{C} , si este punto no pertenece a la sucesión de puntos ϑ_n , entonces tomemos el entero r tal que ϑ_r minimiza la distancia de α al conjunto $\{\vartheta_n\}$ y por la propiedad de este conjunto, se sigue que $|\vartheta_r - \alpha| < \varepsilon$, de donde concluimos que la órbita es densa, como queríamos. \square

Corolario 2.1. *Las curvas de Lissajous que es solución del sistema (2.5) llenan densamente al rectángulo \mathcal{R} (2.14) cuando $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es irracional.*

Demostración. La curva de Lissajous solución de (2.5) se obtiene proyectando al plano $\mathbb{R}_{p,q}^2$ una curva integral de X_H . Dicha proyección transforma el toro $I_1 = E_1$, $I_2 = E_2$ al rectángulo \mathcal{R} . Como la proyección es continua y las órbitas son densas en los toros, tenemos el resultado. \square

Finalmente presentaremos una graficas que ilustran el comportamiento dinámico y cualitativo de las trayectorias del oscilador armónico con 2-grados de libertad sobre los toros de Liouville.

Visualización de las trayectorias en toros. Recordemos que formalmente, los toros de Liouville son subconjuntos invariantes de \mathbb{R}^4 , por lo que no podemos tener una representación visual de estos como subconjuntos del espacio fase \mathbb{R}^4 . Sin embargo, en nuestro caso podemos visualizar los toros de Liouville para el oscilador armónico mediante la proyección estereográfica en toros en \mathbb{R}^3 como discutimos anteriormente. Haciendo uso de este hecho, es posible visualizar e ilustrar el comportamiento dinámico que anteriormente probamos sobre toros en \mathbb{R}^3 como presentamos a continuación.

Para ello, utilizamos la siguiente parametrización del toro $\psi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\psi(\varphi_1, \varphi_2) = ((R + r \cos \varphi) \cos \varphi_2, (R + r \cos \varphi) \sin \varphi_2, r \sin \varphi_2) \quad (2.47)$$

con R y r números reales positivos tales que $R^2 = r^2 + 1$. La imagen de $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ bajo la parametrización ψ es un toro en \mathbb{R}^3 que se construye precisamente identificando los

lados del cuadrado, tal como se ilustra en la figura (2.9). Para trazar una curva solución del oscilador armónico con 2-grados de libertad sobre un toro, debemos fijar un par de valores para R y r en la parametrización ψ en (2.47). Pero esto es equivalente a fijar las coordenadas $I_1 = E_1$, $I_2 = E_2$ en $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^2)$ y hemos identificado con el cuadrado $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ pues en coordenadas acción-ángulo la dinámica del oscilador armónico con 2-grados de libertad con Hamiltoniano

$$H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = (\omega_1 I_1 + \omega_2 I_2)$$

ademas está determinada por el sistema (2.43)-(2.43). De (2.44), se tiene que la solución particular $\gamma(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ del oscilador armónico con 2-grados de libertad sobre el toro $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ tal que $\gamma(0) = (\theta_1, \theta_2)$ está dada por

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \\ t &\mapsto (\omega_1 t + \theta_1 \bmod 2\pi, \omega_2 t + \theta_2 \bmod 2\pi). \end{aligned}$$

Combinando la solución particular $\gamma(t)$ con la parametrización (2.47), que la siguiente curva

$$\begin{aligned} \psi(t) &:= \psi(\gamma(t)) \\ &= ((R + r \cos(\omega_1 t + \theta_1)) \cos(\omega_2 t + \theta_2), (R + r \cos(\omega_1 t + \theta_1)) \sin(\omega_2 t + \theta_2), r \sin(\omega_2 t + \theta_2)) \end{aligned}$$

representa una trayectoria del oscilador armónico sobre un toro de Liouville en \mathbb{R}^3 , donde si podemos visualizar.

Las imágenes que se presentan a continuación para ilustrar la dinámica y el comportamiento cualitativo de la trayectorias del oscilador armónico sobre los toros de Liouville han sido construidas utilizando específicamente la curva $\psi(t)$ descrita en la anterior ecuación. Para ello primero ilustraremos para el caso resonante y finalmente para el caso no resonante.

Trayectorias del oscilador armónico: Caso resonante. En esta parte algunas imágenes que ilustran las órbitas del oscilador armónico para el caso resonante, es decir, cuando $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es racional. La figura (2.10) contiene varias imágenes que corresponden a trayectorias del oscilador armónico con frecuencias $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 2$.

En la figura (2.10)(a) se muestra una curva solución del oscilador armónico, esto con fin de resaltar el hecho que en el caso racional las curvas solución son periódicas (curvas cerradas). Por otro lado en las figuras (2.10)(b), (2.10)(c) y (2.10)(d) se aumento el número de curvas solución con el propósito de visualizar cómo el toro de Liouville está foliado por las órbitas periódicas del oscilador armónico con 2-grados de libertad en \mathbb{R}^4 .

Trayectorias del oscilador armónico: Caso no resonante. Finalmente en esta parte ilustraremos el caso no resonante, es decir, cuando $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es irracional. Para este caso, tomamos el valor de las frecuencias $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = \pi$.

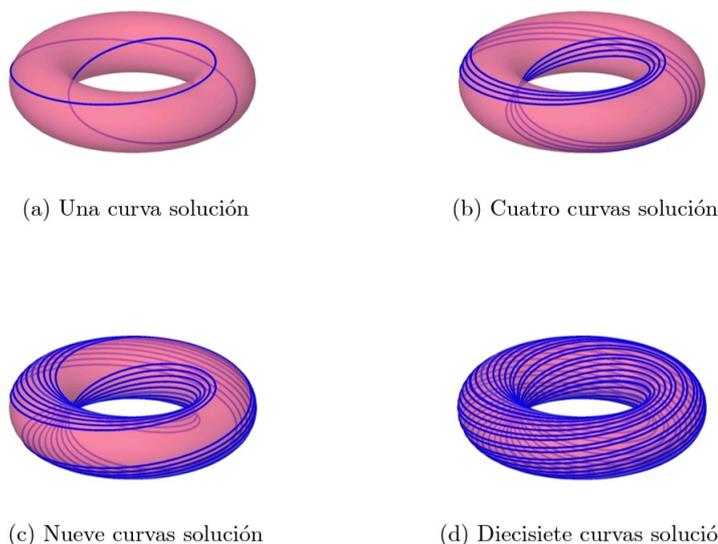


Figura 2.10: Adaptado del artículo [1]. Trayectorias del oscilador sobre el toro: $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ racional

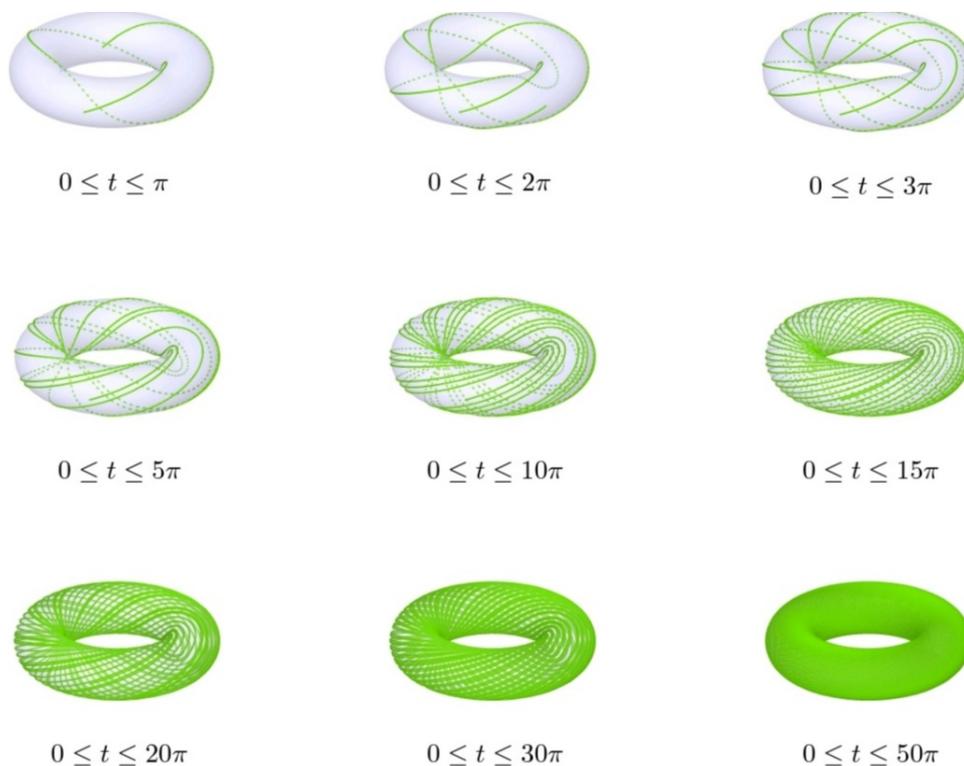


Figura 2.11: Adaptado del artículo [1]. Trayectorias del oscilador sobre el toro: $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ irracional

Recordemos que en este caso las trayectorias son densas en los toros de Liouville, para ello es suficiente trazar una curva solución del oscilador armónico con 2-grads de libertad usando $\psi(t)$ para algún valor inicial y tomar un intervalo para t lo suficientemente grande para ver como ésta llena al toro.

En la figura (2.11) se muestran en varias imágenes como evoluciona una órbita del oscilador sobre el toro el toro de Liouville.

Notemos que en cada imagen aparece la traza de la misma trayectoria del oscilador armónico pero en distintos intervalos de tiempo. En las primeras imágenes, que corresponden a intervalos de tiempo más pequeños, se puede apreciar que las trayectorias no son

cerradas y al parecer su comportamiento es un poco caótico. Conforme aumentamos el intervalo de tiempo podemos ver como la trayectoria se enrolla sobre el toro de Liouville cubriendo cada vez más puntos de éste hasta la última imagen en la que ya no es posible distinguir los puntos sobre el toro de Liouville por donde no pasa la trayectoria.

Con esto concluimos con el estudio y análisis del comportamiento geométrico y dinámico del oscilador armónico con 2-grados de libertad en el espacio fase \mathbb{R}^4 .

CAPÍTULO 3

Teoría de reducción invariante para el oscilador armónico con resonancia

En esta sección presentaremos una versión de construcción de variedades de Poisson basada en simetrías. Esta construcción representa los primeros pasos en un procedimiento general llamado teoría de reducción invariante.

El siguiente capítulo está estructurado en cinco secciones. En la primera sección estudiamos la teoría general de espacios reducidos para variedades de Poisson donde destacamos que bajo ciertas hipótesis el espacio de órbitas M/G admite una estructura de Poisson. En la segunda sección empezaremos citando algunos resultados importantes como el teorema de Hilbert-Weyl y el teorema de Schwarz-Mather [17], donde se indica que el conjunto de funciones invariantes es finitamente generado, luego con la ayuda de los generadores se construye una aplicación llamada aplicación de Hilbert, ya que un candidato para el espacio de órbitas será la imagen de la aplicación de Hilbert. En la tercera sección, después de haber desarrollado la teoría en general en la primera y en la segunda sección, estudiaremos en particular la teoría de reducción para el oscilador armónico caso el resonante. En la cuarta sección estudiaremos espacios reducidos para conjuntos de nivel de la aplicación momentum, y también la dinámica reducida. Finalmente en la última sección se estudia la fibración de Hopf de resonancia 1:1.

Sea M una variedad diferenciable, G un grupo de Lie [19] y una acción (izquierda) suave

$$\Phi : G \times M \rightarrow M.$$

Definición 3.1. Una función $f \in C^\infty(M)$ se dice ser G -invariante si

$$\Phi_g^* f = f,$$

para todo $g \in G$, es decir, si f es constante a lo largo de las órbitas de la acción.

Al conjunto de funciones G -invariantes lo denotaremos por $C^\infty(M)^G$, luego es inmediato verificar que es un subálgebra de $C^\infty(M)$. De manera análoga se tiene una definición para campos vectoriales.

Definición 3.2. *Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice ser G -invariante si*

$$\Phi_g^* X = X, \quad (3.1)$$

para todo $g \in G$, es decir si

$$T_p \Phi_g (X(p)) = X(\Phi_g(p)) \quad (3.2)$$

para todo $p \in M$, $g \in G$.

Se denota por $\mathfrak{X}(M)^G$ al conjunto de campos vectoriales G -invariantes. A continuación citamos algunas propiedades de estos dos conceptos.

Proposición 3.1. *Sean $f \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)^G$. Se tienen las siguientes afirmaciones*

(i) $\mathcal{L}_X f \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$.

(ii) $X + Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)^G$.

(iii) $[X, Y] \in \mathfrak{X}^\infty(M)^G$.

Demostración. (i) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$ y $X \in \mathfrak{X}(M)^G$, por las propiedades del pullback se tiene

$$\Phi_g^* (\mathcal{L}_X f) = \mathcal{L}_{\Phi_g^* X} \Phi_g^* f = \mathcal{L}_X f.$$

(ii) Sabiendo que $X, Y \in \mathfrak{X}(M)^G$ y por la propiedad natural del pullback, tenemos

$$\Phi_g^* (X + Y) = \Phi_g^* X + \Phi_g^* Y = X + Y.$$

(iii). Finalmente tenemos

$$\Phi_g^* [X, Y] = [\Phi_g^* X, \Phi_g^* Y] = [X, Y],$$

lo cual implica que $[X, Y]$ es G -invariante como queríamos probar. \square

Del inciso (i) de la proposición (3.1) se tiene que la derivación \mathcal{L}_X inducida por un campo $X \in \mathfrak{X}(M)^G$ deja invariante la subálgebra $\mathcal{C}^\infty(M)$. Por otra parte de (ii) y (iii) se sigue que $\mathfrak{X}(M)^G$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.

De manera análoga, podemos definir el conjunto de formas diferenciales G -invariantes que se denota por $\Omega(M)^G$, al conjunto de formas diferenciales, $\alpha \in \Omega(M)^G$ tales que

$$\Phi_g^* \alpha = \alpha$$

para todo $g \in G$.

Para cada $p \in M$, denotemos por $[p]$ a la clase de equivalencia que determina la órbita de G por p . Recordemos que M/G es el espacio de órbitas de la acción que se define como

el conjunto de clases de equivalencia de la acción y denotemos por $\rho : M \rightarrow M/G$ la proyección natural de $p \in M$ a su clase de equivalencia $[p]$.

M/G hereda de M la topología cociente a través de ρ . Sin embargo, en general no tiene estructura de variedad diferencial. El siguiente resultado establece que tipos de acciones de G en M garantizan que M/G tiene estructura de variedad tal que ρ es C^∞ .

Teorema 3.1. *Sea $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción libre y propia. Entonces*

- (i) *el espacio de órbitas M/G es una variedad topológica de dimensión $\dim M - \dim G$.*
- (ii) *M/G tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que la proyección cociente*

$$\rho : M \rightarrow M/G$$

es un G -haz principal.

La prueba se puede consultar en el libro de R. Abraham and J. E. Marsden que se menciona en [2]. La idea de la construcción de la carta para M/G se basa en la siguiente observación. Si $p \in M$, entonces existe un isomorfismo φ_p de $T_{\rho(p)}(M/G)$ con el espacio cociente $T_p M / T_p \text{Orb}(p)$. Además si $q = \Phi_g(p)$ entonces $T_p \Phi_g$ induce un isomorfismo

$$\psi_{p,q} : T_p M / T_p \text{Orb}(p) \rightarrow T_q M / T_q \text{Orb}(q)$$

tal que $\varphi_q \circ \psi_{p,q} = \varphi_p$.

Notemos que bajo las hipótesis del Teorema (3.1) para cada $\tilde{f} \in C^\infty(M/G)$, se tiene $\rho^* \tilde{f} \in C^\infty(M)^G$. Luego es natural pensar si el recíproco de esta afirmación también es válida, lo cual se establece en el siguiente resultado.

Proposición 3.2. *Sea G un grupo de Lie actuando libre y propiamente en M .*

- (i) *Si $f \in C^\infty(M)^G$ entonces existe una función $\tilde{f} \in C^\infty(M/G)$ tal que*

$$f = \rho^* \tilde{f}.$$

- (ii) *Para cada $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ existe $X \in \mathfrak{X}(M)^G$ tal que X y \tilde{X} , están ρ -relacionados, es decir*

$$T\rho \circ X = \tilde{X} \circ \rho.$$

- (iii) *Si $X \in \mathfrak{X}(M)^G$ entonces existe $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ tal que X y \tilde{X} están ρ -relacionados, es decir*

$$T\rho \circ X = \tilde{X} \circ \rho.$$

Demostración. (i) Sea $f \in C^\infty(M)^G$. Definimos $\tilde{f} : M/G \rightarrow \mathbb{R}$ como $\tilde{f}([p]) := f(p)$. Veamos que esta bien definida, en efecto, si $q = \Phi_g(p)$ entonces $[q] = [p]$ y $\tilde{f}([p]) = f(p) = f(q)$ ya que $f \in C^\infty(M)^G$ por lo tanto \tilde{f} está bien definida. Por otra parte

$$(\tilde{f} \circ \rho)(p) = \tilde{f}([p]) = f(p).$$

Para todo $p \in M$, es decir $\rho^* \tilde{f} = f$. Solo resta probar que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M/G)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \rho \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ M/G & & \end{array}$$

como ρ es un G -haz principal, y $f = \tilde{f} \circ \rho$ entonces por la propiedad universal, se concluye que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M/G)$.

(ii) Tenemos que $\rho : M \rightarrow M/G$ es una submersión sobreyectiva, de donde para cada $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que X y \tilde{X} están ρ -relacionados, este resultado se puede consultar en J. P. Ortega Tudor S. Ratiu [17]. Notemos que X no es único, vamos a probar que existe uno de ellos que es G -invariante. Si $q = \Phi_g(p)$ para algún $g \in G$. Tal que $z = \rho(p) = \rho(q)$. De aquí se sigue

$$T_p \rho : T_p M \rightarrow T_z M/G \quad \text{y} \quad T_q \rho : T_q M \rightarrow T_z M/G.$$

Como X y \tilde{X} están ρ -relacionados, obtenemos

$$\begin{aligned} T_p \rho(X(p)) &= \tilde{X}(\rho(p)) = \tilde{X}(\rho(q)) \\ &= T_q \rho(X(q)) = T_{\Phi_g(p)} \rho(X(\Phi_g(p))) \end{aligned}$$

Por otro lado es claro que $\rho = \rho \circ \Phi_g$, para todo $g \in G$, de donde tenemos $T_p \rho = T_{\Phi_g(p)} \rho \circ T_p \Phi_g$, por la igualdad anterior se tiene

$$T_{\Phi_g(p)} \rho(T_p \Phi_g(X(p))) = T_{\Phi_g(p)} \rho(X(\Phi_g(p))), \quad \text{con} \quad Y_p \in \text{Ker} T_p \rho.$$

de donde se tiene que

$$T_p \Phi(X(p)) - X(\Phi_g(p)) = Y_p,$$

luego siempre podemos tomar X tal que $Y_p = 0$, se concluye que $X \in \mathfrak{X}(M)^G$ (iii). Finalmente sabiendo que $X \in \mathfrak{X}(M)^G$, definimos $\tilde{X}([p]) := T_p \rho(X(p))$. Probemos que \tilde{X} es un campo vectorial en M/G bien definido para todo $p \in M$ y $g \in G$. Sea $q = \Phi_g(p)$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{X}([q]) &= T_{\Phi_g(p)} \rho(X(\Phi_g(p))) = T_{\Phi_g(p)} \rho(T_p \Phi_g(X(p))) \\ &= T_p(\rho \circ \Phi_g)(X(p)) = T_p \rho(X(p)) = \tilde{X}([p]), \end{aligned}$$

por lo que el valor de \tilde{X} en $[p]$ no depende del representante de clase. Por cálculo directo, se tiene

$$(T_p \rho \circ X)(p) = \tilde{X}([p]) = (\tilde{X} \circ \rho)(p)$$

de donde X y \tilde{X} están ρ -relacionados. Para probar que \tilde{X} es suave consideremos a X y \tilde{X} como secciones de los haces tangentes de M y M/G respectivamente. De donde se deriva

el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ \rho \downarrow & \searrow T\rho \circ X & \downarrow T\rho \\ M/G & \xrightarrow{\tilde{X}} & T(M/G) \end{array}$$

de donde se sigue que $\tilde{X} \in \mathcal{C}^\infty(M/G)$, ya que $\tilde{X} \circ \rho = T\rho \circ X$ es \mathcal{C}^∞ □

Definición 3.3. Sea N una variedad y G un grupo de Lie actuando suavemente en una variedad M . Una función $F : M \rightarrow N$ se dice que separa órbitas si para todo $p, q \in M$ se cumple que: $F(p) = F(q)$ si y sólo si p y q pertenecen a la misma órbita de la acción.

Definición 3.4. Un espacio reducido para la acción de G en M es una variedad M_R junto con una submersión sobreyectiva localmente trivial $\pi : M \rightarrow M_R$ que separa órbitas.

Ejemplo 3.1. Consideremos $M = \mathbb{R}^2/\{0\}$ y $G = \mathbb{S}^1$. Luego la acción de G en M definida como

$$\Phi_\theta \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

donde $\theta \in G$ y $(z_1, z_2) \in M$. Por lo tanto un espacio reducido para acción G en M , es dada por

$$M_R = (0, \infty)$$

con la submersión sobreyectiva localmente trivial $\pi : \mathbb{R}^2/\{0\} \rightarrow (0, \infty)$ dada por $\pi(z) = \|z\|$.

Observación 3.1. Notemos que el Teorema (3.1) establece la existencia del espacio reducido para la acción de G en M , el espacio de órbitas M/G es precisamente un espacio reducido para una acción libre y propia. Más aún, bajo estas hipótesis el espacio reducido para la acción de G en M es único, salvo difeomorfismos.

Teorema 3.2. Sea $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción libre y propia. Sea M_R un espacio reducido de la acción de G en M , entonces M_R es difeomorfo al espacio de órbitas M/G .

Demostración. Como M_R es el espacio reducido para la acción de G en M , tenemos una submersión sobreyectiva localmente trivial $\pi : M \rightarrow M_R$. Definimos $\Psi : M/G \rightarrow M_R$ por $\Psi([p]) := \pi(p)$. Tomando en cuenta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & M_R \\ \rho \downarrow & \nearrow \Psi & \\ M/G & & \end{array}$$

Notemos que Ψ es invertible, así $\pi = \Psi \circ \rho$ y $\rho = \Psi^{-1} \circ \pi$, como π , ρ son localmente triviales entonces Ψ y Ψ^{-1} son diferenciables. □

Corolario 3.1. Sea G actuando suavemente en M y M_R el espacio reducido, con una submersión sobreyectiva $\pi : M \rightarrow M_R$. Entonces

(a) Para $f \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$, existe $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(M_R)$ tal que

$$f = \pi^* \widehat{f},$$

donde \widehat{f} es llamada la función reducida de f .

(b) Para $X \in \mathfrak{X}(M)^G$, existe $\widehat{X} \in \mathfrak{X}(M_R)$ tal que

$$T\pi \circ X = \widehat{X} \circ \pi,$$

donde \widehat{X} es llamado el campo vectorial reducido de X .

Demostración. (a) Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$, por la Proposición (3.2) (i), existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M/G)$ tal que $f = \rho^* \tilde{f}$. Considerando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & M_R \\ \rho \downarrow & \nearrow \Psi & \\ M/G & & \end{array}$$

Definimos $\tilde{f} := (\Psi^{-1})^* \tilde{f}$, en M_R . Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \pi^* \widehat{f} &= \pi^* \circ (\Psi^{-1})^* \tilde{f} = (\Psi^{-1} \circ \pi)^* \tilde{f} \\ &= \rho^* \tilde{f} = f. \end{aligned}$$

como se queríamos mostrar. De manera análoga se prueba el inciso (b). \square

La Proposición (3.1) establece que todo campo vectorial X G -invariante bajo la acción de un grupo de Lie G en una variedad M es proyectado a un campo vectorial en el espacio reducido M_R . Como consecuencia, las curvas integrales de X son proyectadas a curvas integrales del campo vectorial en el espacio reducido. Una aplicación del campo vectorial G -invariante es poder concluir alguna propiedad del campo invariante a través de su campo reducido.

Corolario 3.2. *Sea M_R un espacio reducido de G en M . Si \widehat{X} es el campo vectorial reducido en M_R de X en M , entonces*

$$\pi \circ Fl_X^t = Fl_{\widehat{X}}^t \circ \pi$$

Demostración. Tenemos que X y \widehat{X} están π -relacionados, es decir $T_p \pi(X(p)) = \widehat{X}(\pi(p))$, para todo $p \in M$. Sea $\gamma(t) = Fl_X^t(p)$ curva integral de X , es decir

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) &= p. \end{aligned}$$

Definamos $\beta(t) := \pi(\gamma(t))$, ahora mostremos que, $\beta(t)$ es curva una integral de \widehat{X} , en

efecto, tenemos que $\beta(0) = \pi(p)$ además

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= T_{\gamma(t)}\pi(\gamma'(t)) = T_{\gamma(t)}\pi(X(\gamma(t))) \\ &= \widehat{X}(\pi(\gamma(t))) = \widehat{X}(\beta(t)).\end{aligned}$$

Luego por el teorema de existencia y unicidad, tenemos

$$\beta(t) = Fl_{\widehat{X}}^t \circ \pi,$$

como se esperaba. □

SECCIÓN 3.1

Espacios reducidos para variedades de Poisson

Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson con corchete de Poisson

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}_M^\infty \times \mathcal{C}_M^\infty \rightarrow \mathcal{C}_M^\infty.$$

Recordemos que un corchete de Poisson es una operación binaria en $\mathcal{C}^\infty(M)$ que satisface las propiedades de bilinealidad, antisimetría, la regla de Leibniz y la identidad de Jacobi, [Ver Capítulo (1)].

Definición 3.5. Sea G un grupo de Lie actuando en una variedad de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$. La acción de G en M se dice ser canónica si

$$\Phi_g^*\{f, h\} = \{\Phi_g^*f, \Phi_g^*h\}$$

para todo $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $g \in G$.

Si G actúa canónicamente en $(M, \{\cdot, \cdot\})$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$, se puede probar que el campo Hamiltoniano X_f con función Hamiltoniana f es un campo vectorial G -invariante. Para verificar esto, fijemos $g \in G$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Primero, vamos a comprobar que $\Phi_g^*(X_f) = X_{\Phi_g^*f}$ verificando que ambos campos inducen la misma derivación en el álgebra de funciones $\mathcal{C}^\infty(M)$. Para todo $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_{\Phi_g^*f}}h &= \{\Phi_g^*f, h\} = \Phi_g^*\{f, \Phi_{g^{-1}}^*h\} \\ &= \Phi_g^*(\mathcal{L}_{X_f}\Phi_{g^{-1}}^*h) = \mathcal{L}_{\Phi_g^*(X_f)}h.\end{aligned}$$

En otras palabras, el pull-back del difeomorfismo $\Phi_g : M \rightarrow M$ transforma un campo Hamiltoniano en un campo que también es Hamiltoniano. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$, entonces para todo $g \in G$ tenemos

$$\Phi_g^*(X_f) = X_{\Phi_g^*f} = X_f$$

lo que implica que $X_f \in \mathfrak{X}(M)^G$.

Teorema 3.3 (Reducción de Poisson). *Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson y sea $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción propia, libre y canónica. Entonces, existe una única estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}^{M/G}$ en M/G tal que*

$$\rho^* \{\tilde{f}, \tilde{g}\}^{M/G} = \{\rho^* \tilde{f}, \rho^* \tilde{g}\}, \quad \text{para todo } \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(M/G).$$

es decir $\rho : (M, \{\cdot, \cdot\}) \rightarrow (M/G, \{\cdot, \cdot\}^{M/G})$ es un morfismo de Poisson.

Demostración. Como $\rho : M \rightarrow M/G$ es sobreyectiva, la proposición (1.12) implica que existe a lo más una estructura de Poisson en M/G tal que ρ es Poisson. Ahora probaremos la existencia de una estructura de Poisson en (M/G) . Primero, definamos una operación binaria

$$\{\cdot, \cdot\}^{M/G} : \mathcal{C}^\infty(M/G) \times \mathcal{C}^\infty(M/G) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M/G).$$

Fijemos $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(M/G)$, entonces $\{\rho^* \tilde{f}, \rho^* \tilde{g}\} \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Probemos que esta función es G -invariante. En efecto, sabiendo que Φ es canónica, tenemos

$$\Phi_g^* \{\rho^* \tilde{f}, \rho^* \tilde{g}\} = \{\Phi_g^*(\rho^* \tilde{f}), \Phi_g^*(\rho^* \tilde{g})\} = \{\rho^* \tilde{f}, \rho^* \tilde{g}\},$$

Por la proposición (3.2), existe una función $\psi(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \mathcal{C}^\infty(M/G)$ tal que

$$\rho^*(\psi(\tilde{f}, \tilde{g})) = \{\rho^* \tilde{f}, \rho^* \tilde{g}\} \quad (3.3)$$

es decir, para todo $p \in M$

$$\psi(\tilde{f}, \tilde{g})([p]) = \{\rho^* \tilde{f}, \rho^* \tilde{g}\}(p).$$

Entonces si definimos

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\}^{M/G}([p]) := \{\rho^* \tilde{f}, \rho^* \tilde{g}\}(p) \quad (3.4)$$

tenemos una operación binaria en el álgebra de funciones $\mathcal{C}^\infty(M/G)$. Como el corchete $\{\cdot, \cdot\}^{M/G}$ se define utilizando la estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ en M , se sigue fácilmente que (3.4) define una estructura de Poisson en M/G . Finalmente de (3.3) se concluye de inmediato que ρ es un morfismo de Poisson. \square

Recordemos que la proposición (3.2) nos garantiza que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$ existe una función $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M/G)$ tal que $\rho^* \tilde{f} = f$. Bajo las hipótesis del Teorema (3.1), el espacio de órbitas M/G admite una estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}^{M/G}$ tal que ρ es Poisson. Esto implica que el campo Hamiltoniano $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ con Hamiltoniano f , es proyectado bajo ρ al campo Hamiltoniano $X_{\tilde{f}} \in \mathfrak{X}(M/G)$, como se verifica en el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Bajo las hipótesis del Teorema (3.3). Sea X_F campo Hamiltoniano en M con corchete $\{\cdot, \cdot\}$ y sea $X_{\tilde{f}}$ campo Hamiltoniano en M/G con corchete $\{\cdot, \cdot\}^{M/G}$, entonces X_F y $X_{\tilde{f}}$ están ρ -relacionadas*

$$T\rho \circ X_F = X_{\tilde{f}} \circ \rho. \quad (3.5)$$

En otras palabras el sistema Hamiltoniano X_F sobre M se reduce sobre M/G .

Demostración. Tenemos que $F = \tilde{f} \circ \rho$ por la Proposición (3.2). Y como ρ es un morfismo de Poisson, para todo $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se tiene

$$\begin{aligned} (T\rho \circ X_F)(h) &= T\rho(X_F(h)) = X_F(h \circ \rho) = \{F, h \circ \rho\} \\ &= \{\tilde{f} \circ \rho, h \circ \rho\} = \{\tilde{f}, h\}^{M/G} \circ \rho \\ &= X_{\tilde{f}}(h) \circ \rho. \end{aligned}$$

de donde se tiene que X_F y X_f están ρ -relacionados. Además la relación (3.5) indica que la aplicación ρ transforma curvas integrales del campo Hamiltoniano X_F en M a curvas integrales del campo Hamiltoniano X_f en M/G . \square

Corolario 3.3. *Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson y $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción libre, propia y canónica. Entonces existe una única estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_R$ en M_R tal que π es un morfismo de Poisson. Más aún $(M_R, \{\cdot, \cdot\}_R)$ y $(M/G, \{\cdot, \cdot\}^{M/G})$ son difeomorfas como variedades de Poisson.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & M_R \\ \rho \downarrow & \nearrow \Psi & \\ M/G & & \end{array}$$

Como M tiene estructura de Poisson y π es sobreyectiva por la Proposición (1.12) M_R admite una estructura de Poisson. Finalmente del diagrama y del Teorema (3.2) se prueba que Ψ es un difeomorfismo. \square

SECCIÓN 3.2

Teoría de funciones suaves G -invariantes

En esta sección estudiaremos, como construir un espacio reducido a través de la aplicación de Hilbert.

Si un grupo de Lie compacto G actúa linealmente en un espacio vectorial V , es posible encontrar un número finito de polinomios G -invariantes $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ en V , tal que cada polinomio G -invariante P se expresa como un polinomio de estos, esto es el contenido del Teorema de Hilbert-Weyl:

Teorema 3.5. *Sea G un grupo de Lie compacto actuando linealmente en un espacio vectorial V . Entonces el álgebra de polinomios G -invariantes $\mathcal{P}(V)^G$ es finitamente generada.*

La demostración del Teorema (3.5) se puede consultar en [16]. La familia generadora $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ de polinomios G -invariantes se puede escoger *minimal*, es decir, ningún subconjunto de generadores se puede expresar como polinomios del resto de generadores. En este caso, se dice que el conjunto $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ es una base de Hilbert para el álgebra

de polinomios G -invariantes. La base de Hilbert puede no ser necesariamente *libre* y en general pueden existir relaciones entre sus elementos.

La generalización del Teorema de Hilbert-Wely de polinomios a funciones suaves fue llevada a cabo por Schwarz (1974)[17].

Teorema 3.6 (Schwarz-Mather). *Sea G un grupo de Lie compacto actuando linealmente en un espacio vectorial real V y $\beta = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ una base de Hilbert de el álgebra $\mathcal{P}(V)^G$. Consideremos la función*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : V &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ x &\mapsto (\pi_1(x), \dots, \pi_k(x)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(V)^G \\ f &\mapsto f \circ (\pi_1, \dots, \pi_k) \end{aligned}$$

es sobreyectiva.

La aplicación \mathcal{H} definida en el Teorema de Schwarz-Mather (3.6) es llamada la aplicación de Hilbert. El hecho de que \mathcal{H}^* es sobreyectiva se traduce en que toda función suave G -invariante en V se puede expresar como función de los polinomios generadores $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$.

La aplicación de Hilbert del Teorema de Schwarz-Mather es muy útil para proporcionar un modelo para el espacio de órbitas V/G de una acción lineal en V , por las siguientes propiedades:

Proposición 3.3. *La aplicación de Hilbert \mathcal{H} tiene las siguientes propiedades*

- (i) \mathcal{H} es propia.
- (ii) \mathcal{H} separa órbitas.
- (iii) Existe una función $\Psi : V/G \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \mathbb{R}^k \\ \rho \downarrow & & \nearrow \Psi \\ V/G & & \end{array}$$

conmuta y Ψ es un homeomorfismo sobre su imagen.

La prueba de esta proposición se puede consultar en [16]. El hecho que la aplicación de Hilbert \mathcal{H} separa órbitas, nos permite identificar a los elementos del espacio cociente V/G con la imagen de \mathcal{H} .

$$\Psi([p]) := \mathcal{H}(p)$$

y claramente

$$\mathcal{H} = \Psi \circ \rho.$$

Ψ es inyectiva, continua con respecto a la topología cociente y como \mathcal{H} es propia, entonces Ψ es cerrada, lo que prueba que Ψ es homeomorfismo sobre su imagen.

$\mathcal{I}m(\mathcal{H})$ es homeomorfo a V/G .

La imagen de la aplicación de Hilbert $\mathcal{I}m(\mathcal{H}) \subset \mathbb{R}^k$ es una subvariedad real semiálgebraica, es decir, es descrita por un número finito de ecuaciones polinomiales y desigualdades. Esto convierte a la imagen de la aplicación de Hilbert en un candidato para espacio reducido de la acción de G en V .

El principal problema para lo anterior es dotar a $\mathcal{I}m(\mathcal{H})$ de una estructura diferenciable tal que \mathcal{H} sea una submersión sobre su imagen. Una estructura natural para $\mathcal{I}m(\mathcal{H}) \subset \mathbb{R}^k$, sería como subvariedad regular de \mathbb{R}^k . Sin embargo $\mathcal{I}m(\mathcal{H}) \subset \mathbb{R}^k$ puede tener singularidades por lo que no es posible que sea una subvariedad regular.

Una forma de resolver este inconveniente para utilizar la aplicación de Hilbert para construir un modelo de espacio reducido, es considerar un subconjunto de $\mathcal{I}m(\mathcal{H})$ que tenga la propiedad de ser una subvariedad regular de \mathbb{R}^k . En este caso, la aplicación de Hilbert nos proporcionará un espacio reducido para la acción de G en V , restringida al subespacio invariante $W \subset V$ tal que $\mathcal{H}(W) \subset \mathbb{R}^k$ sea una subvariedad regular. En la siguiente sección vamos a ilustrar este procedimiento para construir un espacio reducido para la acción de \mathbb{S}^1 que induce el flujo del oscilador armónico en \mathbb{R}^4 , en el caso resonante.

SECCIÓN 3.3

**Teoría de reducción para el oscilador armónico
resonante**

En esta sección vamos a aplicar la teoría de reducción invariante para la acción lineal de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^4 que induce el oscilador armónico en el caso resonante. Usando la aplicación de Hilbert $\mathcal{H} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ construida con un conjunto generador $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$ de polinomios \mathbb{S}^1 -invariantes vamos a construir un espacio reducido para la acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^4 . Como el álgebra de funciones \mathbb{S}^1 -invariantes coincide con \mathcal{A}_H (álgebra de integrales primeras) y ésta es una subálgebra de Poisson, los corchetes de los generadores ν_i, ν_j son funciones \mathbb{S}^1 -invariante que se expresan a su vez en terminos de los generadores. Esto nos permite definir una estructura de Poisson en el espacio reducido por $\{f, g\}_0 := \sum_{1 \leq i, j \leq 4} \{\nu_i, \nu_j\}_0 \frac{\partial f}{\partial \nu_i} \frac{\partial g}{\partial \nu_j}$ y con ello definir la dinámica reducida para sistemas Hamiltonianos \mathbb{S}^1 -invariantes. Adicionalmente, como la acción inducida por el oscilador armónico resulta ser Hamiltoniana con momentum map J , es posible construir un espacio reducido para los conjuntos de nivel regulares de J . Mostraremos que en este caso, el espacio reducido para $J^{-1}(h) \subset \mathbb{R}^4$ coincide con una hoja simpléctica de la estructura de Poisson definida para el espacio reducido de la acción de \mathbb{S}^1 .

Consideremos el Hamiltoniano del oscilador armónico con dos grados de libertad $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2)$ en el caso resonante, es decir cuando $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$ es racional. En el caso resonante, el campo Hamiltoniano

$$X_H = -\omega_1^2 q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - \omega_2^2 q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \quad (3.7)$$

tiene flujo periodico con período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, con $\omega = \frac{\omega_1}{n} = \frac{\omega_2}{m}$. De esta forma, el flujo del oscilador armónico induce una acción de \mathbb{S}^1 con generador infinitesimal

$$\Upsilon = \frac{1}{\omega} X_H.$$

Explicitamente, la acción $\Phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ está dada por:

$$\Phi(\theta, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} p_1 \cos(nt) - q_1 \omega_1 \sin(nt) \\ p_2 \cos(mt) - q_2 \omega_2 \sin(mt) \\ \frac{p_1}{\omega_1} \sin(nt) + q_1 \cos(nt) \\ \frac{p_2}{\omega_2} \sin(mt) + q_2 \cos(mt) \end{pmatrix}$$

donde $p = (p_1, p_2)$ y $q = (q_1, q_2)$. Notemos que en este caso \mathbb{S}^1 es un grupo compacto actuando linealmente en \mathbb{R}^4 por el teorema de Schwarz-Mather (teorema (3.6)), existe un conjunto finito de polinomios \mathbb{S}^1 -invariantes que generan al álgebra de funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)^{\mathbb{S}^1} = \mathcal{A}_H$, como se discutió en el capítulo 2. Recordemos que en el capítulo 2 se obtuvo para este caso un conjunto de generadores para el álgebra de simetrías de H , que vienen dadas por los siguientes funciones

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2, \\ \alpha_2 &= p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2, \\ \alpha_3 &= \mathcal{R}e [(p_1 + \mathbf{i}\omega_1 q_1)^n (p_2 - \mathbf{i}\omega_2 q_2)^m], \\ \alpha_4 &= \mathcal{I}m [(p_1 + \mathbf{i}\omega_1 q_1)^n (p_2 - \mathbf{i}\omega_2 q_2)^m]. \end{aligned}$$

Vamos a considerar la aplicación de Hilbert para el oscilador armónico, definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbb{R}_{p,q}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (p, q) &\mapsto (\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q), \nu_4(p, q)) \end{aligned}$$

donde $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$, y

$$\begin{aligned} \nu_1(p, q) &:= \alpha_3, & \nu_3(p, q) &:= \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2). \\ \nu_2(p, q) &:= \alpha_4, & \nu_4(p, q) &:= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como los generadores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 satisfacen la relación $\alpha_1^n \cdot \alpha_2^m = \alpha_3^2 + \alpha_4^2$, las variables

generalizadas de Hopf ν_i (3.8) satisfacen la siguiente relación

$$(\nu_3 + \nu_4)^n (\nu_4 - \nu_3)^m = \nu_1^2 + \nu_2^2.$$

Luego podemos definir la siguiente función $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ que más adelante veremos es una función muy importante para nuestro estudio, dada por

$$Q(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) = \nu_1^2 + \nu_2^2 - (\nu_3 + \nu_4)^n (\nu_4 - \nu_3)^m.$$

Además se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m(\mathcal{H}) &= \{(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \mid \nu_1^2 + \nu_2^2 = (\nu_3 + \nu_4)^n (\nu_4 - \nu_3)^m, |\nu_3| \leq \nu_4, \nu_4 \geq 0\} \\ &= Q^{-1}(0) \cap \{|\nu_3| \leq \nu_4, \nu_4 \geq 0\} \end{aligned}$$

Por la proposición (3.3) $\mathcal{I}m(\mathcal{H})$ es un modelo para es espacio de órbitas. Consideremos la estructura de Poisson canónica $\{\cdot, \cdot\}$ en $\mathbb{R}_{p,q}^4$.

Proposición 3.4. *La acción de \mathbb{S}^1 inducida por el flujo del oscilador armónico X_H (3.7) en el caso resonante es canónica, es decir, para $\theta \in \mathbb{S}^1$*

$$\Phi_\theta^* \{f, g\} = \{\Phi_\theta^* f, \Phi_\theta^* g\},$$

para toda $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$.

La prueba de proposición anterior es aplicación directa del teorema (1.6), ya que en esta se probó en general.

Por el teorema de reducción de Poisson teorema (3.3), el espacio de órbitas admite un estructura de Poisson tal que la proyección natural a $\mathbb{R}^4/\mathbb{S}^1$ es Poisson. Como $\mathcal{I}m(\mathcal{H})$ es un modelo para espacio de órbitas, es de interés definir explícitamente una estructura de Poisson en $\mathcal{I}m(\mathcal{H})$ tal que \mathcal{H} sea Poisson. Para lograrlo, vamos a utilizar las relaciones de conmutación para los generadores de una base de Hilbert para el álgebra de polinomios \mathbb{S}^1 -invariantes.

Como las variables de Hopf generalizadas ν_1, ν_2, ν_3 y ν_4 , satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} \{\nu_1, \nu_2\}_0 &= n\omega_1 [n(\nu_4 - \nu_3) - m(\nu_3 + \nu_4)] (\nu_3 + \nu_4)^{n-1} (\nu_4 - \nu_3)^{m-1}, \\ \{\nu_1, \nu_3\}_0 &= 2n\omega_1 \nu_2, \\ \{\nu_2, \nu_3\}_0 &= -2n\omega_1 \nu_1, \\ \{\nu_i, \nu_4\}_0 &= 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Definimos una aplicación

$$\{\cdot, \cdot\}_0 : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_\nu^4) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_\nu^4) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_\nu^4)$$

por

$$\{f, g\}_0 := \sum_{1 \leq i, j \leq 4} \{\nu_i, \nu_j\}_0 \frac{\partial f}{\partial \nu_i} \frac{\partial g}{\partial \nu_j} \quad (3.10)$$

para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_\nu^4)$.

Proposición 3.5. Sean $(\mathbb{R}_{p,q}^4, \{\cdot, \cdot\})$ y $(\mathbb{R}_\nu^4, \{\cdot, \cdot\}_0)$ variedades de Poisson, entonces la aplicación de Hilbert $\mathcal{H} : (\mathbb{R}^4, \{\cdot, \cdot\}) \rightarrow (\mathbb{R}_\nu^4, \{\cdot, \cdot\}_0)$ dada por

$$\mathcal{H}(p, q) = (\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q), \nu_4(p, q))$$

es un morfismo de Poisson.

Demostración. De las relaciones de conmutación de los generados ν_1, ν_2, ν_3 y ν_4 se tiene que

$$\{\mathcal{H}^* \nu_i, \mathcal{H}^* \nu_j\} = \mathcal{H}^* \{\nu_i, \nu_j\}_0 \quad (3.11)$$

para $i, j = 1, 2, 3, 4$. De donde para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_\nu^4)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* f(p, q) &= f(\mathcal{H}(p, q)) = f(\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q), \nu_4(p, q)), \\ \mathcal{H}^* g(p, q) &= g(\mathcal{H}(p, q)) = g(\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q), \nu_4(p, q)). \end{aligned}$$

Por lo tanto del corchete canónico de $\mathbb{R}_{p,q}^4$, se tiene

$$\{\mathcal{H}^* f, \mathcal{H}^* g\}(p, q) = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial(H^* f)}{\partial p_i}(p, q) \frac{\partial(H^* g)}{\partial q_i}(p, q) - \frac{\partial(H^* f)}{\partial q_i}(p, q) \frac{\partial(H^* g)}{\partial p_i}(p, q) \right].$$

Obviando el punto de evaluación y por la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left[\left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial f}{\partial \nu_j} \frac{\partial \nu_j}{\partial p_i} \right) \left(\sum_{k=1}^4 \frac{\partial g}{\partial \nu_k} \frac{\partial \nu_k}{\partial q_i} \right) - \left(\sum_{l=1}^4 \frac{\partial f}{\partial \nu_l} \frac{\partial \nu_l}{\partial q_i} \right) \left(\sum_{r=1}^4 \frac{\partial g}{\partial \nu_r} \frac{\partial \nu_r}{\partial p_i} \right) \right] \\ &= \sum_{1 \leq j, k \leq 4} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial \nu_j} \frac{\partial g}{\partial \nu_k} \frac{\partial \nu_j}{\partial p_i} \frac{\partial \nu_k}{\partial q_i} - \sum_{1 \leq l, r \leq 4} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial \nu_l} \frac{\partial g}{\partial \nu_r} \frac{\partial \nu_l}{\partial q_i} \frac{\partial \nu_r}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Tomando $l = j$, $k = r$ y considerando que $\nu_i(p, q) = \mathcal{H}^* \nu_i(p, q)$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$ tenemos

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}^* f, \mathcal{H}^* g\}(p, q) &= \sum_{1 \leq j, k \leq 4} \{\nu_j, \nu_k\}(p, q) \frac{\partial f}{\partial \nu_j}(\mathcal{H}(p, q)) \frac{\partial g}{\partial \nu_k}(\mathcal{H}(p, q)) \\ &= \sum_{1 \leq j, k \leq 4} \mathcal{H}^* (\{\nu_j, \nu_k\}_0)(p, q) \mathcal{H}^* \left(\frac{\partial f}{\partial \nu_j}(\mathcal{H}(p, q)) \right) \mathcal{H}^* \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_k}(\mathcal{H}(p, q)) \right) \\ &= \mathcal{H}^* \left(\sum_{1 \leq j, k \leq 4} \{\nu_j, \nu_k\}_0 \frac{\partial f}{\partial \nu_j} \frac{\partial g}{\partial \nu_k} \right) (p, q) \\ &= \mathcal{H}^* \{f, g\}_0(p, q). \end{aligned}$$

Así, la aplicación de Hilbert es un morfismo de Poisson. \square

Recordemos que un corchete $\{\cdot, \cdot\}$ se dice ser regular si el rango del corchete es constante. En caso contrario se dice ser no-regular. El corchete $\{\cdot, \cdot\}$ se dice ser no-degenerado si es regular y rango máximo.

Proposición 3.6. *La estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_0$ (3.10) es degenerada y no regular. Más aún, el rango de $\{\cdot, \cdot\}_0$ es 0 ó 2.*

Demostración. De las relaciones de conmutación (3.9), se tiene que la matriz asociada al corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_0$ esta dada por

$$p(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & \{\nu_1, \nu_2\} & 2n\omega_1\nu_2 & 0 \\ \{\nu_2, \nu_1\} & 0 & -2n\omega_1\nu_1 & 0 \\ -2n\omega_1\nu_2 & 2n\omega_1\nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz tiene una columna con ceros, es claro que la matriz no tiene rango 4. Además como se tiene una submatriz de 3×3 antisimétrica, está no puede tener rango 3. Por lo tanto la submatriz de 3×3 tiene rango a lo más 2. Vamos a probar que no puede tener rango 1. En los puntos donde $p(\nu)$ no tiene rango 2, los siguientes menores se anulan:

$$\begin{vmatrix} \{\nu_2, \nu_1\} & 0 \\ -2n\omega_1\nu_2 & 2n\omega_1\nu_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \{\nu_2, \nu_1\} & -2n\omega_1\nu_1 \\ -2n\omega_1\nu_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -2n\omega_1\nu_1 \\ 2n\omega_1\nu_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Por cálculo directo, se verifica si estos menores se anulan entonces la submatriz de 3×3 es la matriz nula. Por lo tanto $p(\nu)$ no tiene rango 1. Así el rango de la matriz es 0 o 2, como queríamos. \square

Por otra parte, la estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_0$ tiene rango 0 si

$$n\omega_1[(n-m)\nu_4 - (m+n)\nu_3](\nu_3 + \nu_4)^{n-1}(\nu_4 - \nu_3)^{m-1} = 0$$

es decir, los puntos $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 = h)$ en \mathbb{R}_ν^4 donde $\{\cdot, \cdot\}_0$ tiene rango 0, son los siguientes

- (a) $(0, 0, 0, 0)$ si $\nu_4 = h = 0$.
- (b) Si $n > 1$ y $m = -n$ se tiene $(0, 0, -h, h)$.
- (c) Si $m > 1$ y $n = -m$ se tiene $(0, 0, h, h)$.
- (d) Si $m \neq -n$ tenemos $(0, 0, \frac{n-m}{m+n}h, h)$.

Notemos que estos puntos son imágenes de los modos normales, que más adelante veremos la interpretación geométrica de ellos.

Proposición 3.7. *La estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_0$ en \mathbb{R}_ν^4 admite dos funciones de Casimir globales, que vienen dadas por las siguientes funciones*

$$K(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) = \nu_4 \quad y \quad Q(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) = \nu_1^2 + \nu_2^2 - (\nu_3 + \nu_4)^n(\nu_4 - \nu_3)^m$$

Primero si C es un Casimir, notemos que $\{C, f\}_0 = 0$ para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ si y sólo si $\{C, \nu_i\}_0 = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Demostración. Mostrar que K es un Casimir es inmediato ya que $K(\nu) = \nu_4$ y por lo tanto, $\{K, \nu_i\}_0 = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

De manera análoga, vamos a verificar que $\{Q, \nu_i\}_0 = 0$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Por cálculo directo, se tiene

$$\begin{aligned}\{Q, \nu_1\}_0 &= \{\nu_1^2 + \nu_2^2 - (\nu_3 + \nu_4)^n(\nu_4 - \nu_3)^m, \nu_1\}_0 \\ \{Q, \nu_2\}_0 &= \{\nu_1^2 + \nu_2^2 - (\nu_3 + \nu_4)^n(\nu_4 - \nu_3)^m, \nu_2\}_0 \\ \{Q, \nu_3\}_0 &= \{\nu_1^2 + \nu_2^2 - (\nu_3 + \nu_4)^n(\nu_4 - \nu_3)^m, \nu_3\}_0\end{aligned}$$

Usando las relaciones de conmutación (3.9) se tiene que las expresiones anteriores se anulan. De donde tenemos que Q es un Casimir. \square

Usando los Casimires describimos de manera geométrica la foliación simpléctica de $\{\cdot, \cdot\}_0$. Dado que $K(\nu)$ y $Q(\nu)$ son Casimires globales para $\{\cdot, \cdot\}_0$; entonces podemos definir una aplicación

$$F : \mathbb{R}_\nu^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por

$$F(\nu) := (K(\nu), Q(\nu)).$$

Hallemos los puntos singulares de F , para ellos calculemos el diferencial

$$D_\nu F = \begin{pmatrix} 0 & 2\nu_1 & & & \\ 0 & 2\nu_2 & & & \\ 0 & (\nu_3 + \nu_4)^{n-1}(\nu_4 - \nu_3)^{m-1}[(m+n)\nu_3 + (m-n)\nu_4] & & & \\ 1 & (\nu_3 + \nu_4)^{n-1}(\nu_4 - \nu_3)^{m-1}[(n-m)\nu_3 - (n+m)\nu_4] & & & \end{pmatrix}^T,$$

así, un punto $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ es un punto singular de F si;

$$\begin{aligned}2\nu_1 &= 0, \\ 2\nu_2 &= 0, \\ (\nu_3 + \nu_4)^{n-1}(\nu_4 - \nu_3)^{m-1}[(m+n)\nu_3 + (m-n)\nu_4] &= 0, \\ (\nu_3 + \nu_4)^{n-1}(\nu_4 - \nu_3)^{m-1}[(n-m)\nu_3 - (n+m)\nu_4] &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, los punto singulares son los siguientes

(a) $(0, 0, 0, 0)$.

(b) Además todos los puntos de la forma $(0, 0, 0, h)$ son singulares, luego

$$F(0, 0, 0, h) = (h, -h^2).$$

(c) Si $n > 1$, tenemos $\nu_3 = -\nu_4 = -h$, así $(0, 0, -h, h)$ es punto singular, entonces

$$F(0, 0, -h, h) = (h, 0).$$

(d) Si $m > 1$, tenemos $\nu_3 = \nu_4 = h$, así $(0, 0, h, h)$ es punto singular, entonces

$$F(0, 0, h, h) = (h, 0).$$

Recordemos que un punto $(h, a) \in \mathbb{R}^2$ es valor regular si $D_\nu F(h, a)$ tiene rango máximo, en tal caso se tiene

$$\begin{aligned} F^{-1}(h, a) &= \{\nu \in \mathbb{R}^4 \mid K(\nu) = h, Q(\nu) = a\} \\ &= \{\nu \in \mathbb{R}^4 \mid \nu_4 = h, \nu_1^2 + \nu_2^2 - (\nu_3 + \nu_4)^n (\nu_4 - \nu_3)^m = a\} \\ &= \{\nu \in \mathbb{R}^4 \mid \nu_1^2 + \nu_2^2 - (\nu_3 + h)^n (h - \nu_3)^m = a\}, \end{aligned}$$

pero a nosotros lo que nos interesa es cuando $a = 0$ es decir

$$F^{-1}(h, 0) = \{\nu \in \mathbb{R}^4 \mid \nu_1^2 + \nu_2^2 - (\nu_3 + h)^n (h - \nu_3)^m = 0\}.$$

Geoméricamente los conjuntos de nivel de F representan las hojas simplécticas, como se ilustra a continuación para las resonancias $m : n$ en la Figura (3.1).

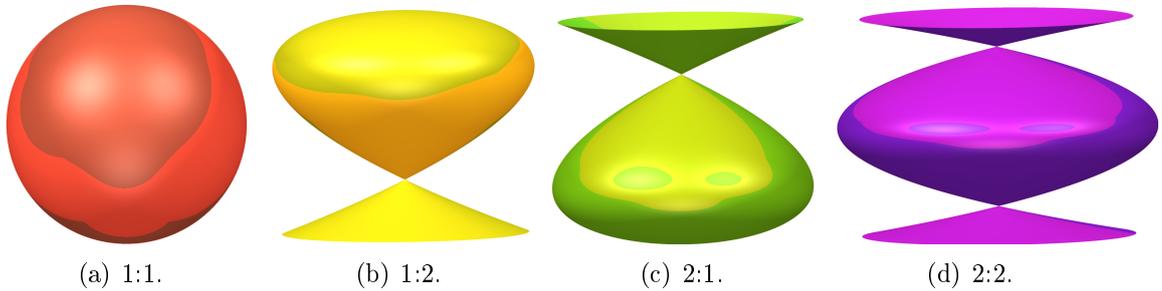


Figura 3.1: Hojas simplécticas.

Proposición 3.8. Para $h \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel de K

$$K^{-1}(h) = \{(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \mid \nu_4 = h\} = \{(\nu_1, \nu_2, \nu_3, h)\} \cong \mathbb{R}^3 \times \{h\} \subset \mathbb{R}_\nu^4$$

es una subvariedad regular 3-dimensional, más aún existe una estructura de Poisson en $K^{-1}(h)$ tal que

$$\begin{aligned} i_h : K^{-1}(h) &\hookrightarrow (\mathbb{R}_\nu^4, \{\cdot, \cdot\}_0) \\ (\nu_1, \nu_2, \nu_3, h) &\mapsto (\nu_1, \nu_2, \nu_3, h) \end{aligned}$$

es un morfismo de Poisson. Por lo tanto $K^{-1}(h)$ es subvariedad de Poisson en $(\mathbb{R}_\nu^4, \{\cdot, \cdot\}_0)$.

Demostración. Para todo $h \in \mathbb{R}$, $K^{-1}(h) \subset \mathbb{R}^4$ es una subvariedad regular. Tenemos que $i_h : K^{-1}(h) \hookrightarrow \mathbb{R}_\nu^4$ es una inmersión, entonces $i_h^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_\nu^4) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(K^{-1}(h))$ es sobreyectiva,

así para $F, G \in \mathcal{C}^\infty(K^{-1}(h))$ existen $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_\nu^4)$ tal que $F = i_h^* f$ y $G = i_h^* g$ es decir

$$F = f|_{\nu_4=h}, \quad G = g|_{\nu_4=h}.$$

Así, podemos definir una estructura de Poisson en $K^{-1}(h)$, por

$$\{f|_{\nu_4=h}, g|_{\nu_4=h}\}_h := (\{f, g\}_0)|_{\nu_4=h}.$$

Finalmente mostremos que la inclusión i_h es un morfismo de Poisson. En efecto, considerando $F, G \in \mathcal{C}^\infty(K^{-1}(h))$, se tiene que

$$\{i_h^* f, i_h^* g\}_h = \{f|_{\nu_4=h}, g|_{\nu_4=h}\}_h = (\{f, g\}_0)|_{\nu_4=h} = i_h^* \{f, g\}_0$$

por lo tanto $K^{-1}(h)$ es una subvariedad de Poisson, como queríamos, demostrar. \square

Por otra parte, existe un difeomorfismo $\psi_h : \mathbb{R}_{x,y,z}^3 \rightarrow K^{-1}(h)$, dado por

$$\psi_h(x, y, z) := (x, y, z, h). \quad (3.12)$$

Si definimos la estructura de Poisson en $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$ por

$$\{F, G\}_h(x, y, z) := 2n\omega_1 \langle \nabla \tilde{Q}, \nabla F \times \nabla G \rangle,$$

donde $\tilde{Q}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = i_h^* Q(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) = Q(\nu_1, \nu_2, \nu_3, h)$ es una función de Casimir para $\{\cdot, \cdot\}_h$. En efecto, para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(K^{-1}(h))$

$$\{\tilde{Q}, f\}_h = (\{Q, f\}_0)|_{\nu_4=h} = 0.$$

Proposición 3.9. $\Psi_h : (\mathbb{R}^3, \{\cdot, \cdot\}_h) \rightarrow (K^{-1}(h), \{\cdot, \cdot\}_0|_h)$ es un morfismo de Poisson.

SECCIÓN 3.4

Espacio reducido para conjuntos de nivel de la aplicación momentum

En la proposición (3.4) se mostró que la acción de \mathbb{S}^1 que induce el oscilador armónico en $(\mathbb{R}^4, \{\cdot, \cdot\})$, es canónica. De hecho, ésta acción es *Hamiltoniana*, es decir, el generador infinitesimal de la acción es un campo Hamiltoniano

$$\Upsilon = \frac{1}{\omega} X_H = X_J,$$

Con respecto a la función Hamiltoniana $J(p, q) := \frac{1}{\omega} H(p, q)$. La función J es llamada la aplicación momentum de la acción. Para más detalle se puede consultar [17].

Los conjuntos de nivel de J son subconjuntos invariantes ya que son justamente los conjuntos de nivel de Hamiltoniano del oscilador armónico. Recordemos que para todo

$h > 0$, $H^{-1}(h)$ es una subvariedad regular 3-dimensional de \mathbb{R}^4 . Si restringimos la acción a \mathbb{S}^1 a $H^{-1}(h)$ con $h > 0$, esta resulta ser libre y propia. Por el Teorema (3.1), $H^{-1}(h)/\mathbb{S}^1$ posee una estructura de variedad diferencial tal que la proyección es una submersión. El propósito de esta sección es utilizar la aplicación de Hilbert \mathcal{H} (3.6) para construir un modelo para el espacio reducido de \mathbb{S}^1 en $H^{-1}(h)$. Como $\mathcal{I}m(\mathcal{H}) \subset \mathbb{R}_\nu^4$ no es en general una subvariedad, será necesario omitir los modos normales de $H^{-1}(h)$, en algunos casos, para obtener un espacio reducido.

Fijemos $h > 0$. Notemos que

$$\mathcal{H}(H^{-1}(h)) \subset K^{-1}(h),$$

con $K(\nu) = \nu_4$ el casimir de $(\mathbb{R}_\nu^4, \{\cdot, \cdot\}_0)$. Como $K^{-1}(h) \cong \mathbb{R}^3$, definamos

$$\Sigma_h := \begin{cases} H^{-1}(h) & \text{si } n = m = 1 \\ H^{-1}(h)/\{(p_1, 0, q_1, 0)\} & \text{si } n > m = 1 \\ H^{-1}(h)/\{(0, p_2, 0, q_2)\} & \text{si } m > n = 1 \\ H^{-1}(h)/(\{(p_1, 0, q_1, 0)\} \cup \{(0, p_2, 0, q_2)\}) & \text{si } m > n > 1. \end{cases}$$

y la *fibración de Hopf generalizada* $\mathcal{F} : \Sigma_h \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathcal{F}(p, q) := (\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q)).$$

De donde es claro que \mathcal{F} es \mathcal{C}^∞ . Debido a que Σ_h es una subvariedad regular y $\mathcal{F} = \Psi_h^{-1} \circ \mathcal{H}|_{\Sigma_h}$ con $\Psi_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow K^{-1}(h)$ el difeomorfismo definido por (3.12). Notemos que

$$\mathcal{I}m\mathcal{F} \subset \tilde{Q}^{-1}(0),$$

con

$$\tilde{Q}_h(x, y, z) = x^2 + y^2 - (z + h)^n(z - h)^m \quad (3.13)$$

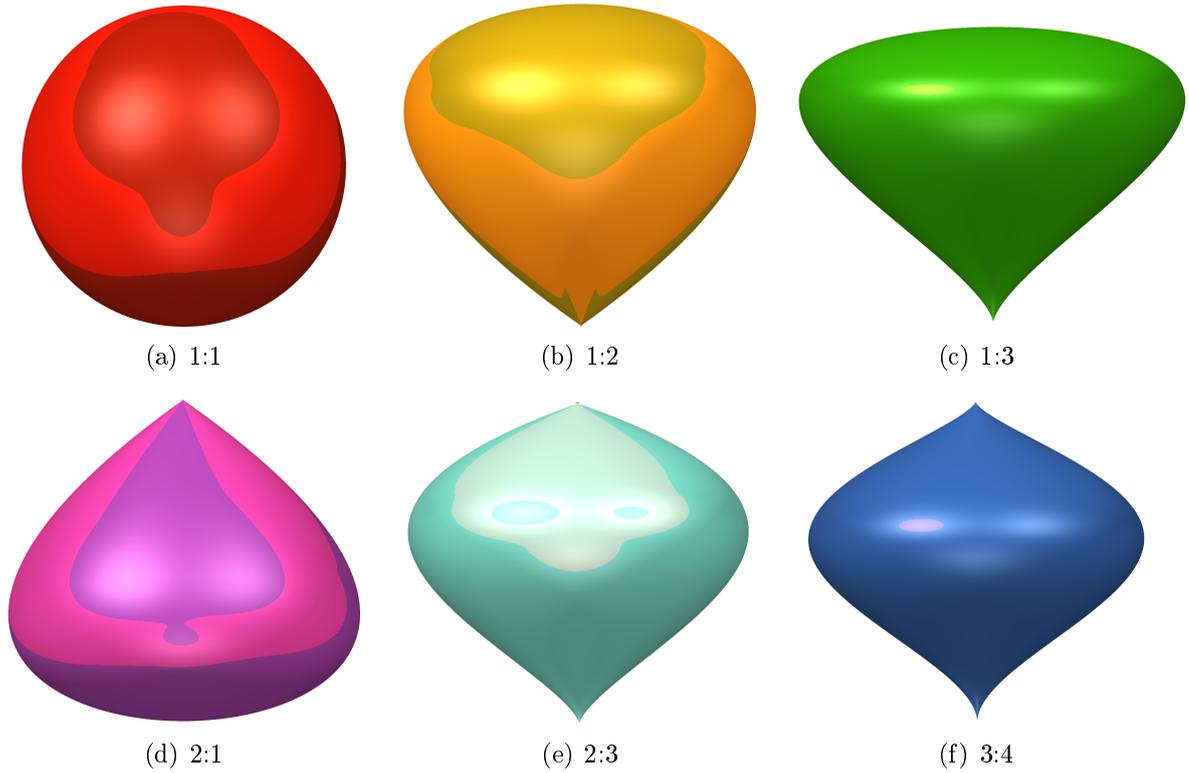
El nombre de fibración de Hopf generalizada se debe a que para la resonancia $n = m = 1$ se recupera la fibración de Hopf $\mathcal{F} : \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \rightarrow \mathbb{S}_h^2$, [7]. En este trabajo dedicaremos la siguiente sección al estudio de la fibración de Hopf para la resonancia 1 : 1.

Por lo tanto, un espacio reducido para la acción de \mathbb{S}^1 en $\Sigma_h \subset \mathbb{R}^4$ está dada por

$$M_R^h := \begin{cases} \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{|z| \leq h\} & \text{si } n = m = 1 \\ \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{-h \leq z < h\} & \text{si } n > m = 1 \\ \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{-h < z \leq h\} & \text{si } m > n = 1 \\ \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{|z| < h\} & \text{si } m > n > 1. \end{cases}$$

con submersión sobreyectiva $\mathcal{F} : \Sigma_h \rightarrow M_R^h$. En seguida presentamos los modelos para el espacio reducido, para distintas frecuencias como se ilustra en la Figura (3.2).

Por otro lado, ilustramos los modelos de los espacios reducidos de las resonancias $m : n$,


 Figura 3.2: Espacios de fase reducidos de las resonancias $m : n$

proyectadas en el plano (y, z) , como se ve en la Figura (3.3).

Dinámica Reducida. Consideremos el corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$ definido por

$$\{F, G\}_{\mathbb{R}^3} = n\omega_1 \langle \tilde{Q}_h, \nabla F \times \nabla G \rangle$$

con \tilde{Q}_h definido por (3.13). Recordemos que en este caso, \tilde{Q}_h es un Casimir de $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{R}^3}$. De aquí se sigue que el espacio reducido M_R^h es precisamente una hoja simpléctica de corchete $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{R}^3}$. Usando la estructura simpléctica foliada para definir la dinámica reducida para los campos Hamiltonianos en $\mathbb{R}^4_{p,q}$ asociados a funciones \mathbb{S}^1 -invariantes.

Primero, veamos como podemos obtener la función reducida en M_R^h asociada a una función \mathbb{S}^1 -invariante en $\mathbb{R}^4_{p,q}$. Para cada $F \in \mathcal{A}_H$, sea $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^4_\nu)$ tal que

$$F = \tilde{f} \circ \mathcal{H}.$$

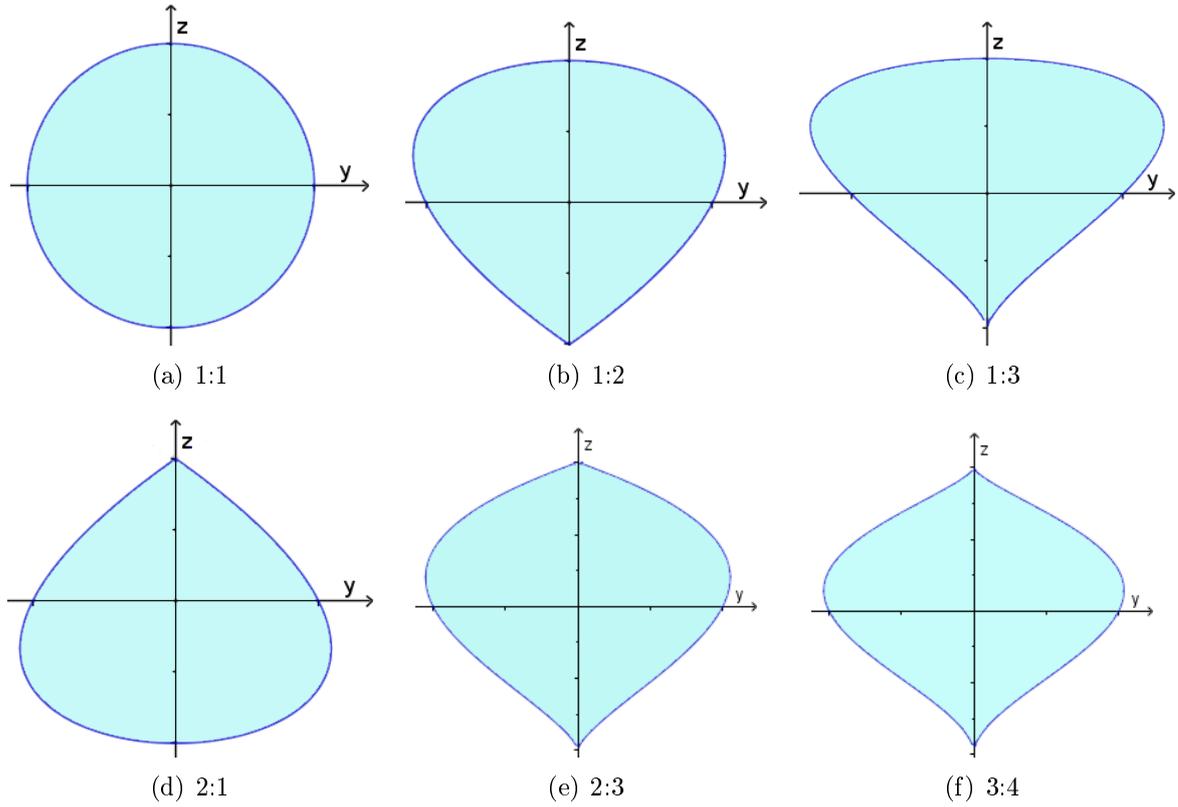
Definimos

$$f(x, y, z) := \tilde{f}(x, y, z, h).$$

El campo vectorial reducido en M_R de X_F esta dado por

$$X_f := n\omega_1 \nabla \tilde{Q}_h \times \nabla f. \quad (3.14)$$

Teorema 3.7. *Bajo las hipótesis anteriores los campos vectoriales X_F y $X_{\tilde{f}}$ están \mathcal{F} -relacionados.*


 Figura 3.3: Espacios de fase reducidos en el plano (y, z)

Demostración. Como $F \in \mathcal{A}_H$, el campo vectorial X_F es tangente a Σ_h . Tomando en cuenta que $\mathcal{F} = \Phi^{-1} \circ \mathcal{H}$ y que \mathcal{H} y Ψ^{-1} son morfismos de Poisson, tenemos

$$\begin{aligned} T_{(p,q)}\mathcal{F}(X_F) &= T_{\mathcal{H}(p,q)}\Psi^{-1} \circ T_{(p,q)}\mathcal{H}(X_F) \\ &= T_{\mathcal{H}(p,q)}\Psi^{-1}(X_{\tilde{f}}(\mathcal{H}(p, q))) \\ &= X_{\tilde{f}}(\mathcal{F}(p, q)). \end{aligned}$$

Como se quería mostrar. □

SECCIÓN 3.5

Fibración de Hopf, resonancia 1:1

En esta sección, vamos a analizar con detalle las propiedades de la aplicación de Hilbert y la fibración de Hopf para la resonancia 1 : 1. Recordemos que la aplicación de Hilbert se define por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbb{R}_{p,q}^4 &\rightarrow \mathbb{R}_\nu^4 \\ (p, q) &\mapsto (\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q), \nu_4(p, q)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \nu_1(p, q) &:= p_1p_2 + q_1q_2 & \nu_2(p, q) &:= p_2q_1 - p_1q_2 \\ \nu_3(p, q) &:= \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2) & \nu_4(p, q) &:= \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

para el caso resonancia 1 : 1. En este caso, las variables de Hopf satisfacen la siguiente relación

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \nu_4^2 = 0, \quad \nu_4 \geq 0. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, la imagen de la aplicación de Hilbert \mathcal{H} está contenida en la variedad semialgebraica \mathcal{C} definida por:

$$\mathcal{C} = \{(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \mid \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \nu_4^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Topologicamente, \mathcal{C} es un cono en \mathbb{S}^2 con vértices en el origen.

Proposición 3.10. *El conjunto \mathcal{C} es la imagen de la aplicación de Hilbert.*

Demostración. Para ello basta verificar que $D\mathcal{H}(p, q) : T_{(p,q)}\mathbb{R}^4 \rightarrow T_{\mathcal{H}(p,q)}\mathcal{C}$ es sobreyectiva para todo $(p, q) \neq 0$, ya que $\mathcal{H}(0) = 0$ y es claro que $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ es una variedad diferenciable 3-dimensional. En efecto, para $(p, q) \neq 0$ tenemos la diferencial de \mathcal{H} , dada por

$$D\mathcal{H}(p, q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \nu_1}{\partial p_2} & \frac{\partial \nu_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \nu_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \nu_2}{\partial p_1} & \frac{\partial \nu_2}{\partial p_2} & \frac{\partial \nu_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \nu_2}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \nu_3}{\partial p_1} & \frac{\partial \nu_3}{\partial p_2} & \frac{\partial \nu_3}{\partial q_1} & \frac{\partial \nu_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \nu_4}{\partial p_1} & \frac{\partial \nu_4}{\partial p_2} & \frac{\partial \nu_4}{\partial q_1} & \frac{\partial \nu_4}{\partial q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & p_1 & q_2 & q_1 \\ -q_2 & q_1 & p_2 & -p_1 \\ p_1 & -p_2 & q_1 & -q_2 \\ p_1 & p_2 & q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

de donde $\text{rank}(D\mathcal{H}) \geq 3$ porque sus primeras tres filas son distintos de cero y además ortogonales por pares. Por otro lado el $\text{rank}(D\mathcal{H}) \leq 3$ debido a que

$$\text{Im} D\mathcal{H}(p, q) \subseteq T_{\mathcal{H}(p,q)}\mathcal{C} = \ker DC(\mathcal{H}(p, q)) = \ker \{(\nu_1, \nu_2, \nu_3, -\nu_4)\}$$

y $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, -\nu_4)$ es no cero. Entonces $\mathcal{H} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{C}$ es sobreyectiva, por lo tanto $\text{Im}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}$. \square

Para $h > 0$ el conjunto de nivel de Hamiltoniano H es la 3-esfera de radio $\sqrt{2h}$.

$$H^{-1}(h) = \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 = \{(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^4 \mid p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 = 2h\}$$

Como las variables de Hopf satisfacen la relación (3.17) y $\nu_4 = H$, la imagen de la aplicación de Hilbert (3.15) a la 3-esfera $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \subset \mathbb{R}_{(p,q)}^4$ es la 2-esfera de radio h , $\mathbb{S}_h^2 \subseteq K^{-1}(h)$. Por lo tanto la fibrición de Hopf "generalizada".

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \subseteq \mathbb{R}_{p,q}^4 &\rightarrow \mathbb{S}_h^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (p, q) &\mapsto (\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

con ν_1, ν_2, ν_3 definidos en (3.16).

La aplicación \mathcal{F} definida por (3.18) es la conocida fibrición de Hopf, una submersión localmente trivial de la 3-esfera a la 2-esfera con fibra \mathbb{S}^1 . A continuación, probaremos estas propiedades. primero recordemos la noción de linking number [8] para dos círculos disjuntos orientados γ_1 y γ_2 en una 3-esfera orientada. Intuitivamente, el linking number representa

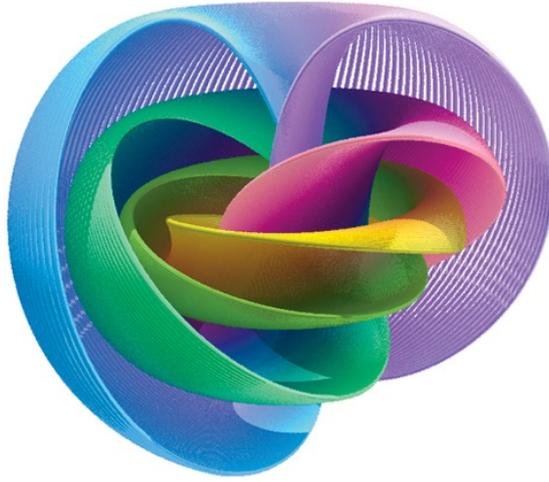


Figura 3.4: Visualización de la fibración de Hopf.

el número de veces que cada curva se enrolla alrededor de la otra. El linking number es siempre un número entero, pero puede ser positivo o negativo según la orientación de las dos curvas. Supongamos que γ_1 es la frontera de un 2-disco \overline{D}_1^2 cerrado orientado en \mathbb{S}^3 . Como \mathbb{S}^3 es simplemente conexo, el círculo γ_1 es homotopico nulo y por lo tanto suavemente contraible hasta un punto $p \in \mathbb{S}^3$. En otras palabras, existe una aplicación

$$F : \overline{D}_1^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$$

llamada contracción, tal que $F(0) = p$ y para todo $r \in (0, 1]$ la función F restringida a la frontera $\partial\overline{D}_r^2$ del 2-disco cerrado

$$\overline{D}_r^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|^2 \leq r^2\}$$

es un difeomorfismo sobre γ_1 . Sin pérdida de generalidad, podemos orientar los 2-discos \overline{D}_1^2 de modo que $F|_{\partial\overline{D}_1^2}$ preserve la orientación.

Además, supongamos que F es transversal a γ_2 en \mathbb{S}^3 es decir $\gamma_2 \cap F(D_1^2) = \emptyset$ o para cada $x \in D_1^2$, tal que $F(x) \in \gamma_2 \cap F(D_1^2)$ tenemos $T_x F(T_x D_1^2) + T_x \gamma_2 = T_x \mathbb{S}^3$. El linking number de dos círculos γ_1 y γ_2 es el número de intersecciones de $F(D_1^2)$ con γ_2 es decir

$$\text{Link}(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{x \in \mathcal{J}} \#(T_x F(T_x D_1^2), T_x \gamma_2) \tag{3.19}$$

donde $\mathcal{J} = \{x \in D_1^2 \mid F(x) \in \gamma_2 \cap F(D_1^2)\}$ y

$$\#(T_x F(T_x D_1^2), T_x \gamma_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } T_x F(T_x D_1^2) + T_x \gamma_2 = T_x \mathbb{S}^3 \text{ misma orientación que } \mathbb{S}^3 \\ -1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que la suma en (3.19) es finita, pues F es transversal a γ_2 .

Proposición 3.11. *La fibración de Hopf $\mathcal{F} : \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \rightarrow \mathbb{S}_h^2$ (3.18) tiene las siguientes*

propiedades

a) \mathcal{F} es una submersión propia.

b) Para cada $\nu \in \mathbb{S}_h^2$ la fibra $\mathcal{F}^{-1}(\nu)$ es un círculo máximo en $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$ contenida en el 2-plano Π^ν en \mathbb{R}^4 definidos por las ecuaciones

$$\pi_1 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0, \quad \pi_2 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0.$$

donde $\pi_1 := (-\nu_1, h + \nu_3, -\nu_2, 0)$ y $\pi_2 := (-\nu_2, 0, -\nu_1, h + \nu_2)$.

c) Para cada $\nu, \nu' \in \mathbb{S}_h^2$ con $\nu \neq \nu'$, el círculo $\mathcal{F}^{-1}(\nu)$ y $\mathcal{F}^{-1}(\nu')$ están conectados en $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$ con el linking number 1, dado por

$$\text{Link}(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{x \in \mathcal{J}} \#(T_x F(T_x D_1^2), T_x \gamma_2) \quad (3.20)$$

donde $\mathcal{J} = \{x \in D_1^2 \mid F(x) \in \gamma_2 \cap F(D_1^2)\}$ y

$$\#(T_x F(T_x D_1^2), T_x \gamma_2) = \begin{cases} 1, & \text{si la orientación de } T_x F(T_x D_1^2) \oplus T_x \gamma_2 \text{ es lo} \\ & \text{mismo que de } T_x \mathbb{S}^3 \\ -1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. a). Empezaremos mostrando que \mathcal{F} es una submersión propia. Para tal efecto consideremos la siguiente aplicación $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que está dada por

$$F(p_1, p_2, q_1, q_2) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \left(p_1 p_2 + q_1 q_2, p_2 q_1 - p_1 q_2, \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2) \right)$$

de donde es claro que, F es C^∞ y cuya diferencial esta dada por

$$DF(p, q) = \begin{pmatrix} p_2 & p_1 & q_2 & q_1 \\ -q_2 & q_1 & p_2 & -p_1 \\ p_1 & -p_2 & q_1 & -q_2 \end{pmatrix}.$$

Como $\mathcal{F} = F|_{\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3} \times \mathbb{S}_h^2 \subset \mathbb{R}^3$, donde \mathbb{S}_h^2 es una subvariedad regular entonces la fibrición de Hopf \mathcal{F} es C^∞ . Para $(p, q) \neq (0, 0)$ se tiene que $\text{rank} DF(p, q) = 3 \neq 0$, por lo tanto $D\mathcal{F}(p, q) = DF(p, q)|_{T_{(p,q)}\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3}$ es una aplicación sobreyectiva de $T_{(p,q)}\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$ a $T_{\mathcal{F}(p,q)}\mathbb{S}_h^2$, para cada $(p, q) \in \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$. Así \mathcal{F} es una submersión propia, ya que $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$ es compacto.

b). Considerando $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{S}_h^3$, tenemos que $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = h^2$. Luego para

$(p, q) \in \mathcal{F}^{-1}(\nu)$, se tiene

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 = \nu_1 \quad (3.21)$$

$$q_1 p_2 - q_2 p_1 = \nu_2 \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2) = \nu_3. \quad (3.23)$$

Por otro lado tenemos $H^{-1}(h) = \{(p, q) \in \mathbb{R}^4 \mid \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) = h\}$, de donde $(p, q) \in \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$, luego de esta última igualdad y de la ecuación (3.23) se tiene $p_1^2 + q_1^2 = h + \nu_3$. Además, de las ecuaciones (3.21) y (3.22) tenemos

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ q_1 & -p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Si $p_1^2 + q_1^2 > 0$, podemos invertir la matriz cuadrada en la ecuación anterior, luego tenemos

$$\begin{pmatrix} -p_1 & -q_1 \\ -q_1 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = -(p_1^2 + q_1^2) \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = -(h + \nu_3) \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente a

$$\begin{aligned} -\nu_1 p_1 + (h + \nu_3) p_2 - \nu_2 q_1 &= 0 \\ \nu_2 p_1 - \nu_1 q_1 + (h + \nu_3) q_2 &= 0. \end{aligned}$$

El siguiente argumento, muestra que Π^ν define un 2-plano: En efecto, sabemos que los covectores π_1 y π_2 son linealmente dependientes si y sólo si todas las submatrices de 2×2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} -\nu_1 & h + \nu_3 & -\nu_2 & 0 \\ \nu_2 & 0 & -\nu_1 & h + \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Son singulares. Por cálculo directo, esto se cumple cuando $\nu_1 = \nu_2 = 0$ y $\nu_3 = -h$. Por lo tanto π_1 y π_2 son linealmente independientes, en consecuencia Π^ν define un 2-plano en $\mathbb{R}_{p,q}$, que pasa por el origen, para $\nu \in \mathbb{S}_h^2 \setminus \{(0, 0, -h)\}$. Luego, se tiene que $\mathcal{F}^{-1}(\nu) \subset \Pi^\nu \cap \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$.

Para $\nu = (0, 0, -h)$, tenemos que $(p, q) \in \mathcal{F}^{-1}(0, 0, -h)$. De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} p_1 p_2 + q_1 q_2 &= 0 \\ q_1 p_2 - q_2 p_1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ q_1 & -p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $p_2 = q_2 = 0$ se tiene que $p_1^2 + q_1^2 = 0$ pero este caso no pertenece a $\mathcal{F}^{-1}(0, 0, -h)$.

Si $p_2 \neq 0$ ó $q_2 \neq 0$ tenemos que $p_1^2 + q_1^2 = 0$, esto se cumple si y sólo si $p_1 = q_1 = 0$.

Por lo tanto $\mathcal{F}(0, 0, -h) \subseteq \Pi^{(0,0,-h)} \cap \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$, así para cada $\nu \in \mathbb{S}_h^2$ la fibra $\mathcal{F}^{-1}(\nu)$ esta contenida en $\Pi^\nu \cap \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$. Además como \mathcal{F} es una submersión propia $\mathcal{F}^{-1}(\nu)$ es una

subvariedad diferenciable compacta 1-dimensional de $\mathbb{S}^3_{\sqrt{2h}}$ sin borde. Por lo tanto $\mathcal{F}^{-1}(\nu)$ es el círculo máximo $\Pi^\nu \cap \mathbb{S}^3_{\sqrt{2h}}$.

c). Sean $\nu, \nu' \in \mathbb{S}^2_h$, tales que $\nu \neq \nu'$. Entonces $\mathcal{F}^{-1}(\nu) \cap \mathcal{F}^{-1}(\nu') = \emptyset$ ya que \mathcal{F} es una submersión sobreyectiva. Luego, los correspondientes 2-planos Π^ν y $\Pi^{\nu'}$ definidos como en el inciso b) se intersecan solo en 0. Caso contrario, si $\Pi^\nu \cap \Pi^{\nu'} = \ell$, la recta ℓ corta a $\mathcal{F}^{-1}(\nu)$ y $\mathcal{F}^{-1}(\nu')$ lo cual es una contradicción ya que $\mathcal{F}^{-1}(\nu) \cap \mathcal{F}^{-1}(\nu') = \emptyset$. Por lo tanto, siempre es posible construir un 3-plano Π en \mathbb{R}^4 definido por:

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 q_1 + \lambda_4 q_2 = 0, \quad \text{con } \lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$$

que contenga al plano Π^ν , pero que $\Pi^{\nu'}$ no está contenida en Π . Si así fuera el caso es decir $\Pi^{\nu'} \subset \Pi$ y como $\Pi^\nu \cap \Pi^{\nu'} = \{0\}$ se tiene que $\Pi^\nu + \Pi^{\nu'} = \Pi$ lo cual es una contradicción. Por otro lado $\Pi^{\nu'} \cap \Pi = \ell^{\nu'}$ es una línea en \mathbb{R}^4 . Sean $\mathbb{S}^2_\nu = \Pi \cap \mathbb{S}^3$ la 2-esfera máxima en \mathbb{S}^3 y $\mathbb{S}^1_\nu = \Pi^\nu \cap \mathbb{S}^3$ el máximo círculo en \mathbb{S}^3 cortada por Π^ν . Denotemos por H^+ hemisferio superior cerrado de \mathbb{S}^2 con frontera \mathbb{S}^1_ν . Luego H^+ es difeomorfo a un 2-plano \overline{D}_1^2 cerrado, con frontera \mathbb{S}^1_ν . Esto se muestra proyectando los puntos de H^+ sobre el plano que contiene a \mathbb{S}^1_ν .

Como sabemos que Π^ν no está contenido en Π , el círculo máximo $\mathbb{S}^1_\nu = \Pi^\nu \cap \mathbb{S}^3$ no está contenido en \mathbb{S}^2 . Ya que la línea $\ell^{\nu'}$ interseca a la 2-esfera \mathbb{S}^2 en dos puntos antípodas p_+ y p_- así el círculo \mathbb{S}^1_ν interseca a \mathbb{S}^2 en p_+ y p_- . Por lo tanto $\text{link}(\mathcal{F}^{-1}(\nu), \mathcal{F}^{-1}(\nu')) = \pm 1$ como queríamos. \square

Proposición 3.12. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ una submersión sobreyectiva propia y M conexa, entonces $\pi : E \rightarrow M$ es un haz fibrado, localmente trivial.*

Ahora presentamos algunas conclusiones sobre la fibración de Hopf a partir de las propiedades que acabamos de probar. Por la proposición (3.11) sabemos que \mathcal{F} es una submersión sobreyectiva propia. Por lo tanto, la fibración de Hopf

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{S}^3_{\sqrt{2h}} &\rightarrow \mathbb{S}^2_h \\ (p, q) &\mapsto (\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q)) \end{aligned}$$

define un haz localmente trivial con fibra \mathbb{S}^1 . Pero, podemos construir explícitamente las trivializaciones locales de \mathcal{F} . Para $\nu \in \mathcal{U}_1 = \mathbb{S}^2_h / \{(0, 0, -h)\}$ tenemos $(p, q) \in \mathcal{F}^{-1}(\nu)$, entonces

$$-(p_1^2 + q_1^2) \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 & -q_1 \\ -q_1 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

y además como sabemos que $p_1^2 + q_1^2 = h + \nu_3$, se tiene

$$(h + \nu_3) \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ q_1 & -p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}.$$

De aquí tenemos

$$p_2 = \frac{\nu_1 p_1 + \nu_2 q_1}{h + \nu_3} \quad q_2 = \frac{\nu_1 q_1 - \nu_2 p_1}{h + \nu_3}. \quad (3.24)$$

Repitamos los argumentos anteriores para $\mathcal{U}_2 = \mathbb{S}_h^2 / \{(0, 0, h)\}$. Para $\nu \in \mathcal{U}_2$, tomemos $(p, q) \in \mathcal{F}^{-1}(\nu)$. Entonces $p_1^2 + q_1^2 = h - \nu_3 \geq 0$, ya que $(0, 0, h) \in \mathcal{F}(\nu)$ con $\nu_3 \neq h$, lo que a su vez implica

$$(h - \nu_3) \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & -q_2 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos

$$p_1 = \frac{\nu_1 p_2 - \nu_2 q_2}{h - \nu_3} \quad q_1 = \frac{\nu_1 q_2 + \nu_2 p_2}{h - \nu_3}. \quad (3.25)$$

Notemos que $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \mathbb{S}_h^2$. Luego definimos las trivializaciones como sigue a continuación

$$\begin{aligned} \tau_1 : \mathcal{U}_1 \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{U}_1) \\ (\nu_1, \nu_2, \nu_3, x, y) &\mapsto (p_1, p_2, q_1, q_2) \end{aligned}$$

$$\tau_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3, x, y) = \left(y\sqrt{h + \nu_3}, \frac{\nu_1 y + \nu_2 x}{\sqrt{h + \nu_3}}, x\sqrt{h + \nu_3}, \frac{\nu_1 x - \nu_2 y}{\sqrt{h + \nu_3}} \right).$$

τ_1 es una trivialización, pues $\mathcal{F} \circ \tau_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3, x, y) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. De manera análoga, definimos

$$\begin{aligned} \tau_2 : \mathcal{U}_2 \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{U}_2) \\ (\nu_1, \nu_2, \nu_3, x, y) &\mapsto (p_1, p_2, q_1, q_2) \end{aligned}$$

$$\tau_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3, x, y) = \left(\frac{\nu_1 y - \nu_2 x}{\sqrt{h - \nu_3}}, y\sqrt{h - \nu_3}, \frac{\nu_1 x + \nu_2 y}{\sqrt{h - \nu_3}}, x\sqrt{h - \nu_3} \right).$$

τ_2 también es una trivialización, ya que $\mathcal{F} \circ \tau_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3, x, y) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Proposición 3.13. *La fibración Hopf no es trivial, es decir, el haz $\mathcal{F} : \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \rightarrow \mathbb{S}_h^2$ no es difeomorfo al haz trivial $\mathbb{S}_h^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}_h^2$.*

Demostración. Supongamos que la fibración de Hopf es trivial, entonces $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \cong \mathbb{S}_h^2 \times \mathbb{S}^1$, así, preserva los espacios de cohomología entonces

$$H^k(\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3) \cong H^k(\mathbb{S}_h^2 \times \mathbb{S}^1) \cong H^k(\mathbb{S}_h^2) \oplus H^k(\mathbb{S}^1),$$

para $k = 1$, se tiene que $0 \cong \mathbb{R}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$ y $\mathbb{S}_h^2 \times \mathbb{S}^1$, no pueden ser difeomorfos. Así se tiene que la fibración de Hopf no es trivial. \square

Otra manera de probar esta proposición es que, se sigue del hecho de que el linking number es un invariante topológico y dos fibras distintas de la fibración de Hopf están enlazadas (o conectadas) con el linking number uno, mientras que las fibras del haz trivial no están enlazadas.

Recordemos que un haz principal sobre G ó un G -haz principal consiste de una haz fibrado suave $\pi : E \rightarrow M$ con fibra G y una acción derecha $\Psi : E \times G \rightarrow E$ libre tal que las trivializaciones locales

$$\phi_u : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$$

son G -equivariantes.

Una consecuencia de la definición de haz principal es que la acción Ψ preserva las fibras de $\pi : E \rightarrow M$ es decir para $y, x \in \pi^{-1}(x)$ y $x \in E$ existe $h \in G$ tal que $\Psi(y, h) = z$. De forma equivalente si $\pi : E \rightarrow M$ es una G -haz principal entonces el grupo G actúa transitivamente en cada fibra.

Lema 3.1. *Sea G un grupo de Lie que actúa libre y propiamente sobre una variedad suave M . Entonces M es una G -haz principal sobre el espacio de órbitas M/G con la aplicación $\pi : M \rightarrow M/G$ siendo la proyección de haz.*

Dada $H(p, q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$ el flujo del campo X_H induce una acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^4 , como $\Phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, dada por

$$\Phi\left(t, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}\right) = Fl_{X_H}^t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t & 0 \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t \\ \sin t & 0 & \cos t & 0 \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

La acción no es libre ya que $0 \in \mathbb{R}^4$ es un punto fijo de todos los difeomorfismo Φ_t . Luego sabemos que

$$\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) = h \right\}$$

es invariante bajo la acción Φ . Ya que $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 = H^{-1}(h)$, para $h > 0$. El flujo del oscilador armónico define una acción libre y propia $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \rightarrow \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$, por lo que el espacio de órbitas $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3/\mathbb{S}^1$ tiene estructura de variedad diferencial tal que

$$\rho : \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \rightarrow M_h$$

es una submersión sobreyectiva, además por el lema (3.1), como la acción de \mathbb{S}^1 en $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$ es libre y propia entonces $\rho : \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \rightarrow M_h$ es un \mathbb{S}^1 -haz principal.

Lema 3.2. $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3/\mathbb{S}^1$ es difeomorfo a \mathbb{S}_h^2 .

Demostración. Como $\mathcal{F} : \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \rightarrow \mathbb{S}_h^2$ es una submersión sobreyectiva que separa órbitas, por el Teorema (3.2) \mathbb{S}_h^2 es difeomorfo a $\mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3/\mathbb{S}^1$. \square

Como consecuencia de que la fibración de Hopf $\mathcal{F} : \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \rightarrow \mathbb{S}_h^2$ no es trivial tenemos las siguientes observaciones:

- (i) Las submersiones $\mathcal{F} : \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \rightarrow \mathbb{S}_h^2$ y $\rho : \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3 \rightarrow \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3/\mathbb{S}^1$ no admiten secciones globales.
- (ii) No existe una subvariedad regular $N \subset \mathbb{S}_{\sqrt{2h}}^3$ que sea difeomorfa a \mathbb{S}_h^2 .

CAPÍTULO 4

Aplicaciones: Teoría de perturbaciones para el oscilador armónico con resonancia

El siguiente capítulo está estructurado de la siguiente forma: en una primera sección dedicaremos a encontrar equilibrios relativos de campos G -invariantes, para ello aplicaremos la teoría de reducción que se estudió en el capítulo anterior. En la segunda sección estudiaremos, como determinar equilibrios relativos pero en este caso para sistemas Hamiltonianos. En la tercera sección introduciremos nociones básicas de método de promedios en variedades, donde mencionaremos algunas propiedades del operador promedio. En la cuarta sección estudiaremos perturbaciones de campos vectoriales con flujo periódico, donde citaremos unos de los resultados importantes como es el Teorema de Moser. En la quinta sección, con toda la herramienta desarrollada en las secciones anteriores, vamos a estudiar y determinar órbitas periódicas para sistemas Hamiltonianos perturbados. Finalmente en la última sección, citaremos algunos ejemplos de perturbaciones del oscilador armónico con dos grados de libertad con resonancias.

SECCIÓN 4.1

Equilibrios relativos para campos vectoriales G -invariantes

Sea M una variedad diferenciable, G un grupo de Lie compacto y $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción (izquierda) suave de G en M . Recordemos que $\mathcal{C}^\infty(M)^G$ y $\mathfrak{X}(M)^G$ denota el conjunto de funciones suaves y campos vectoriales G -invariantes, (ver definición, (3.1) y (3.2)) respectivamente.

Definición 4.1. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)^G$. Un equilibrio relativo del campo vectorial X , es una órbita del grupo, que es invariante bajo el flujo del campo vectorial X .

Es decir, sea $\text{Orb}(p)$ órbita por p y equilibrio relativo del campo $X \in \mathfrak{X}(M)^G$, entonces para todo $q \in \text{Orb}(p)$ tal que $Fl_X^t(q) \in \text{Orb}(p)$, para todo t .

Otra alternativa para estudiar equilibrios relativos es considerar la dinámica reducida en el espacio de órbitas.

Teorema 4.1. *Supongamos que M/G tiene estructura de variedad tal que la proyección al espacio de órbitas $\rho : M \rightarrow M/G$ es submersión. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)^G$ y $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ tales que X y \tilde{X} están ρ -relacionados. La órbita $\text{Orb}(p)$ del grupo G por $p \in M$ es un equilibrio relativo del campo X si y sólo si $[p]$ es un punto crítico de \tilde{X} .*

Demostración. Supongamos que $\text{Orb}(p)$ es un equilibrio relativo de X , con $p \in M$. Entonces

$$\rho(Fl_X^t(p)) = \rho(p).$$

Derivando con respecto a t en $t = 0$, tenemos

$$T_p\rho(X(p)) = 0.$$

Como X y \tilde{X} están ρ -relacionados, se sigue que $\tilde{X}[p] = 0$, es decir $[p]$ es un punto crítico de \tilde{X} .

Para el recíproco supongamos que $\rho(p)$ es un punto crítico de \tilde{X} . Entonces, para todo $q \in \text{Orb}(p)$, se tiene

$$T_q\rho(X(q)) = \tilde{X}(\rho(p)) = 0,$$

entonces $X(q) \in T_q\text{Orb}(p)$, para todo $q \in \text{Orb}(p)$, por lo tanto se tiene que $Fl_X^t(p) \in \text{Orb}(p)$. \square

Bajo las hipótesis del Teorema (4.1) y Teorema (3.2), encontrar equilibrios relativos de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)^G$ es equivalente a encontrar punto de equilibrio del campo reducido de X : Para un espacio reducido M_R de la acción de G en M , si $X \in \mathfrak{X}(M)^G$ tiene un equilibrio relativo en $\text{Orb}(p)$ con $p \in M$, entonces el campo vectorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M_R)$ reducido de X tiene un punto crítico en $\pi(p)$.

Acciones de \mathbb{S}^1 . Para el caso de acciones del grupo de \mathbb{S}^1 podemos utilizar la noción de equilibrios relativos para derivar un criterio para determinar la existencia de órbitas cerradas para campos vectoriales \mathbb{S}^1 -invariantes.

Teorema 4.2. *Sea X un campo vectorial \mathbb{S}^1 invariante y \tilde{X} su campo reducido. Si \tilde{X} tiene un punto crítico en $x \in M_R$ y X no se anula en $\pi^{-1}(x)$ entonces X tiene órbita periódica. Más aún, la órbita periódica es una reparametrización de la órbita de \mathbb{S}^1 -acción que es equilibrio relativo, de X .*

Demostración. Sean $\Phi : \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$ la acción y sea $X \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{S}^1}$ y $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M_R)$ el campo reducido de X . Si x es un punto crítico de \tilde{X} entonces por el Teorema (4.1) $\pi^{-1}(x)$ es una órbita de la acción que es el equilibrio relativo de X , es decir $\gamma(t) = Fl_X^t(p) \in \pi^{-1}(x)$ para $p \in \pi^{-1}(x)$, para todo t en el intervalo de definición de la curva. Como $X(p) \neq 0$, existe $\omega \in \mathbb{R}$ distinto de cero tal que

$$X(p) = \omega\Upsilon(p)$$

con $\Upsilon \in \mathfrak{X}(M)$ generador infinitesimal de la acción de \mathbb{S}^1 . Para todo $q \in \pi^{-1}(x)$, existe $\theta \in \mathbb{S}^1$ tal que $q = \Phi_\theta(p)$. Tomando en cuenta que $X \in \mathfrak{X}(M)^{\mathbb{S}^1}$, se tiene

$$\begin{aligned} X(q) &= X(\Phi_\theta(p)) = T_p\Phi_\theta(X(p)) \\ &= \omega T_p\Phi_\theta(\Upsilon(p)) = \omega\Upsilon(q), \end{aligned}$$

para todo $q \in \pi^{-1}(x)$. Como $\Phi_\theta(p) = Fl_\Upsilon^\theta$, de aquí se sigue que

$$\gamma(t) = \Phi_{\exp(\frac{2\pi t}{\omega})}(p).$$

Por tanto, $\gamma(t)$ es una órbita cerrada de X y una reparametrización de la \mathbb{S}^1 -órbita $\pi^{-1}(x)$. \square

SECCIÓN 4.2

Equilibrios relativos para sistemas Hamiltonianos

Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson. Supongamos que $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que el flujo de su campo Hamiltoniano X_H es periódico y define una acción de \mathbb{S}^1 libre y propia en $\Sigma_h = H^{-1}(h)$ con h un valor regular de H . Supongamos que $(M_R^h, \{\cdot, \cdot\}_{Red})$ es un espacio reducido para la \mathbb{S}^1 -acción en Σ_h con $\pi : \Sigma_h \rightarrow M_R^h$ submersión que separa órbitas.

Consideremos $\mathcal{A}_H = \{F \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid \{F, H\} = 0\}$ el álgebra de simetrías de H . Para cada $F \in \mathcal{A}_H$, por el Corolario (3.1) existe una función $f : M_R^h \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la relación

$$f \circ \pi = F \circ i,$$

donde $i : \Sigma_h \rightarrow M$ la inclusión. Además para todo $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M_R^h)$

$$\{f \circ \pi, g \circ \pi\} \circ i = \{f, g\}_{Red} \circ \pi.$$

Como X_F es tangente a Σ_h , el campo vectorial $X_f \in \mathfrak{X}(M_R^h)$ es el campo reducido a X_f .

Proposición 4.1. *Si $x \in M_R^h$ es un punto crítico de la función f , entonces $\pi^{-1}(x)$ es un equilibrio relativo de X_F .*

Demostración. Si $x \in M_R^h$ es un punto crítico de la función f entonces x es un punto de equilibrio de X_f . Por lo tanto, por el Teorema (4.2) $\pi^{-1}(x)$ es un equilibrio relativo de X_F . \square

Equilibrios relativos para integrales primeras del oscilador armónico. Sea $(\mathbb{R}_{p,q}^4, \{\cdot, \cdot\})$ variedad de Poisson con corchete canónico.

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) \quad (4.1)$$

Hamiltoniano del oscilador armónico en el caso resonante.

Fijemos $h > 0$ y consideremos la fibración de Hopf generalizada $\mathcal{F} : \Sigma_h \rightarrow M_R^h$, dada por

$$\mathcal{F}(p, q) := (\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q)).$$

donde ν_1, ν_2, ν_3 son las variables de Hopf generalizadas definidos por

$$\begin{aligned} \nu_1(p, q) &= \mathcal{R}e[(p_1 + \mathbf{i}\omega_1 q_1)^n (p_2 - \mathbf{i}\omega_2 q_2)^m], \\ \nu_2(p, q) &= \mathcal{I}m[(p_1 + \mathbf{i}\omega_1 q_1)^n (p_2 - \mathbf{i}\omega_2 q_2)^m], \\ \nu_3(p, q) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2). \end{aligned}$$

Recordemos que $M_R^h \subset \mathbb{R}^3$ es la variedad definida por

$$M_R^h := \begin{cases} \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{|z| \leq h\} & \text{si } n = m = 1 \\ \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{-h \leq z < h\} & \text{si } n > m = 1 \\ \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{-h < z \leq h\} & \text{si } m > n = 1 \\ \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{|z| < h\} & \text{si } m > n > 1. \end{cases}$$

con submersión sobreyectiva $\mathcal{F} : \Sigma_h \rightarrow M_R^h$.

Teorema 4.3. *Sea $F \in \mathcal{A}_H$ y \tilde{f}_h el Hamiltoniano reducido correspondiente a F ,*

$$F \circ i = \tilde{f}_h \circ \mathcal{F}$$

$i : \Sigma_h \rightarrow \mathbb{R}^4$, la inclusión. La \mathbb{S}^1 -órbita del oscilador armónico que pasa por un punto $(p, q) \in \Sigma_h$ es un equilibrio relativo para X_F si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla \tilde{f}(\mathcal{F}(p, q)) = \lambda \tilde{Q}(\mathcal{F}(p, q)) \tag{4.2}$$

Demostración. La condición (4.2) es equivalente a que $\mathcal{F}(p, q)$ es punto crítico. La \mathbb{S}^1 -órbita por (p, q) es un equilibrio relativo de X_F si y sólo si $\mathcal{F}(p, q)$ es punto crítico de $X_{\tilde{f}}$. Como

$$X_{\tilde{f}} := n\omega_1(\nabla \tilde{Q}_h \times \nabla f)|_{M_R^h}$$

Por lo tanto $X_{\tilde{f}} = 0$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que se verifica (4.2). □

Geoméricamente, la condición (4.2) implica que $\nabla \tilde{f}(\mathcal{F}(p, q))$ se anula ó es perpendicular a $M_R^h \subset \tilde{Q}^{-1}(0)$ en el punto $\mathcal{F}(p, q)$.

Nota 4.1. *Recordemos que para construir la fibración de Hopf generalizada $\mathcal{F} : \Sigma_h \rightarrow M_R^h$, se omiten para algunas frecuencias las \mathbb{S}^1 -órbita de la acción que corresponden a los modos normales. Sin embargo, éstas órbitas podrían ser equilibrios relativos de alguna $F \in \mathcal{A}_H$. En esta situación no podemos aplicar el Teorema y se debe verificar directamente si los modos normales son equilibrios relativos de algún $F \in \mathcal{A}_H$.*

Ejemplo 4.1. En el espacio fase $(\mathbb{R}_{p,q}^4, \{\cdot, \cdot\})$ con el corchete de Poisson canónico, consideremos el Hamiltoniano del oscilador armónico con resonancia 1 : 1

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2).$$

La función

$$F(p, q) = \frac{3}{4}(p_1^2 p_2^2 + q_1^2 q_2^2) + \frac{1}{8}(p_1 q_2 - q_2 p_1)^2,$$

es una integral primera de H , $\{H, F\} = 0$, con campo Hamiltoniano

$$\begin{aligned} X_F = & \left(-\frac{3}{4}q_2(p_1 p_2 + q_1 q_2) + \frac{1}{4}p_2(p_1 q_2 - q_1 p_2) \right) \frac{\partial}{\partial p_1} + \left(-\frac{3}{4}q_1(p_1 p_2 + q_1 q_2) - \frac{1}{4}p_1(p_1 q_2 - q_1 p_2) \right) \frac{\partial}{\partial p_2} \\ & + \left(\frac{3}{4}p_2(p_1 p_2 + q_1 q_2) + \frac{1}{4}q_2(p_1 q_2 - q_1 p_2) \right) \frac{\partial}{\partial q_1} + \left(\frac{3}{4}p_1(p_1 p_2 + q_1 q_2) - \frac{1}{4}q_1(p_1 q_2 - q_1 p_2) \right) \frac{\partial}{\partial q_2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el campo Hamiltoniano X_F es invariante con respecto a la \mathbb{S}^1 -acción inducida por X_H . Vamos a calcular los equilibrios relativos del campo X_F y determinar cuales de ellos corresponde a órbitas cerradas de dicho campo usando el espacio fase reducido M_R^h construido para este modelo en el capítulo (3). Notemos que el campo X_F es no-lineal, por lo que determinar órbitas cerradas calculando su flujo no es una tarea factible. Para cada $h > 0$, consideremos la fibrición de Hopf $\mathcal{F} : \Sigma_h \rightarrow M_R^h$, donde $\Sigma_h = H^{-1}(h)$ y $M_R^h = \tilde{Q}^{-1}(h)$ con $\tilde{Q}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Notemos que $\tilde{f}(x, y, z) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}y^2$ es la función reducida de F . Por el teorema (4.1) hallar los equilibrios relativos de X_F se reducen a encontrar los puntos críticos de $X_{\tilde{f}}$ por el teorema (4.3) esto es equivalente a encontrar los multiplicadores de Lagrange, para \tilde{f} en $\tilde{Q}^{-1}(0)$ es decir

$$\nabla \tilde{f}(x, y, z) = \lambda \nabla \tilde{Q}(x, y, z), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

En este caso, tenemos los siguientes puntos críticos:

- (i) Para $\lambda_1 = \frac{3}{8}$ se tiene que $(\pm h, 0, 0)$.
- (ii) Para $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ se tiene $(0, \pm h, 0)$.
- (iii) Para $\lambda_3 = 0$, tenemos $(0, 0, \pm h)$.

En seguida, determinaremos para cada punto explicitamente los equilibrios relativos de X_F , en el espacio fase y determinaremos aquellos equilibrios relativos que definen órbitas cerradas para X_F . Para $(\pm h, 0, 0)$ encontremos punto sobre la fibra $\mathcal{F}^{-1}(\pm h, 0, 0)$. La fibra $\mathcal{F}^{-1}(\pm h, 0, 0)$ consiste de los puntos (p_1, p_2, q_1, q_2) tales que

$$\begin{aligned} \nu_1 &= p_1 p_2 + q_1 q_2 = +h, \\ \nu_2 &= q_1 p_2 - q_2 p_1 = 0, \\ \nu_3 &= \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2) = 0, \\ &\frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) = h. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que el punto $(0, 0, \sqrt{h}, \sqrt{h}) \in \mathcal{F}^{-1}(h, 0, 0)$, mientras que $(0, 0, -\sqrt{h}, \sqrt{h}) \in \mathcal{F}^{-1}(-h, 0, 0)$.

- Evaluando el punto $(0, 0, \sqrt{h}, \sqrt{h}) \in \mathcal{F}^{-1}(h, 0, 0)$ en X_F , obtenemos

$$X_F(0, 0, \sqrt{h}, \sqrt{h}) = -\frac{3}{4}(\sqrt{h})^3 \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{3}{4}(\sqrt{h})^3 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Como $X_F(0, 0, \sqrt{h}, \sqrt{h}) \neq 0$, $\mathcal{F}^{-1}(h, 0, 0)$ es una órbita cerrada de X_F . Más aún, la curva integral de X_F que pasa por esa curva es una reparametrización de esa misma curva, como curva integral de X_H . Notemos que $X_F(m) = \omega X_H(m)$ con $\omega = \frac{3}{4}h$. Así se tiene la órbita periódica $\gamma_1(t)$ para X_F dada por

$$\gamma_1(t) = \text{Fl}_{X_{H_1}}^t(m) = \text{Fl}_{X_H}^{\frac{3}{4}ht}(m) = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \sin(\frac{3}{4}ht) \\ -\sqrt{h} \sin(\frac{3}{4}ht) \\ \sqrt{h} \cos(\frac{3}{4}ht) \\ \sqrt{h} \cos(\frac{3}{4}ht) \end{pmatrix}.$$

- Análogamente el punto $(0, 0, \sqrt{h}, -\sqrt{h})$, tenemos que

$$X_F(0, 0, \sqrt{h}, -\sqrt{h}) = \frac{3}{4}h X_H(0, 0, \sqrt{h}, -\sqrt{h}),$$

por lo que $\mathcal{F}^{-1}(-h, 0, 0)$ es una órbita cerrada de X_F . Entonces, la órbita periódica para X_F que pasa por $(0, 0, \sqrt{h}, -\sqrt{h})$ está determinada como

$$\gamma_2(t) = \text{Fl}_{X_{H_1}}^t(m) = \text{Fl}_{X_H}^{\frac{3}{4}ht}(m) = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \sin(\frac{3}{4}ht) \\ \sqrt{h} \sin(\frac{3}{4}ht) \\ \sqrt{h} \cos(\frac{3}{4}ht) \\ -\sqrt{h} \cos(\frac{3}{4}ht) \end{pmatrix}.$$

Procediendo de forma análoga con los puntos críticos $(0, \pm h, 0)$ de $X_{\tilde{f}}$ encontramos que las \mathbb{S}^1 -órbitas $\mathcal{F}^{-1}(0, \pm h, 0)$ también son órbitas cerradas del campo X_F , donde

$$\gamma_3(t) = \text{Fl}_{X_{H_1}}^t(m) = \text{Fl}_{X_H}^{-\frac{1}{4}ht}(m) = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \sin(\frac{1}{4}ht) \\ \sqrt{h} \cos(\frac{1}{4}ht) \\ \sqrt{h} \cos(\frac{1}{4}ht) \\ -\sqrt{h} \sin(\frac{1}{4}ht) \end{pmatrix}.$$

Es la curva integral de X_F que pasa por $(0, \sqrt{h}, \sqrt{h}, 0)$, mientras que

$$\gamma_4(t) = \text{Fl}_{X_{H_1}}^t(m) = \text{Fl}_{X_H}^{\frac{1}{4}ht}(m) = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \sin(\frac{1}{4}ht) \\ -\sqrt{h} \cos(\frac{1}{4}ht) \\ \sqrt{h} \cos(\frac{1}{4}ht) \\ -\sqrt{h} \sin(\frac{1}{4}ht) \end{pmatrix}.$$

Es la curva integral que pasa por $(0, -\sqrt{h}, \sqrt{h}, 0)$.

Para los puntos críticos $(0, 0, \pm h)$ de $X_{\tilde{f}}$ tenemos que $\mathcal{F}^{-1}(0, 0, h)$ es la órbita de X_H contenida en el plano $p_2 = q_2 = 0$. De forma análoga $\mathcal{F}^{-1}(0, 0, -h)$ es la órbita de X_H contenida en $p_1 = q_1 = 0$. Por lo tanto para $(0, 0, h)$ se tiene que $X_F(p_1, 0, q_1, 0) = 0$, entonces $\frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) = h$. Por otro lado para $(0, 0, -h)$ se tiene que $X_{H_1}(0, p_2, 0, q_2) = 0$, entonces $\frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) = h$.

En este caso, las fibras $\mathcal{F}^{-1}(0, 0, \pm h)$ son equilibrios relativos de X_F que consisten de puntos críticos de dicho campo.

SECCIÓN 4.3

Método de Promedios en Variedades

Supongamos que $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ actúa en una variedad M con generador infinitesimal $\Upsilon \in \mathfrak{X}(M)$, completo con flujo 2π -periódico, es decir

$$\text{Fl}_{\Upsilon}^{t+2\pi}(p) = \text{Fl}_{\Upsilon}^t(p), \quad \forall p \in M, t \in \mathbb{R},$$

y la acción de \mathbb{S}^1 en M se define por

$$\Phi(\theta, p) := \text{Fl}_{\Upsilon}^{\theta}(p).$$

Denotemos por $\mathcal{T}_s^k(M)$ como el espacio de tensores de tipo (k, s) . Por otro lado recordemos que Ξ es \mathbb{S}^1 -invariante si $(\text{Fl}_{\Upsilon}^t)^*\Xi = \Xi$, para todo t .

Definición 4.2. Dada una acción de \mathbb{S}^1 en M con generador infinitesimal Υ , definimos el operador promedio, como la aplicación $\langle \cdot \rangle : \mathcal{T}_s^k(M) \rightarrow \mathcal{T}_s^k(M)$ definida por

$$\langle \Xi \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_{\Upsilon}^t)^*\Xi dt, \quad (4.4)$$

para $\Xi \in \mathcal{T}_s^k(M)$.

Proposición 4.2. El operador de promedio tiene las siguientes propiedades; para $\Xi \in \mathcal{T}_s^k$ se cumple

- (i) $\langle \Xi \rangle$ es \mathbb{S}^1 -invariante, con respecto a la acción inducida por Υ .
- (ii) $\mathcal{L}_{\Upsilon} \langle \Xi \rangle = \langle \mathcal{L}_{\Upsilon} \Xi \rangle = 0$.
- (iii) Ξ es \mathbb{S}^1 -invariante si y sólo si $\langle \Xi \rangle = \Xi$.
- (iv) Ξ es \mathbb{S}^1 -invariante si y sólo si $\mathcal{L}_{\Upsilon} \Xi = 0$.
- (v) $\langle \langle \Xi \rangle \rangle = \langle \Xi \rangle$, operador de promedios, es un operador de proyección

$$\mathcal{T}_s^k(M) = \text{Im} \mathcal{A} \oplus \text{ker} \mathcal{A}$$

Demostración. (i) Sea Fl_Υ^t el flujo que induce una acción de \mathbb{S}^1 , lo que se quiere probar es $\text{Fl}_\Upsilon^\tau \langle \Xi \rangle = \langle \Xi \rangle$ para $\tau \in \mathbb{R}$.

$$\text{Fl}_\Upsilon^\tau \langle \Xi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^{t+\tau})^* \Xi dt = \frac{1}{2\pi} \int_\tau^{2\pi+\tau} (\text{Fl}_\Upsilon^s)^* \Xi ds = \langle \Xi \rangle.$$

En la segunda igualdad de encima, se hizo el siguiente cambio de variable, $s = t + \tau$, si $t = 0$ entonces $s = \tau$ y $t = 2\pi$, $s = 2\pi + \tau$.

(ii) Tenemos

$$\mathcal{L}_\Upsilon \langle \Xi \rangle = \mathcal{L}_\Upsilon \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* \Xi dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* \mathcal{L}_\Upsilon \Xi dt = \langle \mathcal{L}_\Upsilon \Xi \rangle, \quad (4.5)$$

Por el inciso (i) como $\langle \Xi \rangle$ es \mathbb{S}^1 -invariante, se tiene lo que se quería probar.

(iii) Supongamos que Ξ es \mathbb{S}^1 -invariante, entonces

$$\begin{aligned} \langle \Xi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* \Xi dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Xi dt \\ &= \Xi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \Xi. \end{aligned}$$

Por otra parte, supongamos que $\Xi = \langle \Xi \rangle$, de donde tenemos

$$(\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* \Xi = (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* \Xi dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^{t+\tau})^* \Xi dt,$$

sea $s = t + \tau$, entonces si $t = 0$, $s = \tau$ y $t = 2\pi$, $s = 2\pi + \tau$, así se tiene

$$(\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* \Xi = \frac{1}{2\pi} \int_\tau^{2\pi+\tau} (\text{Fl}_\Upsilon^s)^* \Xi ds = \langle \Xi \rangle = \Xi.$$

como se quería probar. □

SECCIÓN 4.4

Perturbaciones de campos vectoriales con flujo periódico

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial con flujo periódico de período $T > 0$ (constante), $\text{Fl}_X^{t+T}(p) = \text{Fl}_X^t(p)$ para todo $p \in M$, $t \in \mathbb{R}$. Consideremos el campo vectorial perturbado

$$A_\varepsilon = X + \varepsilon Y, \quad Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (4.6)$$

que depende suavemente del parámetro $\varepsilon \in [0, \delta]$, $\delta > 0$ fijo.

Dado que para $\varepsilon = 0$ el campo vectorial A_ε (4.6) es el campo X que tiene flujo periódico, surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿Para $\varepsilon \neq 0$, el campo perturbado A_ε posee algunas órbitas periódicas?. En general, una perturbación del campo X suele "destruir"

las trayectorias periódicas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2. Sea $M = \mathbb{R}_{p,q}^2$ y consideremos los campos vectoriales

$$X = -q \frac{\partial}{\partial p} + p \frac{\partial}{\partial q}, \quad Y = p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial q}.$$

Notemos que el campo vectorial X tiene flujo periódico de periodo 2π . Tomemos el campo vectorial perturbado

$$A_\varepsilon = X + \varepsilon Y = (-q + \varepsilon p) \frac{\partial}{\partial p} + (p + \varepsilon q) \frac{\partial}{\partial q}, \quad (4.7)$$

con $\varepsilon \in [0, 1]$. Las curvas integrales del campo A_ε (4.7) están dadas por

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \xi \cos(t)e^{\varepsilon t} - \eta \sin(t)e^{\varepsilon t} \\ \xi \sin(t)e^{\varepsilon t} + \eta \cos(t)e^{\varepsilon t} \end{pmatrix}, \quad \gamma(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

De donde se concluye que A_ε no tiene trayectorias cerradas para $\varepsilon \neq 0$, ver figura (4.1).

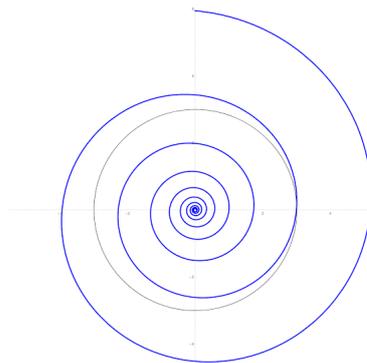


Figura 4.1: Trayectoria de campo perturbado A_ε .

De esta forma, es interesante encontrar bajo que condiciones una perturbación A_ε del campo X "preserva" algunas órbitas periódicas, es decir, bajo que condiciones podemos asegurar que para $\varepsilon \neq 0$ (posiblemente pequeño) el campo A_ε tiene órbitas periódicas. Un resultado conocido, que enunciaremos a continuación fue derivado por J. Moser en 1970, [11].

Antes de continuar, necesitamos introducir la noción de puntos críticos no-degenerados para campos vectoriales. Para ello necesitamos el concepto de linealización de un campo vectorial. Supongamos que $p \in M$ es un punto crítico de X , $X(p) = 0$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$T_p(Fl_X^t) : T_p M \rightarrow T_{Fl_X^t(p)} M.$$

La *linealización* de X en p es la aplicación lineal de $T_p M$

$$X'_p : T_p M \rightarrow T_p M$$

definida por

$$X'_p(v) = \frac{d}{dt} [T_p(Fl_X^t)(v)] \Big|_{t=0}, \quad (4.8)$$

para todo $v \in T_pM$.

Definición 4.3. *Un punto crítico p de X se dice ser no-degenerado si X'_p es no-singular. En caso contrario, se dice ser degenerado.*

Definición 4.4. *Supongamos, que M/S^1 tiene estructura de variedad diferencial con $\rho : M \rightarrow M/S^1$ suave. Sea $Y \in \mathfrak{X}(M)^{S^1}$, un equilibrio relativo $Orb(p)$ de Y se dice ser no-degenerado si $\rho(p)$ es un punto de equilibrio no-degenerado de $\tilde{Y} = T\rho \circ Y$.*

Teorema 4.4 (Moser 1970). *Consideremos el campo vectorial*

$$A_\varepsilon = X + \varepsilon Y, \quad \varepsilon \in [0, 1] \quad (4.9)$$

una perturbación del campo vectorial X con flujo T -periódico sin puntos críticos. Si el promedio de Y $\langle Y \rangle$ tiene un equilibrio relativo $Orb(p)$ no-degenerado, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $\varepsilon \in [0, \delta]$ el campo A_ε tiene una órbita periódica con período $\tau(\varepsilon) = T + \mathcal{O}(\varepsilon)$ contenida en una vecindad invariante de $Orb(p)$.

Demostración. Como X no tiene puntos críticos, $\rho : M \rightarrow M/S^1$ es un S^1 -haz principal, con la S^1 -acción inducida por el flujo de X . Sea $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M/S^1)$ el campo vectorial reducido de $\langle Y \rangle$. Sea $N \subset M$ un abierto trivializante de $Orb(p)$. Entonces existe $\delta > 0$ y una familia $\tau_\varepsilon : N \rightarrow M$ de transformaciones \mathcal{C}^∞ definida para $\varepsilon \in [0, \delta_1]$ tales que

(i) $\tau_0 = id_N$

(ii) τ_ε es un difeomorfismo sobre su imagen y

$$\tilde{A}_\varepsilon = \tau_\varepsilon^* A_\varepsilon = X + \varepsilon \langle Y \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.10)$$

La existencia de la familia de transformaciones $\tau_\varepsilon : N \rightarrow M$ es consecuencia de la teoría de formas normales para perturbaciones de campos S^1 -invariantes que se puede consultar en [5] por (4.10), suficientemente probar que \tilde{A}_ε tiene órbitas periódicas para ε suficientemente pequeño.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que N es un abierto de una carta coordenada (N, Ψ) de M centrada en p tal que el generador infinitesimal de la S^1 -acción $\Upsilon = \frac{T}{2\pi}X$ en coordenadas locales es $\frac{\partial}{\partial x_n}$ y $Y = \sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\lambda_i \in \mathcal{C}^\infty$.

Sea $\sigma_0 = \{q \in N \mid x_n(q) = 0\}$ una sección transversal a las órbitas de Υ .

En coordenadas locales, las curvas integrales del campo perturbado \tilde{A}_ε (4.10) están definidas por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varepsilon \langle \lambda_i \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= \omega + \varepsilon \langle \lambda_n \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sea $a = \Psi(q)$ con $q \in \sigma_0$ y denotemos $x_{t,a}$ la solución de (4.11) tal que $x_\varepsilon(\theta, a) = a$ con $\varepsilon \in [0, \delta_1]$. Notemos que X_ε depende de ε de manera suave y

$$X_\varepsilon(t, a) = a + \omega t e_n + \varepsilon \int_0^t \langle \lambda \rangle (a + \omega s e_n) ds + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.12)$$

con $\langle \lambda \rangle = (\langle \lambda_1 \rangle, \dots, \langle \lambda_n \rangle)$ y $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Para cada $\varepsilon \in [0, \delta_1]$ y $a = \Psi(q)$, sea $\tau = \tau(\varepsilon, a) = 2\pi$. Entonces

$$2\pi = \omega \tau + \varepsilon \int_0^\tau \langle \lambda_n \rangle (a + \omega s e_n) ds + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.13)$$

Por el Teorema de la función implícita, existe un abierto V de p en σ_0 y $\delta_2 > 0$ y una función suave tal que $\tau : [0, \delta_2] \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisface (4.13). Más aún $\tau(\varepsilon, a) = T + \varepsilon T_1(a) + \mathcal{O}(\varepsilon)$; con $T_1 \in \mathcal{C}^\infty(V)$, sustituyendo en (4.12), tenemos

$$x_j(\tau(\varepsilon, a)) = a_j + \varepsilon T \langle \lambda_j \rangle (a) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Encontrar órbitas periódicas de \tilde{A}_ε es equivalente a encontrar una pareja solución (a, ε) tal que

$$T \langle \lambda_i \rangle (a) + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1. \quad (4.14)$$

Notemos que en coordenadas locales el campo vectorial reducido $\tilde{Y} = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \lambda_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i}$. Como $\Psi(p) = 0$, $\tilde{Y}(0) = 0$ es un punto de equilibrio no-degenerado. Por el Teorema de la función implícita, existen $\delta \in [0, \delta_2)$, W abierto de p en σ_0 y una función $a : [0, \delta] \rightarrow W$ tal que

$$T \langle \lambda_i \rangle (a(\varepsilon)) + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon \in [0, \delta].$$

□

SECCIÓN 4.5

órbitas periódicas para sistemas Hamiltonianos perturbados

Dada una variedad de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$, consideremos el Hamiltoniano perturbado

$$\mathbf{H}_\varepsilon = H_0 + \varepsilon H_1, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1, \quad H_0, H_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

En teoría de perturbaciones, el Hamiltoniano no perturbado suele poseer ciertas propiedades relevantes como la integrabilidad ó simetría. Aquí, vamos a suponer que existe una acción Hamiltoniana de \mathbb{S}^1 en $(M, \{\cdot, \cdot\})$ y que el campo Hamiltoniano no perturbado X_{H_0} satisface alguna de las siguientes condiciones:

- (i) El flujo de X_{H_0} es periódico e induce la acción de \mathbb{S}^1 .
- (ii) El campo X_{H_0} es \mathbb{S}^1 -invariante y posee una órbita periódica que es un equilibrio

relativo.

En ambas situaciones, una pregunta interesante es determinar si el Hamiltoniano $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon H_1$ posee alguna órbita periódica para ε suficientemente pequeño. Es decir, se busca determinar si la órbita (u órbitas) periódicas de H_0 que corresponden a equilibrios relativos "sobreviven" a la perturbación del Hamiltoniano H_1 . Este fenómeno se conoce como persistencia de equilibrio relativo bajo perturbaciones. En el artículo de Montaldi [14] y en las referencias que citan en ese trabajo, ó en el trabajo de Moser [1970] por citar sólo algunos trabajos, aparecen resultados en los que se garantizan que algunas órbitas periódicas que provienen de equilibrios relativos se preservan bajo perturbaciones.

Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ variedad de Poisson. Supongamos que para una función $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ el campo Hamiltoniano X_H tiene flujo periódico con período constante $T > 0$. El flujo de X_H induce una acción Hamiltoniana de \mathbb{S}^1 en M con generador infinitesimal

$$\Upsilon = \frac{1}{\omega} X_H = X_J$$

donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y $J = \frac{1}{\omega} H$.

Para $F \in \mathcal{C}^\infty(M)$, consideremos su promedio $\langle F \rangle$ con respecto a la \mathbb{S}^1 -acción inducida por el campo X_H . Como el período es constante, tenemos

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F dt.$$

Lo mismo se tiene para cualquier campos tensorial en M .

Proposición 4.3. *Para cada $F \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se tiene que*

$$\langle X_F \rangle = X_{\langle F \rangle}.$$

Demostración. Como la acción es canónica, es decir $(\text{Fl}_\Upsilon^t)^* \{f_1, f_2\} = \{(\text{Fl}_\Upsilon^t)^* f_1, (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* f_2\}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $(\text{Fl}_\Upsilon^t)^*(X_F) = X_{(\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F}$, para $t \in \mathbb{R}$. Calculando el promedio de X_F , tenemos

$$\begin{aligned} \langle X_F \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* X_F dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_{(\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F} dt \\ &= X_{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* X_F dt} = X_{\langle F \rangle}. \end{aligned}$$

como se quería probar. □

Tomemos $F \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Si $p \in M$ es un punto crítico de F es decir $d_p F = 0$, entonces p es punto crítico de X_F , $X_F(p) = 0$. Un punto crítico de F se dice ser no-degenerado si el Hessiano de F en p , es una forma bilineal simétrica no-singular. Recordemos que el Hessiano $\text{Hess}_{F,p}$ se define por

$$\text{Hess}_{F,p}(v, w) = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y F(p),$$

donde, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $X(p) = v$, $Y(p) = w$. Si p es un punto crítico no-degenerado de F entonces p es un punto crítico no-degenerado de X_F .

Consideremos ahora una perturbación $H_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ de la función $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ cuyo campo Hamiltoniano X_H tiene flujo T-periódico. Es decir, la función

$$\mathbf{H}_\varepsilon(p) := H(p) + \varepsilon H_1(p), \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Notemos que la función $\mathbf{H}_\varepsilon(p)$ depende suavemente del parámetro ε . Para cada $\varepsilon \in [0, 1]$, el campo Hamiltoniano de la función $\mathbf{H}_\varepsilon(p)$ es de la forma

$$X_{\mathbf{H}_\varepsilon(p)} = X_{H+\varepsilon H_1} = X_H + \varepsilon X_{H_1}.$$

Es decir, el campo Hamiltoniano $X_{\mathbf{H}_\varepsilon(p)}$ resulta ser una perturbación del campo Hamiltoniano con flujo periódico.

Teorema 4.5. *Sea $\tilde{H}_1 \in \mathcal{C}^\infty(M/S^1)$ la función reducida de $\langle H_1 \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M)^{S^1}$. Si \tilde{H}_1 tiene puntos críticos no-degenerados entonces el campo Hamiltoniano perturbado $X_H + \varepsilon X_{H_1}$ tiene órbitas periódicas para ε suficientemente pequeño.*

Demostración. Si $x \in M/S^1$ es un punto crítico no-degenerado de \tilde{H}_1 entonces x es punto crítico no-degenerado de $X_{\tilde{H}_1}$. Por lo tanto, $\rho^{-1}(x)$ es un equilibrio relativo no-degenerado de $X_{\langle H_1 \rangle} = \langle X_{H_1} \rangle$. Por el Teorema de Moser, existe $\delta > 0$ tal que para $\varepsilon \in [0, \delta]$ el campo $X_H + \varepsilon X_{H_1}$ tiene una órbita periódica en una vecindad de la órbita $\rho^{-1}(x)$. \square

SECCIÓN 4.6

Perturbaciones del oscilador armónico con resonancias

El propósito de esta sección es aplicar el teorema (4.5) y el espacio reducido construido vía la aplicación de Hilbert en el Capítulo (3) a perturbaciones del oscilador armónico con resonancias para determinar la existencia de órbitas periódicas.

Consideremos el espacio fase $\mathbb{R}_{p,q}^4$ con el corchete de Poisson canónico. Sea

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) \tag{4.15}$$

el Hamiltoniano del oscilador armónico con resonancias, es decir, las frecuencias ω_1, ω_2 satisfacen la relación $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$, con $n, m \in \mathbb{Z}^+$, m.c.d(m, n) = 1. Consideremos una perturbación del oscilador armónico (4.15)

$$\mathbf{H}_\varepsilon(p, q) = H(p, q) + \varepsilon H_1(p, q), \tag{4.16}$$

con $H_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ y $\varepsilon \in [0, 1]$.

El punto es determinar condiciones bajo las cuales podemos garantizar que el campo perturbado $X_H + \varepsilon X_{H_1}$ posea órbitas periódicas para $\varepsilon \neq 0$ y suficientemente pequeño. Por el teorema de Moser (4.4), es suficiente con que el campo vectorial $X_{\langle H_1 \rangle}$ tenga equilibrios relativos no-degenerados. Los equilibrios relativos de $X_{\langle H_1 \rangle}$, si los hay deben estar contenidos en algún conjunto de nivel de H . Como la función $\langle H_1 \rangle$ es integral primera de H , el campo vectorial $X_{\langle H_1 \rangle}$ es tangente a los conjuntos de nivel regulares de H . Por el que podemos restringir la búsqueda de equilibrios relativos a conjuntos a conjuntos de nivel regulares del oscilador armónico. Con el propósito de hacer uso de la teoría de reducción del oscilador armónico discutido en el capítulo (3), para cada $h > 0$, es conveniente restringir el campo vectorial a la variedad Σ_h , dependiendo de las resonancias entre las frecuencias.

Sea $h > 0$ y consideremos la fibración de Hopf generalizada $\mathcal{F} : \Sigma_h \rightarrow M_R$ definida por

$$\mathcal{F}(p, q) = (\nu_1(p, q), \nu_2(p, q), \nu_3(p, q)), \quad (4.17)$$

donde ν_1, ν_2, ν_3 son las variables de Hopf generalizadas definidos por

$$\begin{aligned} \nu_1(p, q) &= \operatorname{Re}[(p_1 + \mathbf{i}\omega_1 q_1)^n (p_2 - \mathbf{i}\omega_2 q_2)^m], \\ \nu_2(p, q) &= \operatorname{Im}[(p_1 + \mathbf{i}\omega_1 q_1)^n (p_2 - \mathbf{i}\omega_2 q_2)^m], \\ \nu_3(p, q) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2). \end{aligned}$$

Recordemos que $M_R^h \subset \mathbb{R}^3$ es la variedad definida por

$$M_R^h := \begin{cases} \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{|z| \leq h\} & \text{si } n = m = 1 \\ \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{-h \leq z < h\} & \text{si } n > m = 1 \\ \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{-h < z \leq h\} & \text{si } m > n = 1 \\ \tilde{Q}_h^{-1}(0) \cap \{|z| < h\} & \text{si } m > n > 1. \end{cases}$$

con submersión sobreyectiva $\mathcal{F} : \Sigma_h \rightarrow M_R^h$.

Como $\Sigma_h \subset \mathbb{R}_{p,q}^4$ es una subvariedad regular, cada función $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ define una función suave en Σ_h por i^*F , donde $i : \Sigma_h \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la aplicación inclusión. Más aún, como la inclusión es una inmersión, toda función suave en Σ_h es de ésta forma. Como $\langle H_1 \rangle$ es \mathbb{S}^1 -invariante, existe una función $\tilde{H}_1 : M_R^h \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle H_1 \rangle \circ i = \tilde{H}_1 \circ \mathcal{F}.$$

Teorema 4.6. *Supongamos que $(p, q) \in \Sigma_h$ satisface las siguientes condiciones*

(i) *Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla \tilde{H}_1(\mathcal{F}(p, q)) = \lambda \nabla \tilde{Q}(\mathcal{F}(p, q)). \quad (4.18)$$

(ii) La forma bilineal $B : T_{\mathcal{F}(p,q)}M_R^h \times T_{\mathcal{F}(p,q)}M_R^h \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$B(v, w) := \langle v, Aw \rangle \quad (4.19)$$

con $A = \text{Hess}_{\mathcal{F}(p,q)}(\tilde{H}_1) - \lambda \text{Hess}_{\mathcal{F}(p,q)}(\tilde{Q})$ es no-degenerado. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in [0, \delta]$ el campo vectorial $X_H + \varepsilon H_1$ tiene una órbita periódica en una vecindad de la \mathbb{S}^1 -órbita que pasa por (p, q) .

Demostración. las condiciones (i) y (ii) implican que el punto $\mathcal{F}(p, q)$ es un punto crítico no-degenerado de \tilde{H}_1 . Por el Teorema (4.5) se tiene el resultado deseado. \square

Ejemplo 4.3. Consideremos una perturbación del oscilador armónico con resonancia 1 : 1.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\varepsilon(p, q) &= H(p, q) + \varepsilon H_1(p, q) \\ &= \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \varepsilon H_1(p, q), \quad \text{con } \varepsilon \in [0, 1]. \end{aligned}$$

vamos a aplicar el Teorema (4.6) para determinar si el campo Hamiltoniano perturbado $X_{\mathbf{H}_\varepsilon}$ posee órbitas periódicas para las siguientes perturbaciones

(a) $H_1(p, q) = q_1^2 q_2^2$.

(b) $H_2(p, q) = q_1^4$

Recordemos que el flujo del oscilador armónico $\Upsilon = X_H$ viene dada por

$$\text{Fl}_\Upsilon^t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cos t - q_1 \text{sen } t \\ p_2 \cos t - q_2 \text{sen } t \\ p_1 \text{sen } t + q_1 \cos t \\ p_2 \text{sen } t + q_2 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Para $H_1(p, q) = q_1^2 q_2^2$, calculemos su promedio

$$\begin{aligned} \langle H_1 \rangle(p, q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(\text{Fl}_\Upsilon^t(p, q)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(p_1 \text{sen } t + q_1 \cos t)^2 (p_2 \text{sen } t + q_2 \cos t)^2] dt \\ &= \frac{3}{8}(p_1^2 p_2^2 + q_1^2 q_2^2) + \frac{1}{8}(p_1^2 q_2^2 + 4p_1 q_1 p_2 q_2 + q_1^2 p_2^2) \\ &= \frac{3}{8}(p_1 p_2 + q_1 q_2)^2 + \frac{1}{8}(p_1 q_2 - q_1 p_2)^2. \end{aligned}$$

Como $\langle H_1 \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M)^{\mathbb{S}^1} = \mathcal{A}_H$, se puede expresar en variables de Hopf $\langle H_1 \rangle = \frac{3}{8}\nu_1^2 + \frac{1}{8}\nu_2^2$.

Para cada $h > 0$, consideremos la fibración de Hopf $\mathcal{F} : \Sigma_h \rightarrow M_R^h$, donde $\Sigma_h = H^{-1}(h)$ y $M_R^h = \tilde{Q}^{-1}(h)$ con $\tilde{Q}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Como \mathcal{F} separa órbitas, M_R^h es un espacio reducido para la acción de \mathbb{S}^1 en Σ_h . Por lo tanto, la función reducida

viene dada por $\tilde{H}_1(x, y, z) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}y^2$. Por el teorema (4.6), debemos hallar los puntos críticos de \tilde{H}_1 restringido a M_R^h calculando los multiplicadores de Lagrange

$$\nabla \tilde{H}_1(x, y, z) = \lambda \nabla \tilde{Q}(x, y, z)$$

Recordemos que en el ejemplo (4.1) obtuvimos justo los puntos críticos de \tilde{H}_1 y los multiplicadores de Lagrange, los cuales son:

- Para $\lambda_1 = \frac{3}{8}$, se tiene $(\pm h, 0, 0)$,
- Para $\lambda_2 = \frac{1}{8}$, se tiene $(0, \pm h, 0)$,
- Para $\lambda_3 = 0$, se tiene $(0, 0, \pm h)$.

Ahora verificaremos si estos puntos críticos son no-degenerados calculando la matriz A del inciso (4.6) del teorema (4.6) para verificar si la forma bilineal (4.19) es no-degenerada.

- Para $\lambda_1 = \frac{3}{8}$, y $(\pm h, 0, 0)$ tenemos

$$A = \text{Hess}_{(\pm h, 0, 0)}(\tilde{H}_1) - \frac{3}{8} \text{Hess}_{(\pm h, 0, 0)}(\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

Como $T_{(\pm h, 0, 0)}M_R^h = \text{Span}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, la forma bilineal B es no-degenerada y que el menor A_{11} de la matriz A es no-singular.

- Para $\lambda_2 = \frac{1}{8}$, y $(0, \pm h, 0)$, obtenemos

$$A = \text{Hess}_{(0, \pm h, 0)}(\tilde{H}_1) - \frac{1}{8} \text{Hess}_{(0, \pm h, 0)}(\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

De forma análoga al caso anterior, B es no-degenerada porque el menor A_{22} de A es no-singular y $T_{(0, \pm h, 0)}M_R^h = \text{Span}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$.

- Finalmente, para $\lambda_3 = 0$ y $(0, 0, \pm h)$ tenemos la matriz

$$A = \text{Hess}_{(0, 0, \pm h)}(\tilde{H}_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la misma forma se concluye que, B es no-degenerado ya que una submatriz A_{33} es no singular.

Por lo tanto, por el Teorema (4.6) en el campo perturbado X_{H_ε} , existe 6 órbitas periódicas, para cada $h > 0$.

(b) Para $H_1(p, q) = q_1^4$, calculemos su promedio.

$$\begin{aligned}\langle H_1 \rangle(p, q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(\text{Fl}_T^t(p, q)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (p_1 \sin t + q_1 \cos t)^4 dt = \frac{3}{8}(p_1^2 + q_1^2)^2.\end{aligned}$$

Como $\langle H_1 \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$, la expresamos en variables de Hopf entonces $\langle H_1 \rangle = \frac{3}{8}(\nu_3 + \nu_4)^2$.

En este caso, $\tilde{H}_1 = \frac{3}{8}(z + h)^2$, es la función reducida de $\langle H_1 \rangle$. Calculando los multiplicadores de Lagrange, es decir

$$\nabla \tilde{H}_1(x, y, z) = \lambda \nabla \tilde{Q}(x, y, z)$$

tenemos

$$(0, 0, 2(z + h)) = \lambda(2x, 2y, 2z)$$

de donde se tiene

- Para $\lambda_1 = 0$, tenemos $(0, 0, -h)$.
- Para $\lambda_2 = 1$, tenemos $(0, 0, h)$.

Por lo tanto estos son los puntos críticos de \tilde{H}_1

- Para $\lambda_1 = 0$ y $(0, 0, -h)$

$$A = \text{Hess}_{(0,0,-h)}(\tilde{H}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $T_{(0,0,-h)}M_R^h = \text{Span}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la forma bilineal B es degenerada ya que la submatriz A_{11} (menor de A) es singular. En este caso, el Teorema (4.6) no se puede aplicar para determinar que el equilibrio relativo que genera el punto $(0, 0, -h)$ tiene órbitas periódicas de $X_{\mathbf{H}_\varepsilon}$ en una vecindad de él.

- Para $\lambda_2 = 1$, y $(0, 0, h)$

$$A = \text{Hess}_{(0,0,h)}(\tilde{H}_1) - \frac{1}{8}\text{Hess}_{(0,0,h)}(\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Contrario al caso anterior, B es no-degenerada, ya que A_{11} es no-singular. Según el Teorema (4.6) para el punto $(0, 0, h)$ que existe una órbita periódica para $X_{\mathbf{H}_\varepsilon}$, para cada $h > 0$.

Ejemplo 4.4 (Resonancia 1:2). Consideremos ahora una perturbación del oscilador ar-

mónico con resonancia 1 : 2

$$\begin{aligned} H_\varepsilon &= H_0 + \varepsilon H_1 \\ &= \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + 4q_2^2) + \varepsilon(q_1^2 q_2^2). \end{aligned}$$

Aquí, $H_1(p, q) = q_1^2 q_2^2$ es la función de perturbación. En este caso el flujo de $\Upsilon = X_H$ está dado por

$$\text{Fl}_\Upsilon^t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cos t - q_1 \sin t \\ p_2 \cos 2t - 2q_2 \sin 2t \\ p_1 \sin t + q_1 \cos t \\ \frac{p_2^2}{2} \sin 2t + q_2 \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Calculando el promedio de H_1 , tenemos

$$\begin{aligned} \langle H_1 \rangle(p, q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\text{Fl}_\Upsilon^t(p, q)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[(p_1 \sin t + q_1 \cos t)^2 \left(\frac{p_2^2}{2} \sin 2t + q_2 \cos 2t \right)^2 \right] dt \\ &= \frac{1}{16} (p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + 4q_2^2). \end{aligned}$$

Como $\langle H_1 \rangle \in C^\infty(M)^{\mathbb{S}^1}$, expresamos $\langle H_1 \rangle$ en variables de Hopf generalizadas $\langle H_1 \rangle = \frac{1}{16}(\nu_3 + \nu_4)(\nu_4 - \nu_3)$.

Tenemos que la función reducida $\tilde{H}_1(x, y, z) = \frac{1}{16}(h^2 - z^2)$ en el espacio reducido $M_R^h = \tilde{Q}^{-1}(h)$ para cada $h > 0$, donde $\tilde{Q}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 + z^2 h - h^2 z - h^3$. Por el teorema (4.6), Calculemos los puntos críticos de \tilde{H}_1 restringida a \tilde{Q} , calculando los multiplicadores de Lagrange

$$\nabla \tilde{H}_1(x, y, z) = \lambda \nabla \tilde{Q}(x, y, z)$$

en este caso, tenemos

$$(0, 0, -\frac{1}{8}z) = \lambda(2x, 2y, 3z^2 + 2hz - h^2) \quad (4.20)$$

de donde, para $\lambda = -\frac{1}{32h}$, se tiene que $(0, 0, h)$ es un punto crítico de \tilde{H}_1 . Calculando la matriz A de inciso (4.6) del teorema (4.6)

$$A = \text{Hess}_{(0,0,h)}(\tilde{H}_1) + \frac{1}{32h} \text{Hess}_{(0,0,h)}(\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{16h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Notemos que A es una matriz no-degenerada esto automáticamente implica que la forma bilineal B (4.19) es no-degenerada y por tanto el punto $(0, 0, h)$ es punto de equilibrio relativo. Por lo tanto, según el Teorema (4.6) podemos garantizar que existe una órbita periódica para X_{H_ε} , para cada $h > 0$ y ε suficientemente pequeño.

APÉNDICE A

Grupos de Lie y Acciones de Grupos

En este Apéndice, presentaremos algunas nociones básicas sobre los grupos de Lie. Se pueden obtener exposiciones alternativas y detalles adicionales de Abraham y Marsden [1978]. En particular, para este trabajo solo necesitaremos nociones elementales sobre la teoría general y el conocimiento de algunos de los grupos más básicos, como los grupos de rotación y euclidianos.

SECCIÓN A.1

Grupos de Lie

El estudio de los grupos de Lie fue iniciado a fines del siglo XIX por el matemático noruego Sophus Lie. Inspirado por la forma en que el algebrista francés Évariste Galois había inventado la teoría de grupos y la utilizó para analizar ecuaciones polinómicas, Lie estaba interesado en utilizar simetrías, expresadas en forma de acciones de grupo, para simplificar problemas en ecuaciones diferenciales parciales y geometría. Para ello empezaremos definiendo que es un grupo de Lie.

SECCIÓN A.2

Definiciones y propiedades

En esta sección citaremos algunas definiciones, propiedades y ejemplos de grupos de Lie.

Definición A.1. *Un grupo de Lie es un conjunto $G \neq \emptyset$ que tiene estructura de grupo y estructura de variedad diferencial que son compatibles entre sí, es decir las siguientes funciones*

$$\mu : G \times G \rightarrow G \quad \mu(g, h) = gh$$

y la inversa

$$I : G \times G \rightarrow G \quad I(g) = g^{-1}$$

son diferenciables.

Un grupo de Lie es, en particular, un grupo topológico (un espacio topológico con una estructura de grupo tal que las aplicaciones de multiplicación e inversión son continuo).

Las aplicaciones $L_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto gh$ y $R_h : G \rightarrow G$, $g \mapsto gh$, se denominan aplicaciones de traslación a izquierda y a derecha. Notemos que para $g_1, g_2 \in G$ y $h_1, h_2 \in G$ es inmediato verificar las siguientes igualdades

$$L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2} \quad \text{y} \quad R_{h_1} \circ R_{h_2} = R_{h_2 h_1}$$

Si $e \in G$ denota el elemento identidad del grupo G , entonces $L_e = Id = R_e$, y por lo tanto tenemos

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}} \quad \text{y} \quad (R_h)^{-1} = R_{h^{-1}}.$$

Así, L_g y R_h son difeomorfismos para cada g y h . Además se tiene que

$$L_g \circ R_h = R_h \circ L_g,$$

es decir, las traslaciones a izquierda y a derecha conmutan. Por otro lado por la regla de la cadena

$$T_{gh} L_{g^{-1}} \circ T_h L_g = T_h (L_{g^{-1}} \circ L_g) = Id.$$

Por lo tanto, $T_h T_g$ es invertible. Asimismo $T_g R_h$ es un isomorfismo.

Ahora mostraremos que la aplicación de inversión $I : G \rightarrow G$; $g \mapsto g^{-1}$ es diferenciable. En efecto, resolviendo

$$\mu(g, h) = gh = e$$

para h como una función de g . La derivada parcial con respecto a h es $T_h L_g$, que es un isomorfismo. Por lo tanto, la solución g^{-1} es una función diferenciable de g por el teorema de la función implícita. Notemos que los grupos de Lie pueden ser de dimensión finita supondremos que G es de dimensión finita.

Ejemplo A.1. *Cualquier espacio vectorial V es un grupo de Lie con las operaciones de grupo*

$$\mu : V \times V \rightarrow V, \quad \mu(x, y) = x + y \quad \text{y} \quad I : V \rightarrow V, \quad I(x) = -x.$$

La identidad es simplemente el vector cero. A este grupo de Lie lo llamamos grupo vectorial.

Ejemplo A.2. *El grupo de isomorfismos lineales de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n es un grupo de Lie de dimensión n^2 , llamado grupo lineal general y denotado por $GL(n, \mathbb{R})$. Es una variedad diferenciable, ya que es un subconjunto abierto del espacio vectorial $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de todas las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n . En efecto, $GL(n, \mathbb{R})$ es la imagen inversa de $\mathbb{R} - 0$ bajo la aplicación continuo $A \rightarrow \det A$ de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a \mathbb{R} . Para $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$, con la operación es composición*

$$\mu : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

dada por

$$(A.B) \mapsto A \circ B$$

y la aplicación inversión es

$$I : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

definido por

$$I(A) = A^{-1}.$$

La multiplicación de grupos es la restricción de la aplicación bilineal continuo.

$$(A, B) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow A \circ B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

Por tanto, μ es C^∞ , por lo que $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

Definición A.2. Una aplicación $F : H \rightarrow G$ entre dos grupos de Lie H y G es un homomorfismo de grupo de Lie si es una aplicación C^∞ y un homomorfismo de grupo.

La condición de homomorfismo de grupo significa que para todo $h, x \in H$

$$F(hx) = F(h)F(x).$$

Ejemplo A.3. La aplicación inclusión $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un homomorfismo de grupo de Lie.

Ejemplo A.4. Considerando a \mathbb{R} como un grupo de Lie bajo suma, y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ como un grupo de Lie bajo multiplicación, la aplicación

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\} \tag{A.1}$$

dado por

$$\exp(t) = e^t \tag{A.2}$$

es diferenciable y es un homomorfismo de grupo de Lie porque $e^{s+t} = e^s e^t$. La imagen de \exp es el subgrupo abierto \mathbb{R}^+ que consta de números reales positivos, y $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es un isomorfismo de grupo de Lie con $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ inverso.

SECCIÓN A.3

Acciones de Grupos de Lie

En esta sección desarrollamos algunos hechos básicos sobre las acciones de los grupos de Lie en las variedades. Ya que una de nuestras principales aplicaciones es la descripción de sistemas hamiltonianos con grupos de simetría. Comenzamos con la definición de la acción de un grupo de Lie G sobre una variedad M .

Definición A.3. Sea M una variedad y G un grupo de Lie. Una acción (izquierda) de un grupo de Lie G en M es una aplicación diferenciable $\Phi : G \times M \rightarrow M$ tal que:

i) $\Phi(e, x) = x$ para todo $x \in M$; y

ii) $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in M$.

Una acción (derecha) es una aplicación $\Psi : M \times G \rightarrow M$ que satisface $\Psi(x, e) = x$ y $\Psi(\Psi(x, g), h) = \Psi(x, gh)$. A veces usamos la notación $g \cdot x = \Phi(g, x)$ para acciones (izquierdas), y $x \cdot g = \Psi(x, g)$ para acciones (derechas).

Para todo $g \in G$ sea $\Phi_g : M \rightarrow M$ dado por $x \mapsto \Phi(g, x)$. Entonces (i) se convierte en $\Phi_e = id_M$, mientras que (ii) se convierte en $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$. La definición (A.3) ahora se puede reformular diciendo que la aplicación $g \mapsto \Phi_g$ es un homomorfismo de G en $Diff(M)$, el grupo de difeomorfismos de M . En el caso especial pero importante donde M es un espacio vectorial V y cada $\Phi_g : V \rightarrow V$ es una transformación lineal continua, la acción Ψ de G sobre V se denomina representación de G sobre V .

Ejemplo A.5. $SO(3)$ actúa sobre \mathbb{R}^3 por $(A, x) \rightarrow Ax$. Esta acción deja las dos esferas \mathbb{S}^2 invariante, por lo que la misma fórmula define una acción de $SO(3)$ en \mathbb{S}^2 .

Ejemplo A.6. Sea X un campo vectorial completo sobre M , es decir, para el cual el flujo F_t de X está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces $F_t : M \rightarrow M$ define una acción de \mathbb{R} sobre M .

Definición A.4. Si Φ es una acción de G sobre M y $x \in M$, la órbita de x está definida por

$$Orb(x) := \{\Phi_g(x) \mid g \in G\} \subset M.$$

Definición A.5. Para $x \in M$, la grupo de isotropía (o estabilizador o simetría) de Φ en x está dado por

$$G_x := \{g \in G \mid \Phi_g(x) = x\} \subset G.$$

Una acción se dice ser:

- (i). *transitiva* si sólo hay una órbita o, equivalentemente, si para todo $x, y \in M$ existe un $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$;
- (ii). *efectivo* (o fiel) si $\Psi_g = id_M$ implica $g = e$; es decir, $g \rightarrow \Phi_g$ es uno a uno; y
- (iii). *libre* si no tiene puntos fijos, es decir, $\Phi_g(x) = x$ implica $g = e$ o, de manera equivalente, si para cada $x \in M$, $g \rightarrow \Phi_g(x)$ es uno a uno. Nótese que una acción es libre si y sólo si $G_x = e$, para todo $x \in M$ y que toda acción libre es fiel.

Espacio cociente: Una acción de Φ de G en una variedad M define una relación de equivalencia en M por la relación de pertenencia en la misma órbita; explícitamente, para $x, y \in M$, escribimos $x \sim y$ si existe un $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$, es decir, si $y \in Orb(x)$. Diremos que M/G es el conjunto de estas clases de equivalencia, es decir, el conjunto de órbitas, a veces es denominado espacio de órbitas. Sea

$$\begin{aligned} \pi : M &\rightarrow M/G \\ x &\mapsto Orb(x), \end{aligned}$$

M/G es un espacio topológico con la topología cociente es decir $U \subset M/G$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ está abierto en M . Para garantizar que el espacio de órbitas tenga estructura de variedad diferencial, se requiere que la acción sea propia.

Definición A.6. Una acción $\Phi : G \times M \rightarrow M$ es llamada propia si la aplicación

$$\tilde{\Phi} : G \times M \rightarrow M \times M$$

definido por

$$\tilde{\Phi}(g, x) = (x, \Phi(g, x)),$$

es propia.

En dimensiones finitas esto significa que si $K \subset M \times M$ es compacto, entonces $\tilde{\Phi}(K)$ es compacto. La siguiente proposición da una condición suficiente útil para que M/G sea una variedad diferencial.

Proposición A.1. Si $\Phi : G \times M \rightarrow M$ es una acción propia y libre, entonces M/G es una variedad diferencial y $\pi : M \rightarrow M/G$ es una submersión.

Proposición A.2. Sea $\pi : E \rightarrow M$ diferenciable. Si E es compacto, entonces π es propia.

Demostración. Sea $K \subset M$ compacto, entonces K es cerrado, luego como π es continua $\pi^{-1}(K) \subset E$ es cerrado, como E es compacto entonces $\pi^{-1}(K)$ es compacto. Por lo tanto π es propia. \square

Definición A.7. Una función $f : M \rightarrow N$ se dice ser G -equivariante si para todo $g \in G$ y $x \in M$ se cumple

$$f \circ \Phi_g(x) = \Psi_g \circ f(x).$$

Es decir una función equivariante manda la órbita sobre x en la órbita de $f(x)$.

Definición A.8. Sean $\pi_1 : E_1 \rightarrow M_1$ y $\pi_2 : E_2 \rightarrow M_2$ G -haces principales. Un morfismo de G -haces principales es un par $(F : E_1 \rightarrow E_2, f : M_1 \rightarrow M_2)$ tal que $F : E_1 \rightarrow E_2$ es G -equivariante y el diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

Proposición A.3. Un haz principal sobre G , $\pi : E \rightarrow M$ es trivial si y sólo si haz admite una sección global C^∞ .

Demostración. \Rightarrow] Supongamos que $\pi : E \rightarrow M$ es trivial, entonces se tiene que es isomorfo a $\rho : M \times G \rightarrow M$. Consideremos

$$\begin{aligned} i : M &\rightarrow M \times G \\ m &\mapsto i(m) := (m, e) \end{aligned}$$

luego definimos $s : M \rightarrow E$ como $s = F^{-1} \circ i$, donde es claro que s es suave. Además

$$\begin{aligned}\pi \circ s(m) &= \pi(s(m)) \\ &= \pi(F^{-1}(i(m))) \\ &= \pi(F^{-1}(m, e)) = \pi(m).\end{aligned}$$

\Leftarrow] Supongamos que el G -haz $\pi : E \rightarrow M$ admite una sección global, $s : M \rightarrow E$ suave, tal que $\pi \circ s = id_M$. Entonces

$$\begin{aligned}M \times G &\rightarrow E \\ (m, g) &\mapsto \psi_g(s(m)) = \psi(s(m), g)\end{aligned}$$

es biyección. □

Proposición A.4. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz fibrado. El haz admite una sección global $s : M \rightarrow E$ suave si y sólo si existe subvariedad regular $S \subset E$ que es difeomorfa a M .*

Demostración. \Rightarrow] Sea $s : M \rightarrow E$ suave, tal que $\pi \circ s = id_M$ entonces s es inyectiva (ya que π es inversa por la izquierda) así tenemos $s : M \rightarrow E$ es inmersión $s(M) \subset E$ subvariedad inmersa. □

Proposición A.5. *Existe en $s(M)$ una estructura de variedad diferencial tal que $s : M \rightarrow s(M)$ es un difeomorfismo.*

Generador infinitesimal. A continuación pasamos a la descripción infinitesimal de una acción, que será un concepto crucial para la mecánica.

Definición A.9. *Suppose $\Phi : G \times M \rightarrow M$ es una acción. Para $\xi \in \mathfrak{g}$, la aplicación $\Phi^\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, definido por $\Phi^\xi(t, x) = \Phi(\exp t\xi, x)$, es una acción \mathbb{R} sobre M . En otras palabras, $\Phi_{\exp t\xi} : M \rightarrow M$ es un flujo sobre M . El campo vectorial correspondiente sobre M , dado por*

$$\xi_M(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\exp t\xi)(x),$$

es llamado el generador infinitesimal de la acción correspondiente a ξ .

Bibliografía

- [1] M. Avendaño. *Geometría y dinámicas del oscilador armónico 2-dimensional*, Vol. 4, No. 1. Septiembre, 2019, pp. 1-18.
- [2] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*, second edition, 1987.
- [3] Avendaño-Camacho M. Vallejo JA and Vorobiev Yu (2017) *A perturbation theory approach to the stability of the Pais-Uhlenbeck oscillator*, Journal of Mathematical Physics, 58; 093501.
- [4] Avendaño-Camacho M. Vallejo JA and Vorobiev Yu (2013) *A simple global representation for a second order normal forms of Hamiltonian systems relative to periodic flows*, Journal of Physics A Mathematical Theoretical, 46; 395201.
- [5] Avendaño Camacho, M., Vorobiev, Y.M. *Homological equations for tensor fields and periodic averaging*. Russ. J. Math. Phys. 18, 243 (2011).
- [6] Avendaño-Camacho M. Torres-Manotas A, Vallejos JA (2021) *Closed stable orbits in a strongly coupled resonant Wilberforce pendulum*, Journal of Vibrations and Control. Vol 28, (7): 892-901.
- [7] R. H. Cushman and L. M. Bates. *Global Aspects of Classical integrable Systems*, Birkhäuser, 2015.
- [8] R. H. Cushman and D. L. Rod, *Reduction of the semisimple 1:1 resonance*, *Differential Geonetry of Curvas and Surfaces* , Physica 6D, (1985), 105-112.
- [9] R. Churchill, M. Kummer and D. L. Rod, *On averaging, Reduction, and Symmetry in Hamiltonian Systems*, *Journal of Differential Equations*, 49, 359-414, (1983).
- [10] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Third ed. (2002).

- [11] Moser J. *Regularization of kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Communications on pure and applied mathematics 23: 609-636.
- [12] H. Kocak, F. Bisshopp, T. Banchoff and D. Laidlaw *Topology and Mechanics with Computer Graphics, Advances in Applied Mathematics 7*, 282-308, (1986).
- [13] K. Meyer, *The Geometry of Harmonics Oscillators*, Amer. Math. Month, 97, 457-465, (1990).
- [14] James Montaldi, *Persistence and Stability of Relative Equilibria*, Institut Non-Linéaire de Nice, 1361 route des Lucioles, 06560 Valbonne, France. 11(1997), 449-466.
- [15] J. E. Marsden and Tudor S. Ratiu *Introduction to Mechanics and Symmetry A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems* -Springer, (2010).
- [16] Peter W. Michor. *Topics in differential geometry*, (1949).
- [17] J. P. Ortega Tudor S. Ratiu *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction* , Springer, (2004).
- [18] Vladimir I. Arnold, Valery V. Kozlov. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer, 3th ed. 26.
- [19] L. W. Tu. *An Introduction to Manifolds*, Springer, (2011).