UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Posgrado en Matemáticas

"Formulaciones Equivalentes de la Propiedad de Radon-Nikodým de un Espacio de Banach"

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Maestra en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Marysol Navarro Burruel

Director de Tesis: Dra. Martha Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, 29 de agosto de 2008

Dr. Fernando Luque Vázquez
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Adolfo Minjarez Sosa
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Carlos Bosch Giral
Instituto Tecnológico Autónomo de México, Cd. de México.

Dr. Martha Guzmán Partida
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Faltan palabras para expresar mi gratitud a aquél que ha sido la

razón de mi existir y la razón también de esta tesis. Definitivamente

dedico esta tesis a mi Señor

Jesucristo

Una vez más lo hemos hecho juntos y estoy segura que es el comienzo de algo maravilloso a tu lado.

Te amo mi Dios.

Agradecimientos:

A mi papá Vicente Miranda Torres (mi xochito) y mi mamá Ana María Burruel Borquéz. Los quiero muchísimo, son un regalo de Dios para mi vida, se que no me pudo dar mejores padres que ustedes, siempre me han apoyado, han sido participes de mis desesperos, de mis tristezas y por supuesto en todos los momentos bellos y hermosos que me ha regalado mi Dios. Los amo.

A mi hermano Carlos Paul Navarro Burruel. Muchas gracias hermano, estoy feliz de que aparte de ser mi hermano seas mi gran amigo, siempre me haces reír y alientas mi vida para salir adelante, lo que Dios ha hecho en ti me hace seguir firme y confiada, creyendo más y más cada día.

A mi directora de Tesis Dra. Martha Guzmán Partida. Muchas gracias por guiarme en todo el trayecto de la realización de esta tesis, ha invertido mucho tiempo y esfuerzo en esto y para mí eso es muy valioso, pero no sólo en la tesis a sido de bendición para mí vida, sino durante todo el transcurso de mi vida como estudiante en la licenciatura y por supuesto maestría, y sobre todo muchas gracias por permitirme conocerla más como persona, he aprendido a quererla.

Muchas gracias a mis sinodales, Dr. Fernando Luque Vázquez, Dr. Adolfo Minjarez, y Dr. Carlos Bosh por sus observaciones y sugerencias, así como el tiempo dedicado al revisar esta tesis.

A mis amigos, los cuales estoy segura se dan por aludidos. Cada uno de mis logros los disfruto con ustedes pues forman parte de ellos, gracias por amarme y aceptarme tal cual soy.

Por último quiero agradecer a mi profesora Guadalupe Ávila Godoy, pues si hoy puedo culminar un escalón más de mi vida es gracias a que me ayudó a formar mis bases como profesionista y por supuesto como persona. Sabe que la quiero muchísimo.

Índice general

Introducción **1**

1. Medidas Vectoriales **3**

1.1. Conceptos Preliminares 3

1.2. Integración con Respecto a una Medida Vectorial 17

2. Integración **19**

2.1. Funciones Medibles 19

2.2. Integral de Bochner 27

3. La Propiedad de Radon-Nikodým y el Teorema de Representación de Riesz **53**

3.1. El Teorema de Radon-Nikodým y operadores Riesz representables en $L^1(\mu)$ 54

3.2. Aplicaciones 69

4. La Propiedad de Radon-Nikodým y el Teorema de Fatou **85**

4.1. Funciones Armónicas y Representación de Poisson: el caso escalar . 85

4.2. Comportamiento Frontera de Integrales de Poisson 95

4.3. Funciones Armónicas Vectoriales 104

4.4. Equivalencia del Teorema de Radon-Nikodým y el Teorema de Fatou 107

Apéndice **125**

A.1. Operadores Lineales Compactos 125

A.2. El Lema de Agotamiento 128

A.3. Producto Tensorial 130

Introducción

El estudio de las medidas vectoriales, esto es, funciones de conjunto finitamente aditivas, definidas en álgebras y con valores en un espacio de Banach X, dio lugar a los trabajos pioneros sobre geometría, bases e isomorfismos de espacios de Banach, así como también al estudio de la compacidad débil y débil* en dichos espacios.

J.A. Clarkson en 1936 y N. Dunford y A.P. Morse en el mismo año, crearon las nociones de convexidad uniforme y de base acotadamente completa de un espacio de Banach X, respectivamente, con el objeto de demostrar que toda función absolutamente continua definida en el espacio euclideano y con valores en X es la integral de su derivada. Rápidamente, estos resultados fueron reconocidos como auténticos teoremas de Radon-Nikodým para la integral de Bochner. De hecho, fueron los primeros teoremas de tipo Radon-Nikodým para medidas vectoriales en espacios de medida abstractos.

Como veremos en este trabajo, la integral de Bochner es una generali-zación directa de la integral de Lebesgue en el contexto de espacios de Banach. Sin embargo, para esta integral no es posible establecer de manera general el teorema de Radon-Nikodým para representar a cierto tipo de medidas vectoriales como integrales de Bochner indefinidas. La clase de espacios de Banach para los cuales se verifica este teorema se conoce justamente como la familia de espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým (PRN).

Existen muy diversas caracterizaciones de esta propiedad para un espacio de Banach X, las cuales varían desde contextos puramente algebraicos hasta contextos definitivamente geométricos, como por ejemplo, el que un operador en $\mathcal{L}\left(L^1[0,1], X\right)$ se factorice a través de l^1 y el que todo subconjunto cerra-do, acotado y no vacío de X contenga un punto extremo de su envolvente convexa cerrada. Cada una de estas caracterizaciones implica un desarrollo teórico y un trabajo matemático arduo, imposible de compilar de manera autocontenida en un trabajo de tesis como el presente. Por esta razón, solamente presentamos un par de formulaciones equivalentes a la propiedad de Radon-Nikodým de un espacio de Banach. La primera formulación establece la equivalencia con el teorema de Representación de Riesz para operadores en $\mathcal{L}\left(L^1[0,1], X\right)$, mientras que la segunda formulación establece la equiva-lencia con la propiedad de Fatou para funciones armónicas definidas en el disco unitario y con valores en X. Esta última formulación podría parecer inesperada, ya que la propiedad de Fatou asegura la existencia de límites radiales ctp. para dicho tipo de funciones. Así que cuando el espacio de Banach considerado es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el clásico teorema de Fatou para funciones armónicas es equivalente al clásico teorema de Radon-Nikodým para medidas escalares.

La herramienta matemática que se emplea para desarrollar este trabajo es básicamente la teoría de la medida escalar y algunos resultados estándares de Análisis

Funcional. Se encuentra organizado en cuatro capítulos. En el primero de ellos se presenta la noción de medida vectorial y algunos de los conceptos relacionados con ésta. En el segundo capítulo, se desarrolla el concepto de integral de Bochner y los principales resultados sobre ella. En el tercer capítulo se define la propiedad de Radon-Nikodým y se establece su equivalencia con el teorema de Representación de Riesz. Asimismo, se presenta una aplicación que nos permite calcular de manera explícita el dual del espacio $L^p(\mu, X)$ cuando X^* tiene la PRN. En el cuarto capítulo se establece la equivalencia entre la PRN y la propiedad de Fatou para funciones armónicas vectoriales definidas en el disco unitario. Con el objeto de que la lectura de esta tesis sea básicamente autocontenida, se incluyen tres apéndices que complementan alguna información que aparece en el cuerpo de este trabajo.

También, es necesario agregar que no sólo se ha tratado de ser exhaustivo en las pruebas de los resultados que aquí se presentan, sino de igual manera, se ha tratado de proporcionar una buena cantidad de ejemplos que ilustren las diferentes nociones y situaciones planteadas en cada uno de los capítulos.

Finalmente, destacamos el hecho de que la PRN ha sido y continúa siendo en la actualidad objeto de estudio de muchos analistas funcionales. Para el lector interesado en profundizar en la lectura y aprendizaje sobre medidas vectoriales y la Propiedad de Radon-Nikodým, lo remitimos a la excelente monografía "Vector Measures", de J. Diestel y J.J. Uhl (ver[A.3]).

Capítulo 1

Medidas Vectoriales

En este capítulo se introducen las nociones de variación, semivariación, aditividad finita y aditividad numerable. En todo lo que sigue, Ω será un conjunto no vacío, $\mathcal{F}$ será un álgebra de subconjuntos de Ω y X será un espacio de Banach.

1.1. Conceptos Preliminares

Definición 1.1. *Diremos que una función $F : \mathcal{F} \to X$ es una medida vectorial finitamente aditiva, o simplemente una medida vectorial si para cada par E_1, E_2 de elementos ajenos de $\mathcal{F}$ se tiene que*

$$F(E_1 \cup E_2) = F(E_1) + F(E_2).$$

Si además, cada vez que $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n),$$

(donde la convergencia en el lado derecho se entiende que es en el sentido de la norma en X) diremos que F es una medida vectorial aditiva numerable o numerablemente aditiva.

Ejemplo 1.2. *Una medida vectorial finitamente aditiva.*

Sea $T : L^{\infty}([0,1]) \to X$ un operador lineal continuo. Para cada subconjunto Lebesgue medible E de $[0,1]$ definamos

$$F(E) = T(\chi_E).$$

Puesto que $\chi_{E_1 \cup E_2} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2}$ si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, se sigue que

$$\begin{aligned} F(E_1 \cup E_2) &= T(\chi_{E_1 \cup E_2}) \\ &= T(\chi_{E_1} + \chi_{E_2}) \\ &= T(\chi_{E_1}) + T(\chi_{E_2}) \\ &= F(E_1) + F(E_2); \end{aligned}$$

nótese que no se requiere que T sea continua para probar que F es finitamente aditiva. Sin embargo F no necesariamente es numerablemente aditiva y para probar esta afirmación utilizaremos el siguiente resultado clásico, cuya demostración puede consultarse en [A.3], pág. 296.

Teorema 1.3. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva σ-finita y $ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ el espacio de funciones de conjunto definidas en Σ que son finitamente aditivas, acotadas y se anulan en conjuntos de μ-medida cero. La norma de un elemento $\lambda \in ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ es su variación total, $|\lambda|$.*

Entonces $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))^*$ es isométricamente isomorfo al espacio $ba(\Omega, \Sigma^*, \mu)$, donde Σ^* es la completación de Σ.

El isomorfismo $\lambda \longmapsto \Lambda_\lambda$ está determinado por la identidad

$$\Lambda_\lambda(f) = \int_\Omega f(w) d\lambda(w), \quad f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$$

y $\|\Lambda_\lambda\| = |\lambda|$.

Para demostrar que F no necesariamente es numerablemente aditiva basta considerar $\Omega = [0,1]$, Σ la σ-álgebra de Lebesgue medibles de Ω y μ la medida de Lebesgue. Sea $T : L^\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$ un operador lineal continuo re-presentado por un elemento $\lambda \in ba\left([0,1], \Sigma, \mu\right)$ que no es aditivo numerable. Defínase $F : \Sigma \to \mathbb{R}$ como

$$F(E) = T(\chi_E),$$

Como λ no es aditiva numerable existe una sucesión $(E_j)_{j=1}^\infty \subset \Sigma$, con $E_j \cap E_l = \emptyset$ si $j \neq l$ y tal que

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) \neq \sum_{j=1}^\infty \lambda(E_j).$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) &= T(\chi_{\cup_{j=1}^\infty E_j}) = \int \chi_{\cup_{j=1}^\infty E_j} d\lambda \\ &= \lambda\left(\cup_{j=1}^\infty E_j\right) \neq \sum_{j=1}^\infty \lambda(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int \chi_{E_j} d\lambda = \sum_{j=1}^\infty T\left(\chi_{E_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^\infty F(E_j), \end{aligned}$$

es decir,

$$F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \neq \sum_{j=1}^{\infty} F(E_j).$$

■

Ejemplo 1.4. *Otra medida vectorial finitamente aditiva.*

Si $\mathcal{F}$ es la familia de Lebesgue medibles de $[0,1]$, defínase ahora $\mu : \mathcal{F} \to L^{\infty}[0,1]$ por

$$\mu(E) = \chi_E.$$

Si $E_1, E_2 \in \Sigma$ y $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned}\mu(E_1 \cup E_2) = \chi_{E_1 \cup E_2} &= \chi_{E_1} + \chi_{E_2} \\ &= \mu(E_1) + \mu(E_2).\end{aligned}$$

Sin embargo, si ahora tomamos $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ sucesión en $\mathcal{F}$ tal que $E_j \cap E_k = \emptyset$ si $j \neq k$ y si $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ vemos que para que se verifique la igualdad

$$\chi_E = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} \quad \text{en} \quad L^{\infty}[0,1], \tag{1.1}$$

requerimos que la serie converja uniformemente en el complemento de un conjunto de medida cero. Observemos que para $x \in E$ la convergencia es sólo puntual (y no uniforme en E) pues en tal caso

$$\chi_E(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} \chi_{E_j}(x),$$

y $N = N(x)$, con $\chi_E(x) = 1$ y $\sum_{j=1}^{m} \chi_{E_j}(x) = 1$ si $m \geq N$, donde E_N es el único conjunto tal que $x \in E_N$.

Cuando $x \in [0,1] - E$ vemos que

$$\chi_E(x) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j}(x) \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N},$$

así que

$$\chi_E(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}(x) \quad \text{en} \quad [0,1] - E,$$

y aquí la convergencia es uniforme.

De lo anterior, se sigue que si deseamos convergencia en $L^\infty[0,1]$ de (1.1) requerimos entonces que E sea un conjunto con medida de Lebesgue cero, lo cual implica que cada E_j debe tener medida de Lebesgue cero. Como la condición (1.1) es

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j),$$

basta entonces considerar una familia $(E_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ con $\mu(E_j) > 0$ para al menos un j y así vemos que μ no es numerablemente aditiva.

■

Ejemplo 1.5. *Una medida vectorial numerablemente aditiva.*

Sea $T : L^1[0,1] \to X$ un operador lineal continuo. Defínase $F(E) = T(\chi_E)$ para cada $E \subset [0,1]$ Lebesgue medible. Rápidamente se puede observar que F es finitamente aditiva y de hecho, es numerablemente aditiva, para ello observemos primero que para todo $E \subset [0,1]$ Lebesgue medible

$$\begin{aligned}\|F(E)\|_X &= \|T(\chi_E)\|_X \\ &\leq \|T\| \|\chi_E\|_1 \\ &= \|T\|\lambda(E),\end{aligned}$$

donde λ es la medida de Lebesgue.

Así, si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es tal que $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left\| F\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{n=1}^{m} F(E_n) \right\|_X &= \left\| F\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - F\left(\cup_{n=1}^{m} E_n\right) \right\|_X \\ &= \left\| F\left(\cup_{n=m+1}^{\infty} E_n\right) \right\|_X \\ &\leq \|T\| \lambda\left(\cup_{n=m+1}^{\infty} E_n\right),\end{aligned}$$

donde las primeras dos igualdades se tienen por aditividad finita de F. Entonces tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| F\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{n=1}^{m} F(E_n) \right\|_X \leq \|T\| \lim_{m\to\infty} \lambda\left(\cup_{n=m+1}^{\infty} E_n\right) = 0,$$

debido a que λ es una medida. Así concluimos que

$$F(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n).$$

■

Enseguida daremos la siguiente definición:

Definición 1.6. *Sea $F : \mathcal{F} \to X$ una medida vectorial. La* **variación de** *F es la función $|F| : \mathcal{F} \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por*

$$|F|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|F(A)\|_X, \tag{1.2}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones π de E en un número finito de elementos de $\mathcal{F}$ ajenos por pares.

Evidentemente tenemos que $|F| \geq 0$. Cuando $|F|(\Omega) < \infty$ diremos que F es una **medida de variación acotada**.

Definición 1.7. *Con la misma notación que en la definición anterior, defini-mos la* **semi-variación de F** *como la función*

$$\|F\|(E) = \sup \left\{ |x^* F|(E) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\}, \tag{1.3}$$

donde $|x^* F|$ es la variación de la medida real-valuada $x^* F$.

Evidentemente $\|F\| \geq 0$. Cuando $\|F\|(\Omega) < \infty$ diremos que F es una **medida de semivariación acotada**.

Observaciones 1.8.

1. *La variación de F es monótona y finitamente aditiva.*
2. *La semivariación de F es monótona y subaditiva.*
3. *Para todo $E \in \mathcal{F}$ se satisface que*

$$\|F\|(E) \leq |F|(E).$$

Demostración.

1. Sean E, G elementos de $\mathcal{F}$ tal que $E \cap G = \emptyset$. Supongamos que $E \cup G = \cup_{j=1}^{n} A_j$ con $A_j \in \mathcal{F}$ y $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$ si $j \neq j'$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \|F(A_j)\| &= \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j \cap (E \cup G))\| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j \cap E) + F(A_j \cap G)\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j \cap E)\| + \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j \cap G)\| \\
&\leq |F|(E) + |F|(G),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue por la definición de variación ya que $E = \cup_{j=1}^{n} (A_j \cap E)$ y $G = \cup_{j=1}^{n} (A_j \cap G)$.

De aquí que

$$|F|(E \cup G) \leq |F|(E) + |F|(G).$$

Para la desigualdad opuesta hacemos lo siguiente: Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $|F|$ existen colecciones finitas en $\mathcal{F}$, $\{B_j\}_{j=1}^k, \{C_l\}_{l=1}^s$ tales que $B_j \cap B_{j'} = \emptyset$ si $j \neq j'$, $C_l \cap C_{l'}$ si $l \neq l'$,

$$E = \bigcup_{j=1}^k B_j \qquad G = \bigcup_{l=1}^s C_l$$

tales que

$$|F|(E) - \varepsilon/2 \leq \sum_{j=1}^k \|F(B_j)\|$$

$$|F|(G) - \varepsilon/2 \leq \sum_{l=1}^s \|F(C_l)\|.$$

Como $E \cup G = \left(\cup_{j=1}^k B_j\right) \cup \left(\cup_{l=1}^s C_l\right)$, esto es, $\{B_j\}_{j=1}^k \cup \{C_l\}_{l=1}^s$ es una partición en $\mathcal{F}$ de $E \cup G$, tenemos que

$$\begin{aligned} |F|(E) + |F|(G) - \varepsilon &\leq \sum_{j=1}^k \|F(B_j)\| + \sum_{l=1}^s \|F(C_l)\| \\ &\leq |F|(E \cup G). \end{aligned}$$

Concluimos que $|F|(E) + |F|(G) \leq |F|(E \cup G)$, quedando probada la aditividad finita de $|F|$.

Ahora, si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$ entonces

$$\begin{aligned} |F|(B) &= |F|\left(A \cup (B - A)\right) \\ &= |F|(A) + |F|(B - A) \\ &\geq |F|(A). \end{aligned}$$

2. La subaditividad de $\|F\|$ se sigue de la aditividad finita de $|x^*F|$ y de la definición de $\|F\|$. De igual modo, se sigue la monotonía.

3. Sea $E \in \mathcal{F}$, y sea $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$

$$\begin{aligned} |x^*F|(E) &= \sup_\pi \sum_{A \in \pi} |(x^*F)(A)| \\ &\leq \sup_\pi \sum_{A \in \pi} \|x^*\|_{X^*} \|F(A)\|_X \\ &\leq \sup_\pi \sum_{A \in \pi} \|F(A)\|_X \\ &= |F|(E). \end{aligned}$$

Entonces $\|F\|(E) \leq |F|(E)$.

■

Enseguida examinaremos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.9. *Una medida de variación acotada.*

Sea $F : \Sigma \to X$ tal que $F(E) = T(\chi_E)$, donde Σ es la familia de Lebesgue medibles de $[0,1]$ y $T : L^1[0,1] \to X$ es una transformación lineal continua. Ya hemos visto en el Ejemplo 1.5 que F es una medida vectorial aditiva numerable. Ahora, si $E \in \Sigma$ y $E = \cup_{j=1}^{n} A_j$ con $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$ si $j \neq j'$ y $A_j \in \Sigma$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \|F(A_j)\|_X &= \sum_{j=1}^{n} \|T(\chi_{A_j})\|_X \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \|T\| \|\chi_{A_j}\|_1 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \|T\| \lambda(A_j) \\
&= \|T\| \lambda(E).
\end{aligned}$$

Entonces $|F|(E) \leq \|T\| \lambda(E)$ para toda $E \in \Sigma$, en particular

$$|F|([0,1]) \leq \|T\|.$$

De aquí que F es de variación acotada.

■

Ejemplo 1.10. *Una medida de semivariación acotada pero no de variación acotada.*

Sea Σ la σ-álgebra de Lebesgue medibles de $[0,1]$. Defínase $F : \Sigma \to L^\infty[0,1]$ tal que $F(E) = \chi_E$, hemos visto en el Ejemplo 1.4 que F es una medida vectorial finitamente aditiva y no numerablemente aditiva. Veamos que F no es de variación acotada.

Sea $E \in \Sigma$ tal que $\lambda(E) > 0$ y selecciónese una sucesión ajena por pares $(E_n)_{n=1}^{\infty}$, $E_n \subset E$, $E_n \in \Sigma$, tal que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ y $\lambda(E_n) > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea π_n la partición de E

$$\pi_n = \{E_1, E_2, ..., E_{n-1}, \cup_{k=n}^{\infty} E_k\}, \quad \text{y} \quad E_0 = \emptyset.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{A \in \pi_n} \|F(A)\|_{L^\infty[0,1]} &= \sum_{k=1}^{n-1} \|\chi_{E_k}\|_{L^\infty[0,1]} + \|\chi_{\cup_{k=n}^{\infty} E_k}\|_{L^\infty[0,1]} \\
&= n - 1 + 1 \\
&= n,
\end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Así que

$$|F|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| = \infty,$$

de aquí que F no es una medida de variación acotada. Que F es una medida de semivariación acotada es una consecuencia de lo que probaremos en el siguiente ejemplo.

■

Ejemplo 1.11. *Medidas vectoriales de semivariación acotada.*

Sea $T : L^{\infty}([0,1]) \to X$ un operador lineal continuo. Defínase $F : \Sigma \to X$ tal que $F(E) = T(\chi_E)$, donde Σ es la familia de Lebesgue medibles del $[0,1]$. Sabemos del ejemplo 1.2 que F es una medida vectorial finitamente aditiva. Además si $x^* \in X^*$ y $\|x^*\| \leq 1$ y π es una partición del $[0,1]$ en Lebesgue medibles, entonces:

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{A\in\pi} |x^*F(A)| &= \sum_{A\in\pi} |x^*T(\chi_A)| \\
&= \sum_{A\in\pi} sgn(x^*T(\chi_A))x^*T(\chi_A) \\
&= (x^*T)\left(\sum_{A\in\pi} sgn(x^*T(\chi_A))\chi_A\right) \\
&= \left|(x^*T)\left(\sum_{A\in\pi} sgn(x^*T(\chi_A))\chi_A\right)\right| \\
&\leq \|x^*T\| \left\|\sum_{A\in\pi} sgn(x^*T(\chi_A))\chi_A\right\|_{L^{\infty}[0,1]} \\
&\leq \|x^*\|\|T\| \cdot 1 \\
&\leq \|T\|.
\end{aligned}$$

De aquí que

$$|(x^*F)|[0,1] \leq \|T\|,$$

para toda $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| \leq 1$. Entonces

$$\|F\|([0,1]) \leq \|T\|,$$

lo cual muestra que F es de semivariación acotada. Si ahora aplicamos lo que acabamos de mostrar a $X = L^{\infty}[0,1]$ y T el operador identidad obtenemos que $F(E) = \chi_E$, la medida del ejemplo anterior. Así, F es de semivariación acotada.

■

Ejemplo 1.12. *Una medida de semivariación no acotada.*

Sea $\mathcal{F}$ el álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que consiste de aquellos conjuntos que son finitos o que tienen complemento finito. Sea $F : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(E) = \begin{cases} \#(E) & \text{si } E \text{ es finito} \\ -\#(\mathbb{N} - E) & \text{si } \mathbb{N} - E \text{ es finito.} \end{cases}$$

Puede verse fácilmente que F es una medida vectorial (con valores en $\mathbb{R}$) finitamente aditiva. Sin embargo, si para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos la partición $\pi_n = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ de $\mathbb{N}$ tal que $E_1 = 1$, $E_2 = 2$,..., $E_{n-1} = \{n-1\}$, $E_n = \{n, n+1, ...\}$ y consideramos el funcional lineal $x^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x^*(x) = x$, tenemos que $\|x^*\| = 1$ y

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \pi} |(x^* F)(A)| &= \sum_{A \in \pi} |F(A)| \\ &= \underbrace{1 + ... + 1}_{(n-1)-veces} + (n-1) \\ &= 2(n-1) \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Entonces $|x^* F|(\mathbb{N}) = \infty$, de aquí que

$$\|F\|(\mathbb{N}) = \infty,$$

es decir, F es de semivariación no acotada.

■

La siguiente proposición asegura que $|F|$ es la mínima cota superior (si existe) de la familia

$$\{|x^* F| : x^* \in X^* \text{ y } \|x^*\| \leq 1\}.$$

Proposición 1.13. *Sea $F : \mathcal{F} \to X$ una medida vectorial de variación acotada. Entonces una medida no negativa μ en $\mathcal{F}$ es la variación $|F|$ de F si y sólo si μ satisface:*

1. *$|x^* F|(E) \leq \mu(E)$ para toda $E \in \mathcal{F}$ y para toda $x^* \in X$ tal que $\|x^*\| \leq 1$.*

2. *si $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ es cualquier medida que verifica $|x^* F|(E) \leq \lambda(E)$ para toda $E \in \mathcal{F}$ y para toda $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| \leq 1$, entonces*

$$\mu(E) \leq \lambda(E) \quad \textit{para toda} \quad E \in \mathcal{F}.$$

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Supongamos que $\mu = |F|$. Si $E \in \mathcal{F}$ y $x^* \in X^*$ es tal que $\|x^*\| \leq 1$, entonces

$$|x^* F|(E) \leq \|F\|(E) \leq |F|(E) = \mu(E).$$

Ahora, si $|x^*F|(E) \leq \lambda(E)$, usando la definición de $|F|$, el Teorema de Hahn-Banach y el hecho de que λ es una medida vemos que

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= |F|(E) \\
&= \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \sup\{|x^*F(A)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \sup\{|x^*F|(A) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \lambda(A) \\
&= \sup_{\pi} \lambda(E) \\
&= \lambda(E),
\end{aligned}$$

donde π es una partición arbitraria de E.

$(\Leftarrow)$ Por hipótesis tenemos que $|x^*F| \leq \mu(E)$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}
|F|(E) &= \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \sup\{|x^*F(A)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \sup\{|x^*F|(A) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \mu(A) \\
&= \sup_{\pi} \mu(E) \\
&= \mu(E),
\end{aligned}$$

y puesto que

$$\begin{aligned}
|x^*F|(E) &= \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} |x^*F(A)| \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|x^*\|\|F(A)\|_X \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|F(A)\|_X \\
&= |F|(E),
\end{aligned}$$

se sigue de la suposición 2 que

$$\mu(E) \leq |F|(E). \tag{1.4}$$

Concluimos así que $\mu = |F|$.

■

Proposición 1.14. *Una medida vectorial de variación acotada es numerablemente aditiva si y sólo si su variación es también numerablemente aditiva.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que $F : \mathcal{F} \to X$ es una medida vectorial aditiva numerable de variación acotada. Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que $E_n \cap E_{n'} = \emptyset$ si $n \neq n'$ y $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$. Sea π una partición de $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ en una colección finita de miembros de $\mathcal{F}$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\pi} \|F(A)\| = \sum_{A\in\pi} \|F\left(A \cap \cup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\| &= \sum_{A\in\pi} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} F(A\cap E_n) \right\| \\ &\leq \sum_{A\in\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \|F(A\cap E_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{A\in\pi} \|F(A\cap E_n)\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |F|(E_n),\end{aligned}$$

y como esta desigualdad se obtiene para toda partición π, entonces

$$|F|\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |F|(E_n).$$

Ahora, recordando que $|F|$ es finitamente aditiva y monótona en $\mathcal{F}$, así para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |F|(E_k) &= |F|\left(\cup_{k=1}^{n} E_k\right) \\ &\leq |F|\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right).\end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F|(E_n) \leq |F|\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $|F| : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ es aditiva numerable. Sea $(E_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{F}$ y $E_j \cap E_{j'} = \emptyset$ si $j \neq j'$.

Primero observemos que $\|F(B)\| \leq |F|(B)$ para toda $B \in \mathcal{F}$, ahora notamos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \|F(E_j)\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |F|(E_j) \\ &= |F|(E) \\ &< \infty,\end{aligned}$$

porque estamos suponiendo que F es de variación acotada y $|F|$ es numerablemente aditiva. Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} F(E_j) \quad \text{converge en} \quad X$$

(ya que un espacio normado X es de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente es convergente). También, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$F\left(\cup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} F(E_j).$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} F\left(\cup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} F(E_j).$$

Como

$$\begin{aligned} \|F(E) - F\left(\cup_{j=1}^{n} E_j\right)\| &= \|F\left(E - \cup_{j=1}^{n} E_j\right)\| \\ &\le |F|\left(E - \cup_{j=1}^{n} E_j\right) \\ &= |F|\left(\cup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |F|(E_j) \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned} F(E) &= \lim_{n\to\infty} F\left(\cup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} F(E_j). \end{aligned}$$

■

La siguiente proposición presenta dos hechos básicos acerca de la semivariación de una medida vectorial.

Proposición 1.15. *Sea $F : \mathcal{F} \to X$ una medida vectorial. Entonces para $E \in \mathcal{F}$ se tiene que*

1. $$\|F\|(E) = \sup_{\pi} \left\{ \left\| \sum_{A_n \in \pi} \varepsilon_n F(A_n) \right\| \right\}$$

   donde el supremo se toma sobre todas las particiones π de E en una colección finita de conjuntos ajenos de $\mathcal{F}$ y sobre todas las colecciones finitas $\{\varepsilon_n\}$ que satisfagan $|\varepsilon_n| \le 1$.

2.
$$\sup\{\|F(H)\| : E \supset H \in \mathcal{F}\} \leq \|F\|(E)$$
$$\leq 4\sup\{\|F(H)\| : E \supset H \in \mathcal{F}\}.$$

Consecuentemente: una medida vectorial es de semivariación acotada en Ω si y sólo si su rango es un subconjunto acotado de X.

Demostración.

Sea $\pi = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$ una partición de E en subconjuntos ajenos de $\mathcal{F}$ y sean $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ escalares tales que $|\varepsilon_1|, ..., |\varepsilon_m| \leq 1$. Entonces por el Teorema de Hahn-Banach tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n F(E_n)\right\| &\leq \sup\left\{\left|x^*\left(\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n F(E_n)\right)\right| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\sum_{n=1}^{m} |x^* F(E_n)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\sum_{n=1}^{m} |x^* F|(E_n) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\right\} \\
&= \sup\{|x^* F|(E) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} \\
&\leq \|F\|(E).
\end{aligned}$$

Para la desigualdad opuesta, sea $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq 1$ y supóngase que $\pi = \{E_1, ..., E_m\}$ es una partición de $E \in \mathcal{F}$ en subconjuntos ajenos de $\mathcal{F}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} |x^* F(E_n)| &= \sum_{n=1}^{m} sgn\,(x^* F(E_n))\, x^* F(E_n) \\
&= \left|x^*\left(\sum_{n=1}^{m} sgn(x^* F(E_n)) F(E_n)\right)\right| \\
&\leq \left\|\sum_{n=1}^{m} (sgn\,(x^* F(E_n))\, F(E_n))\right\| \\
&\leq \sup\left\{\left\|\sum_{A_n \in \pi} \varepsilon_n F(A_n)\right\|\right\},
\end{aligned}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones π de E en una colección finita de conjuntos ajenos de $\mathcal{F}$ y sobre todas las colecciones finitas $\{\varepsilon_n\}$ que satisfagan $|\varepsilon_k| \leq 1$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{m} |x^* F(E_n)| \leq \sup\left\{\left\|\sum_{A_n \in \pi} \varepsilon_n F(A_n)\right\|\right\},$$

de aquí que

$$|x^*F|(E) \leq \sup\left\{\left\|\sum_{A_n\in\pi}\varepsilon_n F(A_n)\right\|\right\}.$$

Por consiguiente

$$\|F\|(E) \leq \sup\left\{\left\|\sum_{A_n\in\pi}\varepsilon_n F(A_n)\right\|\right\}.$$

Así queda demostrada la parte 1. Para la prueba de la parte 2 notamos que si $E\in\mathcal{F}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sup\{\|F(H)\| : E\supset H\in\mathcal{F}\} &= \sup\{\sup\{|x^*F(H)| : x^*\in X^*, \|x^*\|\leq 1\} : E\supset H\in\mathcal{F}\}\\ &\leq \sup\{\sup\{|x^*F|(H) : x^*\in X^*, \|x^*\|\leq 1\} : E\supset H\in\mathcal{F}\}\\ &\leq \sup\{\|F\|(H) : E\supset H\in\mathcal{F}\}\\ &\leq \|F\|(E),\end{aligned}$$

donde la igualdad se tiene por el Teorema de Hahn-Banach, y la última desigualdad por la monotonía de la semivariación. También si $\pi=\{E_1, E_2, ..., E_m\}$ es una partición de $E\in\mathcal{F}$ en conjuntos ajenos de $\mathcal{F}$ y si $x\in X^*$ es tal que $\|x^*\|\leq 1$ entonces:

Si X es un espacio de Banach real tenemos

$$\sum_{E_n\in\pi}|x^*F(E_n)| = \sum_{n\in\pi^+}x^*F(E_n) - \sum_{n\in\pi^-}x^*F(E_n),$$

donde $\pi^+=\{n : 1\leq n\leq m, x^*F(E_n)\geq 0\}$ y $\pi^-=\{n : 1\leq n\leq m, x^*F(E_n)<0\}$, por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{E_n\in\pi}|x^*F(E_n)| &= \sum_{n\in\pi^+}x^*F(E_n) - \sum_{n\in\pi^-}x^*F(E_n)\\ &= x^*\left(\sum_{n\in\pi^+}F(E_n)\right) - x^*\left(\sum_{n\in\pi^-}F(E_n)\right)\\ &= x^*\left(F\left(\bigcup_{n\in\pi^+}E_n\right)\right) - x^*\left(F\left(\bigcup_{n\in\pi^-}E_n\right)\right)\\ &\leq \left\|F\left(\bigcup_{n\in\pi^+}E_n\right)\right\| + \left\|F\left(\bigcup_{n\in\pi^-}E_n\right)\right\|\\ &\leq 2\sup\{\|F(H)\| : E\supset H\in\mathcal{F}\},\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la proposición para el caso real.

Cuando X es un espacio de Banach complejo, se puede ver fácilmente que se tiene una estimación similar pero reemplazando la constante 2 por la constante 4 (sólo hay que expresar x^*F en su parte real e imaginaria y aplicar el caso real).

■

En vista de la parte 2 de la proposición anterior, una medida de semivariación acotada será también llamada medida vectorial acotada.

Definición 1.16. *Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de Ω, $F : \mathcal{F} \to X$ una medida vectorial y μ una medida a valores reales y no negativa (finita) definida en $\mathcal{F}$. Diremos que F es μ-continua, lo cual denotamos $F << \mu$, si*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} F(E) = 0.$$

Es necesario advertir que la notación $F << \mu$ no es lo mismo que decir que F se anula en un conjunto de μ-medida cero. Sin embargo, puede demostrarse que ambos conceptos son equivalentes cuando tanto F como μ son aditivas numerables y están definidas en una σ-álgebra (ver [A.3], pág. 100). Cuando $F << \mu$ usaremos a veces la expresión "F es continua con respecto a μ" o "F es absolutamente continua con respecto a μ ".

1.2. Integración con Respecto a una Medida Vectorial

Es muy sencillo definir la integral de una función medible acotada con respecto a una medida vectorial acotada (esto es, de semivariación acotada).

Para este fin, sea $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de Ω y $F : \mathcal{F} \to X$ una medida vectorial acotada. Supongamos que f es una función simple definida en Ω con valores escalares, digamos

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \quad \text{donde} \quad \alpha_i \neq 0 \quad \text{para toda} \quad i = 1, ..., n$$

y $E_j \in \mathcal{F}$ para toda $j = 1, ..., n$ con $E_k \cap E_l = \emptyset$ si $k \neq l$.

Definamos

$$T_F(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(E_i).$$

Es sencillo demostrar que T_F define un mapeo lineal del espacio de funciones simples en X. Además, si f es como antes y $\beta = \sup \{|f(\omega)| : \omega \in \Omega\}$ entonces

$$\begin{aligned} \|T_F(f)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(E_i) \right\| \\ &= \beta \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\beta} \right) F(E_i) \right\| \\ &\leq \beta \|F\|(\Omega), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene por la Proposición 1.15, parte 1.

Así, si en el espacio de funciones simples sobre $\mathcal{F}$ consideramos la norma del supremo, entonces T_F actúa en este espacio como un operador lineal continuo tal que

$$\|T_F\| \leq \|F\|(\Omega).$$

Enseguida notamos que puesto que T_F es lineal y continuo en el espacio de funciones simples sobre $\mathcal{F}$ y toma valores en X, entonces T_F tiene una única extensión lineal continua (ver [A.3], Teorema 2.7-11, pág. 100) que denotaremos también por T_F del espacio $B(\mathcal{F})$ a X, donde $B(\mathcal{F})$ es el espacio de funciones escalares en Ω que son límites uniformes de funciones simples sobre $\mathcal{F}$. La discusión anterior nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 1.17. *Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de Ω y $F : \mathcal{F} \to X$ una medida vectorial acotada. Para cada $f \in B(\mathcal{F})$ definimos*

$$\int f dF = T_F(f),$$

donde T_F es la extensión lineal continua mencionada anteriormente.

Notemos que esta integral es lineal en F y en f y satisface

$$\left\| \int f dF \right\| \leq \|f\|_\infty \|F\|(\Omega).$$

Capítulo 2

Integración

En este capítulo estaremos principalmente interesados en el estudio de integrales de funciones con valores en un espacio de Banach X, con respecto a medidas escalares. De manera más precisa estaremos interesados en la definición y propiedades de la integral de Bochner, también conocida como la "integral de Dunford y Schwartz" y la cual es una generalización directa de la clásica integral de Lebesgue.

Estaremos siempre suponiendo que (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita y que X es un espacio de Banach.

2.1. Funciones Medibles

Se estudiarán dos tipos de medibilidad: fuerte y débil. Nos enfocaremos principalmente en la medibilidad fuerte, pues la calidad de la medibilidad es directamente proporcional a la calidad de las aplicaciones.

Definición 2.1. *Una función $f : \Omega \to X$ se llama* **simple** *si existen $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ y $E_1, E_2, ..., E_n \in \Sigma$ tales que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i},$$

donde $\chi_{E_i}(w) = 1$ si $w \in E_i$ y $\chi_{E_i}(w) = 0$ si $w \notin E_i$.

Definición 2.2. *Una función $f : \Omega \to X$ se llama* **μ-medible** *o* **fuertemente medible** *si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(w) - f(w)\| = 0$$

para μ-casi toda $w \in \Omega$.

Definición 2.3. *Una función $f : \Omega \to X$ se llama* **débilmente μ-medible** *si para cada $x^* \in X^*$ la función $x^*f : \Omega \to \mathbb{C}$ es μ-medible. De manera más general, si $\Gamma \subset X^*$ y si x^*f es μ-medible para toda $x^* \in \Gamma$, entonces f se llama Γ-medible.*

Si $f : \Omega \to X^*$ es X-medible (cuando X es identificado con su imagen en X^{**} bajo la inclusión canónica), entonces f será llamada **débil-* medible**.

Es frecuente encontrar en la literatura los términos medibilidad fuerte y medibilidad escalar para describir la μ-medibilidad y la μ-medibilidad débil, respectivamente. A veces, suprimiremos el uso de μ (en ambos conceptos) cuando no haya lugar a confusión. Puede demostrarse que la suma de medibles es medible, múltiplos escalares de medibles son medibles y límites puntuales ctp de medibles también son medibles.

Tenemos además el siguiente lema sencillo:

Lema 2.4. *Sea $f : \Omega \to X$ una función fuertemente medible. Entonces la función real $\|f\|$ es medible.*

Demostración.

Por definición de μ-medible, existe una sucesión de funciones simples $f_n : \Omega \to X$ tal que

$$\|f_n(w) - f(w)\| \to 0$$

para casi toda $w \in \Omega$. Así

$$|\|f(w)\| - \|f_n(w)\|| \leq \|f(w) - f_n(w)\| \to 0,$$

entonces

$$\|f_n(w)\| \to \|f(w)\| \quad \mu\text{-ctp en} \quad \Omega.$$

Por consiguiente $\|f\|$ es medible real-valuada.

■

El siguiente teorema es básico en el estudio de funciones medibles.

Teorema 2.5. *(Teorema de Medibilidad de Pettis)*

Una función $f : \Omega \to X$ es μ-medible si y sólo si

1. *Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \backslash E)$ es un subconjunto separable de X (" f es μ- esencialmente separable valuada").*

2. *f es débilmente μ-medible.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $f : \Omega \to X$ es μ-medible. Procediendo como en la prueba del Teorema de Egoroff, construiremos una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0 \tag{2.1}$$

μ-casi uniformemente.

En efecto: Existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(w) - f(w)\| = 0 \tag{2.2}$$

para μ-casi toda $w \in \Omega$. Sin pérdida de generalidad supongamos que (2.2) se cumple para toda $w \in \Omega$.

Definiendo para $m, n \in \mathbb{N}$

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{w \in \Omega : \|f_k(w) - f(w)\| \geq 1/m\},$$

como f_k y f son medibles se sigue del Lema 2.4 que $E_n(m) \in \Sigma$, también se tiene que $E_{n+1}(m) \subset E_n(m)$ y dado que $f_n(w) \to f(w)$ para toda $w \in \Omega$ se sigue que $\cap_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \emptyset$.

Como $\mu(\Omega) < +\infty$ se sigue que para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n(m)\right) = \mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} E_n(m)\right) = \mu(\emptyset) = 0$$

Ahora, sea $\delta > 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ elíjase $k_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(E_{k_m}(m)\right) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Sea $E_\delta = \cup_{m=1}^{\infty} E_{k_m}(m)$, entonces $E_\delta \in \Sigma$ y

$$\begin{aligned} \mu(E_\delta) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(E_{k_m}(m)\right) \\ &< \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} \\ &= \delta(2-1) \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Además, si $w \notin E_\delta$ entonces $\omega \notin E_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y por tanto

$$\|f_k(w) - f(w)\| < 1/m \quad \text{para toda} \quad k \geq k_m.$$

Así, $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $\Omega \backslash E_\delta$, quedando probada la afirmación (2.1).

En virtud de (2.1), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $E_n \in \Sigma$ tal que $\mu(E_n) < 1/n$ y

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

uniformemente en $\Omega \backslash E_n$.

Ahora bien, cada f_n es simple y así, su rango es un subconjunto acotado contenido en un subespacio de dimensión finita de X, es decir

$$f_n = \sum_{i=1}^{r_n} x_i \chi_{E_i},$$

Por lo que $f_n(\Omega) \in \langle x_1, ..., x_{r_n} \rangle \equiv Y$. Entonces Y es subespacio de X de dimensión finita y en espacios de dimensión finita todas las normas son equiva-lentes por lo tanto también los conceptos acotado y totalmente acotado son equivalentes. Se sigue que $f_n(\Omega)$ es totalmente acotado y también $f_m(\Omega \backslash E_n)$ para toda $m, n \in \mathbb{N}$.

Como $f_m(\Omega \backslash E_n)$ es totalmente acotado para toda $m, n \in \mathbb{N}$ afirmamos que $f(\Omega \backslash E_n)$ es totalmente acotado para toda $n \in \mathbb{N}$ (y así será separable).

Dado $n \in \mathbb{N}$, $\quad f_m \to f$ uniformemente en $\Omega \backslash E_n$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_N(w) - f(w)\| < \varepsilon/2 \quad \text{para toda} \quad w \in \Omega \backslash E_n.$$

Como $f_N(\Omega \backslash E_n)$ es totalmente acotado, existe una colección finita $x_1, ..., x_r \in X$ tal que

$$f_N(\Omega \backslash E_n) \subset \cup_{j=1}^{r} B_{\varepsilon/2}(x_j). \tag{2.3}$$

Veamos que $f(\Omega \backslash E_n) \subset \bigcup_{j=1}^{r} B_\varepsilon(x_j)$. Sea $z \in f(\Omega \backslash E_n)$, así $z = f(w)$, $w \in \Omega \backslash E_n$, entonces por (2.3) existe $j \in \{1, ..., r\}$ tal que $\|f_N(w) - x_j\| < \varepsilon/2$. Por tanto

$$\begin{aligned} \|z - x_j\| &\leq \|z - f_N(w)\| + \|f_N(w) - x_j\| \\ &\leq \|f(w) - f_N(w)\| + \|f_N(w) - x_j\| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces $f(\Omega \backslash E_n)$ es totalmente acotado para toda $n \in \mathbb{N}$ y por tanto es separable. Por consiguiente

$$f\left(\cup_{n=1}^{\infty} (\Omega \backslash E_n)\right) = \cup_{n=1}^{\infty} f(\Omega \backslash E_n)$$

es también separable. Observando que

$$\Omega \backslash \cup_{n=1}^{\infty} (\Omega \backslash E_n) = \cap_{n=1}^{\infty} E_n,$$

entonces

$$\mu\left(\Omega \backslash \cup_{n=1}^{\infty} (\Omega \backslash E_n)\right) = 0,$$

pues $\mu(E_n) < 1/n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, quedando probada así la parte 1 del Teorema.

Para probar la parte 2, notemos que como $f_n(w) \to f(w)$ para casi toda $w \in \Omega$ entonces para cada $x^* \in X^*$ tendremos que $x^*(f_n(w)) \to x^*(f(w))$ para casi toda $w \in \Omega$ por la continuidad de x^*. Como cada f_n es simple entonces $x^* f_n$ es también simple, pues x^* es lineal. Así, $x^* f$ es medible para toda $x^* \in X^*$, lo cual muestra 2.

($\Leftarrow$) Sea $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ y $f(\Omega \backslash E)$ separable. Sea $\{x_n\}$ un subconjunto denso y numerable de $f(\Omega \backslash E)$. Por el Teorema de Hahn-Banach podemos hallar una sucesión (x_n^*) de miembros de X^* tal que

$$x_n^*(x_n) = \|x_n\| \quad \text{y} \quad \|x_n^*\| = 1.$$

Nótese que para toda $w \in \Omega \backslash E$

$$\|f(w)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(f(w))|. \tag{2.4}$$

En efecto: sabemos por el Teorema de Hahn-Banach que para todo $w \in \Omega$

$$\|f(w)\| = \sup \{|x^*(f(w))| : x^* \in X^* \quad \text{y} \quad \|x^*\| \leq 1\},$$

entonces

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(f(w))| \leq \|f(w)\|. \tag{2.5}$$

Ahora, si $w \in \Omega \backslash E$, existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x_{n_k} \to f(w),$$

así

$$\begin{aligned}
\|f(w)\| &= \lim_{k \to \infty} \|x_{n_k}\| \\
&= \lim_{k \to \infty} |x_{n_k}^*(x_{n_k})| \\
&= \lim_{k \to \infty} |x_{n_k}^*(x_{n_k} - f(w)) + x_{n_k}^*(f(w))| \\
&\leq \overline{\lim_{k \to \infty}} \left[\left| x_{n_k}^*(x_{n_k} - f(w)) \right| + \left| x_{n_k}^*(f(w)) \right| \right] \\
&\leq \overline{\lim_{k \to \infty}} \left[\|x_{n_k} - f(w)\| + \left| x_{n_k}^*(f(w)) \right| \right] \\
&\leq \overline{\lim_{k \to \infty}} \left| x_{n_k}^*(f(w)) \right| \\
&\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_{n_k}^*(f(w))| \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(f(w))|,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\|f(w)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(f(w))| \,. \tag{2.6}$$

Entonces de (2.5) y (2.6) vemos que

$$\|f(w)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(f(w))| \,,$$

quedando demostrado (2.4). En vista de esto y debido a que f es débilmente medible vemos que la función real valuada $\|f(\cdot)\|$ es μ-medible. Por el mismo argumento de antes, las funciones $g_n(\cdot) = \|f(\cdot) - x_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, son μ-medibles.

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ y sea

$$E_n = \{w \in \Omega : g_n(w) < \varepsilon\} \,.$$

Como

$$\begin{aligned} E_n &= \{w \in \Omega\backslash E : g_n(w) < \varepsilon\} \bigcup \{w \in E : g_n(w) < \varepsilon\} \\ &\equiv E_{n_1} \bigcup E_{n_2}. \end{aligned}$$

Vemos que $E_{n_1} \in \Sigma$, mientras que $E_{n_2} \in \Sigma$ siempre que μ sea completa, por lo que $E_n \in \Sigma$ si μ es una medida completa.

De cualquier manera, dado $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $B_n \in \Sigma$ tal que $\mu(B_n \Delta E_n) = 0$.

Ahora, defínase $g : \Omega \to X$ por

$$g(w) = \begin{cases} x_n & \text{si } w \in B_n \backslash \bigcup_{m=1}^{n-1} B_m \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $\|g - f\| < \varepsilon$ $\mu-$ctp. En efecto:

Vemos que $\Omega\backslash E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, pues si $w \in \Omega\backslash E$ y $\varepsilon > 0$ existe x_n tal que

$$\|f(w) - x_n\| < \varepsilon,$$

entonces $g_n(w) < \varepsilon$ y por tanto $x \in E_n$. Así que $\Omega\backslash \cup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$ y por tanto

$$\mu\left(\Omega\backslash \cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0,$$

en caso de que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$.

De cualquier modo si definimos $\tilde{B_n} = B_n - \cup_{j=1}^{n-1} B_j$, como

$$\Omega\backslash \cup_{n=1}^{\infty} \tilde{B_n} = \Omega\backslash \cup_{n=1}^{\infty} B_n$$

y

$$\mu\left(\Omega\backslash \cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0,$$

dado que E_n es aproximable por $B_n \in \Sigma$, pues $\mu(E_n \Delta B_n) = 0$, se sigue que

$$\mu\left(\Omega \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \tilde{B_n}\right) = 0.$$

Si $w \in \cup_{n=1}^{\infty} \tilde{B_n}$ entonces existe n tal que $w \in \tilde{B_n}$ y por tanto en B_n y en E_n. Así que

$$g(w) = x_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|g(w) - f(w)\| &= \|x_n - f(w)\| \\ &= g_n(w) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\|g - f\| < \varepsilon \quad \mu - \text{ctp}.$$

Por tanto, f puede ser μ-esencialmente uniformemente aproximada por una función g que toma una cantidad numerable de valores.

Así, tomando $\varepsilon_n = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión $(g_n')_{n=1}^{\infty}$ de funciones que toman sólo una cantidad numerable de valores y tal que

$$\|g_n' - f\| < 1/n \quad \mu\text{-ctp.} \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Cada g_n' tiene la forma

$$g_n' = \sum_{m=1}^{\infty} x_{nm} \chi_{E_{nm}},$$

donde $E_{ni} \cap E_{nj} = \emptyset$ si $i \neq j$ y $E_{nm} \in \Sigma$.

Por (2.7) podemos hallar $D_n \in \Sigma$ con $\mu(D_n) = 0$ tal que

$$\|g_n' - f\| < 1/n$$

en $\Omega \setminus D_n$, por lo que considerando $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ tendremos

$$\|g_n' - f\| < 1/n \quad \text{en} \quad \Omega \setminus D \quad \text{y} \quad \mu(D) = 0.$$

Ahora definamos la siguiente sucesión de funciones simples:

$$f_n = x_{n1}\chi_{E_{n1}} + x_{n2}\chi_{E_{n2}} + \ldots + x_{nn}\chi_{E_{nn}}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ para toda $n \geq N$, por lo que

$$\|g_n' - f\| < 1/n \quad \text{en} \quad \Omega \setminus D$$

siempre que $n \geq N$.

Sean $w \in \Omega \backslash D$ y $n \geq N$; si $w \in E_{n1} \cup E_{n2} \cup ... \cup E_{nn}$, entonces $g'_n(w) = f_n(w)$ por lo que

$$\|f_n(w) - f(w)\| < 1/n < \varepsilon.$$

Si $w \notin E_{n1} \cup ... \cup E_{nn}$, entonces como $\Omega \backslash D = \cup_{m=1}^{\infty} E_{km}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, excepto quizás por un conjunto de μ-medida cero, forzosamente podemos hallar $k \geq n+1$ y $1 \leq l \leq k$ tal que $w \in E_{kl}$ y así $g'_k(w) = f_k(w)$ por lo que

$$\begin{aligned} \|f_k(w) - f(w)\| &= \|g'_k(w) - f(w)\| \\ &< 1/k < 1/n \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Hemos mostrado que

$$\|f_n(\cdot) - f(\cdot)\| \longrightarrow 0,$$

cuando $n \to \infty$ en $\Omega \backslash D$ con $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de simples y por consiguiente $f : \Omega \to X$ es fuertemente medible.

■

La prueba del Teorema anterior produce los siguientes resultados:

Corolario 2.6. *Una función $f : \Omega \to X$ es $\mu-$medible si y sólo si f es μ-ctp el límite uniforme de una sucesión de funciones μ-medibles que toman una cantidad numerable de valores.*

Corolario 2.7. *Una función $f : \Omega \to X$ μ-esencialmente separable valuada es μ-medible si existe un conjunto normante $\Gamma \subset X^*$ tal que la función numérica $x^* f$ es μ-medible para toda $x^* \in \Gamma$. (Recordemos que $\Gamma \subset X^*$ es normante si para toda $x \in X$*

$$\|x\| = \sup \{|x^*(x)| : \|x^*\| = 1, x^* \in \Gamma\})$$

Ejemplo 2.8. *Una función débilmente medible que no es fuertemente medi-ble.*

Consideremos el espacio de Hilbert no separable $l^2([0,1])$ y sea $\{e_t : t \in [0,1]\}$ una base ortonormal de éste. Sea $f : [0,1] \to l^2([0,1])$ tal que

$$f(t) = e_t.$$

Ahora, dado $x^* \in \left(l^2([0,1])\right)^* = l^2([0,1])$, sabemos por el Teorema de Representación de Riesz que existe un único elemento $x \in l^2([0,1])$ tal que

$$x^*(u) = \langle u, x \rangle \quad \text{para toda} \quad u \in l^2([0,1]).$$

Así la función $x^*f : [0,1] \to \mathbb{C}$ satisface

$$\begin{aligned}(x^*f)(t) &= x^*\left(f(t)\right)\\ &= x^*(e_t)\\ &= \langle e_t, x\rangle\\ &= \left\langle e_t, \sum_{s\in[0,1]} \langle x, e_s\rangle e_s \right\rangle\\ &= \sum_{s\in[0,1]} \overline{\langle x, e_s\rangle}\langle e_t, e_s\rangle\\ &= \overline{\langle x, e_t\rangle},\end{aligned}$$

y sabemos que hay una cantidad a lo sumo numerable de $t's$ tal que $\langle x, e_t\rangle \neq 0$, ya que la suma en la cuarta igualdad tiene una cantidad a lo más numerable de sumandos distintos de cero. Por tanto

$$x^*f = 0 \quad \mu\text{-ctp} \quad \text{en} \quad [0,1],$$

donde μ es la medida de Lebesgue.

Como esto ocurre para cada $x^* \in \left(l^2[0,1]\right)^*$, se sigue que f es débilmente medible. Por otra parte, si $E \subset [0,1]$ entonces $f\left([0,1]\backslash E\right)$ es separable si y sólo si $[0,1]\backslash E$ es a lo sumo numerable. En tal caso $\mu(E) = 1$, si $E \in \Sigma$. Por tanto, por el teorema anterior tenemos que f no es μ-medible.

2.2. Integral de Bochner

Esta sección está dedicada al examen de la integral de Bochner. Algunos la conocen como "integral de Dunford y Schwartz" y otros como "Primera integral de Dunford". La integral de Bochner es una abstracción directa de la integral de Lebesgue. De hecho hay quienes han dicho que la integral de Bochner es solamente la integral de Lebesgue donde el valor absoluto ha sido reemplazado por la norma. Aunque esto ocurre frecuentemente, tal comentario constituye una valoración errónea de la integral de Bochner. De hecho, la falla del Teorema de Radon-Nikodým para la integral de Bochner es la base de algunos de los resultados más sorprendentes en la teoría de medidas vectoriales y en la teoría de estructura de espacios de Banach.

Como vimos al inicio de la sección anterior, una función $\varphi : \Omega \to X$ se llama simple si toma un número finito de valores $x_1, ..., x_n \in X$ y $A_i = \varphi^{-1}\left(\{x_i\}\right) \in \Sigma$ para todo $i = 1, ..., n$. La fórmula

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$$

se llama la representación estándar de φ.

Cuando $\mu(A_i) < \infty$ para toda $i = 1, ..., n$ diremos que φ es una función X-escalonada (observemos que cuando (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita, la condición $\mu(A_i) < \infty$ para toda i es superflua. De hecho, siempre estaremos considerando (Ω, Σ, μ) espacio de medida finita).

La integral de una función $\varphi : \Omega \to X$ que es X-escalonada se define así:

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) x_i. \tag{2.8}$$

Igual que en el caso real, puede demostrarse que si $\varphi = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{B_j}$ es otra representación de φ con $\mu(B_j) < \infty$ para toda j, entonces

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) y_j.$$

La pregunta técnica que se tiene ahora es cómo generalizar la integral de una función con valores en X más alla del caso de funciones escalonadas. Existen varias generalizaciones, pero la que aquí discutiremos es la integral de Bochner.

Cuando $\varphi : \Omega \to X$ es X-escalonada y $E \in \Sigma$, definimos

$$\int_E \varphi d\mu = \int \varphi \chi_E d\mu.$$

Es sencillo verificar el siguiente lema:

Lema 2.9. *Si $\varphi : \Omega \to X$ es X-escalonada con representación estándar $\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$ entonces la función $\|\varphi\| : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\|\varphi\|(w) = \|\varphi(w)\|$ es una función escalonada a valores reales con representación estándar*

$$\|\varphi\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \chi_{A_i}.$$

Además

$$\int \|\varphi\| d\mu = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \mu(A_i) \quad y \quad \left\| \int \varphi d\mu \right\| \leq \int \|\varphi\| d\mu.$$

Claramente, toda función $\varphi : \Omega \to X$ que es X-escalonada es fuertemente medible. Para extender la noción de integral dada en (2.8) a un subespacio mayor contenido en la clase de funciones $f : \Omega \to X$ fuertemente medibles requerimos demostrar lo siguiente:

Lema 2.10. *Sea $f : \Omega \to X$ fuertemente medible. Supongamos que para dos sucesiones $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ de funciones X- escalonadas, las funciones reales medibles $\|f - \varphi_n\|$ y $\|f - \psi_n\|$ son Lebesgue integrables para toda $n \in \mathbb{N}$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \int \|f - \varphi_n\| = \lim_{n\to\infty} \int \|f - \psi_n\| = 0.$$

Entonces para toda $E \in \Sigma$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n d\mu,$$

donde estos dos últimos límites son tomados con respecto a la topología de la norma en X.

Demostración.
Sean $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ dos sucesiones de funciones X-escalonadas con las propiedades asumidas. Sea $E \in \Sigma$, fijo. Entonces

$$\begin{aligned}\left\|\int_E \varphi_n d\mu - \int_E \varphi_m d\mu\right\| &= \left\|\int_E (\varphi_n - \varphi_m)\, d\mu\right\| \\ &\leq \int_E \|\varphi_n - \varphi_m\| d\mu \\ &\leq \int_E \|f - \varphi_n\| d\mu + \int_E \|f - \varphi_m\| d\mu.\end{aligned}$$

Así

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\|\int_E \varphi_n d\mu - \int_E \varphi_m d\mu\right\| = 0,$$

lo cual muestra que $\left\{\int_E \varphi_n d\mu\right\}$ es una sucesión de Cauchy en X y como X es de Banach entonces converge en X. Similarmente, $\left\{\int_E \psi_n d\mu\right\}$ converge en X. Así

$$\left\|\int_E \varphi_n d\mu - \int_E \psi_n\right\| d\mu \leq \int_E \|f - \varphi_n\|\, d\mu + \int_E \|f - \psi_n\|\, d\mu,$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n d\mu.$$

■

La integral de Bochner fue introducida por Salomon Bochner en 1933. A continuación damos la definición correspondiente:

Definición 2.11. *Sea $f : \Omega \to X$ una función fuertemente medible. Diremos que es Bochner integrable si existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones X-escalonadas tal que la función real medible $\|f - \varphi_n\|$ es Lebesgue integrable para cada $n \in \mathbb{N}$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \int \|f - \varphi_n\| d\mu = 0.$$

En este caso, para cada $E \in \Sigma$ la integral de Bochner de f sobre E se define por

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n d\mu, \tag{2.9}$$

donde el límite se toma en la topología de la norma en X.

Observaciones 2.12. *1. A veces escribiremos $\int f d\mu$ en vez de $\int_\Omega f d\mu$.*

2. *Por el Lema anterior, la integral de Bochner está bien definida pues no depende de la sucesión particular de funciones escalonadas que se usen para aproximar f.*

3. *Claramente, toda función φ X-escalonada es Bochner integrable y si*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i},$$

entonces

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap A_i) x_i \quad \textit{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

La familia de todas las funciones $f : \Omega \to X$ que son Bochner integrables constituye un subespacio lineal del espacio de las funciones fuertemente medi-bles de Ω en X y la integral de Bochner actúa como un operador lineal de este espacio en X. De manera más precisa:

Teorema 2.13. *Si $f, g : \Omega \to X$ son dos funciones Bochner integrables, $\alpha, \beta \in K$ (donde $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces $\alpha f + \beta g$ es Bochner integrable y para toda $E \in \Sigma$*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$$

Se omite la demostración (muy sencilla) de este teorema.

La definición de la integral de Bochner es algo complicada de aplicar, sin embargo, para nuestra fortuna en espacios de medida finita (que es el caso que siempre estaremos considerando) tenemos el siguiente criterio:

Teorema 2.14. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y $f : \Omega \to X$ una función μ-medible, entonces f es Bochner integrable si y sólo si la función $\|f\|$ es Lebesgue integrable, es decir,*

$$\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty.$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Si f es Bochner integrable, sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples (X-escalonadas pues $\mu(\Omega) < \infty$) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

Entonces

$$\int_{\Omega} \|f\| d\mu \leq \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu + \int_{\Omega} \|f_n\| d\mu < \infty$$

para n suficientemente grande.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es μ-medible y que

$$\int_{\Omega} \|f\| d\mu < \infty.$$

Debido al Corolario 2.6 podemos escoger una sucesión de funciones μ-medibles $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ que toman solamente una cantidad a lo más numerable de valores tal que

$$\|f - f_n\| \leq 1/n \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N} \quad \mu\text{-ctp.} \tag{2.10}$$

Puesto que $\|f_n\| \leq \|f\| + 1/n$ μ-ctp y μ es finita, entonces

$$\int_{\Omega} \|f_n\| d\mu < \infty.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos

$$f_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{nm} \chi_{E_{nm}},$$

donde $E_{ni} \cap E_{nj} = \emptyset$ si $i \neq j$, $E_{nm} \in \Sigma$, $x_{nm} \in X$.

Como

$$\int_{\Omega} \|f_n\| d\mu = \int_{\cup_{m=1}^{\infty} E_{nm}} \|f_n\| d\mu$$

tenemos que

$$\int_{\cup_{j=m+1}^{\infty} E_{nj}} \|f_n\| d\mu \to 0$$

cuando $m \to \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Luego, dado $n \in \mathbb{N}$ existe P_n suficientemente grande tal que

$$\int_{\cup_{m=P_{n+1}}^{\infty} E_{nm}} \|f_n\| d\mu < \frac{\mu(\Omega)}{n}.$$

Sea $g_n = \sum_{m=1}^{P_n} x_{nm} \chi_{E_{nm}}$; cada g_n es una función simple y por (2.10) tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \|f-g_n\|d\mu &\leq \int_\Omega \|f-f_n\|d\mu + \int_\Omega \|f_n-g_n\|d\mu \\
&\leq \frac{\mu(\Omega)}{n} + \int_\Omega \left\| \sum_{m=1}^{\infty} x_{nm}\chi_{E_{nm}} - \sum_{m=1}^{P_n} x_{nm}\chi_{E_{nm}} \right\| d\mu \\
&\leq \frac{\mu(\Omega)}{n} + \int_\Omega \left\| \sum_{m=P_n+1}^{\infty} x_{nm}\chi_{E_{nm}} \right\| d\mu \\
&\leq \frac{\mu(\Omega)}{n} + \int_\Omega \sum_{m=P_n+1}^{\infty} \|x_{nm}\|\chi_{E_{nm}} d\mu \\
&\leq \frac{\mu(\Omega)}{n} + \int_{\cup_{m=P_n+1}^{\infty} E_{nm}} \|f_n\|d\mu \\
&\leq \frac{\mu(\Omega)}{n} + \frac{\mu(\Omega)}{n} \\
&= 2\frac{\mu(\Omega)}{n}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, f es Bochner integrable.

■

Tenemos también un Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Bochner.

Teorema 2.15. *Sea $f : \Omega \to X$ una función fuertemente medible y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones Bochner integrables tal que $\|f_n(w) - f(w)\| \to 0$ para casi toda $w \in \Omega$. Si existe una función Lebesgue integrable no negativa $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\|f_n\| \leq g$ para toda $n \in \mathbb{N}$ μ-ctp, entonces f es Bochner-integrable y*

$$
\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \quad \textit{para toda} \quad E \in \Sigma.
$$

Demostración.

Tenemos que $\|f - f_n\| \leq 2g$ μ-ctp y $\|f - f_n\| \to 0$ μ-ctp, por lo que podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue a $\|f - f_n\|$ y obtenemos

$$
\int \|f - f_n\|d\mu \to 0.
$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ elíjase una función simple φ_n tal que

$$
\int \|f_n - \varphi_n\|d\mu < 1/n,
$$

y nótese que

$$\int \|f - \varphi_n\| d\mu \leq \int \|f - f_n\| d\mu + \int \|f_n - \varphi_n\| d\mu \to 0.$$

Así f es Bochner integrable y

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu. \end{aligned}$$

■

Observaciones 2.16. *1. En la prueba del teorema anterior se mostró que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0.$$

2. *Se puede substituir la convergencia $\|f_n(w) - f(w)\| \to 0$ μ-ctp por convergencia en medida:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{w \in \Omega : \|f_n - f\| \geq \varepsilon\}\right) = 0, \quad \textit{para toda} \quad \varepsilon > 0.$$

Esto es posible pues en el caso clásico se tiene un Teorema de Convergencia Dominada substituyendo convergencia puntual, por convergencia en medida (ver por ejemplo [A.3], Teorema 7.8, pág 71,). Así que sólo basta aplicar esta versión del Teorema de Convergencia Dominada clásico a las funciones $\|f - f_n\|$ dominadas por $2g$.

Enseguida estudiaremos más propiedades de la integral de Bochner.

Teorema 2.17. *Sea $f : \Omega \to X$ una función Bochner-integrable con respecto a μ. Entonces*

1.
$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f d\mu = 0.$$

2.
$$\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| d\mu \quad \textit{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

3. *Si $(E_j)_{j=1}^\infty \subset \Sigma$, $E_k \cap E_l = \emptyset$ si $k \neq j$ y $E = \cup_{n=1}^\infty E_n$ entonces*

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu,$$

donde la suma del lado derecho es absolutamente convergente.

4. *Si* $F(E) = \int_E f d\mu$, *entonces* F *es una medida vectorial de variación acotada y*

$$|F|(E) = \int_E \|f\| d\mu \quad \textit{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Demostración.
Como

$$\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$$

pues f es Bochner integrable, entonces

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E \|f\| d\mu = 0.$$

Así, si probamos primero 2 tendremos entonces que se cumple 1. Para demostrar 2 tomamos primero f simple y Bochner integrable, digamos

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E f d\mu \right\| &= \left\| \int f \chi_E d\mu \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E \cap E_i) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \mu(E \cap E_i) \\
&= \int_E \|f\| d\mu.
\end{aligned}$$

Enseguida consideramos el caso en que f es Bochner integrable. Existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0 \tag{2.11}$$

y

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Por (2.11) tenemos que

$$\int_E \|f_n\| d\mu \longrightarrow \int_E \|f\| d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Luego

$$\begin{aligned}\left\|\int_E f d\mu\right\| &= \left\|\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\|\int_E f_n d\mu\right\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\int_E \|f_n\| d\mu \\ &= \int_E \|f\| d\mu,\end{aligned}$$

donde la desigualdad se tiene por el caso de las funciones simples.

3. Primero notamos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu$$

está dominada término a término por la serie convergente de números no negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}\|f\| d\mu \left(\leq \int_{\Omega}\|f\| d\mu < \infty\right),$$

por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu$ es absolutamente convergente. Ahora notamos que

$$\left\|\int_{\cup_{n=1}^{\infty}E_n} f d\mu - \sum_{n=1}^{m}\int_{E_n} f d\mu\right\| = \left\|\int_{\cup_{n=m+1}^{\infty}} f d\mu\right\|,$$

debido a la aditividad finita de la integral de Bochner (lo cual es muy sencillo de checar sólo necesitamos usar la definición de $\int_A f d\mu$, $A \in \Sigma$).

Además

$$\lim_{m\to\infty}\mu\left(\cup_{n=m+1}^{\infty}E_n\right) = 0,$$

y consecuentemente por la parte 1 tenemos

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty}E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f d\mu,$$

como deseábamos mostrar.

4. Notemos que si π es una partición de $E \in \Sigma$ entonces

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\pi}\|F(A)\| &= \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f d\mu\right\| \\ &\leq \sum_{A\in\pi}\int_A \|f\| d\mu \\ &= \int_E \|f\| d\mu.\end{aligned}$$

Entonces

$$|F|(E) \leq \int_E \|f\| d\mu < \infty \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Por consiguiente F es de variación acotada.

Para demostrar la desigualdad opuesta, sea $\varepsilon > 0$ y seleccionemos una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tales que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0.$$

Fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega \|f - f_{n_0}\| d\mu < \varepsilon.$$

Sea $E \in \Sigma$, escojamos una partición π' de E tal que

$$\sum_{A\in\pi'} \left\| \int_A f_{n_0} d\mu \right\| = \int_E \|f_{n_0}\| d\mu.$$

Esto se logra de la siguiente manera: supongamos que

$$f_{n_0} = \sum_{k=1}^{r} x_k \chi_{A_k},$$

donde $\Omega = \cup_{k=1}^{r} A_k$, con $A_k \cap A_j = \emptyset$ si $j \neq k$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_E \|f_{n_0}\| d\mu &= \int \sum_{k=1}^{r} \|x_k\| \chi_{A_k \cap E} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{r} \|x_k\| \mu(A_k \cap E) \\ &= \sum_{A\in\pi'} \|x_k\| \mu(A) \\ &= \sum_{A\in\pi'} \left\| \int_A f_{n_0} d\mu \right\|, \end{aligned}$$

donde $\pi' = \{A_1 \cap E, ..., A_n \cap E\}$.

Enseguida, escojamos una partición π de E que refine a π' y tal que

$$|F|(E) - \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f d\mu \right\| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Tal partición se escoge de la siguiente manera:

Dado $\varepsilon > 0$ existe π'' partición de E tal que

$$|F|(E) - \sum_{B\in\pi''} \left\| \int_B f d\mu \right\| < \varepsilon.$$

Sea π la siguiente partición de E

$$\left\{ C = A \cap B : A \in \pi', B \in \pi'' \right\}.$$

Así

$$\begin{aligned}
\sum_{B\in\pi''} \|F(B)\| &= \sum_{B\in\pi''} \left\| \int_B f d\mu \right\| \\
&= \sum_{B\in\pi''} \left\| \sum_{A\in\pi'} \int_{A\cap B} f d\mu \right\| \\
&\leq \sum_{B\in\pi''} \sum_{A\in\pi'} \left\| \int_{A\cap B} f d\mu \right\| \\
&= \sum_{C\in\pi} \left\| \int_C f d\mu \right\|.
\end{aligned}$$

Luego

$$|F|(E) - \sum_{C\in\pi} \left\| \int_C f d\mu \right\| \leq |F|(E) - \sum_{B\in\pi''} \|F(B)\| < \varepsilon.$$

Para esta partición π también se tiene que

$$\int_E \|f_{n_0}\| d\mu = \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f_{n_0} d\mu \right\|,$$

ya que

$$\begin{aligned}
\int_E \|f_{n_0}\| d\mu &= \int_{\cup_{B\in\pi} B} \|f_{n_0}\| d\mu \\
&= \sum_{B\in\pi} \int_B \|f_{n_0}\| d\mu \\
&= \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f_{n_0} d\mu \right\|,
\end{aligned}$$

pues π es un refinamiento de π'. Además

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\pi}\left|\left\|\int_B f d\mu\right\| - \left\|\int_B f_{n_0} d\mu\right\|\right| &\leq \sum_{B\in\pi}\left\|\int_B f d\mu - \int_B f_{n_0} d\mu\right\| \\ &\leq \sum_{B\in\pi}\int_B \|f - f_{n_0}\| d\mu \\ &\leq \int_E \|f - f_{n_0}\| d\mu \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por tanto de (2.12) y (2.13) se sigue que

$$\begin{aligned}\left| |F|(E) - \int_E \|f_{n_0}\| d\mu \right| &= \left| |F|(E) - \sum_{B\in\pi}\int_B \|f_{n_0}\| d\mu \right| \\ &\leq \left| |F|(E) - \sum_{B\in\pi}\left\|\int_B f d\mu\right\| \right| + \sum_{B\in\pi}\left|\left\|\int_B f d\mu\right\| - \left\|\int_B f_{n_0} d\mu\right\|\right| \\ &< 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}|F|(E) &= \lim_{n\to\infty}\int_E \|f_n\| d\mu \\ &= \int_E \|f\| d\mu,\end{aligned}$$

como deséabamos mostrar.

■

Corolario 2.18. *Si f y g son Bochner integrables y*

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu \quad \textit{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Entonces $f = g$ μ-ctp.

Demostración.
Sea

$$F(E) = \int_E (f-g) d\mu,$$

entonces $F(E) = 0$ para toda $E \in \Sigma$, por lo tanto $|F|(E) = 0$ para toda $E \in \Sigma$, pero entonces

$$0 = |F|(\Omega) = \int_\Omega \|f-g\| d\mu,$$

y así $\|f-g\| = 0$ μ-ctp, luego $f = g$ μ-ctp.

■

El siguiente teorema exhibe una propiedad fuerte de la teoría de la integral de Bochner que no tiene análogo no trivial en la teoría de integración de Lebesgue.

Teorema 2.19. *Sean $f : \Omega \to X$ Bochner integrable y Y un espacio de Banach. Sea $T \in L(X,Y)$. Entonces $T \circ f : \Omega \to Y$ es Bochner integrable y*

$$\int_E (T \circ f) d\mu = T\left(\int_E f d\mu\right) \quad \textit{para toda} \quad E \in \Sigma. \tag{2.14}$$

(Nota: Este teorema puede plantearse en condiciones más generales para T, por ejemplo cuando T es un operador lineal cerrado, es decir, con gráfica cerrada; ver [A.3] *pág. 47)*

Demostración.
Para mostrar (2.14) supondremos primero que f es simple, digamos

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}.$$

Como T es lineal entonces $T \circ f = \sum_{i=1}^{n} T(x_i)\chi_{E_i}$ es también simple y así

$$\begin{aligned} T\left(\int_E f d\mu\right) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E \cap E_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} T(x_i)\mu(E \cap E_i) \\ &= \int_E (T \circ f) d\mu. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $f : \Omega \to X$ es Bochner integrable. Entonces existe $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de simples tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0,$$

y

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Así,

$$\begin{aligned} T\left(\int_E f d\mu\right) &= T\left(\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} T\left(\int_E f_n d\mu\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E (T \circ f_n) d\mu \\ &= \int_E (T \circ f) d\mu, \end{aligned}$$

pues

$$\int \|T\circ f - T\circ f_n\| d\mu \leq \int \|T\|\|f-f_n\|d\mu$$
$$= \|T\| \int \|f-f_n\| d\mu \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$.

■

Corolario 2.20. *Sean $f, g : \Omega \to X$ funciones μ-medibles y supóngase que para toda $x^* \in X^*$ se tiene que $x^*f = x^*g$ μ-ctp. Entonces $f = g$ μ-ctp.*

Demostración.

Escójase una sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ tal que $E_n \subset E_{n+1}$, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ y f, g son ambas acotadas en cada E_n.

(Esto puede conseguirse así: definamos

$$E_n = \{w \in \Omega : \|f(w)\| \leq n, \|g(w)\| \leq n\},$$

es claro que $E_n \subset E_{n+1}$ y además, dado $w \in \Omega$ existen $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f(w)\| \leq n_0$, $\|g(w)\| \leq n_1$, por lo que si $N = \max\{n_0, n_1\}$ entonces $\|f(w)\| \leq N$, $\|g(w)\| \leq N$, es decir $w \in E_N$.)

Dado que f y g son ambas acotadas en E_n tenemos que

$$\int_E \|f\chi_{E_n}\| d\mu < \infty, \quad \int_E \|g\chi_{E_n}\| d\mu < \infty \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma,$$

y así las integrales de Bochner

$$\int_E f\chi_{E_n} d\mu \quad \text{y} \quad \int_E g\chi_{E_n} d\mu$$

existen para toda $E \in \Sigma$.

Puesto que para toda $x^* \in X^*$ tenemos que $x^*f = x^*g$ μ-ctp se sigue que

$$\int_E x^* f\chi_{E_n} d\mu = \int_E x^* g\chi_{E_n} d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Entonces

$$x^*\left(\int_E f\chi_{E_n} d\mu\right) = x^*\left(\int_E g\chi_{E_n} d\mu\right) \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma. \tag{2.15}$$

Fijemos $E \in \Sigma$ y entonces como (2.15) es válida para toda $x^* \in X^*$, se sigue del Teorema de Hahn-Banach que

$$\int_E f\chi_{E_n} d\mu = \int_E f\chi_{E_n} d\mu,$$

y esto es válido para toda $E \in \Sigma$ y por el Corolario 2.18 tenemos que $f\chi_{E_n} = g\chi_{E_n}$ μ-ctp para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $f = g$ μ-ctp.

■

El siguiente resultado muestra que las integrales de Bochner indefinidas comparten una propiedad muy importante con las integrales indefinidas de Lebesgue.

Teorema 2.21. *Sea f Bochner integrable en $[0,1]$ con respecto a la medida de Lebesgue. Entonces para casi toda $s \in [0,1]$ se tiene que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| dt = 0, \tag{2.16}$$

consecuentemente, para casi toda $s \in [0,1]$ se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_s^{s+h} f(t) dt = f(s). \tag{2.17}$$

Demostración.

Puesto que

$$\left\| \frac{1}{h}\int_s^{s+h} (f(t) - f(s)) dt \right\| \leq \frac{1}{h}\int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| dt,$$

la afirmación (2.17) se obtiene de la afirmación (2.16). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f([0,1])$ es un subconjunto separable de X (esta suposición se puede hacer debido a que el Teorema de Medibilidad de Pettis - Teorema 2.5, asegura que existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ tal que $f([0,1]\backslash E)$ es un subconjunto separable de X y además que para efectos de integración E no aporta nada).

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un subconjunto denso y a lo más numerable de $f([0,1])$. Por el Teorema clásico de Diferenciación de Lebesgue tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_s^{s+h} \|f(t) - x_n\| dt = \|f(s) - x_n\| \tag{2.18}$$

para casi toda $s \in [0,1]$ y para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $s \in [0,1]$ tal que (2.18) se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$, así

$$\begin{aligned} \limsup_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| dt &\leq \limsup_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\int_s^{s+h} \|f(t) - x_n\| dt \right) \\ &\quad + \|x_n - f(s)\| \\ &= 2\|f(s) - x_n\|, \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, dado $\varepsilon > 0$ elíjase $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f(s) - x_N\| \leq \varepsilon/2$, luego

$$\limsup_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| dt = 0.$$

Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| dt = 0.$$

■

Enseguida, daremos un vistazo a los espacios de Lebesgue-Bochner.

Sea $1 \leq p < \infty$. $L^p(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ o simplemente $L^p(\mu, X)$ denotará todas las clases de equivalencia de las funciones $f : \Omega \to X$ que son μ-Bochner integrables y tales que

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega \|f\|_X^p d\mu\right]^{1/p} < \infty.$$

Igual que en el caso escalar, puede demostrarse que $\left(L^p(\mu, X), \| \ \|_p\right)$ es un espacio de Banach.

$L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ o simplemente $L^\infty(\mu, X)$ denotará todas las clases de equivalencia de funciones esencialmente acotadas μ-Bochner integrables $f : \Omega \to X$. Para $f \in L^\infty(\mu, X)$ denotamos por

$$\|f\|_\infty = ess \sup \|f\|_X,$$

y también como en el caso escalar puede verse que $(L^\infty(\mu, X), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

El símbolo $L^p(\mu), 1 \leq p \leq \infty$, siempre denotará $L^p(\mu, X)$ cuando X es el campo de escalares.

Uno de los aspectos más interesantes de la teoría de la integral de Bochner se centra en la siguiente pregunta:

¿Cuándo una medida vectorial surge como una integral de Bochner indefinida?

Examinaremos rápidamente esta situación:

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y $F : \Sigma \to X$ una medida vectorial de la forma

$$F(E) = \int_E f d\mu$$

para alguna función Bochner integrable f.

El Teorema 2.17 garantiza que F es numerablemente aditiva, μ-continua y de variación acotada. Recíprocamente, si $F : \Sigma \to X$ es cualquier medida aditiva numerable, μ-continua y de variación acotada con un rango finito dimensional entonces el clásico Teorema de Radon-Nikodým produce una función Bochner-integrable f tal que

$$F(E) = \int_E f d\mu.$$

En efecto: Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $F : \Sigma \to K^n$ ya que el rango de F es un subconjunto de dimensión finita de X y en dimensión finita todas las normas son equivalentes. Así, $F = (F_1, ..., F_n)$ con $F_j : \Sigma \to K$, $j = 1, ..., n$. Entonces cada F_j es numerablemente aditiva ya que si $(E_k)_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ tal que $E_k \cap E_l = \emptyset$ si $k \neq l$, entonces

$$\begin{aligned} \left(F_1\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right), ..., F_n\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right) &= F\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(F_1(E_k), ..., F_n(E_k)\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left(F_1\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right), ..., F_n\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \left(F_1(E_k), ..., F_n(E_k)\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} F_1(E_k), ..., \sum_{k=1}^{m} F_n(E_k)\right) \\ &= \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} F_1(E_k), ..., \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} F_n(E_k)\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_1(E_k), ..., \sum_{k=1}^{\infty} F_n(E_k)\right), \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde la tercera igualdad se sigue del hecho de que en dimensión finita la convergencia es equivalente a la convergencia coordenada a coordenada.

Por consiguiente

$$F_j\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} F_j(E_k) \quad \text{para toda} \quad j = 1, ..., n.$$

Asimismo, como F es μ-continua tenemos que

$$\lim_{\mu(E)\to 0} F(E) = 0,$$

y entonces

$$\lim_{\mu(E)\to 0} F_j(E) = 0,$$

es decir, F_j es μ-continua para toda $j = 1, ..., n$.

Ahora veamos que cada F_j es de variación acotada, para ello recordemos que en vez de considerar en K^n la norma que X le hereda, podemos conside-rar la norma euclideana o cualquiera otra norma conveniente, por ejemplo: $\|F(A)\| = |F_1(A)| + ... + |F_n(A)|$. Entonces

$$\begin{aligned}
\infty > |F|(\Omega) &= \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| \\
&\geq \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|F_j(A)\| \\
&= |F_j|(\Omega),
\end{aligned}$$

para toda $j = 1, ..., n$. De aquí que cada F_j es de variación acotada.

Así, por el Teorema de Radon-Nikodým existen $f_1, ..., f_n$ en $L^1(\mu)$ tales que

$$F_j(E) = \int_E f_j d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned}
F(E) &= \left(\int_E f_1 d\mu, ..., \int_E f_n d\mu \right) \\
&= \int_E (f_1, ..., f_n) d\mu.
\end{aligned}$$

En efecto: Supongamos que f_j, $j = 1, ..., n$, es simple, digamos

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_1^{(1)} \chi_{A_1} + ... + a_r^{(1)} \chi_{A_r} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_n &= a_1^{(n)} \chi_{A_1} + ... + a_r^{(n)} \chi_{A_r}
\end{aligned}$$

donde $a_i^{(j)}$ es escalar y $\Omega = \cup_{j=1}^r A_j$, con $A_j \cap A_l = \emptyset$ si $j \neq l$.

Sea $f = (f_1, ..., f_n)$, entonces para toda $E \in \Sigma$

$$\begin{aligned}
F(E) &= \left(\int_E f_1 d\mu, ..., \int_E f_n d\mu \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} a_i^{(1)} \mu(A_i \cap E), ..., \sum_{i=1}^{r} a_i^{(n)} \mu(A_i \cap E) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(a_i^{(1)} \mu(A_i \cap E), ..., a_i^{(n)} \mu(A_i \cap E) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i \cap E) \left\{ a_i^{(1)} e_1 + ... + a_i^{(n)} e_n \right\} \\
&= \int_E \left[\sum_{i=1}^{r} \left(a_i^{(1)} e_1 + ... + a_i^{(n)} e_n \right) \chi_{A_i} \right] d\mu \\
&= \int_E (f_1, ..., f_n) d\mu,
\end{aligned}$$

donde $\{e_j\}_{j=1}^n$ es la base estándar de K^n.

Queda demostrada la afirmación cuando cada $f_1, ..., f_n$ es simple. En el caso general, sabemos que para cada $f_j : \Omega \to K$ podemos encontrar una sucesión de funciones simples $\left(\varphi_m^{(j)} \right)_{m=1}^{\infty}$ tal que $\left| \varphi_m^{(j)} \right| \leq |f_j|$, donde

$$f_j = \lim_{m \to \infty} \varphi_m^{(j)} \quad \text{ctp},$$

y ya que cada $f_j \in L^1(\mu)$, se sigue del Teorema de Convergencia Dominada que

$$\int f_j d\mu = \lim_{m \to \infty} \int \varphi_m^{(j)} d\mu \quad \text{para toda} \quad j = 1, ..., n.$$

Así,

$$\begin{aligned}
F(E) &= \left(\int_E f_1 d\mu, ..., \int_E f_n d\mu \right) \\
&= \left(\lim_{m \to \infty} \int_E \varphi_m^{(1)} d\mu, ..., \lim_{m \to \infty} \int_E \varphi_m^{(n)} d\mu \right) \\
&= \lim_{m \to \infty} \left(\int_E \varphi_m^{(1)} d\mu, ..., \int_E \varphi_m^{(n)} d\mu \right) \\
&= \lim_{m \to \infty} \int_E \left(\varphi_m^{(1)}, ..., \varphi_m^{(n)} \right) d\mu \\
&= \int_E \lim_{m \to \infty} \left(\varphi_m^{(1)}, ..., \varphi_m^{(n)} \right) \\
&= \int_E (f_1, ..., f_n) d\mu,
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se tiene ya que la convergencia en K^n es equivalente a la convergencia coordenada a coordenada, la cuarta por el caso previo, y la quinta igualdad por el Teorema de Convergencia Dominada, que se usa del modo siguiente:

Sea $f = (f_1, ..., f_n) = \lim_{m\to\infty} \left(\varphi_m^{(1)}, ..., \varphi_m^{(n)}\right)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\varphi_m^{(1)}, ..., \varphi_m^{(n)}\right) \right\|_{K^n} &\leq \sum_{j=1}^{n} |\varphi_m^{(j)}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |f_j| \in L^1(\mu). \end{aligned}$$

Entonces la afirmación queda demostrada.

Por tanto

$$\begin{aligned} F(E) &= \left(\int_E f_1 d\mu, ..., \int_E f_n d\mu \right) \\ &= \int_E (f_1, ..., f_n) d\mu \\ &= \int_E f d\mu, \end{aligned}$$

donde $f \in L^1(\mu, K^n)$, pues podemos considerar por ejemplo $\|f\| = |f_1| + ... + |f_n|$ y así

$$\int \|f\| d\mu = \sum_{j=1}^{n} \int |f_j| d\mu < \infty.$$

■

Para la integral de Bochner general, esto ya no necesariamente se verifica.

Ejemplo 2.22. *Una medida vectorial aditiva numerable con valores en c_0, de variación acotada que no tiene derivada de Radon-Nikodým.*

Construcción.
Sea μ la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Si $E \subset [0,1]$ es un conjunto medible, sean

$$\lambda_n(E) = \int_E \operatorname{sen}(2^n \pi t)\, dt,$$

y $F(E) = (\lambda_1(E), \lambda_2(E), ..., \lambda_n(E), ...)$.

El Lema de Riemann- Lebesgue asegura que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(E) = 0$. Así F es una medida vectorial finitamente aditiva con valores en c_0.

Además

$$
\begin{aligned}
\|F(E)\|_{c_0} &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n(E)| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E |\text{sen}(2^n \pi t)|\, dt \qquad (2.21)\\
&\leq \mu(E), \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

para cada subconjunto medible $E \subset [0,1]$.

Así, F es μ-continua, además es de variación acotada, pues

$$
\begin{aligned}
|F|\,([0,1]) &= \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|F(A)\|_{c_0} \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \mu(A) \\
&= \mu\,([0,1]) \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

y también F es aditiva numerable:

Sea $(E_j)_{j=1}^{\infty} \subset [0,1]$ una sucesión de subconjuntos Lebesgue medibles tal que $E_j \cap E_l = \emptyset$ si $j \neq l$, y sea $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$.

Debemos mostrar que $F(E) = \sum_{j=1}^{\infty} F(E_j)$, esto es

$$
(\lambda_n(E))_{n=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda_n(E_j)\right)_{n=1}^{\infty} \quad \text{en} \quad (c_0, \|\ \ \|_{\infty}). \qquad (2.23)
$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_n(E_j)\right)_{n\in\mathbb{N}} - (\lambda_n(E))_{n\in\mathbb{N}} \right\|_\infty &= \left\| \left(\lambda_n(E) - \lambda_n\left(\cup_{j=1}^{k} E_j\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_\infty \\
&= \left\| \left(\lambda_n\left(\cup_{j=k+1}^{\infty}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_\infty \\
&= \left\| \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_n(E_j) \right)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_\infty \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_n(E_j) \right| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=k+1}^{\infty} \left|\lambda_n(E_j)\right| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=k+1}^{\infty} \mu(E_j) \\
&= \sum_{j=k+1}^{\infty} \mu(E_j) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

cuando $k \to \infty$, porque $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \mu(E)$. Así queda demostrado (2.23)

Enseguida supóngase que existe una función Bochner integrable $f : [0,1] \to c_0$ tal que

$$F(E) = \int_E f d\mu \quad \text{para toda} \quad E \subset [0,1] \quad \text{Lebesgue medible.}$$

Escríbase $f = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$.

Definamos $\Lambda_n : c_0 \to K$ tal que

$$\Lambda_n(x) = x_n,$$

donde $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces

$$|\Lambda_n(x)| = |x_n| \leq \|x\|_\infty,$$

es decir, Λ_n es continuo y como $f_n = \Lambda_n \circ f$ donde Λ_n es continuo y f es medible, se sigue que f_n es medible para toda $n \in \mathbb{N}$.

Además

$$\lambda_n(E) = \int_E f_n d\mu \tag{2.24}$$

para toda $E \subset [0,1]$ Lebesgue medible y para toda $n \in \mathbb{N}$, puesto que

$$\int_E f d\mu = \left(\int_E f_1 d\mu, ..., \int_E f_n d\mu, ... \right). \tag{2.25}$$

Para verificar (2.25) sabemos que existe $f : [0,1] \to c_0$ tal que

$$F(E) = \int_E f d\mu$$

para toda $E \subset [0,1]$ tal que E es Lebesgue medible y f es Bochner integrable.

Para cada $t \in [0,1]$ $f(t) \in c_0$, digamos $f(t) = \left(f_j(t)\right)_{j=1}^{\infty}$. Como $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es base de Schauder para $(c_0, \| \ \|_\infty)$, donde $e_n = \left(e_n^j\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que $e_n^j = \delta_{nj}$, entonces

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t) e_j \quad (\text{en} \ \ \| \ \ \|_\infty),$$

es decir, si

$$g_n(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) e_j,$$

entonces

$$g_n(t) \to f(t),$$

cuando $n \to \infty$ en $\| \ \|_\infty$, y esto ocurre para toda $t \in [0,1]$.

Ahora,

$$\begin{aligned} \|g_n(t)\|_\infty = \|(f_1(t), ..., f_n(t), 0, 0, ...)\|_\infty &= \sup_{1 \le j \le n} |f_j(t)| \\ &\le \sup_{j \in \mathbb{N}} |f_j(t)| \\ &= \|f(t)\|_\infty, \end{aligned}$$

esto es

$$\|g_n\|_\infty \le \|f\|_\infty \quad \text{y} \quad \|f\|_\infty \in L^1(\mu).$$

Se sigue del Teorema de Convergencia Dominada para integrales de Bochner que

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int (f_1, f_2, ..., f_n, 0, 0, ...) d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\int f_j d\mu \right) e_j \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n d\mu \right) e_n \\ &= \left(\int f_1 d\mu, \int f_2 d\mu, ..., \int f_n d\mu, ... \right), \end{aligned}$$

lo que muestra (2.25) y por consiguiente

$$(\lambda_n(E))_{n\in\mathbb{N}} = F(E) = \int_E f d\mu = \left(\int_E f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

de donde se concluye (2.24).

Como también

$$\lambda_n(E) = \int_E \operatorname{sen}(2^n \pi t) dt$$

para toda $E \subset [0,1]$ Lebesgue medible, se sigue que $f_n(t) = \operatorname{sen}(2^n \pi t)$ para casi toda $t \in [0,1]$.

Enseguida consideremos el conjunto $E_n = \left\{t \in [0,1] : f_n(t) \geq 1/\sqrt{2}\right\}$.

Afirmamos que

$$\mu(E_n) = \frac{1}{4} \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

En efecto: La gráfica de $\operatorname{sen}(2^n \pi t)$ en $t \in [0,1]$, es así

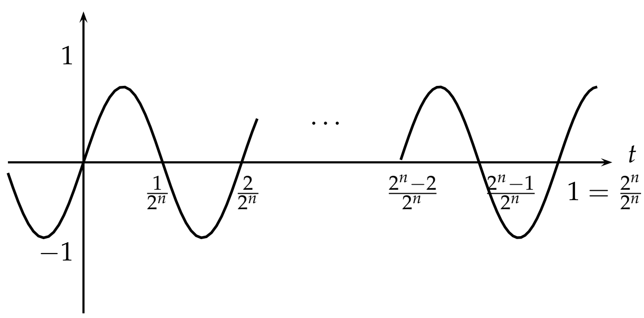

Figura 2.1: $\operatorname{sen} 2^n \pi t$

esto es, la gráfica de $\operatorname{sen} u$ en $[0, 2\pi]$ "se ajusta" 2^{n-1} veces en $[0,1]$ bajo $f_n(t)$. Ahora bien, $\operatorname{sen} u \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(u \in [0, 2\pi])$ siempre que $\frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{3\pi}{4}$.

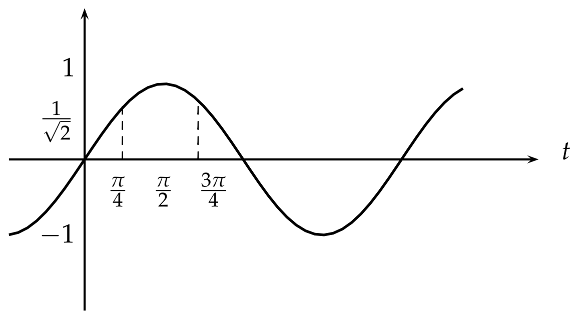

Figura 2.2: $\operatorname{sen} t$

Observando la siguiente figura

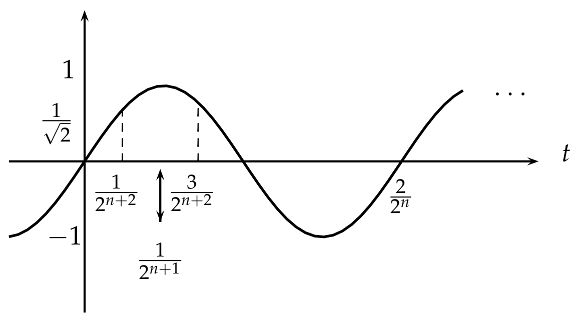

Figura 2.3: $f_n(t) = \operatorname{sen} 2^n \pi t$

obtenemos que en cada período de $f_n(t)$ en $[0,1]$

$$\mu(E_n) = 2^{n-1}\left[\frac{2}{2^{n+2}}\right] = \frac{1}{4}.$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned}\{t \in [0,1] : f(t) \notin c_0\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}\left\{t \in [0,1] : f_j(t) \geq 1/\sqrt{2}\right\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty} E_j.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mu\left(\{t \in [0,1] : f(t) \notin c_0\}\right) &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{j=n}^{\infty} E_j\right) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \mu(E_n) \\ &= \frac{1}{4},\end{aligned}$$

y por consiguiente,

$$\mu\left(\{t \in [0,1] : f(t) \in c_0\}\right) \leq \frac{3}{4}$$

lo cual es absurdo.

■

La falla del Teorema de Radon-Nikodým para la integral de Bochner no debe interpretarse como un aspecto negativo de dicha integral. En realidad, este hecho tiene repercusiones notables en Teoría de operadores pues nos permite representar y clasificar operadores lineales entre cierto tipo de espacios. Asimismo, tiene repercusiones importantes en el estudio de la geometría y topología de espacios de Banach, como por ejemplo, la validez del Teorema de Krein-Milman en cierto tipo de espacios. Igualmente, tiene consecuencias muy importantes en Teoría de Probabilidad en espacios de Banach y en la misma Teoría de Integración.

Capítulo 3

La Propiedad de Radon-Nikodým y el Teorema de Representación de Riesz

En este capítulo definiremos la Propiedad de Radon-Nikodým en un espacio de Banach X y estableceremos su equivalencia con el Teorema de Re-presentación de Riesz. Asimismo, se presenta una aplicación que nos permite calcular de manera explícita el dual del espacio $L^p(\mu, X)$ cuando X^* tiene la Propiedad de Radon-Nikodým.

Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita, los dos teoremas básicos de Teoría de la medida, el Teorema de Representación de Riesz y el Teorema de Radon-Nikodým garantizan que

$$L^1(\mu)^* = L^\infty(\mu)$$

y que si λ es una medida finita en Σ, con valores escalares y μ-continua, entonces existe $f \in L^1$ tal que

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Cada uno de estos teoremas puede deducirse del otro y no es sorprendente que sus extensiones vectoriales se encuentren relacionadas de manera íntima.

Una posible extensión de dichos teoremas para medidas vectoriales sería de la siguiente manera:

Teorema de Representación de Riesz.
Si X es un espacio de Banach y $T : L^1(\mu) \to X$ es un operador lineal continuo entonces existe $g \in L^\infty(\mu, X)$ tal que

$$Tf = \int_\Omega fgd\mu$$

para toda $f \in L^1(\mu)$.

Teorema de Radon-Nikodým.
Si $G : \Sigma \to X$ es una medida vectorial aditiva numerable, μ-continua y de variación acotada, entonces existe una función Bochner integrable $g \in L^1(\mu, X)$ tal que

$$G(E) = \int_E gd\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Sin embargo veremos más adelante que estos dos teoremas no necesa-riamente se satisfacen todo el tiempo. De hecho, esta parte está dedicada al estudio de ambos resultados y la relación entre ellos. Veremos que la conexión entre ambas afirmaciones es puramente formal y que si X es un espacio de Banach fijo, entonces el Teorema de Representación de Riesz describe todos los operadores T arriba mencionados si y sólo si el Teorema de Radon-Nikodým describe todas las medidas G arriba mencionadas.

3.1. El Teorema de Radon-Nikodým y operadores Riesz representables en $L^1(\mu)$

En esta sección examinaremos la relación formal que existe entre el Teorema de Representación de Riesz para operadores en $L^1(\mu)$ y el Teorema de Radon-Nikodým para la integral de Bochner. Empezaremos destacando los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.1. *Una medida vectorial con valores en c_0 para la cual no se cumple el Teorema de Radon-Nikodým.*

Como vimos en el Ejemplo 2.22, la medida $G : \Sigma \to c_0$ tal que

$$G(E) = \left(\int_E \operatorname{sen}(2^n \pi t)\, d\mu(t) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

donde $\Omega = [0, 1]$, μ la medida de Lebesgue en Ω, proporciona un ejemplo de una medida vectorial que no tiene derivada de Radon-Nikodým con respecto a μ.

Ejemplo 3.2. *Un ejemplo de un operador lineal y continuo $T : L^1[0,1] \to c_0$ para el cual no se verifica el Teorema de Representación de Riesz.*

Sea (Ω, Σ, μ) como en el ejemplo anterior. Defínase $T : L^1(\mu) \to c_0$ como

$$Tf = \left(\int_{[0,1]} f(t) \operatorname{sen}(2^n \pi t) d\mu(t) \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Por el Lema de Riemann Lebesgue, T es un operador lineal con valores en c_0. Además

$$\begin{aligned} \|Tf\| &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_{[0,1]} f(t) \operatorname{sen}(2^n \pi t) d\mu(t) \right| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{[0,1]} |f(t)| |\operatorname{sen}(2^n \pi t)| d\mu(t) \\ &\leq \int_{[0,1]} |f(t)| d\mu(t) \\ &= \|f\|_1, \end{aligned}$$

así, T es acotado.

Enseguida supongamos que existe $g \in L^\infty(\mu, c_0)$ tal que

$$Tf = \int_\Omega fg d\mu \quad \text{para toda} \quad f \in L^1(\mu).$$

Entonces, si G es la medida vectorial del ejemplo anterior y $E \in \Sigma$ se sigue que

$$G(E) = T(\chi_E) = \int_E g d\mu$$

lo cual es imposible pues hemos visto en el Ejemplo 3.1 que no existe tal g.

Ejemplo 3.3. *Una medida vectorial en $L^1(\mu)$ que no tiene derivada de Radon-Nikodým.*

Supongamos que (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita sin átomos. (Recordemos que un átomo de una medida μ en la σ-álgebra Σ es un conjunto $A \in \Sigma$ de medida positiva que no puede subdividirse en dos piezas de medida positiva más pequeña, esto es: A es un átomo si $\mu(A) > 0$ y si para cualquier $B \in \Sigma$ tal que $B \subset A$ se tiene que $\mu(B) = 0$ o bien $\mu(B) = \mu(A)$. Se dice que una medida es puramente atómica o simplemente atómica, si todo conjunto medible de medida positiva contiene un átomo.)

Defínase $G : \Sigma \to L^1(\mu)$ tal que

$$G(E) = \chi_E.$$

Entonces G es aditiva numerable:

Sea $(E_j)_{j=1}^{\infty} \subset \Sigma$ tal que $E_j \cap E_l = \emptyset$ si $j \neq l$ y sea $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$. Por demostrar que

$$\chi_E = G(E) = \sum_{j=1}^{\infty} G(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}$$

en la norma $L^1(\mu)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j} - \chi_E \right\|_1 &= \int \left| \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j} - \chi_E \right| d\mu = \int \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{E_j} \right| d\mu \\
&= \int \sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{E_j} d\mu = \sum_{j=n+1}^{\infty} \int \chi_{E_j} d\mu \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu(E_j) \to 0,
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, ya que μ es una medida en Σ.

Observamos también que G es μ-continua pues

$$\|G(E)\|_1 = \|\chi_E\|_1 = \int_E \chi_E d\mu = \mu(E)$$

por lo que

$$\lim_{\mu(E) \to 0} G(E) = 0.$$

También G es de variación acotada puesto que para toda $E \in \Sigma$

$$\begin{aligned}
|G|(E) &= \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|G(A)\|_1 = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|\chi_A\|_1 \\
&= \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \mu(A) = \sup_{\pi} \mu(E) = \mu(E).
\end{aligned}$$

Supongamos que existe una función Bochner integrable $g : \Omega \to L^1(\mu)$ tal que

$$G(E) = \int_E g d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Definamos el operador $T : L^{\infty}(\mu) \to L^1(\mu)$ tal que

$$Tf = \int_{\Omega} f g d\mu \quad \text{para toda} \quad f \in L^{\infty}(\mu).$$

T es un operador compacto pues dado que g es Bochner integrable podemos elegir una sucesión de funciones simples $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \|g - g_n\|_{L^1(\mu)} d\mu = 0.$$

Definamos $T_n : L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)$ tal que

$$T_n(f) = \int_\Omega f g_n d\mu.$$

Claramente T_n es lineal y también es continuo pues

$$\begin{aligned}\|T_n(f)\|_{L^1(\mu)} &= \left\| \int_\Omega f g_n d\mu \right\|_{L^1(\mu)} \\ &\leq \int_\Omega \|f g_n\|_{L^1(\mu) d\mu} \\ &\leq \|f\|_\infty \int_\Omega \|g_n\|_{L^1(\mu)} d\mu.\end{aligned}$$

Además, como cada g_n toma solamente un número finito de valores, se sigue que el operador T_n es un operador lineal continuo de rango finito y por consiguiente, del Teorema A.30 se sigue cada T_n es un operador compacto.

También, si $f \in L^\infty(\mu)$ tenemos

$$\begin{aligned}\|(T - T_n)(f)\| &\leq \int_\Omega |f| \|g - g_n\|_{L^1(\mu)} d\mu \\ &\leq \|f\|_\infty \int_\Omega \|g - g_n\|_{L^1(\mu)} d\mu \to 0,\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto

$$\|T - T_n\| \to 0,$$

cuando $n \to \infty$, luego, del Teorema A.31 se sigue que T es compacto.

Así, dado que $\{\chi_E : E \in \Sigma\}$ es un subconjunto acotado de $L^\infty(\mu)$, se tiene que $\{T(\chi_E) : E \in \Sigma\}$ es un subconjunto relativamente compacto de $L^1(\mu)$.

Por otra parte dado que μ no tiene átomos, el conjunto

$$\begin{aligned}\{T(\chi_E) : E \in \Sigma\} &= \{G(E) : E \in \Sigma\} \\ &= \{\chi_E : E \in \Sigma\}\end{aligned}$$

contiene una sucesión $(\chi_{E_n})_{n=1}^\infty$ tal que $\mu(E_n) = \mu(\Omega)/2$ y si $m \neq n$ entonces $\mu(E_n \Delta E_m) = \mu(\Omega)/4$.

Esto implica que

$$\begin{aligned}\|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}\|_1 &= \mu(E_n \Delta E_m) \\ &= \mu(\Omega)/4\end{aligned}$$

y por consiguiente $\{T(\chi_{E_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ no posee subsucesión convergente, es decir, T no es compacto, lo cual es una contradicción, (ver el Teorema A.29).

Ejemplo 3.4. *El Teorema de Representación de Riesz no se verifica para el operador identidad en $L^1(\mu)$.*

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita sin átomos y sea $T : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ el operador identidad.

Si se cumpliera el Teorema de Representación de Riesz para este operador, entonces existiría una función μ-medible esencialmente acotada $g : \Omega \to L^1(\mu)$ tal que

$$f = Tf = \int_\Omega fgd\mu \quad \text{para toda} \quad f \in L^1(\mu).$$

En particular tendríamos

$$\chi_E = \int_E gd\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

y $\chi_E = G(E)$ es la medida del ejemplo anterior, así, g sería la derivada de Radon-Nikodým de la medida G, lo cual como hemos visto es imposible.

En lo que sigue, (Ω, Σ, μ) será un espacio de medida finita y X un espacio de Banach.

Definición 3.5. *Diremos que un espacio de Banach X tiene la* **propiedad de Radon-Nikodým con respecto a** (Ω, Σ, μ) *si para cada medida vectorial numerablemente aditiva $G : \Sigma \to X$, μ-continua y de variación acotada, existe $g \in L^1(\mu, X)$ tal que*

$$G(E) = \int_E gd\mu \quad \textit{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Definición 3.6. *Diremos que un espacio de Banach X tiene la* **propiedad de Radon-Nikodým** *si X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con res-pecto a todo espacio de medida finita.*

Definición 3.7. *Diremos que un operador lineal acotado $T : L^1(\mu) \to X$ es Riesz Representable (o simplemente, representable) si existe $g \in L^\infty(\mu, X)$ tal que*

$$Tf = \int_\Omega fgd\mu \quad \textit{para toda} \quad f \in L^1(\mu).$$

Observaciones 3.8.
1. *De acuerdo a los ejemplos 3.1 y 3.3, el espacio c_0 no tiene la propiedad de Radon-Nikodým y $L^1(\mu)$ no tiene la propiedad de Radon-Nikodým cuando μ no tiene átomos.*

2. *Si la medida μ no es puramente atómica entonces Ω contiene un subconjunto Ω_0 de medida positiva tal que μ/Ω_0 no tiene átomos. Modificando el ejemplo 2 del modo siguiente:*

$$G(E) = \chi_{E\cap\Omega_0}$$

obtenemos un ejemplo de una medida con valores en $L^1(\mu)$ que no tiene derivada de Radon-Nikodým. Por lo tanto, cuando μ no es puramente atómica, el espacio $L^1(\mu)$ no tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

3. *Si (Ω, Σ, μ) es puramente atómica entonces todo espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (Ω, Σ, μ).*

En efecto: Observemos primero que como $\mu(\Omega) < \infty$ y positiva, el espacio sólo puede tener una colección a lo más numerable de átomos ajenos por pares. Para checar esta afirmación denotemos por $\mathcal{A}$ a la colección de todos los átomos ajenos por pares de μ.

Ahora, sea

$$\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 1/n\}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{A}_n$ es una colección finita para cada $n \in \mathbb{N}$, pues de otro modo, tendríamos una colección $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, para la cual se cumpliría que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_0} = \infty,$$

lo cual es implosible.

Puesto que todo $A \in \mathcal{A}$ verifica que $\mu(A) > 0$ se sigue que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n.$$

Por tanto $\mathcal{A}$ es a lo sumo numerable.

Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ la colección de todos los átomos ajenos por pares de μ. Necesariamente

$$\mu\left(\Omega \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = 0,$$

ya que en otro caso, esto es, si $\mu\left(\Omega \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) > 0$ dado que μ es puramente átomica tendríamos que existe un átomo $D \subset \Omega \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Como $D \cap E_j = \emptyset$ para toda $j \in \mathbb{N}$ esto produce un nuevo elemento en la colección $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lo cual es imposible ya que dicha colección tiene a todos los átomos ajenos por pares de μ. Así queda probada esta afirmación. Por consiguiente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe una colección numerable de átomos ajenos por pares de μ, digamos $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{y} \quad \mu(E_n) > 0.$$

Supongamos que $G : \Sigma \to X$ es una medida vectorial aditiva numerable μ-continua y de variación acotada. Definamos $g : \Omega \to X$ tal que

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(E_n)}{\mu(E_n)} \chi_{E_n}.$$

Se tiene entonces que

$$\int_{\Omega} \|g\| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \|G(E_n)\| < \infty$$

puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\infty > |G|(\Omega) \geq \sum_{k=1}^{n} \|G(E_k)\| + \left\|G\left(\cup_{k=n+1}^{\infty} E_k\right)\right\| \geq \sum_{k=1}^{n} \|G(E_k)\|,$$

así $g \in L^1(\mu, X)$ y además para toda $E \in \Sigma$

$$G(E) = \int_E g d\mu. \tag{3.1}$$

Para comprobar esto observemos lo siguiente:

Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{E_n \cap E} g d\mu = \frac{G(E_n)}{\mu(E_n)} \mu(E_n \cap E) = \begin{cases} G(E_n) & \text{si } \mu(E_n) = \mu(E_n \cap E) \\ 0 & \text{si } \mu(E_n \cap E) = 0. \end{cases}$$

Cuando $\mu(E_n \cap E) = 0$ entonces $G(E_n \cap E) = 0$, luego

$$\int_{E_n \cap E} g d\mu = \begin{cases} G(E_n) & \text{si } \mu(E_n) = \mu(E_n \cap E) \\ G(E_n \cap E) & \text{si } \mu(E_n \cap E) = 0. \end{cases}$$

Cuando $\mu(E_n) = \mu(E_n \cap E)$ entonces dado que

$$\mu(E_n) = \mu(E_n \cap E) + \mu(E_n - E)$$

se sigue que $\mu(E_n - E) = 0$ y como G es μ-continua tenemos que $G(E_n - E) = 0$, de aquí que $G(E_n) = G(E \cap E_n)$. Por tanto

$$\int_{E_n \cap E} g d\mu = G(E_n \cap E),$$

luego

$$\begin{aligned} G(E) &= \sum_{n=1}^{\infty} G(E_n \cap E) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n \cap E} g d\mu \\ &= \int_E g d\mu, \end{aligned}$$

como habíamos asegurado en (3.1).

La conexión fundamental entre operadores representables en $L^1(\mu)$ y medidas vectoriales con derivadas de Radon-Nikodým está contenida en el si-guiente Lema fundamental:

Lema 3.9. *Sea $T : L^1(\mu) \to X$ un operador lineal acotado. Defínase para $E \in X$*

$$G(E) = T(\chi_E).$$

Entonces, T es representable si y sólo si existe $g \in L^1(\mu, X)$ tal que

$$G(E) = \int_E g d\mu \quad \textit{para todo} \quad E \in \Sigma.$$

En tal caso, la función $g \in L^\infty(\mu, X)$ y

$$T(f) = \int_\Omega f g d\mu \quad \textit{para toda} \quad f \in L^1(\mu).$$

Además $\|g\|_\infty = \|T\|$.

Demostración.
($\Rightarrow$) Si T es representable entonces existe $g \in L^\infty(\mu, X)$ tal que

$$T(f) = \int_\Omega f g d\mu$$

para toda $f \in L^1(\mu)$.

Así, si $E \in \Sigma$ entonces

$$G(E) = T(\chi_E) = \int_E g d\mu.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que

$$G(E) = T(\chi_E) = \int_E g d\mu \tag{3.2}$$

para alguna $g \in L^1(\mu, X)$ y para toda $E \in \Sigma$.

Puesto que para cada $E \in \Sigma$ se tiene

$$\|G(E)\| = \|T(\chi_E)\| \leq \|T\|\|\chi_E\|_1 = \|T\|\mu(E),$$

se sigue que la variación $|G|$ de G satisface

$$|G|(E) \leq \|T\|\mu(E) \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

y como

$$|G|(E) = \int_E \|g\| d\mu$$

tenemos entonces que

$$\|g\| \leq \|T\| \quad \text{ctp} \tag{3.3}$$

(de otro modo, existiría $E \in \Sigma$, $\mu(E) > 0$ tal que $\|g(w)\| > \|T\|$ para $w \in E$. Luego

$$|G|(E) = \int_E \|g\| d\mu > \|T\|\mu(E)$$

lo cual es imposible.) Así $g \in L^\infty(\mu, X)$.

Falta demostrar que $\|g\|_\infty = \|T\|$ y

$$T(f) = \int_\Omega fg d\mu.$$

Para ello notamos primero que si φ es simple, (3.2) implica que

$$T(\varphi) = \int \varphi g d\mu.$$

Así, eligiendo una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^\infty$ que converge a f en $L^1(\mu)$ tendremos

$$\begin{aligned} T(f) &= \lim_{n\to\infty} T(f_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f_n g d\mu \\ &= \int f g d\mu \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se obtiene debido a la continuidad de T y la última debido al Teorema de convergencia dominada para integrales de Bochner (pues la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\mu)$ de funciones simples se puede elegir tal que $|f_n| \leq |f|$, así $|f_n| \|g\| \leq |f| \|g\|$ para toda $n \in \mathbb{N}$). Por consiguiente

$$\begin{aligned} \|T(f)\| &= \left\| \int_{\Omega} fg d\mu \right\| \\ &\leq \int_{\Omega} |f| \|g\|_{\infty} d\mu \\ &= \|g\|_{\infty} \|f\|_1, \end{aligned}$$

entonces

$$\|T\| \leq \|g\|_{\infty},$$

y como en (3.3) se tiene la desigualdad opuesta se sigue que

$$\|T\| = \|g\|_{\infty}$$

■

Teorema 3.10. *Sea X un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Entonces X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (Ω, Σ, μ) si y sólo si cada operador lineal continuo $T : L^1(\mu) \to X$ es representable.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (Ω, Σ, μ). Sea $T : L^1(\mu) \to X$ un operador lineal continuo.

Definamos $G : \Sigma \to X$ tal que

$$G(E) = T(\chi_E).$$

Si $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ es tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, dado que

$$\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$$

en la norma de $L^1(\mu)$, se sigue que G es aditiva numerable.

Debido a la linealidad y continuidad de T se tiene que

$$G\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = T\left(\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T\left(\chi_{E_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} G(E_n).$$

Además, como

$$\|G(E)\| \leq \|T\| \mu(E)$$

se sigue que G es μ-continua y de variación acotada.

Puesto que X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (Ω, Σ, μ), existe $g \in L^1(\mu, X)$ tal que

$$G(E) = \int_E g d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma,$$

por el Lema anterior tenemos que T es representable.

$(\Leftarrow)$ Recíprocamente, supongamos que todo operador en $\mathcal{L}\left(L^1(\mu), X\right)$ es re-presentable. Sea $G : \Sigma \to X$ una medida vectorial aditiva numerable, μ-continua y de variación acotada.

Por la Proposición 1.14, la variación $|G|$ también es aditiva numerable. Asimismo, $|G|$ es μ-continua ya que G lo es. Por el Teorema de Radon-Nikodým para el caso escalar aplicado a las medidas $|G|$ y μ podemos encontrar una función no negativa y finita ctp, $h \in L^1(\mu)$ tal que

$$|G|(E) = \int_E h d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Si $E_n = \{w \in \Omega : n-1 \leq h(w) < n\}$, $n \in \mathbb{N}$ entonces $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y además para toda $n \in \mathbb{N}$

$$(n-1)\mu(E) \leq |G|(E) \leq n\mu(E)$$

para toda $E \in \Sigma$ tal que $E \subset E_n$.

Ahora, fijemos $n \in \mathbb{N}$; si f es una función simple, digamos

$$f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \chi_{A_i},$$

α_i escalares, $i = 1, ..., p$, con $A_i \in \Sigma$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, definamos un operador lineal

$$T_n(f) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G(E_n \cap A_i) = \int_{E_n} f dG.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|T_n(f)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G(A_i \cap E_n) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| \|G(A_i \cap E_n)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| |G|(A_i \cap E_n) \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| n\mu(A_i \cap E_n) \\
&\leq n\|f\|_1.
\end{aligned}$$

Se sigue que T_n se extiende a un operador lineal continuo de $L^1(\mu)$ a X (por el Teorema de la extensión lineal acotada, ver [A.3] pág. 100).

Como por hipótesis, todo elemento de $\mathcal{L}\left(L^1(\mu), X\right)$ es representable, existe $g_n \in L^\infty(\mu, X)$ tal que

$$T_n(f) = \int_\Omega f g_n d\mu.$$

Además, para toda $E \in \Sigma$

$$G(E \cap E_n) = T_n(\chi_E) = \int_E g_n d\mu.$$

Así, hemos generado una sucesión $(g_n)_{n=1}^\infty$ en $L^\infty(\mu, X)$ tal que

$$G(E \cap E_n) = \int_E g_n d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Defínase $g : \Omega \to X$ tal que

$$g(w) = g_n(w) \quad \text{si} \quad w \in E_n.$$

Ya que G es aditiva numerable tenemos que para toda $E \in \Sigma$

$$\begin{aligned} G(E) &= \lim_{m\to\infty} G\left(E \cap [\cup_{n=1}^m E_n]\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{E\cap\left[\cup_{n=1}^m E_n\right]} g d\mu. \end{aligned}$$

Además $\|g\| \in L^1(\mu)$ porque dado que

$$G(E_n) = \int_{E_n} g_n d\mu,$$

se sigue que

$$|G|(E_n) = \int_{E_n} \|g_n\| d\mu.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\cup_{n=1}^m E_n} \|g_n\| d\mu &= \sum_{n=1}^m \int_{E_n} \|g_n\| d\mu \\ &= \sum_{n=1}^m |G|(E_n) \\ &= |G|\left(\cup_{n=1}^m E_n\right) \\ &\leq |G|(\Omega) < \infty \end{aligned}$$

pues G es de variación acotada. Así, para toda $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\cup_{n=1}^{m} E_n} \|g\| d\mu \leq |G|(\Omega)$$

y como

$$\|g\| \chi_{\cup_{n=1}^{m} E_n} \nearrow \|g\|$$

cuando $m \to \infty$, se sigue del Teorema de Convergencia Monótona que

$$\int \|g\| d\mu = \lim_{m \to \infty} \int_{\cup_{n=1}^{m} E_n} \|g\| d\mu \leq |G|(\Omega).$$

Ahora, dado que

$$g \chi_{E \cap \left(\cup_{n=1}^{m} E_n\right)} \to g \chi_E$$

ctp en X y

$$\left\| g \chi_{E \cap \left(\cup_{n=1}^{m} E_n\right)} \right\| \leq \|g\| \quad \in L^1(\mu),$$

se sigue del Teorema de Convergencia Dominada para integrales de Bochner que

$$G(E) = \lim_{m \to \infty} \int_{E \cap \left(\cup_{n=1}^{m} E_n\right)} g d\mu = \int_E g d\mu.$$

Por tanto X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (Ω, Σ, μ).
■

Es importante destacar que no existe un análogo del teorema anterior para operadores en $L^p(\mu)$, $1 < p \leq \infty$. En [A.3], pág. 108, puede consultarse un ejemplo donde se ilustra esta situación.

Ejemplo 3.11. *Un ejemplo sencillo de un espacio con la propiedad de Radon-Nikodým.*

Consideremos el espacio

$$l^1 = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}.$$

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y $G : \Sigma \to l^1$ una medida vectorial aditiva numerable, μ-continua y de variación acotada. Así para toda $E \in \Sigma$, $G(E) = (G_n(E))_{n=1}^{\infty}$ donde $G_n : \Sigma \to \mathbb{C}$ es una medida compleja, lo cual se obtiene como en (2.19) y (2.20), solo recordando que convergencia en l^1 implica convergencia puntual coordenada a coordenada.

Además, si $E \in \Sigma$ y $\mu(E) = 0$ entonces $G(E) = 0$ lo cual implica que $G_n(E) = 0$, es decir, G_n es μ-continua para toda $n \in \mathbb{N}$. También

$$|G|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|G(A)\|_{l^1} < \infty$$

y

$$\|G(A)\|_{l^1} = \sum_{n=1}^{\infty} |G_n(A)| \geq |G_n(A)| \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$\infty > \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|G(A)\|_{l^1} \geq \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} |G_n(A)| = |G_n|(E).$$

Entonces G_n es de variación acotada.

Por el Teorema de Radon-Nikodým escalar dado $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in L^1(\mu)$ tal que

$$G_n(E) = \int_E g_n d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Sea

$$g = (g_n)_{n=1}^{\infty},$$

veamos que $g \in L^1(\mu, l^1)$ y que

$$G(E) = \int_E g d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

En efecto: Dado $E \in \Sigma$ y dado $\varepsilon > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe π_k partición finita de E tal que

$$|G_k(E)| - \frac{\varepsilon}{2^k} < \sum_{A \in \pi_k} |G_k(A)|.$$

Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |G_k|(E) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k} &< \sum_{k=1}^{n} \sum_{A \in \pi_k} |G_k(A)| \\
&= \sum_{A \in \pi_k} \sum_{k=1}^{n} |G_k(A)| \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \sum_{k=1}^{n} |G_k(A)| \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \sum_{n=1}^{\infty} |G_n(A)| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|G(A)\|_{l^1} \\
&= |G|(E).
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |G_n|(E) \leq |G|(E) < \infty.$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
\int_E \|g\|_{l^1} d\mu &= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |g_n| d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |G_n|(E) < \infty
\end{aligned}$$

para toda $E \in \Sigma$. Por tanto $g \in L^1(\mu, l^1)$.

Resta mostrar que

$$G(E) = \int_E g d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Bastará ver que

$$\int_E g d\mu = \left(\int_E g_n d\mu \right)_{n=1}^{\infty}. \tag{3.4}$$

Supongamos que $g = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \chi_{A_i}$, donde

$$\alpha_i = \left(\alpha_n^{(i)} \right)_{n=1}^{\infty} \in l^1.$$

Así $g = (g_n)_{n=1}^{\infty}$ donde

$$g_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_n^{(i)} \chi_{A_i}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_E g d\mu &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mu(E \cap A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(\alpha_n^{(i)} \mu(E \cap A_i) \right)_{n=1}^{\infty} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_n^{(i)} \mu(E \cap A_i) \right)_{n=1}^{\infty} \\
&= \left(\int_E g_n d\mu \right)_{n=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Así (3.4) es válida para funciones simples.

En el caso general, sea $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$ sucesión de simples tal que

$$\lim_{m\to\infty} \int \|\varphi_m - g\|_{l^1} d\mu = 0, \tag{3.5}$$

donde $\varphi_m = \left(\varphi_n^{(m)}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Así, para toda $E \in \Sigma$

$$\begin{aligned} \int_E g d\mu &= \lim_{m\to\infty} \int_E \varphi_m d\mu \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\int_E \varphi_n^{(m)}\right)_{n=1}^{\infty} \\ &= \left(\int_E g_n d\mu\right)_{n=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

pues convergencia en l^1 implica convergencia coordenada a coordenada y (3.5) implica que

$$\int_E g_n d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_E \varphi_n^{(m)} d\mu.$$

■

3.2. Aplicaciones

En esta sección identificaremos el espacio dual de $L^p(\mu, X)$ para $1 \le p < \infty$. Veremos que la afirmación $L^p(\mu, X)^* = L^q(\mu, X^*)$ (donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) es en realidad una reformulación de la propiedad de Radon-Nikodým para X^*.

Como siempre, X será un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Empezaremos haciendo las siguientes observaciones.

Observacion 3.12. *Para* $1 \le p < \infty$*, las funciones simples son densas en* $L^p(\mu, X)$.

En efecto: debido al Corolario 2.6, dada $f \in L^p(\mu, X)$ existe una sucesión de funciones μ-medibles $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ que toman solamente una cantidad a lo más numerable de valores tal que

$$\|f - f_n\| \le \frac{1}{n} \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N} \quad \mu\text{-ctp.}$$

Entonces

$$\|f_n\|^p \le \left(\|f\| + \frac{1}{n}\right)^p \le 2^p \left[\|f\|^p + \frac{1}{n^p}\right],$$

y como $\mu(\Omega) < \infty$ se sigue que

$$\int \|f_n\|^p d\mu < \infty.$$

Escribiendo $f_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{nm} E_{nm}$, donde $E_{ni} \cap E_{nj} = \emptyset$ si $i \neq j$, $E_{nm} \in \Sigma$ y $x_{nm} \in X$, tenemos que como

$$\int_{\Omega} \|f_n\|^p d\mu = \int_{\cup_{m=1}^{\infty} E_{nm}} \|f_n\|^p d\mu,$$

entonces

$$\int_{\cup_{j=m+1}^{\infty} E_{nj}} \|f_n\|^p d\mu \longrightarrow 0,$$

cuando $m \to \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así, dado $n \in \mathbb{N}$ existe P_n suficientemente grande tal que

$$\int_{\cup_{m=P_n+1}^{\infty} E_{nm}} \|f_n\|^p < \frac{\mu(\Omega)}{n}.$$

Sea $\varphi_n = \sum_{m=1}^{P_n} x_{nm} \chi_{E_{nm}}$, cada φ_n es simple y

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \|f - \varphi_n\|^p &\leq 2^p \left\{ \int_{\Omega} \|f - f_n\|^p d\mu + \int_{\Omega} \|f_n - \varphi_n\|^p d\mu \right\} \\
&\leq 2^p \left[\frac{\mu(\Omega)}{n^p} + \int_{\Omega} \left\| \sum_{m=1}^{\infty} x_{nm} \chi_{E_{nm}} - \sum_{m=1}^{P_n} x_{nm} \chi_{E_{nm}} \right\|^p d\mu \right] \\
&\leq 2^p \left[\frac{\mu(\Omega)}{n^p} + \int_{\Omega} \left\| \sum_{m=P_n+1}^{\infty} x_{nm} \chi_{E_{nm}} \right\|^p d\mu \right] \\
&\leq 2^p \left[\frac{\mu(\Omega)}{n^p} + \int_{\cup_{m=P_n+1}^{\infty}} \|f_n\|^p d\mu \right] \\
&\leq 2^p \left[\frac{\mu(\Omega)}{n^p} + \frac{\mu(\Omega)}{n} \right].
\end{aligned}$$

Así, hemos hallado una sucesión de funciones simples $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\varphi_n \to f$ en $L^p(\mu, X)$ lo cual muestra la densidad.

Observacion 3.13. *Para $p = \infty$, las funciones de $L^{\infty}(\mu, X)$ que toman una cantidad numerable de valores son densas en $L^{\infty}(\mu, X)$.*

Esto es una consecuencia directa del Corolario 2.6.

Lema 3.14. *Para* $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, $L^q(\mu, X^*)$ *se puede incluir isométricamente en* $L^p(\mu, X)^*$.

Demostración.
Sea $g \in L^q(\mu, X^*)$ y sea $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples en $L^q(\mu, X^*)$ que converge a g μ-ctp.

Supongamos que $f \in L^p(\mu, X)$ y definamos $\langle f, g\rangle : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que

$$\langle f, g\rangle(w) = g(w)\,(f(w))\,.$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $\langle f, g_n\rangle$ es medible pues si $g_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^* \chi_{A_i}$ con $\alpha_i^* \in X^*$ entonces

$$\begin{aligned} \langle f, g_m\rangle(w) &= \sum_{i=1}^{r} \chi_{A_i}(w)\,(\alpha_i^*(f(w))) \\ &= \sum_{i=1}^{r} (\chi_{A_i} \cdot \alpha_i^* f)\,(w), \end{aligned}$$

la cual es una función medible con valores escalares (recordar que medibilidad fuerte implica medibilidad débil).

Ahora, notamos que

$$\begin{aligned} |\langle f, g_n\rangle(w) - \langle f, g\rangle(w)| &= |g_n(w)\,(f(w)) - g(w)\,(f(w))| \\ &= |(g_n(w) - g(w))\,(f(w))| \\ &\leq \|g_n(w) - g(w)\|_{X^*}\,\|f(w)\|_X \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$ ctp, y así tenemos que $\langle f, g\rangle$ es medible.

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\langle f, g\rangle(w)|\,d\mu(w) &\leq \int_\Omega \|f(w)\|_X \|g(w)\|_{X^*} d\mu(w) \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_q \end{aligned}$$

debido a la desigualdad de Hölder.

Lo anterior implica que el funcional $l : L^p(\mu, X) \to \mathbb{C}$ tal que

$$l(f) = \int_\Omega \langle f, g\rangle d\mu$$

es un elemento de $L^p(\mu, X)^*$ tal que

$$|l(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Entonces
$$\|l\| \leq \|g\|_q.$$

Para probar la desigualdad opuesta $\|g\|_q \leq \|l\|$ haremos lo siguiente:

Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos primero que

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \chi_{E_i}, \tag{3.6}$$

donde $(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \subset X^*$ y $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ es una partición a lo más numerable de Ω en miembros de Σ con $\mu(E_i) > 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Por el Teorema de Representación de Riesz para el caso escalar tenemos

$$\|g\|_q = \sup\left\{\left|\int \|g\|_X h d\mu\right| : h \in L^p(\mu), \quad \|h\|_p \leq 1\right\},$$

y así podemos elegir $h \geq 0$ en $L^p(\mu)$ tal que $0 < \|h\|_p \leq 1$ y tal que

$$\|g\|_q - \frac{\varepsilon}{2} < \int_\Omega \|g\|_X h d\mu. \tag{3.7}$$

Por definición de

$$\|x_i^*\|_{X^*} = \sup\left\{|x_i^*(z)| : z \in X, \quad \|z\| = 1\right\}, \tag{3.8}$$

podemos elegir para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ tal que $\|x_i\| = 1$ y

$$\|x_i^*\| - \frac{\varepsilon}{2\|h\|_1} < |x_i^*(x_i)|. \tag{3.9}$$

Ahora definamos $f \in L^p(\mu, X)$ por

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \left[sgn(x_i^*(x_i))\right] x_i h \chi_{E_i}.$$

Así

$$\|f\|_p = \|h\|_p \leq 1,$$

y tendremos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle f, g\rangle d\mu &= \int_\Omega h \sum_{i=1}^{\infty} sgn(x_i^*(x_i))x_i^*(x_i)\chi_{E_i} d\mu \\
&= \int_\Omega h \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*(x_i)|\,\chi_{E_i} d\mu \\
&\geq \int_\Omega h \sum_{i=1}^{\infty} \left[\|x_i^*\| - \frac{\varepsilon}{2\|h\|_1}\right]\chi_{E_i} d\mu \\
&= \int_\Omega h\|g\| d\mu - \frac{\varepsilon}{2\|h\|_1}\int_\Omega h d\mu \\
&\geq \|g\|_q - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \|g\|_q - \varepsilon,
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de (3.9) y la última desigualdad de (3.7). Entonces

$$\left|\int_\Omega \langle f, g\rangle d\mu\right| = \int_\Omega \langle f, g\rangle d\mu \geq \|g\|_q.$$

Por tanto $|l(f)| \geq \|g\|_q$, y de aquí que $\|l\| \geq \|g\|_q$ pues $\|f\|_p \leq 1$.

Así $\|l\| = \|g\|_q$ cuando $g \in L^q(\mu, X^*)$ y g toma una cantidad a lo sumo numerable de valores.

Para el caso general, sea $g \in L^q(\mu, X^*)$. Por el Corolario 2.6 podemos escoger una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones con una cantidad a lo sumo numerable de valores en $L^q(\mu, X^*)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_q = 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $l_n : L^p(\mu, X) \to \mathbb{C}$ tal que

$$l_n(f) = \int_\Omega \langle f, g_n\rangle d\mu.$$

y $l : L^p(\mu, X) \to \mathbb{C}$ tal que

$$l(f) = \int_\Omega \langle f, g\rangle d\mu.$$

Entonces, ya sabemos que $\|l_n\| = \|g_n\|_q$ y además

$$\|l_n - l\| \leq \|g_n - g\|_q \longrightarrow 0,$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto

$$\|l\| = \lim_{n\to\infty} \|l_n\| = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_q = \|g\|_q.$$

■

Sintetizando: Hemos demostrado que la función $\Lambda : L^q(\mu, X^*) \to L^p(\mu, X)^*$ tal que

$$\Lambda(g) = \int_\Omega \langle \cdot, g \rangle d\mu$$

es un isomorfismo isométrico en su imagen, con lo cual $L^q(\mu, X^*)$ queda identificado con un subespacio de $L^p(\mu, X)^*$.

Es sencillo dar ejemplos de situaciones en las que $L^q(\mu, X^*)$ es un subes-pacio propio de $L^p(\mu, X)^*$, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 3.15. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita, $1 \leq p < \infty$ y X un espacio de Banach. Entonces $L^p(\mu, X)^* = L^q(\mu, X^*)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si y sólo si X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a μ.*

Demostración.

De acuerdo al Lema anterior, hemos probado que $L^q(\mu, X^*)$ siempre está incluido isométricamente como subconjunto de $L^p(\mu, X)^*$ para $1 \leq p < \infty$.

Supongamos que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a μ. Para $ł \in L^p(\mu, X)^*$ definamos $G : \Sigma \to X^*$ por

$$G(E)(x) = l\,(x\chi_E) \quad \text{para} \quad E \in \Sigma.$$

Nótese que efectivamente $G(E) \in X^*$ puesto que

$$|G(E)(x)| = |l(x\chi_E)| \leq \|l\| \|x\chi_E\|_p = \|l\| \|x\| \|\chi_E\|_p.$$

Además, G es aditiva numerable pues si $(E_j)_{j=1}^\infty \subset \Sigma$ tal que $E_k \cap E_l = \emptyset$ si $k \neq l$ y $E = \cup_{j=1}^\infty E_j$ entonces para toda $x \in X$

$$\begin{aligned} G(\cup_{j=1}^\infty E_j)(x) &= l\left(x\chi_{\cup_{j=1}^\infty E_j}\right) = l\left(\sum_{j=1}^\infty x\chi_{E_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^\infty l\left(x\chi_{E_j}\right) = \sum_{j=1}^\infty G(E_j)(x). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se verifica en virtud de que

$$x\chi_{\cup_{j=1}^\infty E_j} = \sum_{j=1}^\infty x\chi_{E_j}$$

en la norma de $L^p(\mu, X)$ puesto que

$$\begin{aligned}
\left\| x\chi_E - \sum_{j=1}^{n} x\chi_{E_j} \right\|_p &= \left\| x\chi_E - x\chi_{\cup_{j=1}^{n} E_j} \right\|_p \\
&= \left\| x\chi_{\cup_{j=n+1}^{\infty} E_j} \right\|_p \\
&= \left[\int_{\cup_{j=n+1}^{\infty} E_j} \|x\|^p d\mu \right]^{1/p} \\
&= \|x\| \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \mu(E_j) \right]^{1/p} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$ pues $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Para ver que $|G|(\Omega) < \infty$, sea $\{E_1, ..., E_n\}$ una partición finita de Ω y $x_1, ..., x_n$ elementos de la bola unitaria cerrada de X. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |G(E_i)(x_i)| &= \sum_{i=1}^{n} |l(x_i\chi_{E_i})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} sgn\,(l(x_i\chi_{E_i}))\, l(x_i\chi_{E_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} l\,(sgn\,(l(x_i\chi_{E_i}))\, x_i\chi_{E_i}) \\
&= l\left(\sum_{i=1}^{n} sgn(l(x_i\chi_{\chi_{E_i}}))x_i\chi_{E_i} \right) \\
&\leq \|l\| \left\| \sum_{i=1}^{n} sgn\,(l(x_i\chi_{E_i}))\, x_i\chi_{E_i} \right\|_p \\
&\leq \|l\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i} \right\|_p \qquad (3.10) \\
&= \|l\| \mu(\Omega)^{1/p}.
\end{aligned}$$

La desigualdad (3.10) se obtiene así: si llamamos $a_i = sgn\,(l(x_i\chi_{E_i}))\, x_i \in X$ entonces $\|a_i\|_X \leq 1$ y así

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}\right\|_p &= \left[\int \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_X^p \chi_{E_i} d\mu\right]^{1/p} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_X^p \mu(E_i)\right]^{1/p} \\
&\leq \left[\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\right]^{1/p} \\
&= \mu(\Omega)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos que para toda $x_1, ..., x_n \in X$ tal que $\|x_j\| \leq 1$ para toda $j = 1, ..., n$

$$\sum_{i=1}^{n} |G(E_i)(x_i)| \leq \|l\| \mu(\Omega)^{1/p}$$

y tomando supremos sobre todas las posibles n-adas de elementos de X con norma menor o igual a 1 obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \|G(E_i)\|_{X^*} \leq \|l\| \mu(\Omega)^{1/p}.$$

Como dicha desigualdad vale para toda partición finita $\{E_1, ..., E_n\}$ de Ω en medibles de Σ obtenemos

$$|G|(\Omega) \leq \|l\| \mu(\Omega)^{1/p} < \infty.$$

Observemos también que G es μ-continua porque si $E \in \Sigma$ y $\mu(E) = 0$ entonces $\chi_E = 0$ μ-ctp, de aquí que $\|\chi_E\|_p = 0$, entonces $\|x\chi_E\|_p = 0$ para toda $x \in X$.

Como $|l(x\chi_E)| \leq \|l\| \, \|x\chi_E\|_p = 0$, entonces $l(x\chi_E) = 0$, lo cual implica que $G(E)(x) = 0$ para toda $x \in X$ o $G(E) = 0$.

Puesto que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a μ, existe una función Bochner integrable $g : \Omega \to X^*$ tal que

$$G(E) = \int_E g d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma. \tag{3.11}$$

Esto implica que si $f \in L^p(\mu, X)$ es una función simple entonces

$$l(f) = \int_\Omega \langle f, g \rangle d\mu. \tag{3.12}$$

En efecto, si $f = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{E_j}$, $x_j \in X$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle f, g\rangle d\mu &= \int_\Omega g\left(\sum_{j=1}^n x_j \chi_{E_j}\right) d\mu = \int_\Omega \sum_{j=1}^n g\left(x_j\chi_{E_j}\right) d\mu \\
&= \sum_{j=1}^n \int_\Omega g\left(x_j\chi_{E_j}\right) d\mu = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \left(g\chi_{E_j}\right)(x_j) d\mu \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_\Omega g\chi_{E_j} d\mu\right)(x_j) = \sum_{j=1}^n G(E_j)(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^n l\left(x_j\chi_{E_j}\right) = l\left(\sum_{j=1}^n x_j\chi_{E_j}\right) \\
&= l(f),
\end{aligned}$$

la quinta igualdad se obtiene debido a que el operador $T_j : X^* \to \mathbb{C}$ tal que $T_j(\varphi) = \varphi(x_j)$ es lineal y continuo y por tanto se puede intercambiar bajo el signo de integral (ver Teorema 2.19), y la sexta igualdad se obtiene de (3.11).

Ahora, deseamos extender (3.12) para todos los elementos de $L^p(\mu, X)$. Para ello, escojamos una sucesión creciente $(E_n)_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ tal que $\cup_{n=1}^\infty E_n = \Omega$ y tal que g es acotada en cada E_n. (Por ejemplo, $\Omega = \cup_{n=1}^\infty \{w : \|g(w)\|_{X^*} < n\}$, $\;E_n = \{w : \|g(w)\|_{X^*} < n\}$, $E_n \subset E_{n+1}$, $E_n \in \Sigma$ y g es acotada en E_n.)

Ahora, fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$ y consideremos el funcional

$$\int_{E_{n_0}} \langle \cdot, g\rangle d\mu : L^p(\mu, X) \to \mathbb{C} \quad \text{tal que}$$

$$\left(\int_{E_{n_0}} \langle \cdot, g\rangle d\mu\right)(f) = \int_{E_{n_0}} \langle f, g\rangle d\mu.$$

Este es un funcional lineal acotado ya que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{E_{n_0}} \langle f, g\rangle d\mu\right| &\le \int_{E_{n_0}} \|g(w)\|_{X^*} \|f(w)\|_X d\mu(w) \\
&\le n_0 \int_{E_{n_0}} \|f(w)\|_X d\mu(w) \\
&\le n_0 \int_\Omega \|f\|_X d\mu \\
&\le n_0 \|f\|_p \mu(\Omega)^{1/q},
\end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Además, este funcional coincide con l en la familia de funciones simples con soporte en E_{n_0}.

Así, si $f \in L^p(\mu, X)$, $f\chi_{E_{n_0}}$ puede aproximarse en la norma de $L^p(\mu, X)$ por funciones simples $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ con soporte en E_{n_0} por lo que usando la continuidad del funcional

$$\int_{E_{n_0}} \langle \cdot, g \rangle d\mu$$

vemos que

$$\begin{aligned} l\left(f\chi_{E_{n_0}}\right) &= \lim_{n\to\infty} l(\varphi_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{E_{n_0}} \langle \varphi_n, g \rangle d\mu \\ &= \int_{E_{n_0}} \langle f, g \rangle d\mu \\ &= \int \left\langle f, g\chi_{E_{n_0}} \right\rangle d\mu, \end{aligned}$$

esto es,

$$l\left(f\chi_{E_{n_0}}\right) = \int \left\langle f, g\chi_{E_{n_0}} \right\rangle d\mu \quad \text{para toda} \quad f \in L^p(\mu, X). \tag{3.13}$$

Además, puesto que $g\chi_{E_{n_0}}$ es acotada, se sigue que $g\chi_{E_{n_0}} \in L^q(\mu, X^*)$.

Debido a la representación (3.13), igual que en el Lema anterior tenemos que

$$\|g\chi_{E_{n_0}}\|_q \leq \|l\|,$$

y esta última desigualdad es válida para toda $n_0 \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como

$$\|g\chi_{E_n}\|^q \leq \|g\chi_{E_{n+1}}\|^q \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}$$

se sigue del Teorema de Convergencia Monótona que

$$\begin{aligned} \int \|g\|^q d\mu &= \int \lim_{n\to\infty} \|g\chi_{E_n}\|^q d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \|g\chi_{E_n}\|^q d\mu \\ &\leq \|l\|^q < \infty. \end{aligned}$$

Entonces $g \in L^q(\mu, X^*)$.

Así para toda $f \in L^p(\mu, X)$ tenemos

$$\begin{aligned} l(f) &= l\left(\lim_{n\to\infty} f\chi_{E_n}\right) = \lim_{n\to\infty} l(f\chi_{E_n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \langle f, g\chi_{E_n} \rangle \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \langle f\chi_{E_n}, g \rangle \, d\mu \\ &= \int \langle f, g \rangle d\mu, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se tiene en la norma de $L^p(\mu, X)$ y la última igualdad se obtiene así:

$$|\langle f\chi_{E_n}, g\rangle| \leq \|f\chi_{E_n}\|_p\|g\|_q \leq \|f\|_p\|g\|_q < \infty,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y

$$\langle f\chi_{E_n}, g\rangle (w) = (g(w))\,(f\chi_{E_n}(w)) \longrightarrow (g(w))\,(f(w)) = \langle f, g\rangle(w),$$

por lo que se puede aplicar el Teorema de convergencia dominada.

Igual que en el Lema anterior se tiene que

$$\|l\| = \|g\|_q.$$

Esto nos ha demostrado que $L^p(\mu, X)^*$ coincide con $L^q(\mu, X^*)$ donde la igualdad debe entenderse como isomorfismo isométrico.

Demostraremos ahora la otra implicación.

Supongamos que $L^p(\mu, X)^* = L^q(\mu, X^*)$ y sea $G : \Sigma \to X^*$ una medida vectorial aditiva numerable, μ-continua y de variación acotada.

1. Demostraremos que si $E_0 \in \Sigma$ y tiene μ-medida positiva, entonces G tiene una derivada de Radon-Nikodým en un conjunto $B \in \Sigma$, $B \subset E_0$ con $\mu(B) > 0$.

La condición 1 junto con Lema A.32 nos permitirán completar la demostración.

Demostremos 1. Sea $E_0 \in \Sigma$ con μ-medida positiva. Así existe $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\mu(E_0) > \frac{|G|(E_0)}{k} \tag{3.14}$$

Consideremos la medida escalar $k\mu - |G|$ restringida a los subconjuntos de E_0 en Σ. Por el Teorema de Descomposición de Hahn para el caso escalar (ver [A.3], pág.81) podemos encontrar conjuntos $B_k, N_k \subset \Sigma$ tal que $B_k, N_k \in E_0$, $B_k \cap N_k = \emptyset$ y $E_0 = B_k \cup N_k$ con

$$\begin{aligned} (k\mu - |G|)\,(E) \geq 0 \quad &\text{para toda} \quad E \in \Sigma \quad \text{tal que} \quad E \subset B_k \\ (k\mu - |G|)\,(E) \leq 0 \quad &\text{para toda} \quad E \in \Sigma \quad \text{tal que} \quad E \subset N_k \end{aligned}$$

Notamos además que $\mu(B_k) > 0$, pues de no ser así tendríamos $\mu(B_k) = 0$ y como G es μ-continua entonces $|G|(B_k) = 0$, así

$$\begin{aligned} |G|(E_0) &= |G|(N_k) \\ \mu(E_0) &= \mu(N_k) \end{aligned}$$

Por tanto $k\mu(E_0) = k\mu(N_k) \leq |G|(N_k) = |G|(E_0)$. Entonces

$$k\mu(E_0) \leq |G|(E_0)$$

o

$$\mu(E_0) \leq \frac{|G|(E_0)}{k},$$

lo cual contradice (3.14).

Llamemos B a dicho conjunto B_k. Hemos así encontrado un subconjunto B de E_0, $B \in \Sigma$, $\mu(B) > 0$ tal que

$$|G|(E) \leq k\mu(E) \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma \quad \text{con} \quad E \subset B.$$

Definamos para una función simple

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$$

donde $x_i \in X$, $E_i \in \Sigma$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$,

$$l(f) = \sum_{i=1}^{n} G(E_i \cap B)(x_i).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|l(f)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{G(E_i \cap B)}{\mu(E_i \cap B)} \left(\mu(E_i \cap B)x_i\right) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{G(E_i \cap B)}{\mu(E_i \cap B)} \left(\mu(E_i \cap B)x_i\right) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\|G(E_i \cap B)\|_{X^*}}{\mu(E_i \cap B)} \|\mu(E_i \cap B)x_i\|_X \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|(E_i \cap B)}{\mu(E_i \cap B)} \|\mu(E_i \cap B)x_i\| \\
&\leq k \sum_{i=1}^{k} \|\mu(E_i \cap B)x_i\| \\
&\leq k\|f\|_1 \\
&\leq k\mu(\Omega)^{1/q}\|f\|_p.
\end{aligned}$$

Puesto que l es lineal en la familia de funciones simples de $L^p(\mu, X)$ y es continua debido a la estimación anterior entonces tiene una extensión lineal acotada a todo el espacio $L^p(\mu, X)$ y con la misma norma.

Por hipótesis existe $g \in L^q(\mu, X^*)$ tal que

$$l(f) = \int_\Omega \langle f, g \rangle d\mu \quad \text{para toda} \quad f \in L^p(\mu, X).$$

Como

$$G(E \cap B)(x) = l\,(x\chi_E) = \int_E \langle x, g \rangle d\mu$$

para toda $x \in X$ y $E \in \Sigma$, entonces dado que toda $g \in L^q(\mu, X^*)$ es Bochner integrable, usando Teorema 2.19 aplicado al operador $T_x : X^* \to \mathbb{C}$ tal que $T_x(\varphi) = \varphi(x)$ obtenemos

$$G(E \cap B)(x) = \left(\int_E g d\mu \right)(x) \quad \text{para toda} \quad x \in X$$

y para toda $E \in \Sigma$. Entonces

$$G(E \cap B) = \int_E g d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \Sigma.$$

Hemos así demostrado 1.

Para finalizar, por el Lema A.32 tenemos que existe $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $\Omega = \cup_{n=1}^\infty A_n$ y además existe $g_n \in L^q(\mu, X^*)$ tal que

$$G(E \cap A_n) = \int_E g_n d\mu \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}$$

y para toda $E \in \Sigma$.

Así,

$$|G|(A_n) = |G|(\Omega \cap A_n) = \int_\Omega \|g_n\| d\mu = \|g_n\|_1.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^\infty \|g_n\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |G|(A_n) = |G|(\Omega) < \infty.$$

Por consiguiente

$$g = \sum_{n=1}^\infty g_n \quad \text{converge en} \quad L^1(\mu, X^*),$$

y para toda $E \in \Sigma$

$$\begin{aligned} G(E) = \sum_{n=1}^\infty G(E \cap A_n) &= \sum_{n=1}^\infty \int_E g_n d\mu \\ &= \int_E \left(\sum_{n=1}^\infty g_n \right) d\mu = \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

Queda así demostrada la implicación y todo el teorema.

■

Es posible dar una descripción de $L^p(\mu, X)^*$, $1 \leq p < \infty$, cuando X^* no tiene la propiedad de Radon-Nikodým. Se puede demostrar que $L^p(\mu, X)^* \cong V^q(\mu, X^*)$, el espacio de todas las medidas vectoriales con valores en X^* que tienen q-variación acotada, donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ (ver [A.3], pág. 115).

Finalizaremos esta sección con los siguientes comentarios:

Hasta el momento, sólo hemos dado dos ejemplos de espacios que no tienen la propiedad de Radon-Nikodým, a saber, c_0 y $L^1(\mu)$ cuando μ no tiene átomos. También vimos que si μ es puramente atómica entonces todo espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a μ.

Es natural preguntarse qué espacios de Banach tienen la propiedad de Radon-Nikodým. El siguiente resultado nos proporciona una familia de ejemplos.

Proposición 3.16. *Los espacios de Hilbert tienen la propiedad de Radon-Nikodým.*

Demostración.
Sea H un espacio de Hilbert y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Entonces $L^2(\mu, H)$ es él mismo un espacio de Hilbert y por el Teorema de Representación de Riesz para espacios de Hilbert existe una isometría sobre entre $L^2(\mu, H)$ y $L^2(\mu, H)^*$, la cual es lineal conjugada.

Así, podemos permitirnos la identificación

$$L^2(\mu, H) = L^2(\mu, H)^*$$

De igual modo, podemos identificar $H = H^*$. Luego

$$L^2(\mu, H)^* = L^2(\mu, H^*)$$

y debido al Teorema anterior, se sigue que $H = H^*$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

■

Aunque no lo haremos en esta tesis, se pueden demostrar resultados más técnicos que nos permiten dar más ejemplos de espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým.

Por ejemplo puede demostrarse que $(C[0,1], \| \ \|_\infty)$ no tiene la propiedad de Radon-Nikodým (ver [A.3], ejemplo 8, pág. 73).

Asimismo, puede demostrarse que los espacios de Banach reflexivos tienen la propiedad de Radon-Nikodým (ver [A.3], Corolario 13, pág. 76).

Recordemos que un espacio de Banach X es reflexivo si la inclusión canónica

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto \widehat{x}, \end{aligned}$$

donde $\widehat{x}(f) = f(x)$, es sobreyectiva (sabemos que este mapeo es siempre una isometría lineal).

Los espacios de Hilbert son ejemplos particulares de espacios reflexivos. Otros ejemplos conocidos son los espacios de Lebesgue $L^p(m)$, $1 < p < \infty$, esto debido al Teorema de Representación de Riesz para estos espacios. Aquí m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, aunque el resultado es también cierto si m es cualquier medida σ-finita.

Finalmente, puede demostrarse que la propiedad de Radon-Nikodým de un espacio de Banach X respecto a (Ω, Σ, μ) es "independiente" de este espacio de medida y sólo depende del espacio $(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \lambda)$ donde $\mathcal{T} = \partial D$ la frontera del disco unitario, $\mathcal{B}$ los borelianos de $\mathcal{T}$ y λ la medida de Lebesgue normalizada en $\mathcal{T}$, es decir, $d\lambda = \frac{dx}{2\pi}$.

La prueba de esta afirmación está sustentada en los siguientes resultados.

Teorema 3.17. *Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito entonces exis-ten medidas v y ρ sobre Σ, tales que v es puramente atómica, ρ no tiene átomos y*

$$\mu = v + \rho.$$

Demostración.

(Referencia: ver [A.3], pág. 82)

Teorema 3.18. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita.*

1. *Si (Ω, Σ, μ) es puramente atómico, entonces todo espacio de Banach tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (Ω, Σ, μ).*

2. *Si μ no es puramente atómica, entonces un espacio de Banach tiene la propiedad de Radon-Nikodým respecto a $(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \lambda)$ si y sólo si tiene la propiedad de Radon-Nikodým respecto a (Ω, Σ, μ).*

Demostración.

La primera afirmación fue demostrada en las Observaciones 3.8, inciso 3. La segunda afirmación puede consultarse en [A.3], pág. 21-24.

Y para concluir esta sección referimos al lector a [A.3], pág. 218-219, para consultar una lista amplia de espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým y sin dicha propiedad.

Capítulo 4

La Propiedad de Radon-Nikodým y el Teorema de Fatou

En este último capítulo demostraremos la equivalencia entre el Teorema de Radon-Nikodým y el Teorema de Fatou sobre la existencia de límites radiales en casi todo punto de funciones armónicas y acotadas definidas en el disco unitario y con valores en un espacio de Banach X.

Para comprender el caso vectorial necesitamos la teoría escalar, la cual se estudiará en la siguiente sección.

4.1. Funciones Armónicas y Representación de Poisson: el caso escalar

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y conexo, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Diremos que f es armónica si $f \in C^2(\Omega)$ y satisface la ecuación de Laplace $\Delta f = 0$, donde

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Nos centraremos en el estudio de funciones armónicas en el plano. Si $F \in H(\Omega)$, es decir, F es función holomorfa en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, entonces F es armónica y $u = Re(F)$, $v = Im(F)$ son armónicas a valores reales.

El siguiente Teorema es un resultado muy sencillo de verificar utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemman.

Teorema 4.1. *Sea u una función definida en Ω con valores en $\mathbb{R}$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y es simplemente conexo. Entonces u es armónica en Ω si y sólo si existe $F \in H(\Omega)$ tal que $u = Re(F)$.*

Teorema 4.2. *Sea u una función armónica con valores reales definida en el disco $D(0,R)$. Entonces u tiene la siguiente representación*

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} \tag{4.1}$$

para $0 \leq r < R$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ y la convergencia es uniforme en compactos de $D(0,R)$.

Demostración.

Existe $F \in H\left(D(0,R)\right)$ tal que $u = ReF$, además

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

en $D(0,R)$, con convergencia uniforme en compactos de $D(0,R)$.

Así,

$$u(z) = \frac{F(z) + \overline{F(z)}}{2},$$

con $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r = |z| < R$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Entonces

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k} r^k e^{-ik\theta}\right].$$

Definiendo $a_0 = \frac{1}{2}(c_0 + \overline{c_0}) = Re(c_0)$

$$\begin{array}{ll} \text{si} & k > 0 \quad a_k = c_k. \\ \text{si} & k < 0 \quad a_k = \overline{c_k}. \end{array}$$

Obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta},$$

con convergencia uniforme en compactos de $D(0,R)$.

■

Supongamos que $R > 1$ y restrinjamos (4.1) al círculo unitario ($r = 1$). Generamos la función

$$t \to u(e^{it}),$$

con $t \in [-\pi, \pi]$, tal que

$$u(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt},$$

la cual converge uniformemente para $t \in [-\pi, \pi]$.

Calculemos el coeficiente de Fourier de esta función correspondiente a la frecuencia n

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})e^{-int} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}\right)e^{-int}dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}dt \\ &= a_n.\end{aligned}$$

Substituyendo en (4.1) obtenemos

$$\begin{aligned}u\left(re^{i\theta}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})e^{-ikt}dt\right) r^{|k|}e^{ik\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{k(\theta-t)}\right)u(e^{it})dt.\end{aligned}$$

Definición 4.3. *El núcleo de Poisson para el disco unitario D es la función*

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt} \quad t \in [-\pi, \pi]. \tag{4.2}$$

La serie (4.2) converge uniformemente si $0 \le r < 1$.

Además observemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} \\ &= 1 + 2Re\sum_{k=1}^{\infty}(re^{it})^k \\ &= 1 + 2Re\left[\frac{1}{1-re^{it}} - 1\right] \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \quad t \in [-\pi, \pi].$$

También observemos que
$$\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(t) \leq \frac{1+r}{1-r}$$
para $r \in [0,1)$ y para toda $t \in [-\pi, \pi]$.

Así, de todo lo anterior podemos concluir:

Teorema 4.4. *Sea u armónica real definida en $D(0,R)$ donde $R > 1$. Entonces*
$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})dt \\ &= (P_r * u_1)(\theta), \end{aligned}$$
para $0 \leq r < R$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$, donde $u_1(t) = u(e^{it})$.

Haciendo algunos cálculos podemos observar fácilmente que
$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} = Re\left[\frac{1+z}{1-z}\right], \tag{4.3}$$
con $t \in [-\pi, \pi]$, $0 < r < 1$, $z = re^{it}$, de donde se observa claramente que $P(z) = P_r(t)$ es armónica como función de z.

Propiedades 4.5. *1. $P_r(t)$ es positivo, continuo y 2π-periódico como función de $t \in \mathbb{R}$.*

2. *Para toda $r \in (0,1)$*
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1.$$

3. *Para toda $\delta > 0$*
$$\sup_{\delta < |t| \leq \pi} P_r(t) \longrightarrow 0,$$
cuando $r \to 1$.

Demostración.

1. Se obtiene directamente de (4.3) y dado que para $t \in \mathbb{R}$
$$\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(t) \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

2.
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt}dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. Supongamos que $\delta < |t| \leq \pi$. Dado que $\cos\delta \geq \cos|t| = \cos t$, tenemos que

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} \\ &\leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta} \\ &\leq \frac{1-r^2}{1-\cos^2\delta}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$0 \leq P_r(t) \leq \frac{1-r^2}{1-\cos^2\delta} \longrightarrow 0,$$

cuando $r \to 1$. Así

$$\sup_{\delta<|t|\leq\pi} P_r(t) \longrightarrow 0,$$

cuando $r \to 1$.

■

El núcleo de Poisson es un caso particular de:

Definición 4.6. *Una identidad aproximada (o una aproximación de la identidad) en $\mathcal{T} = \partial D$, D el disco unitario, es una familia de funciones en $L^1(\mathcal{T})$, $(\phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ donde I es un conjunto dirigido que cumple:*

1. $$\sup_{\alpha\in I} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_\alpha(t)|dt \equiv K < \infty.$$

2. *Para toda $\alpha \in I$*
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_\alpha(t) = 1.$$

3. *Para toda $\delta > 0$*
$$\int_{\delta<|t|\leq\pi} |\phi_\alpha(t)|dt \longrightarrow 0.$$

Proposición 4.7. *Sea $u : D \to \mathbb{C}$. Entonces u es armónica y*

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt \equiv M < \infty. \tag{4.4}$$

donde $1 < p < \infty$, si y sólo si existe una función $f \in L^p(\mathcal{T})$ tal que

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(t)dt \\ &= (P_r * f)(\theta), \end{aligned}$$

para $0 \leq r < 1$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Además si $u_r(\theta) = u(re^{i\theta})$, *con* $\theta \in [-\pi, \pi]$, *entonces para toda* $0 < r < 1$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u(re^{it}) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq \|f\|_p \quad si \quad 1 < p < \infty.$$

Demostración.

($\Longrightarrow$) Sea $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $(0, 1)$ tal que $r_n \nearrow 1$. Sea

$$f_n(t) = u(r_n e^{it}),$$

entonces para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(r_n e^{it})|^p dt \leq M,$$

entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ se encuentra en una bola cerrada del espacio $L^p(\mathcal{T}) \cong \left(L^{p'}(\mathcal{T}) \right)^*$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, y por el Teorema de Banach Alaoglu dicha bola es débil-* compacta y siendo $L^{p'}$ separable, entonces dicha bola es metrizable en la topología débil-*. Así, existe una subsucesión de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ (que denotaremos del mismo modo para simplificar notación) y una función $f \in L^p(\mathcal{T})$ tal que $f_n \to f$ en la topología débil-* de $(L^{p'}(\mathcal{T}))^* = L^p(\mathcal{T})$. Así para toda $g \in L^{p'}(\mathcal{T})$ tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) g(t) dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt,$$

cuando $n \to \infty$, esto es

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r_n e^{it}) g(t) dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt$$

cuando $n \to \infty$.

Para $g(t) = P_r(\theta - t) \in L^{p'}(t)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(r_n e^{it}) dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt, \tag{4.5}$$

cuando $n \to \infty$.

La función definida en $D(0, r_n^{-1})$, $z \mapsto u(r_n z)$, es armónica en un disco de radio $r > 1$. Así, por el Teorema 4.4 el lado izquierdo de (4.5) es $u(r_n re^{i\theta})$. Por tanto

$$u\left(r_n re^{i\theta} \right) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt$$

cuando $n \to \infty$, y como $u\left(r_n re^{i\theta} \right) \to u(re^{i\theta})$ cuando $r_n \to 1$, se sigue que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt.$$

($\Longleftarrow$) Veamos que u es armónica y que

$$\sup_{0\leq r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|^p dt \equiv M < \infty.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\theta-t)}f(t)dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right]. \end{aligned}$$

Sea

$$a_k = \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Entonces si f toma valores reales

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|}e^{ik\theta} \\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} r^k e^{-ik\theta} \\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta} \\ &= 1+2Re\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} \\ &= Re\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(re^{i\theta}\right)^k\right]. \end{aligned}$$

Es decir

$$u(z) = Re\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right],$$

por tanto u es armónica.

Si f toma valores en $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= P_r * (Ref + iImf)(\theta) \\ &= (P_r * Ref)(\theta) + i(P_r * Imf)(\theta). \end{aligned}$$

Por tanto u es armónica.

Ahora si $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathcal{T})$ entonces

$$\begin{aligned}
\|u(re^{i\cdot})\|_p &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\|f(\cdot - t)\|_p dt \\
&= \|f\|_p \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt \\
&= \|f\|_p,
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se debe a la desigualdad integral de Minkowski y la última igualdad a la Propiedad 4.5 inciso 2.

■

Proposición 4.8. *Sea $u : D \to \mathbb{C}$. Entonces u es armónica en el disco unitario D y u está uniformemente en $L^\infty(\mathcal{T})$ es decir:*

$$\sup\left\{|u(re^{it})| \equiv M < \infty : 0 \leq r \leq 1, -\pi \leq t \leq \pi\right\}, \tag{4.6}$$

si y sólo si existe $f \in L^\infty(\mathcal{T})$ tal que

$$\begin{aligned}
u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt \\
&= (P_r * f)(\theta),
\end{aligned}$$

con $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Además si $u_r(\theta) = u(re^{i\theta})$ con $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|u_r\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Demostración.

Es la misma prueba que la de la proposición anterior pero ahora observando que $L^\infty(\mathcal{T}) = \left(L^1(\mathcal{T})\right)^*$ y que $L^1(\mathcal{T})$ es separable. Además, supongamos que $f \in L^\infty(\mathcal{T})$, entonces

$$\begin{aligned}
|u(re^{i\theta})| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)|f(\theta - t)|dt \\
&\leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt \\
&= \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

■

En el siguiente teorema observaremos qué ocurre cuando $p = 1$.

Teorema 4.9. *Sea $u : D \to \mathbb{C}$. Entonces u es armónica en D y está uniformemente en $L^1(\mathcal{T})$, es decir*

$$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|dt \equiv M < \infty, \tag{4.7}$$

si y sólo si existe una medida de Borel compleja en $\mathcal{T}$ tal que

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t) = (P_r * \mu)(\theta)$$

En tal caso, si $u_r(\theta) = u(re^{i\theta})$, con $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\sup_{0<r<1} \|u_r\|_1 \leq \frac{1}{2\pi}|\mu|(T).$$

Demostración.
($\Longrightarrow$) sea $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $r_n \nearrow 1$ y $f_n(t) = u(r_n e^{it})$. Dado que

$$\|f_n\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left|u\left(r_n e^{it}\right)\right| dt \leq M$$

(f_n) está en una bola cerrada de $L^1(\mathcal{T}) \hookrightarrow M(\mathcal{T}) = (C(\mathcal{T}))^*$, donde $M(\mathcal{T})$ es el espacio de Banach formado por las medidas de Borel complejas en $\mathcal{T}$ con la norma $\|\mu\| = |\mu|(\mathcal{T})$, pues dada $f \in L^1(\mathcal{T})$

$$\begin{aligned} L^1(\mathcal{T}) &\hookrightarrow M(\mathcal{T}) \\ f &\longmapsto \mu_f, \end{aligned}$$

donde

$$\mu_f(E) = \frac{1}{2\pi} \int_E f(x)dx.$$

y además

$$\|\mu_f\| = |\mu_f|(\mathcal{T}) = \frac{1}{2\pi} \int_T |f|dx = \|f\|_1,$$

donde la primera igualdad se tiene por definición y la segunda fue demostrada en el Teorema 2.17.

Como $M(\mathcal{T})$ es isométricamente isomorfo a $(C(\mathcal{T}))^*$ y $C(\mathcal{T})$ es separable dicha bola es débil-* compacta y es metrizable en esa topología. Así existe una subsucesión de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ que denotaremos de la misma forma y $\mu \in M(\mathcal{T})$ tal que $f_n \to \mu$ en la topología débil-* de $(C(\mathcal{T}))^*$, esto es: para toda $g \in C(\mathcal{T})$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)g(t)dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)d\mu(t).$$

Sea $g(t) = P_r(\theta - t)$ la cual es continua en $\mathcal{T}$, entonces

$$u(r_n re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(r_n e^{it})dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t),$$

y como

$$u(r_n re^{it}) \longrightarrow u(re^{i\theta})$$

cuando $n \to \infty$, se sigue que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t).$$

$(\Longleftarrow)$

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\theta-t)}d\mu(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}d\mu(t)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|}e^{ik\theta}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde

$$a_k = \widehat{\mu}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}d\mu(t),$$

los coeficientes de Fourier de μ.

Supongamos que μ toma valores reales, de (4.8) tenemos que

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} r^k e^{-ik\theta} \\ &= a_0 + 2Re\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta}, \end{aligned}$$

y haciendo $z = re^{i\theta}$ tenemos que

$$u(re^{i\theta}) = Re\left[a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right],$$

la cual es armónica en D pues $a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ es holomorfa en D.

Ahora, si μ toma valores en $\mathbb{C}$ se escribe $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, con μ_1 y μ_2 reales y se aplica el caso anterior.

Finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t)\right|dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d|\mu|(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)dt\right]d|\mu|(t) \\
&= \frac{1}{2\pi}|\mu|(\mathcal{T}),
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se tiene por el Teorema de Fubini y la última igualdad por la Propiedad 4.5 inciso 2.

■

Corolario 4.10. *Sea u armónica en D y positiva, entonces existe una medida de Borel positiva μ en $\mathcal{T}$ tal que $u = P(\mu)$, es decir,*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t).$$

Demostración.

Para cada $r \in (0,1)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(re^{it})dt = u(0),$$

donde la última igualdad se debe a la Propiedad del Valor Medio para funciones holomorfas.

Por tanto u está uniformemente en $L^1(\mathcal{T})$ y así existe $\mu \in M(\mathcal{T})$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t).$$

Además μ es positiva porque es el límite débil-* de medidas positivas.

■

4.2. Comportamiento Frontera de Integrales de Poisson

Teorema 4.11. *Sea $(\phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ una identidad aproximada en $\mathcal{T}$ y sea f una función 2π periódica. Entonces*

1. *$\phi_\alpha * f \to f$ en $L^p(\mathcal{T})$ siempre que $f \in L^p(\mathcal{T})$, $1 \leq p < \infty$.*
2. *$\phi_\alpha * f \to f$ uniformemente en $\mathcal{T}$ si $f \in C(\mathcal{T})$.*

Demostración.

1. Supongamos que $f \in L^p(\mathcal{T})$, $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned}
|(\phi_\alpha * f)(\theta) - f(\theta)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\phi_\alpha(t)dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\phi_\alpha(t)dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t) - f(\theta)|\, |\phi_\alpha(t)|dt
\end{aligned}$$

Por la desigualdad integral de Minkowski

$$\begin{aligned}
\|\phi_\alpha * f - f\|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - t) - f\|_p |\phi_\alpha(t)|dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} \|f(\cdot - t) - f\|_p |\phi_\alpha(t)|dt \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} \|f(\cdot - t) - f\|_p |\phi_\alpha(t)|dt \\
&\leq \sup_{|t| < \delta} \|f(\cdot - t) - f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} |\phi_\alpha(t)|dt \\
&+ \frac{\|f\|_p}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |\phi_\alpha(t)|dt,
\end{aligned}$$

donde δ la elegiremos de la siguiente manera:

Mostraremos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(\cdot - t) - f\|_p < \varepsilon \quad \text{si} \quad |t| < \delta,$$

y así, $\sup \|f(\cdot - t) - f\|_p \leq \varepsilon$ si $|t| < \delta$. En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$, existe $g \in C(\mathcal{T})$ tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Para $\theta \in [-\pi, \pi]$, sean $f_t(\theta) = f(\theta - t) - f(\theta)$, $g_t(\theta) = g(\theta - t) - g(\theta)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|f_t\|_p &\leq \|f_t - g_t\|_p + \|g_t\|_p \\
&\leq \|f(\cdot - t) - g(\cdot - t)\|_p + \|f - g\|_p + \|g_t\|_p \\
&< 2\varepsilon + \|g_t\|_p. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Como $g_t(\theta) \to 0$ si $t \to 0$, y para toda t y $\theta \in [-\pi, \pi]$ $|g_t(\theta)| \leq 2\|g\|_\infty$, por el Teorema de Convergencia Dominada tenemos que $\|g_t\|_p \to 0$ si $t \to 0$.

Es decir, existe $\delta > 0$ tal que $|t| < \delta$ implica $\|g_t\|_p < \varepsilon$. Por tanto, de (4.9) si $|t| < \delta$ se sigue que $\|f_t\|_p < 3\varepsilon$, y $\|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p < 3\varepsilon$.

Así, para el δ hallado previamente

$$\begin{aligned}
\|\phi_\alpha * f - f\|_p &\leq \sup_{|t|\leq\delta} \|f(\cdot - t) - f\|_p \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |\phi_\alpha(t)|dt + \frac{\|f\|_p}{\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} |\phi_\alpha(t)|dt \\
&\leq 3\varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_\alpha(t)|dt + \frac{\|f\|_p}{\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} |\phi_\alpha(t)|dt \\
&\leq \varepsilon K + \frac{\|f\|_p}{\pi}\varepsilon,
\end{aligned}$$

si α es "suficientemente grande", por la Definición 4.6.

2. Ahora sea $f \in C(\mathcal{T})$, como f es uniformemente continua en $\mathcal{T}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|u - v| < \delta$ implica $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$.

Entonces para toda $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
|(f * \phi_\alpha)(\theta) - f(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t) - f(\theta)||\phi_\alpha(t)|dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} |f(\theta - t) - f(\theta)|\,|\phi_\alpha(t)|dt \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} |f(\theta - t) - f(\theta)|\,|\phi_\alpha(t)|dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_\alpha(t)|dt + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} |\phi_\alpha(t)|dt \\
&\leq \varepsilon K + \varepsilon,
\end{aligned}$$

de nuevo por la Definición 4.6, si α es "suficientemente grande".

■

Corolario 4.12. *1. Si $f \in L^p(\mathcal{T})$, $1 \leq p < \infty$ y $u(re^{i\theta}) = (P_r * f)(\theta)$ con $0 < r < 1$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u(re^{it}) - f(t)\right|^p dt \longrightarrow 0,$$

cuando $r \to 1$.

2. Si $f \in C(\mathcal{T})$, $u(re^{i\theta}) = (P_r * f)(\theta)$ con $re^{i\theta} \in D$. Entonces

$$u(re^{it}) \longrightarrow f(t) \quad \textit{uniformemente en} \quad t \in [-\pi, \pi],$$

cuando $r \to 1$.

Demostración.

Como $(P_r)_{0<r<1}$ es una identidad aproximada el resultado se sigue directamente del teorema anterior.

■

Observemos que con los resultados anteriores podemos resolver el **Pro-blema Clásico de Dirichlet**, el cual afirma que dada una función $f \in C(\mathcal{T})$ podemos hallar una función $u : \overline{D} \to \mathbb{C}$ tal que u es armónica en D, u es continua en $\overline{D}$ y u restringida a la frontera de D coincide con f. Una solución de este problema (de hecho es única) es la función $\tilde{u} : \overline{D} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\tilde{u}(re^{i\theta}) = \begin{cases} (P_r * f)(\theta) & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ f(\theta) & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

En efecto, sabemos que $\tilde{u}(re^{i\theta}) = (P_r * f)(\theta) \equiv u(re^{i\theta})$ es armónica y además $\tilde{u}$ coincide con f en la frontera de D. Sólo falta probar que $\tilde{u}$ es continua en ∂D.

Sea $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ y $z = re^{i\theta}$, con $0 \leq r < 1$, donde $z_0 = e^{i\theta} \in \partial D$. Entonces debido a la continuidad de f y al Corolario 4.12 parte 2 tenemos

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(z) - \tilde{u}(z_0)| &= |u(z) - f(\theta_0)| = |u(z) - f(\theta)| + |f(\theta) - f(\theta_0)| \\ &= |u(re^{i\theta}) - f(\theta)| + |f(\theta) - f(\theta_0)| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

si $z = re^{i\theta} \longrightarrow z_0 = e^{i\theta_0}$. Y si $r = 1$

$$|\tilde{u}(z) - \tilde{u}(z_0)| = |f(\theta) - f(\theta_0)| \longrightarrow 0,$$

si $z = re^{i\theta} \longrightarrow z_0 = e^{i\theta_0}$. Con esto queda resuelto el Problema clásico de Dirichlet.

Para el caso $p = \infty$ se tiene el siguiente resultado cuya prueba, aunque sencilla, la omitiremos para no abultar demasiado esta sección. El lector interesado puede consultar [A.3], pág. 11.

Teorema 4.13. *Sea $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ una identidad aproximada en $\mathcal{T}$. Entonces*

1. *Si $f \in L^\infty(\mathcal{T})$ y $f_\alpha = \phi_\alpha * f$ tenemos que $f_\alpha \to f$ en la topología débil-* de $M(\mathcal{T})$.*
2. *Si $\mu \in M(\mathcal{T})$ y $f_\alpha = \phi_\alpha * \mu$ se tiene que $f_\alpha \to \mu$ en la topología débil-* de $M(\mathcal{T})$.*

Corolario 4.14. *1. Sea $f \in L^\infty(\mathcal{T})$ y $u = P(f)$, es decir $u(re^{i\theta}) = (P_r * f)(\theta)$. Entonces $u(re^{i\theta}) \to f$ cuando $r \to 1$ en la topología débil-* de $L^\infty(\mathcal{T})$.*

2. Sea $\mu \in M(\mathcal{T})$ y

$$u = P(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t).$$

Entonces $u(re^{i\cdot}) \to \mu$, cuando $r \to 1$ en la topología débil- de $M(\mathcal{T})$.*

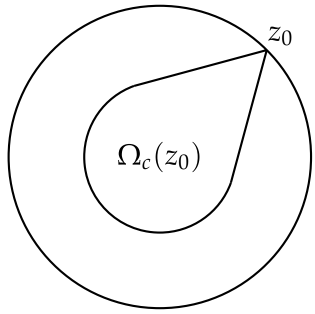

Figura 4.1: Región de convergencia no tangencial

Enseguida abordamos el estudio del comportamiento frontera puntual de la integral de Poisson de una medida. De manera más general examinamos el comportamiento no tangencial, es decir, cuando nos aproximamos a la frontera sobre regiones del tipo 4.1, en las cuales ninguna curva que se aproxime a z_0 puede ser tangente a ∂D.

Teorema 4.15. *Sean μ en $M(\mathcal{T})$ y $u = P(\mu)$. Sea*

$$F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t), \qquad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Entonces F es una función de variación acotada en $[-\pi, \pi]$ y por tanto exis-te $F'(\theta)$ para casi toda θ en $[-\pi, \pi]$. Sea θ_1 uno de tales puntos. Entonces $u(re^{i\theta}) \to F'(\theta_1)$ cuando $z = re^{i\theta} \overset{N.T.}{\to} e^{i\theta_1}$ (no tangencialmente), es decir: $u(re^{i\theta}) \to F'(\theta_1)$ cuando $z = re^{i\theta}$ se mueve dentro de la siguiente región

$$\{re^{i\theta} : |\theta - \theta_1| < c(1 - r)\} \tag{4.10}$$

para cada $c > 0$. (A este límite le llamamos límite no tangencial).

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\theta_1 = 0$ y que $F'(\theta_1) = F'(0) = 0$, pues una vez mostrado el Teorema para este caso el caso general procede considerando la medida $d\lambda(t) = d\mu(t) - F'(0)dt$.

Sea $\varepsilon > 0$, como F es diferenciable en 0 y $F'(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{F(t)}{t}\right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |t| < \delta.$$

Podemos elegir $|1 - r|$ suficientemente pequeño tal que $c(1 - r) < \frac{\delta}{4}$. Así $|\theta| < \frac{\delta}{4}$.

Demostraremos que $u(re^{i\theta}) \to F'(\theta_1) = 0$ uniformemente en θ para r suficientemente cerca de 1.

Podemos escribir

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|<\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|<\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t) \right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|<\pi} P_r(\theta - t)d|\mu|(t) \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{|t|>\frac{\delta}{2}} P_r(t)\int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t), \end{aligned}$$

pues obsérvese que si $|t| > \delta$ y $|\theta| < \delta/4$

$$|\theta - t| \geq |t| - |\theta| > \delta - \delta/4 \geq \delta/2,$$

y como

$$\sup_{|t|>\delta/2} P_r(t) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad r \to 1$$

se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} P_r(\theta - t)d|\mu|(t) \longrightarrow 0,$$

cuando $r \to 1$.

Ahora estimemos el sumando restante en (4.11); integrando por partes tene-mos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\left[P_r(\theta - t)F(t)\right]_{-\delta}^{\delta} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F(t)\frac{\partial P_r(\theta - t)}{\partial t}dt. \tag{4.12}$$

Se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\left[P_r(\theta - t)F(t)\right]_{-\delta}^{\delta} = \frac{1}{2\pi}P_r(\theta - \delta)F(\delta) - \frac{1}{2\pi}P_r(\theta + \delta)F(-\delta).$$

Pero $|\theta \pm \delta| \geq |\delta| - |\theta| > \delta - \delta/4 > \delta/2$, por tanto

$$P_r(\theta \pm \delta) \leq \sup_{|t|>\delta/2} P_r(t) \longrightarrow 0,$$

cuando $r \to 1$.

De aquí y por (4.12) el problema se reduce a estudiar la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\partial P_r(\theta-t)}{\partial t}F(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{2(1-r^2)r\,\mathrm{sen}(\theta-t)}{\left(1-2r\cos(\theta-t)+r^2\right)^2}F(t)dt.$$

Podemos tomar sin pérdida de generalidad $\theta>0$ y dividir a esta integral en

$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\delta}^{0}+\int_{0}^{2\theta}+\int_{2\theta}^{\delta}\right]\frac{2(1-r^2)r\,\mathrm{sen}\,(\theta-t)}{\left(1-2r\cos(\theta-t)+r^2\right)^2}F(t)dt. \tag{4.13}$$

Para el primer sumando, usamos

$$|F(t)|<\varepsilon|t|=\varepsilon(-t)\leq\varepsilon(\theta-t),$$

y haciendo el cambio de t por $(\theta-t)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\left|\int_{\theta}^{\theta+\delta}\frac{(1-r^2)r\,\mathrm{sen}\,t}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}F(t)dt\right| &\leq\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+\delta}\frac{(1-r^2)r\,\mathrm{sen}\,t}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}tdt\\ &\leq\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{(1-r^2)r\,\mathrm{sen}\,t}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}tdt.\end{aligned}$$

Ahora integramos por partes esta última integral y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{2(1-r^2)r\,\mathrm{sen}\,t}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}tdt &=\frac{\varepsilon}{2\pi}\left(-\left[tP_r(t)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}P_r(t)dt\right)\\ &=\frac{\varepsilon}{2\pi}\left(-\left[\frac{t(1-r^2)}{1+r^2-2r\cos t}\right]_0^{\pi}+\pi\right)\\ &=\frac{\varepsilon}{2\pi}\left[\frac{-\pi(1-r)(1+r)}{1+r^2+2r}+\pi\right]\\ &=\frac{\varepsilon}{2}\left[-\frac{(1-r)}{(1+r)}+1\right]\\ &\leq\frac{\varepsilon}{2}\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

Para el segundo sumando de (4.13), usamos

$$|F(t)|<\varepsilon t\quad\text{y}\quad|\theta-t|<\theta,$$

de lo cual se sigue que $|\text{sen}(\theta - t)| < \theta$, y así

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\theta} \frac{2(1-r^2)r\,\text{sen}(\theta-t)}{(1-2r\cos(\theta-t)+r^2)^2}F(t)dt\right| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\theta}\frac{2(1-r)(1+r)r\theta t}{(1-r)^4}dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\theta}\frac{2(1+r)r\theta t}{(1-r)^3}dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{(1+r)r\theta}{(1-r)^3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\theta} \\
&= \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{(1+r)r\theta}{(1-r)^3}\frac{8\theta^2}{2} \\
&\leq \frac{4\varepsilon}{\pi}\frac{(1+1)}{(1-r)^3}\theta^3 \\
&< \frac{8c^3}{\pi}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Para el tercer sumando de (4.13) usamos

$$|F(t)| < \varepsilon t \leq 2\varepsilon(t-\theta),$$

y hacemos lo mismo que con el primer sumando usando el cambio de t por $t-\theta$. ■.

Corolario 4.16. *Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$, y sea $u = P(f)$. Entonces $u(z) \to f(\theta)$ cuando $z \overset{N.T.}{\to} e^{i\theta}$ para casi toda $\theta \in \mathcal{T}$.*

Demostración. Sea $d\mu(t) = f(t)dt$, y

$$F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t) = \int_0^\theta f(t)dt.$$

Entonces por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue $F'(\theta) = f(\theta)$ ctp y así

$$u(z) \longrightarrow f(\theta),$$

cuando $z \overset{N.T.}{\to} e^{i\theta}$.

En particular para casi toda $\theta \in T$ existe el límite radial

$$\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta}) = f(\theta).$$

■

Observemos que el corolario anterior también es válido para $L^p(\mathcal{T})$ con $1 \leq p \leq \infty$, ya que $L^\infty(\mathcal{T}) \subset L^p(\mathcal{T}) \subset L^1(\mathcal{T})$ para $1 \leq p \leq \infty$. Además si $u : D \to \mathbb{C}$ es armónica y u satisface (4.4) ó (4.6) o bien (4.7), entonces u tiene valores frontera no tangenciales ctp (y por tanto radiales ctp). De modo particular tenemos el **Teorema de Fatou**:

"**Toda función armónica y acotada en D tiene valores frontera no tangenciales ctp.**" (4.14)

Como comentario adicional es pertinente señalar que la construcción de funciones armónicas en el disco unitario sin límites no tangenciales ctp. es un asunto no trivial. Por otra parte, en [A.3], vol. I, pág. 280, se hace la siguiente construccón: Sea γ_0 una curva cerrada simple que pasa por el punto $z = 1$ y cuyos puntos restantes yacen en el interior del círculo unitario. Supóngase además que γ_0 es tangente al círculo unitario en $z = 1$ y que γ_θ es la curva que se obtiene rotando a γ_0 alrededor del origen por un ángulo θ. Entonces usando productos de Blaschke se puede construir una función F analítica y acotada definida en el disco unitario tal que, para casi toda θ, $F(z)$ no tiende a algún límite cuando z tiende a $e^{i\theta}$ dentro de γ_θ.

Por último, cabe destacar que cuando una función armónica $u : D \to \mathbb{C}$ satisface que

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt < \infty \quad \text{para algún} \quad p > 1$$

entonces u se puede recuperar a través de su función frontera. De hecho, sabemos que $u = P(f) = (P_r * f)$.

Sin embargo, cuando $p = 1$, es decir, si u es tal que

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|u(re^{it})\right| dt < \infty \tag{4.15}$$

no siempre es posible recuperar a u sólo conociendo sus valores frontera no tangenciales, pues u no es la integral de Poisson de su función frontera. Por ejemplo, sea

$$u(re^{it}) = P_r(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt},$$

la cual es una función armónica que satisface (4.15), su función frontera es 0, pues $P_r(t) \to 0$ cuando $r \to 1$ para toda $t \neq 0$ en $[-\pi, \pi]$. Sin embargo $u > 0$, y no puede ser la integral de Poisson del 0, la cual es idénticamente cero. De hecho $u = P(\delta)$, donde δ es la delta de Dirac.

4.3. Funciones Armónicas Vectoriales

En esta sección demostraremos una caracterización muy útil de la armonicidad en el caso vectorial.

Definición 4.17. *Sea $u : D \to X$, donde X es un espacio de Banach, diremos que:*

1. u **es continua en** $x_0 \in D$ *si*

$$\lim_{x \to x_0} \|u(x) - u(x_0)\|_X = 0.$$

2. u **es diferenciable en** $x_0 \in D$ *si existe* $u'(x_0) \in X$ *tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = u'(x_0).$$

   $u'(x_0)$ *es la derivada de* u *en* x_0.

3. u **es armónica** *si* $u \in C^2(D, X)$, *es decir,* u *es continua con segundas derivadas continuas y cumple la ecuación de Laplace* $\Delta u = 0$.

4. u **es débilmente armónica** *si* $\langle u(\cdot), x^* \rangle$ *es armónica para toda* $x^* \in X^*$.

Proposición 4.18. *Sea $u : D \to X$, con X un espacio de Banach, y supóngase que*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : D \to X$$

existe. Entonces, para toda $x^* \in X$ se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \langle u(z), x^* \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} u(z), x^* \right\rangle.$$

Demostración.
Observemos que

$$\frac{\langle u(z+h), x^* \rangle - \langle u(z), x^* \rangle}{h} = \left\langle \frac{u(z+h) - u(z)}{h}, x^* \right\rangle,$$

y como x^* es continua entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} \langle u(z), x^* \rangle &= \lim_{h \to 0} \left\langle \frac{u(z+h) - u(z)}{h}, x^* \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{h \to 0} \frac{u(z+h) - u(z)}{h}, x^* \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial u(z)}{\partial x_1}, x^* \right\rangle.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\langle u(z), x^*\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} u(z), x^* \right\rangle.$$

■

Corolario 4.19. *Si $u \in C^2(D, X)$, entonces para todo $x^* \in X^*$*

$$\Delta\langle u(z), x^*\rangle = \langle \Delta u(z), x^*\rangle.$$

■

Proposición 4.20. *Sea X un espacio de Banach, $u : D \to X$. Son equivalentes:*

1. *u es armónica.*
2. *u es débilmente armónica.*
3. *Para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe $c_n \in X$ tal que*

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}, \tag{4.16}$$

donde la serie es absolutamente convergente en la topología de X y la convergencia es uniforme sobre compactos de D.

Demostración.
1)⇒ 2). Como u es armónica tenemos que $\Delta u = 0$. Sea $x^* \in X^*$. Entonces

$$\Delta\langle u(\cdot), x^*\rangle = \langle \Delta u(\cdot), x^*\rangle = 0,$$

por tanto u es débilmente armónica.

2) ⇒ 3). Sea $re^{i\theta} \in D$ y elíjase r_1 tal que $r < r_1 < 1$. Por la representación usual de Poisson tenemos para $\rho < r_1$

$$\begin{aligned}
\left\langle u(\rho e^{i\theta}), x^*\right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{T}} P_\rho(\theta - t)\left\langle u(r_1 e^{it}), x^*\right\rangle dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{T}} \left\langle P_\rho(\theta - t) u(r_1 e^{it}), x^*\right\rangle dt \\
&= \left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{T}} P_\rho(\theta - t) u(r_1 e^{it}) dt, x^*\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle u(\rho e^{i\theta}), x^*\right\rangle = \left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{T}} P_\rho(\theta - t) u(r_1 e^{it}) dt, x^*\right\rangle,$$

para toda $x^* \in X^*$ y $\rho < r_1$, de aquí que

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} P_\rho(\theta - t) u(r_1 e^{it}) dt.$$

Si $r < r_2$, con $r_2 \neq r_1$ tenemos también para $\rho < r_2$

$$\left\langle u(\rho e^{i\theta}), x^* \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} P_\rho(\theta - t) \left\langle u(r_2 e^{it}), x^* \right\rangle dt,$$

por lo que procediendo como antes obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} P_\rho(\theta - t) u(r_1 e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} P_\rho(\theta - t) u(r_2 e^{it}) dt, \tag{4.17}$$

es decir, el valor de la integral no varía eligiendo cualquier $r < R$.

Ahora escribimos la representación en serie del núcleo de Poisson y obtenemos

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta - t)} \right) u(r_1 e^{it}) dt.$$

Por la convergencia absoluta en $D(0, r_1)$, y uniforme en $\overline{D(0, r_1)}$ de la serie se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta - t)} \right) u(r_1 e^{it}) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} u(r_1 e^{it}) e^{-int} dt \right) \rho^{|n|} e^{in\theta}.$$

Si llamamos

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} u(r_1 e^{it}) e^{-int} dt,$$

por (4.17) tenemos que estos coeficientes están determinados de manera única para cada $z \in D$, pues si

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} u(r_2 e^{it}) e^{-int} dt,$$

es otra representación de c_n, con $r_2 \neq r_1$, $r < r_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} u(r_1 e^{it}) e^{-int} dt \right) \rho^{|n|} e^{in\theta} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta - t)} \right) u(r_1 e^{it}) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta - t)} \right) u(r_2 e^{it}) dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} u(r_2 e^{it}) e^{-int} dt \right) \rho^{|n|} e^{in\theta}.
\end{aligned}$$

De aquí que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} u(r_1 e^{it}) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} u(r_2 e^{it}) e^{-int} dt,$$

y por tanto los coeficientes c_n están determinados de manera única para cada $z \in D$. Además como la serie del núcleo de Poisson converge absolutamente en $D(0,r_1)$ y uniformemente en $\overline{D(0,r_1)}$ y c_n es acotado, se sigue que la serie

$$u(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^{|n|} e^{in\theta}$$

converge absolutamente en la topología de X y uniformemente en compactos de D.

3) $\Rightarrow$ 1). Sea $re^{i\theta} \in D$. Debido a que la serie (4.16) es absolutamente convergente y converge uniformemente en compactos de D, podemos intercambiar el laplaciano con la serie (ver [A.3] Teorema 1.26, pág. 20) y obtener

$$\begin{aligned}
\Delta u(re^{i\theta}) &= \Delta\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\left(c_n r^{|n|} e^{in\theta}\right).
\end{aligned}$$

Ahora aplicamos la forma polar de la ecuación de Laplace con $v(re^{i\theta}) = r^{|n|}e^{in\theta}$ para obtener

$$\begin{aligned}
\Delta c_n r^{|n|} e^{in\theta} &= c_n \Delta r^{|n|} e^{in\theta} \\
&= c_n \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right\} \\
&= c_n \frac{1}{r^2} \left\{ r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right\} \\
&= c_n \frac{1}{r^2} \left\{ r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(e^{in\theta}|n| r^{|n|-1}\right)\right) + r^{|n|}e^{in\theta}(-n^2) \right\} \\
&= c_n \frac{1}{r^2} \left\{ r\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{in\theta}|n| r^{|n|}\right) - n^2 r^{|n|}e^{in\theta} \right\} \\
&= c_n \frac{1}{r^2} \left\{ re^{in\theta}|n|^2 r^{|n|-1} - n^2 r^{|n|}e^{in\theta} \right\} \\
&= c_n \frac{1}{r^2}\{0\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto u es armónica.

■

4.4. Equivalencia del Teorema de Radon-Nikodým y el Teorema de Fatou

Definición 4.21. *Un espacio de Banach X se dice que tiene la propiedad de Fatou si para toda función armónica u con valores en X y acotada, es decir* $\sup_{z\in D} \|u(z)\|_X < \infty$*, existe*

$f \in L^\infty([0,1], X)$ tal que

$$\lim_{r\to 1^-} u(re^{2\pi it}) = f(t)$$

para casi todo $t \in [0,1]$.

La demostración del siguiente lema es análoga a la del caso escalar (ver el Teorema 4.15).

Lema 4.22. *Sea $f \in L^1([0,1], X)$. Entonces la integral de Poisson de f, definida por*

$$P(f)(re^{2\pi it}) = \int_0^1 f(s)P_r(t-s)ds$$

es una función armónica con valores en X que verifica

$$\lim_{r\to 1^-} P(f)(re^{it}) = f(t)$$

para casi todo $t \in [0,1]$.

Demostración.
Primero veamos que $P(f)$ es una función armónica. Sea $z = re^{2\pi it}$ y $x^* \in X^*$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta \langle P(f)(z), x^* \rangle &= \Delta \left\langle \int_0^1 f(s)P_r(t-s)ds, x^* \right\rangle \\
&= \Delta \int_0^1 \langle f(s)P_r(t-s), x^* \rangle\, ds \\
&= \int_0^1 \langle \Delta(f(s)P_r(t-s)), x^* \rangle\, ds \\
&= \int_0^1 \langle 0, x^* \rangle\, ds \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se debe al Teorema de Convergencia Dominada y al Corolario 4.19. Por tanto $P(f)$ es armónica con valores en X.

Ahora por el Teorema 2.21, la derivada de

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(e^{it})dt$$

es $f(e^{it})$ casi dondequiera.

Sea θ_1 uno de tales puntos, igual que en el caso escalar podemos suponer $\theta_1 = 0$ y $f(e^{i\theta_1}) = 0$, y proseguimos como en el Teorema 4.15.

Para $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ entonces

$$\left\| \frac{F(t)}{t} \right\| < \varepsilon.$$

Podemos elegir $|r-1|$ suficientemente pequeño de manera que $|\theta| < \delta/4$.

Representando a $P(f)(re^{i\theta})$ como integral de Poisson

$$\begin{aligned} P(f)(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt \\ &= \left[\int_{\delta<|t|<\pi} + \int_{-\delta}^{\delta} \right] P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt. \end{aligned}$$

Como en el caso escalar

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta<|t|<\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt \right\| \leq \sup_{\frac{\delta}{2}<|t|} P_r(t) \|f\|_1$$

que tiende a cero si r tiende a 1, además

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \left[P_r(\theta - t) f(t) \right]_{-\delta}^{\delta} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F(t) \frac{\partial P_r(\theta - t)}{\partial t} dt,$$

el primer sumando tiende a cero y el segundo es igual a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(\theta - t)}{(1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2)^2} F(t) dt.$$

Suponiendo $\theta > 0$, dividimos la integral como

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\delta}^{0} + \int_{0}^{2\theta} + \int_{2\theta}^{\delta} \right] \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(\theta - t)}{(1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2)^2} F(t) dt.$$

Para el primer y tercer sumando, observando que

$$\|F(t)\| < \varepsilon |t| = \varepsilon(-t) \leq \varepsilon(\theta - t)$$

y

$$\|F(t)\| < \varepsilon t < 2\varepsilon(t - \theta),$$

respectivamente, haciendo los cambios t por $\theta - t$ en el primer sumando y $t - \theta$ en el segundo, obtenemos

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{0} \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(\theta - t)}{(1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2)^2} F(t) dt \right\| \leq \varepsilon$$

en el primer sumando y análogamente en el tercero.

Para el segundo sumando usando

$$\|F(t)\| < \varepsilon t \quad \text{y} \quad |\theta - t| < \theta$$

como en el Teorema 4.15 obtenemos

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(\theta - t)}{(1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2)^2} F(t) dt \right\| \leq \frac{8c^3}{\pi} \varepsilon.$$

■

Hacemos la aclaración que de aquí en adelante trabajaremos en $[0, 1]$ en vez de $[-\pi, \pi]$, para facilitar el desarrollo del trabajo, por lo cual se hacen los cambios de variables pertinentes, es decir, $t \mapsto 2\pi t$.

Lema 4.23. *Sea $T \in \mathcal{L}\left(L^1[0,1], X\right)$. Entonces la integral de Poisson de T, definida por*

$$P(T)\left(re^{2\pi it}\right) = T\left(P_r(t - \cdot)\right)$$

es una función armónica con valores en X.

Demostración.
Demostraremos que es débilmente armónica y por la Proposición 4.20 $P(T)$ será armónica.

Sea $x^* \in X^*$, observemos que

$$\begin{aligned} \langle P(T), x^* \rangle \left(re^{2\pi it}\right) &= \left\langle P(T)\left(re^{2\pi it}\right), x^* \right\rangle \\ &= x^*\left(T(P_r(t - \cdot))\right) \\ &= \left(x^* T\right)\left(P_r(t - \cdot)\right) \\ &= f_{x^*}\left(P_r(t - \cdot)\right) \\ &= P(f_{x^*})\left(re^{2\pi it}\right), \end{aligned}$$

donde f_{x^*} es la función que representa al elemento del dual de $L^1([0,1])$ dado por la composición x^*T.

Como

$$\begin{aligned} \Delta P\left(f_{x^*}\right)(z) &= \Delta f_{x^*}\left(P_r(t - \cdot)\right) \\ &= f_{x^*}\left(\Delta P_r(t - \cdot)\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde $z = re^{2\pi it}$, se sigue que $P(T)$ es armónica.

■

Ahora tenemos el siguiente Lema sobre la representación de la Integral de Poisson en el disco en el caso vectorial.

Lema 4.24. *Sea $u : D(0, R) \to X$ armónica, con $R > 1$. Entonces*

$$u\left(re^{2\pi i\theta}\right) = \int_0^1 P_r(\theta - t)u\left(e^{2\pi it}\right)dt, \quad 0 < r < 1.$$

Demostración.

Por el caso escalar, para toda $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned}\left\langle u\left(re^{2\pi i\theta}\right), x^*\right\rangle &= \int_0^1 P_r(\theta - t)\left\langle u\left(e^{2\pi it}\right), x^*\right\rangle dt \\ &= \left\langle \int_0^1 P_r(\theta - t)u\left(e^{2\pi it}\right)dt, x^*\right\rangle,\end{aligned}$$

de donde se concluye la representación deseada.

■

El siguiente Lema será utilizado para demostrar el Teorema central de este Capítulo, sobre la equivalencia del Teorema de Radon-Nikodým y el Teorema de Fatou en un espacio de Banach.

Lema 4.25. *Si Y es un espacio de Banach separable entonces $L^1([0, 1], Y)$ es separable.*

Demostración.

Sabemos que $L^1([0, 1]) \otimes Y$ es denso en $L^1([0, 1], Y)$ (ver Apéndice A.3), así que sólo bastará encontrar un subconjunto denso y a lo más numerable en $L^1([0, 1]) \otimes Y$.

Sea $D = \{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso y a lo más numerable de Y y sea $\varepsilon > 0$. Tomemos cualquier elemento $f \in L^1([0, 1]) \otimes Y$, digamos

$$f = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j, \quad x_j \in Y, \quad f_j \in L^1([0, 1]).$$

Para cada $j = 1, ..., n$ existe $y_j \in D$ tal que

$$\|x_j - y_j\|_Y < \frac{\varepsilon}{2\left(\|f_1\|_1 + ... + \|f_n\|_1\right)}.$$

También como $C[0,1]$ es denso en $L^1[0,1]$ entonces para toda $j = 1, ..., n$ existe $\varphi_j \in C[0,1]$ tal que

$$\|\varphi_j - f_j\|_1 < \frac{\varepsilon}{2\left(\|y_1\|_Y + ... + \|y_n\|_Y\right)}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{n} y_j\varphi_j - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j\right\|_{L^1([0,1],Y)} &\leq \left\|\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_j)f_j\right\|_{L^1([0,1],Y)} \\
&\quad + \left\|\sum_{j=1}^{n}\left(y_j\left(\varphi_j - f_j\right)\right)\right\|_{L^1([0,1],Y)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\|y_j - x_j\|_Y\|f_j\|_1 + \sum_{j=1}^{n}\|y_j\|_Y\|\varphi_j - f_j\|_1 \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, el conjunto $\left\{\sum_{j=1}^{n} y_j\varphi_j : y_j \in D, \varphi \in C[0,1], n \in \mathbb{N}\right\}$ es denso en $L^1\left([0,1]\right) \otimes Y$ pero no es numerable.

Como los polinomios en $[0,1]$ con coeficientes racionales son densos en $C[0,1]$ con la norma $\|\ \ \|_\infty$, si P denota a esta familia tendremos que

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} y_j p_j : y_j \in D, p_j \in P, n \in \mathbb{N}\right\}$$

es denso y a lo más numerable en $L^1\left([0,1]\right) \otimes Y$, pues para f como antes y $\varepsilon > 0$ existe $\varphi_j \in C[0,1]$, $j = 1, ..., n$, tal que

$$\left\|f - \sum_{j=1}^{n} y_j\varphi_j\right\|_{L^1([0,1],Y)} < \varepsilon/2,$$

y también para toda $j = 1, ..., n$ existe $p_j \in P$ tal que

$$\|\varphi_j - p_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\left(\|y_1\|_Y + ... + \|y_n\|_Y\right)},$$

luego

$$\begin{aligned}
\left\|f - \sum_{j=1}^{n} y_j p_j\right\|_{L^1([0,1],Y)} &< \varepsilon/2 + \left\|\sum_{j=1}^{n} y_j(\varphi_j - p_j)\right\|_1 \\
&\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Enseguida formularemos el Teorema principal de este Capítulo que establece la equivalencia entre la propiedad de Radon-Nikodým y el Teorema de Fatou para un espacio de Banach X. Aunque esta equivalencia es válida para espacios de Banach en general, la demostración que aquí presentamos (de hecho, sólo una de las implicaciones) supone que el espacio de Banach X^* es separable. Esta suposición nos permite utilizar el Teorema de Banach Alaoglu, herramienta muy socorrida en Análisis Funcional.

Con el objeto de compensar esta restricción presentamos también un esbozo de dicha demostración en el caso general.

Así, supondremos que X es un espacio de Banach con dual X^* separable. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 4.26. *X tiene la propiedad de Radon-Nikodým si y sólo si X tiene la propiedad de Fatou.*

Demostración.

Supongamos que X tiene la propiedad de Radon-Nikodým. Sea $u : D \to X$ una función armónica y acotada.

Sean $r_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ y $f_n(t) = u\left(r_n e^{2\pi i t}\right)$. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas con valores en X tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty \leq \sup_{z\in D} \|u(z)\| < \infty.$$

Como $X \hookrightarrow X^{**}$ tenemos las inclusiones isométricas

$$C([0,1], X) \hookrightarrow \mathcal{L}\left(L^1([0,1]), X\right) \hookrightarrow \mathcal{L}\left(L^1([0,1]), X^{**}\right) \tag{4.18}$$

dadas por $f \longmapsto T_f$ tal que

$$T_f(\phi) = \int_0^1 \phi(t) f(t) dm(t)$$

y $T \longmapsto jT$ donde $j : X \longrightarrow X^{**}$ es la inclusión canónica.

Para ver que las inclusiones dadas por (4.18) son isométricas procedemos del modo siguiente:

$$\begin{gathered}(C([0,1], X), \|\ \|_\infty) \longrightarrow \left(\mathcal{L}\left(L^1([0,1]), X\right), \|\ \|\right)\\ f \longmapsto T_f.\end{gathered}$$

Como X tiene la propiedad de Radon-Nikodým, de acuerdo al Lema 3.9 y al Teorema 3.10, el operador T_f es representable por $g \in L^\infty([0,1], X)$ y $\|T_f\| = \|g\|_\infty$. Así

$$\int_0^1 f(t)\phi(t)dt = \int_0^1 g(t)\phi(t)dt \quad \text{para toda} \quad \phi \in L^1([0,1])$$

o

$$\int_0^1 (f(t) - g(t))\,\phi(t)dt = 0 \quad \text{para toda} \quad \phi \in L^1([0,1]).$$

Entonces

$$f = g \quad \text{ctp} \quad \text{en} \quad [0,1]. \tag{4.19}$$

(Podemos verificar esta afirmación de la siguiente manera: Si $\beta \in L^\infty([0,1], X)$ es tal que

$$\int_0^1 \beta(t)\phi(t)dt = 0 \quad \text{para toda} \quad \phi \in L^1([0,1]),$$

para toda $x^* \in X^*$ y $\phi \in L^1([0,1])$ tenemos que

$$0 = \left\langle x^*, \int_0^1 \beta(t)\phi(t)dt \right\rangle = \int_0^1 (x^*\beta)(t)\phi(t)dt = 0.$$

Entonces por el Teorema de Representación de Riesz para el caso escalar tenemos

$$\|T_{x^*\beta}\| = \sup_{\|\phi\|_1 \le 1} \left| \int_0^1 (x^*\beta)(t)\phi(t) \right| = \|x^*\beta\|_\infty = 0.$$

Así $x^*\beta = 0$ ctp para toda $x^* \in X^*$, de aquí que $\beta = 0$ ctp.)

Además, de (4.19) se sigue que $\|T_f\| = \|f\|_\infty$.

Ahora consideramos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(L^1([0,1]), X\right) &\longrightarrow \mathcal{L}\left(L^1([0,1]), X^{**}\right) \\ T &\longmapsto jT, \end{aligned}$$

donde j es la inclusión canónica $j : X \to X^{**}$ tal que $j(x) = \widehat{x}$, $\widehat{x}(x^*) = x^*(x)$, con $x^* \in X^*$, y $\|x\|_X = \|\widehat{x}\|_{X^{**}}$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \|jT\|_{\mathcal{L}(L^1([0,1]), X^{**})} &= \sup_{\|\varphi\|_1 \le 1} \|(jT)(\varphi)\|_{X^{**}} \\ &= \sup_{\|\varphi\|_1 \le 1} \|T(\varphi)\|_X \\ &= \|T\|_{\mathcal{L}(L^1([0,1]), X)}. \end{aligned}$$

Con esto concluimos la prueba de nuestra afirmación.

Ahora, de acuerdo al Teorema A.39 y Corolario A.40 se tiene que

$$\begin{aligned}\left(L^1([0,1])\widehat{\otimes}_\pi X^*\right)^* &= \left(L^1\left([0,1],X^*\right)\right)^* \\ &= \mathcal{L}\left(L^1([0,1]),X^{**}\right),\end{aligned}$$

y puesto que la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada en el espacio $L^1\left([0,1],X^*\right)^*$ y $L^1\left([0,1],X^*\right)$ es separable (por ser X^* un espacio separable, ver Lema 4.25), podemos aplicar el Teorema de Banach-Alaoglu y encontrar $T\in\mathcal{L}\left(L^1([0,1]),X^{**}\right)$ y una subsucesión $(n_k)_{k=1}^\infty$ de números naturales tales que $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ converge a T en la topología débil-* de $L^1\left([0,1],X^*\right)^*$.

En particular, tendremos que para toda $\phi\in L^1([0,1])$ y para toda $x^*\in X^*$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1\left\langle u\left(r_{n_k}e^{2\pi it}\right)\phi(t),x^*\right\rangle dt = T(\phi)(x^*),$$

esto es,

$$\lim_{k\to\infty}\left\langle T_{f_{n_k}}(\phi),x^*\right\rangle = \left\langle T(\phi),x^*\right\rangle. \tag{4.20}$$

Veamos primero que

$$T_{f_{n_k}}(\phi)\longrightarrow T(\phi)\quad\text{para toda}\quad\phi\in L^1([0,1]), \tag{4.21}$$

y que $T(\phi)\in X$.

Sea $\phi_m(t)=e^{-2\pi imt}$, con $m\in\mathbb{Z}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}T_{f_{n_k}}(\phi_m) &= \int_0^1 f_{n_k}(t)e^{-2\pi imt}dt \\ &= \widehat{f}_{n_k}(m).\end{aligned}$$

Afirmamos que $\left(\widehat{f}_{n_k}(m)\right)_{k=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en X para cada $m\in\mathbb{Z}$. En efecto; si $k\le k'$ tenemos que $0<r_{n_k}<r_{n_{k'}}<1$, luego

$$\begin{aligned}f_{n_k}(t) &= u\left(r_{n_k}e^{2\pi it}\right) \\ &= u\left(r_{n_{k'}}\left(\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}\right)e^{2\pi it}\right) \\ &= \int_0^1 P_{\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}}(t-\theta)u\left(r_{n_{k'}}e^{2\pi i\theta}\right)d\theta \\ &= \left(P_{\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}} * f_{n_{k'}}\right)(t),\end{aligned}$$

para toda $t \in [0,1]$.

Entonces para toda $m \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\widehat{f}_{n_k}(m) = \widehat{P}_{\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}}(m)\widehat{f}_{n_{k'}}(m).$$

Usando la representación para el núcleo de Poisson en serie obtenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_{\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}}(m) &= \int_0^1 P_{\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}}(t)e^{-2\pi imt}dt \\
&= \int_0^1 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}\right)^{|l|} e^{2\pi ilt}e^{-2\pi imt}dt \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}\right)^{|l|} \int_0^1 e^{2\pi i(l-m)t}dt \\
&= \left(\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}\right)^{|m|}.
\end{aligned}$$

Así, para toda $m \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f}_{n_k}(m) = \left(\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}\right)^{|m|} \widehat{f}_{n_{k'}}(m).$$

Por consiguiente, para cada $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{f}_{n_k}(m) - \widehat{f}_{n_{k'}}(m)\right\| &= \left|\left(\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}}\right)^{|m|} - 1\right| \left\|\widehat{f}_{n_{k'}}(m)\right\| \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

cuando k, $k' \longrightarrow \infty$, porque $\frac{r_{n_k}}{r_{n_{k'}}} \longrightarrow 1$ y $\left\|\widehat{f}_{n_{k'}}(m)\right\|$ es acotado en X para toda $m \in \mathbb{Z}$ ya que u es acotada.

Así, como X es completo, para cada $m \in \mathbb{Z}$ existe $x_m \in X$ tal que

$$x_m = \lim_{k\to\infty} \widehat{f}_{n_k}(m),$$

esto es,

$$\lim_{k\to\infty} T_{f_{n_k}}(\phi_m) = x_m,$$

por lo que para toda $x^* \in X^*$

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle T_{f_{n_k}}(\phi_m), x^* \right\rangle = \langle x_m, x^* \rangle .$$

Como también tenemos en virtud de (4.20) que

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle T_{f_{n_k}}(\phi_m), x^* \right\rangle = T(\phi_m)(x^*) \quad \text{para toda} \quad x^* \in X^*,$$

se sigue de lo anterior que

$$T(\phi_m) = x_m \in X \quad \text{para toda} \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{4.22}$$

Usando la linealidad de T y (4.22) vemos que para todo polinomio trigonométrico P se tiene que $T(P) \in X$.

Ahora, si $\phi \in L^1([0,1])$ existe $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de polinomios trigonométricos tal que $P_n \longrightarrow \phi$ en $L^1([0,1])$ y como T es continuo y $T(\phi) \in X^{**}$ se tiene que

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty} T(P_n),$$

con $T(P_n) \in X$, por lo que $T(\phi) \in X$.

(Esto se puede argumentar así:

$$(T(P_n))_{n=1}^{\infty} \subset X \hookrightarrow X^{**}$$

isométricamente, luego $(T(P_n))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X y X es completo. Entonces

$$T(P_n) \longrightarrow y \quad \in (X, \|\ \|_X)\,,$$

por tanto $y \in (X^{**}, \|\ \|_{X^{**}})$. Por lo que $T(\phi) = y \in X$.)

Por consiguiente, dada $\phi \in L^1([0,1])$ y dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico P, digamos

$$P(t) = \sum_{l=-m}^{m} c_l e^{-2\pi i l t}$$

tal que $\|P - \phi\|_1 < \varepsilon$. Así

$$\begin{aligned}
\left\| T_{f_{n_k}}(\phi) - T(\phi) \right\|_X &\leq \left\| T_{f_{n_k}}(\phi) - T_{f_{n_k}}(P) \right\|_X + \left\| T_{f_{n_k}}(P) - T(P) \right\|_X \\
&\quad + \|T(P) - T(\phi)\|_X \\
&\leq \left\| T_{f_{n_k}} \right\| \|\phi - P\|_1 + \left\| T_{f_{n_k}}(P) - T(P) \right\|_X + \|T\| \, \|P - \phi\|_1 \\
&\leq 2K\varepsilon + \left\| T_{f_{n_k}}(P) - T(P) \right\|_X
\end{aligned} \tag{4.23}$$

donde

$$\left\| T_{f_{n_k}} \right\| = \|f_{n_k}\|_\infty \leq \sup_{z\in D} \|u(z)\|_X \equiv K_1,$$

$\|T\| = K_2$ y $K = \max\{K_1, K_2\}$. Pero

$$\begin{aligned} T_{f_{n_k}}(P) &= T_{f_{n_k}}\left(\sum_{l=-m}^{m} c_l e^{-2\pi i l t}\right) \\ &= \sum_{l=-m}^{m} c_l T_{f_{n_k}}(\phi_l), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} T_{f_{n_k}}(P) &= \sum_{l=-m}^{m} c_l \lim_{k\to\infty} T_{f_{n_k}}(\phi_l) = \sum_{l=-m}^{m} c_l x_l \\ &= \sum_{l=-m}^{m} c_l T(\phi_l) = T\left(\sum_{l=-m}^{m} c_l \phi_l\right) \\ &= T(P) \end{aligned}$$

en $(X, \| \ \|)_X$, y así (4.23) puede ser estimado por $2K\varepsilon + \varepsilon$ si k es suficientemente grande, luego

$$T_{f_{n_k}}(\phi) \longrightarrow T(\phi) \quad \text{en} \quad (X, \| \ \|_X)$$

cuando $k \to \infty$ para cada $\phi \in L^1([0,1])$. Con esto queda totalmente demostrada la afirmación (4.21).

Enseguida mostremos que $P(T) = u$. En efecto, Por el Lema 4.23 $P(T)$ es una función armónica con valores en X y

$$\begin{aligned} P(T)\left(re^{2\pi i t}\right) &= T\left(P_r(t-\cdot)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} T_{f_{n_k}}\left(P_r(t-\cdot)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_0^1 u\left(r_{n_k} e^{2\pi i s}\right) P_r(t-s)ds \\ &= \lim_{k\to\infty} u\left(r r_{n_k} e^{2\pi i t}\right) \\ &= u\left(re^{2\pi i t}\right), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se tiene por (4.21) y la cuarta igualdad por el Lema 4.24.

Definamos ahora la siguiente medida vectorial

$$\mu(E) = T\left(\chi_E\right) = \lim_{k\to\infty} \int_E u\left(r_{n_k} e^{2\pi i t}\right) dt.$$

Como se ha demostrado en ocasiones anteriores

$$\chi_{\cup_{j=1}^{\infty} A_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j} \quad \text{en} \quad L^1([0,1]),$$

si $A_i \cap A_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$.

Por lo que usando el hecho de que T es lineal y continuo vemos que

$$\mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

es decir, μ es numerablemente aditiva. Además $\mu << m$, pues

$$\|\mu(E)\|_X \leq \|T\| m(E),$$

por lo que

$$|\mu|([0,1]) \equiv |\mu| \leq \|T\|.$$

Puesto que X tiene la propiedad de Radon-Nikodým, existe $f \in L^1([0,1], X)$ tal que

$$\mu(E) = \int_E f d\mu \quad \text{para toda} \quad E \in \mathcal{B}.$$

Por el Lema 3.9 tenemos que $f \in L^\infty([0,1], X)$ y T es representable por f, esto es

$$T(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt \quad \text{para toda} \quad \varphi \in L^1([0,1]).$$

Como

$$\begin{aligned} P(f)\left(re^{2\pi i t}\right) &= \int_0^1 f(s) P_r(t-s) ds \\ &= T\left(P_r(t-\cdot)\right) \\ &= u\left(re^{2\pi i t}\right), \end{aligned}$$

se sigue del Lema 4.22 la existencia de

$$\lim_{r \to 1} P(f)\left(re^{2\pi i t}\right) = f(t)$$

para casi toda $t \in [0,1]$.

Por tanto, X tiene la propiedad de Fatou.

$(\Longleftarrow)$ Supongamos que X tiene la propiedad de Fatou y sea μ una medida vectorial con valores en X tal que μ es numerablemente aditiva, $\mu << m$ y $|\mu|([0,1]) < \infty$. Estudiemos primero el siguiente caso para μ y m:

Existe $c > 0$ tal que $|\mu|(E) \leq c m(E)$ para toda $E \in \mathcal{B}$.

Así, podemos definir el operador $T_\mu : L^1([0,1]) \longrightarrow X$ del modo siguiente: si

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{E_k},$$

con α_k escalar, $E_k \in \mathcal{B}$ para $1 \le k \le m$, $E_k \cap E_l = \emptyset$ si $k \ne l$, entonces

$$T_\mu(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu(E_k).$$

Puesto que

$$\left\|T_\mu(\varphi)\right\| \le \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \|\mu(E_k)\| \le C \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| m(E_k) = C\|\varphi\|_1,$$

podemos extender continuamente T_μ a todo $L^1([0,1])$ (ya que las funciones simples son densas en este espacio) y esta extensión posee la misma norma.

Ahora definamos la integral de Poisson del operador T_μ, esto es, $u = P\left(T_\mu\right)$. De acuerdo al Lema 4.23, u es una función armónica con valores en X y además

$$\begin{aligned}\left\|u\left(re^{2\pi it}\right)\right\|_X &= \left\|T_\mu\left(P_r(t-\cdot)\right)\right\|_X \\ &\le \|T_\mu\| \left\|P_r(t-\cdot)\right\|_1 \\ &= \|T_\mu\| \\ &\le C,\end{aligned}$$

esto es, $\|u(z)\|_X \le C$ para toda $z \in D$.

Como X tiene la propiedad de Fatou existe $f \in L^\infty([0,1], X)$ tal que

$$\lim_{r\to 1} u\left(re^{2\pi it}\right) = f(t) \quad \text{para casi todo} \quad t \in [0,1].$$

Así, para toda $x^* \in X^*$

$$\lim_{r\to 1} \left\langle u\left(re^{2\pi it}\right), x^*\right\rangle = \langle f(t), x^*\rangle$$

para casi todo $t \in [0,1]$ y por la teoría escalar se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\left\langle u\left(re^{2\pi it}\right), x^*\right\rangle &= \int_0^1 P_r(t-\theta) \left\langle f(\theta), x^*\right\rangle d\theta \\ &= \left\langle \int_0^1 P_r(t-\theta) f(\theta) d\theta, x^* \right\rangle.\end{aligned}$$

Entonces

$$u\left(re^{2\pi it}\right) = P(f)\left(re^{2\pi it}\right).$$

Por consiguiente tenemos que

$$P(f) = u = P(T_\mu),$$

y como $\mu(E) = T_\mu(\chi_E)$ entonces por el Lema 3.9 existe $g \in L^\infty([0,1], X)$ tal que T_μ está representado por g, por lo que

$$P(f) = u = P(T_\mu) = P(g),$$

y usando la unicidad de la solución del problema de Dirichlet obtenemos $f = g$ ctp y así para toda $E \in \mathcal{B}$

$$\mu(E) = T_\mu(\chi_E) = \int_E f d\mu,$$

que es lo que deseábamos mostrar, ya que $f \in L^1([0,1], X)$.

Ahora, para resolver el caso general emplearemos el siguiente argumento:

Dada $\mu << m$ consideremos la función maximal

$$\mu^*(\theta) = \left\{ \frac{|\mu|(I)}{m(I)} : \theta \in I, \;\; I \;\; \text{intervalo} \right\}.$$

(el supremo se toma sobre todos los intervalos I que contienen a θ).

Como es sabido, la función μ^* es de tipo débil $(1,1)$ (ver [A.3], pág.43), esto es, existe una constante absoluta K tal que

$$m(\{\theta : \mu^*(\theta) > \lambda\}) \leq \frac{K}{\lambda}|\mu|([0,1]). \tag{4.24}$$

Ahora escribamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{\theta \in [0,1] : \mu^*(\theta) \leq n\}.$$

Puesto que la desigualdad (4.24) nos dice que la medida del conjunto de puntos donde μ^* es muy grande es muy pequeña, se sigue que

$$[0,1] = (\cup_{n=1}^\infty A_n) \cup N \quad \text{donde} \quad m(N) = 0.$$

Definiendo para toda $n \in \mathbb{N}$ $\mu_n(E) = \mu(E \cap A_n)$ tendremos

$$\begin{aligned} \|\mu_n(E)\| = \|\mu(E \cap A_n)\| &\leq |\mu|(E \cap A_n) \\ &\leq nm(E \cap A_n) \leq nm(E). \end{aligned}$$

Por el caso anterior existe $f_n \in L^1([0,1],X)$ tal que

$$\mu_n(E) = \int_E f_n dm \quad \text{para toda} \quad E \in \mathcal{B},$$

además f_n está determinada de manera única en A_n.

Observamos ahora que como $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente entonces si $k > n$ se tiene que $f_n = f_k$ sobre A_n, por lo cual podemos definir ctp sobre $[0,1]$

$$f(t) = f_n(t) \quad \text{si} \quad t \in A_n,$$

y en vista de que μ es numerablemente aditiva tendremos que para toda $E \in \mathcal{B}$

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E \cap A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm.$$

Entonces X tiene la propiedad de Radon-Nikodým.
■

La demostración de la implicación $(\Rightarrow)$ en el Teorema anterior, para cualquier espacio de Banach, sigue el esquema que se resume a continuación:

Se representa a la función $u = P(\mu)$ para alguna medida vectorial μ numerablemente aditiva, con valores en X, definida en $\mathcal{B}$ y de variación acotada.

Se escribe $\mu = \mu_c + \mu_s$ donde $|\mu_c| << m$ y $|\mu_s| \perp m$.

La hipótesis sobre X asegura la existencia de $f = \frac{d\mu_c}{dm} \in L^1([0,1],X)$ y así

$$u = P(f) + P(\mu_s).$$

El primer sumando tiene valores frontera no tangenciales y el segundo también (iguales a 0 ctp).

Conclusiones

Como comentamos en la introducción de este trabajo, la propiedad de Radon-Nikodým de un espacio de Banach X surgió a raíz del estudio sobre diferenciabilidad de funciones definidas en subconjuntos del espacio euclideano y con valores en X, de hecho, la diferenciabilidad depende de las características del espacio rango de dichas funciones, como subconjunto de X. Pero no sólo en el tema de la diferenciabilidad la propiedad de Radon-Nikodým jugó y sigue jugando un papel relevante. Ha sido además fundamental para representar a operadores lineales por medio de integrales, para entender la estructura topológica y geométrica de cierto tipo de espacios de Banach y en general, para clasificar a éstos, por lo cual esta tesis es particularmente apropiada desde el punto de vista didáctico.

También es importante destacar algunas de las razones por las cuales esta tesis ha sido escrita, una de ellas es que su lectura sea básicamente autocontenida, pues no se encuentran unificados ni desarrollados de modo tan exhaustivo en la literatura; de igual manera, se ha tratado de proporcionar una buena cantidad de ejemplos que ilustren las diferentes nociones y situaciones planteadas en cada uno de los capítulos, aunque debemos reconocer que en el último de éstos nos hizo falta proporcionar ejemplos. Esto ha sido así porque no es fácil encontrarlos en la literatura y de hecho, una asignatura pendiente es la construcción de dichos ejemplos.

Por último proporcionaremos una lista de propiedades equivalentes a la propiedad de Radon-Nikodým, que no se abordaron en la tesis pero es importante destacar.

Cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que un espacio de Banach X tenga la propiedad de Radon-Nikodým:

1. Todo subespacio lineal cerrado de X tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

2. Todo subespacio lineal, cerrado y separable de X tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

3. Toda función $f : [0,1] \to X$ de variación acotada es diferenciable casi en todas partes.

4. Toda función $f : [0,1] \to X$ de variación acotada es débilmente diferen-ciable excepto en un conjunto fijo de medida cero.

5. Toda función absolutamente continua $f : [0,1] \to X$ es diferenciable casi en todas partes. En este caso tenemos que

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt,$$

   para cualesquier $a, b \in [0,1]$.

6. Toda función absolutamente continua $f : [0,1] \to X$ es débilmente diferenciable excepto en un conjunto fijo de medida cero. En este caso tenemos que

$$x^*(f(b) - f(a)) = \int_a^b x^* f'(t)dt$$

   para toda a y $b \in [0,1]$ y para toda $x^* \in X^*$.

7. Todo operador $T : L^1[0,1] \to X$ lineal y acotado se factoriza a través de l^1. Esto es, existen operadores lineales continuos $L : l^1 \to X$ y $S : L^1(\mu) \to l^1$ tal que $T = LS$.

8. Todo subconjunto cerrado, no vacío y acotado de X contiene un punto extremo de su envolvente convexa cerrada.

9. Si D es un subconjunto no vacío, cerrado y acotado de X, entonces existe una funcional lineal acotada en X que alcanza su valor máximo en D.

Para complementar esta información remitimos al lector interesado a [A.3], pág. 217-218.

Apéndice

A.1. Operadores Lineales Compactos

Definición A.27. *Sean X y Y espacios normados. Un operador $T : X \to Y$ se llama operador lineal compacto (o un operador lineal completamente continuo) si T es lineal y para todo subconjunto acotado M de X, la imagen $T(M)$ es relativamente compacto, esto es, la cerradura $\overline{T(M)}$ es compacto.*

Lema A.28. 1. *Todo operador lineal compacto $T : X \to Y$ es acotado.*

2. *Si $\dim X < \infty$, el operador identidad $I : X \to X$ no es compacto, a pesar de que I es continuo.*

Demostración.
1. Como la esfera unitaria $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es acotada, y dado que T es compacto se sigue que $\overline{(T(U))}$ es compacto y por tanto es acotado, de aquí que

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| < \infty.$$

Entonces T es acotado.

2. Por supuesto, la bola unitaria cerrada

$$M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

es acotada.
Si $\dim X = \infty$, se sigue que M no es compacto, entonces

$$I(M) = M = \overline{M}$$

no es relativamente compacto.
■

Teorema A.29. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un opera-dor lineal. Entonces T es compacto si sólo si T envía toda sucesión acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X en una sucesión $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ en Y y que posee una subsucesión convergente.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Si T es compacto y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, entonces $\overline{(T(x_n))}_{n=1}^{\infty}$ en Y es compacto y por definición se sigue que $T(x_n)$ tiene una subsucesión convergente.
($\Leftarrow$) Supongamos que toda sucesión acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $(T(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ converge en Y.

Sean $B \subset X$ un subconjunto acotado de X, y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ cualquier sucesión en $T(B)$. Entonces $y_n = T(x_n)$ para algún $x_n \in B$, y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotado pues B es acotado. Por hipótesis, $T(x_n)$ contiene una subsucesión convergente. Entonces $\overline{(T(B))}$ es compacto y como (y_n) es una sucesión arbitraria en $T(B)$ por definición se sigue que T es compacta.

■

De este Teorema es obvio que la suma $T_1 + T_2$ de dos operadores lineales compactos es compacto. Similarmente, αT_1 es compacto, donde α es cualquier escalar. Entonces tenemos que los operadores lineales compactos de X en Y forman un espacio vectorial.

Teorema A.30. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces*

1. *Si T es acotado y $dimT(X) < \infty$, el operador T es compacto.*
2. *Si $dimX < \infty$, el operador T es compacto.*

Demostración.
1. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ cualquier sucesión acotada en X. Entonces la desigualdad

$$\|T(x_n)\| \leq \|T\|\|x_n\|$$

muestra que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es acotado y dado que $dimT(X) < \infty$ se sigue que $T(x_n)$ es relativamente compacto, entonces $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente y como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria de X, por el teorema anterior se sigue que T es compacto.
2. Dado que $dimX < \infty$ sabemos que todo operador lineal en X es acotado, por tanto T es acotado y como

$$dimT(X) \leq dimX < \infty$$

por la parte 1 tenemos que T es compacto.

■

Diremos que $T \in L(X,Y)$ con $dimT(X) < \infty$ es un operador de rango finito.

Teorema A.31. *Sea $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales compactos de un espacio normado X a un espacio de Banach Y. Si $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en la topología de la norma en $L(X,Y)$, digamos*

$$\|T_n - T\| \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. Entonces T es un operador compacto.

Demostración.

Mostraremos que para cualquier sucesión acotada $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ en X, la imagen $(T(x_m))_{m=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, y por el Teorema A.29 tendremos que T es compacto.

Como T_1 es compacto, $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $(x_{1m})_{m=1}^{\infty}$ tal que $(T(x_{1m}))_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Similarmente $(x_{1m})_{m=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $(x_{2m})_{m=1}^{\infty}$ tal que $(T_2(x_{2m}))_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Continuando de esta manera vemos que la sucesión "diagonal" $(y_m)_{m=1}^{\infty} = (x_{mm})_{m=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ tal que para todo entero positivo fijo n la sucesión

$$(T_n(y_m))_{m=1}^{\infty}$$

es de Cauchy.

Como $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ es acotada existe c tal que $\|x_m\| \leq c$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\|y_m\| \leq c$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$, como $T_n \to T$, existe $n = p$ tal que

$$\|T - T_p\| < \varepsilon/3c.$$

Como $\left(T_p(y_m)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe N tal que

$$\left\|T_p(y_j) - T_p(y_k)\right\| \leq \varepsilon/3.$$

Entonces obtenemos para $j,k > N$

$$\begin{aligned}
\|T(y_j) - T(y_k)\| &\leq \|T(y_j) - T_p(y_j)\| + \|T_p(y_j) - T_p(y_k)\| + \|T_p(y_k) - T(y_k)\| \\
&\leq \|T - T_p\|\|y_j\| + \varepsilon/3 + \|T_p - T\|\|y_k\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3c}c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c}c \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $(T(y_m))_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y como Y es completo, es convergente.

■

A.2. El Lema de Agotamiento

Lema A.32. *Sea $G : \Sigma \to X$ una medida vectorial. Supongamos que P es una propiedad de G tal que:*

1. *G tiene la propiedad P en cada conjunto μ-nulo.*
2. *Si G tiene la propiedad P en $E \in \Sigma$, entonces G tiene la propiedad P en cada $A \in \Sigma$ contenido en E.*
3. *Si G tiene la propiedad P en E_1 y E_2 (ambos miembros de Σ) entonces G tiene la propiedad P en $E_1 \cup E_2$.*
4. *Todo $A \in \Sigma$ de μ-medida positiva contiene un conjunto $B \in \Sigma$ de μ-medida positiva tal que G tiene la propiedad P en B.*

Entonces existe una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de miembros de Σ ajenos por pares tal que $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y tal que G tiene la propiedad P en cada A_n.

Demostración.
Sea
$$\mathcal{A} = \{E \in \Sigma : G \quad \text{tiene la propiedad } P \text{en} E\}$$
y sea $c = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$.

Escójase una sucesión $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{A}$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = c.$$

Sea $E_n = \cup_{k=1}^{n} B_k$; $E_n \in \mathcal{A}$ por el inciso 3. Además $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = c$, porque $\mu(E_n) \leq c$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\mu(B_n) \leq \mu(E_n)$, por lo que
$$c = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \mu(E_n) \leq c$$
$$c = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \mu(E_n) \leq c.$$

Entonces
$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = c.$$

También $E_n \subset E_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora, si ocurriese que $\mu\left(\Omega \setminus \cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) > 0$, entonces el inciso 4 asegura la existencia de $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) > 0$ tal que
$$A \subset \Omega \setminus \cup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Pero $(A \cup E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ con
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cup E_n) = \lim_{n\to\infty} [\mu(A) + \mu(E_n)] = \mu(A) + c > c,$$

lo cual contradice la definición de c. Así, $A_0 = \Omega \setminus \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ tiene μ-medida cero. Escribiendo

$$A_1 = E_1, \quad A_2 = E_2 \setminus E_1, \quad , ..., A_n = E_n \setminus E_{n-1},$$

obtenemos una sucesión $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ con las características requeridas.

■

A.3. Producto Tensorial

Sean E, F y M tres espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$, y ϕ un mapeo bilineal de $E \times F$ en M.

Definición A.33. *Decimos que E y F son ϕ-linealmente disjuntos si dado $\{x_1, ..., x_r\}$ un subconjunto finito de E, $\{y_1, ..., y_r\}$ un subconjunto finito de F, que tienen el mismo número de elementos, los cuales satisfacen*

$$\sum_{j=1}^{r} \phi(x_j, y_j) = 0,$$

entonces, si $x_1, ..., x_r$ son linealmente independientes se tiene que $y_1 = ... = y_r = 0$, y si $y_1, ..., y_r$ son linealmente independientes, $x_1 = ... = x_r = 0$.

Definición A.34. *Un producto tensorial de E y F es el par (M, ϕ) que consiste de un espacio vectorial M y de un mapeo bilineal ϕ de $E \times F$ en M tal que*

- *La imagen de $E \times F$ genera al espacio M.*
- *E y F son ϕ-linealmente disjuntos.*

Se tiene una definición equivalente a la definición de elementos ϕ-linealmente disjuntos, la cual se da en la siguiente proposición:

Proposición A.35. *Sean E, F y M tres espacios vectoriales, y ϕ un mapeo bilineal de $E \times F$ en M. Entonces E y F son linealmente disjuntos si y sólo si dados $\{x_j\}$ y $\{y_k\}$, con $1 \leq j \leq r$, $1 \leq k \leq s$ conjuntos linealmente independientes de E y F, respectivamente, el conjunto de vectores de M, $\{\phi(x_j, y_k)\}$, es linealmente independiente.*

Se puede demostrar que el producto tensorial siempre existe y es único salvo isomorfismos. Denotaremos por $E \otimes F$ el producto tensorial de E y F, y el mapeo canónico ϕ de $E \times F$ en $E \otimes F$ lo denotaremos por

$$(x, y) \longmapsto x \otimes y.$$

Definición A.36. *Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos, y $E \otimes F$ el producto tensorial de E y F. Llamaremos π-topología (o topología proyectiva) en $E \otimes F$ la topología más fuerte localmente convexa para la cual el mapeo bilineal canónico $(x, y) \longmapsto x \otimes y$ de $E \times F$ en $E \otimes F$ es continuo, y lo denotaremos por $E \otimes_\pi F$.*

Sean E y F dos espacios localmente convexos, p y q seminormas en E y F, respectivamente. Se pueden definir **seminormas en el producto tensorial de** E y F, $p \otimes q$, de la siguiente manera:

Para toda $\theta \in E \otimes F$,
$$(p \otimes q)(\theta) = \inf \sum_j p(x_j) q(y_j),$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas los conjuntos de pares finitos (x_j, y_j) tales que
$$\theta = \sum_j x_j \otimes y_j.$$
Además, para toda $x \in E$ y $y \in F$,
$$(p \otimes q)(x \otimes y) = p(x) q(y).$$

Proposición A.37. *La seminorma $p \otimes q$ es una norma si y sólo si p y q son normas.*

Cuando (E, p) y (F, q) son espacios normados, se obtiene un espacio normado $(E \otimes F, p \otimes q)$, el cual es llamado el **producto tensorial proyectivo** de (E, p) y (F, q).

Definición A.38. *Denotaremos por $E \widehat{\otimes}_\pi F$ la completación d $E \otimes_\pi F$.*

Sea X un espacio normado y Ω un espacio topológico localmente compacto. Definimos $C(\Omega, X)$ como el espacio de las funciones continuas de Ω en X, con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de Ω. Se puede demostrar que cuando Ω es compacto y X es un espacio de Banach entonces $(C(\Omega, X), \| \ \|_\infty)$, donde
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|,$$
es un espacio de Banach.

Denotaremos por $C(\Omega) \otimes X$ el subespacio de $C(\Omega, X)$ que consiste de las funciones cuya imagen está contenida en un subespacio finito dimensional de X; $C(\Omega) \otimes X$ es el producto tensorial de $C(\Omega)$ y X. Así
$$C(\Omega) \otimes X = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j f_j : x_j \in X, f_j \in C(\Omega), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

También es cierto que $C(\Omega) \otimes X$ es denso en $C(\Omega, X)$. De la misma manera, el espacio $L^1([0,1]) \otimes X$ se puede describir así:

$$L^1([0,1]) \otimes X = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j f_j : x_j \in X, f_j \in L^1([0,1]), n \in \mathbb{N} \right\},$$

el cual es subespacio de $L^1([0,1], X)$.

Teorema A.39. *Sea X un espacio de Banach. La inyección canónica de $L^1 \otimes X$ en $L^1(X)$ puede ser extendida como una isometría lineal de $L^1 \widehat{\otimes}_\pi X$ sobre $L^1(X)$.*

Consecuentemente $L^1\left([0,1], X\right)$ es isométricamente isomorfo a $L^1([0,1]) \widehat{\otimes}_\pi X$.

Por último tenemos el siguiente resultado cuando Y es también un espacio de Banach:

Corolario A.40. *El espacio de Banach $\mathcal{L}(X, Y^*)$ es isométricamente isomorfo a $(X \widehat{\otimes}_\pi Y)^*$.*

Un elemento $\psi^* \in \left(X \widehat{\otimes}_\pi Y\right)^*$ corresponde a $\psi^* \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ si y sólo si

$$\psi^*(x \otimes y) = \psi(x)(y)$$

para toda $x \in X$, $y \in Y$.

Bibliografía

[1] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis,* McGraw-Hill, 1966.

[2] C.D. Aliprantis, K.C. Border, *Infinite dimensional analysis,* Springer, 1999.

[3] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer, 2001.

[4] G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure,* John Wiley, 1995.

[5] O. Blasco, *Radon-Nikodým versus Fatou*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 20 (1997), 1-5.

[6] O. Blasco, *Boundary Values of Functions in Vector-Valued Hardy Spaces and Geometry on Banach Spaces*, J. Funct. Anal. 78 (1988), 346-364.

[7] A.V. Bukhvalov, A.A. Danilevich, *Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces*, (Russian) Mat. Zametki 31 (1982), 203-214; English Translation: Math. Notes 32 (1982), 104-110.

[8] S.D. Chatterji, *Martingale convergence and the Radon-Nikodým theorem in Banach spaces,* Math. Scand. 22 (1968), 21-41.

[9] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector Measures*, Mathematical Surveys 15, AMS, 1977.

[10] N. Dinculeanu, *Vector Measures*, Pergamon Press, 1967.

[11] R. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Wadsworth and Brooks, 1989.

[12] N. Dunford, J.T. Schwarz, *Linear Operators, Part I*, John Wiley, 1977.

[13] P.L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Dover, 2000.

[14] G. B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and their Applications,* John Wiley, 1999.

[15] J. García-Cuerva, J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland, 1985.

[16] W. Hensgen, *Some remarks on boundary values of vector-valued harmonic and analytic functions*, Arch. Math. 57 (1991), 88-96.

[17] E. Hille, *Methods in Classical and Functional Analysis*, Addison-Wesley, 1972.

[18] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis,* Dover, 1968.

[19] P. Koosis, *Introduction to* H^p *spaces*, Lecture Note Series 40, London Math. Soc., Cambridge University Press, 1980.

[20] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications,* John Wiley, 1978.

[21] J. Rivera, *Sobre los valores en la Frontera de Funciones Armónicas y Analíticas Vectoriales*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1994.

[22] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1982.

[23] E.M. Stein, *Harmonic Analysis. Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals,* Princeton University Press, 1993.

[24] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels,* Academic Press, 1967.

[25] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Vols. I* & *II,* Cambridge University Press, 2002.