"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Programa de Posgrado en Matemáticas

Productos de Hadamard en Espacios de Bergman

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestra en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Ximena Guadalupe Nevárez Rodríguez

Directora de Tesis: Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora, México, Agosto de 2023

SINODALES

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Fernando Luque Vásquez
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jorge Rivera Noriega
ITAM, Ciudad de México, México

"Los modelos del matemático como los del pintor y los del poeta deben ser hermosos. La belleza es la primera prueba; no hay lugar permanente para unas matemáticas feas."

G.H. Hardy, A Mathematician's Apology (1941).

A mis abuelos, Carmelita y José.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por ponerme en este mundo, cuidar de mi en cada paso que doy y siempre ponerme en el lugar correcto, en el momento correcto. Agradezco a mis padres, Marina y Rodolfo, por siempre estar para mí incondicionalmente. A mi hermana, Paloma, por siempre escucharme y prestarme atención. A mis abuelos: José y Carmelita por ser mi motor para todo lo que hago porque solamente quiero que estén orgullosos de mí. A mi novio, Germán, por ser mi mejor amigo y mi motor, por alegrarme cada día con su amor incondicional y por compartir tantos bonitos momentos conmigo desde que inicie mi camino por la Universidad de Sonora. A mi mejor amiga, Ale, por escucharme siempre y trabajar conmigo cuando ambas nos necesitabamos muchísimo.

A todos los profesores del Departamento de Matemáticas por formarme en esta ciencia. Especialmente, agradezco a los profesores, Adolfo Minjárez, Martha Guzmán y Fernando Luque, quienes me motivaron constantemente y siempre estuvieron disponibles para aconsejarme y ayudarme en todo.

A mi directora de tesis, Martha Guzmán, por guiarme en la elaboración de este trabajo, por creer en mí y por tenerme paciencia. De igual manera, agradezco a mis sinodales: Fernando Luque, Adolfo Minjárez y Jorge Rivera Noriega, por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo.

A todos mis compañeros del posgrado. En especial a Itzia, Poncho, Alejandro, Abigail, Irasema y Gaby. Gracias por su apoyo incondicional y por siempre poder sacarme una sonrisa y hacerme sentir acompañada.

Índice general

Introducción

En 1915 G. H. Hardy sienta un primer precedente al estudio de los espacios de Bergman cuando introduce en [10] ciertos espacios de funciones con el propósito de caracterizar los valores frontera de funciones analíticas en el disco unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Más tarde, a estos espacios se les conocería como espacios de Hardy.

Los espacios de Hardy se denotan por $H^p(\mathbb{D})$ donde $0 \leq p < \infty$ y se definen como el conjunto de funciones f analíticas en $\mathbb{D}$ tales que las integrales

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$$

se mantienen acotadas a medida que $r \to 1^-$.

Desde el año 1915 hasta 1930 se estudió ampliamente la estructura de los espacios de Hardy. Entre los avances obtenidos, estuvo el resultado correspondiente al propósito original con el que Hardy definió a estos espacios, a saber, una función en H^p posee límites radiales en casi todo punto de la frontera del disco y en el caso de que dicha función se anule en un conjunto de medida positiva en la frontera, entonces la función es idénticamente cero en todo el disco.

En la década de 1930 surge el análisis funcional y con él comienza el estudio de los espacios de Hardy como espacios de Banach para $1 \leq p < \infty$. Con esta nueva perspectiva surgen también nuevos problemas y se desarrollan nuevas técnicas para la solución de problemas en las áreas de subespacios invariantes, interpolación y conjuntos de ceros. Algunos de los resultados más importantes en dichas áreas fueron obtenidos por Beurling [4], Carleson [5], [6], Shapiro y Shields [23], por mencionar algunos.

En 1950, Stefan Bergman comienza a desarrollar en [2] y [3] la teoría de espacios de funciones analíticas de cuadrado integrable sobre un dominio dado con respecto a la medida de Lebesgue de área. En el desarrollo de su teoría, Bergman introduce un núcleo reproductor, al cuál posteriormente se le conocería como el núcleo de Bergman. Estos espacios fueron generalizados más tarde y llamados espacios de Bergman. Cuando restringimos el dominio al disco unitario se denotan por $A^p(\mathbb{D})$ para $0 < p \leq \infty$ y se definen como el espacio de funciones

f analíticas en $\mathbb{D}$ tales que $f \in L^p(\mathbb{D})$. Es claro que tenemos la contención $H^p \subset A^p$. Naturalmente, debido a esta observación, se comenzaron a plantear problemas, en el contexto de espacios de Bergman, motivados por los que habían sido resueltos en los espacios de Hardy. Sin embargo, el estudio de los espacios de Bergman resultó ser de mucha mayor complejidad y requirió de un desarrollo teórico aún más profundo. Por ejemplo, las funciones en los espacios de Bergman, en oposición a lo que ocurre en los espacios de Hardy, pueden no poseer valores frontera en subconjuntos de medida positiva.

En 1970, Horowitz y Korenblum lograron en [20], [15] y [16] un progreso significativo en las áreas de conjuntos de ceros, vectores cíclicos y subespacios invariantes. A pesar de este avance, no fué hasta la década de 1990 que la teoría de espacios de Bergman comenzó a tomar mayor relevancia a raíz de la obtención de resultados análogos a aquellos de la teoría de espacios de Hardy. Algunos de los matemáticos que contribuyeron en esta área fueron H. Hedenmalm [12] ,[13], Duren, Khavinson, Shapiro y Sundberg [7], [8]. Los resultados obtenidos en esta época fueron recopilados y presentados por K. Zhu en [25].

En esta tesis, nos enfocamos específicamente en el estudio de los operadores producto de Hadamard. El producto de Hadamard de dos funciones f y g analíticas en $\mathbb{D}$ dadas por las series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad z \in \mathbb{D},$$

se denota por $f * g$ y se define como

$$(f * g)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \qquad z \in \mathbb{D}.$$

En el año de 1988, Miroslav Pavlovic obtiene en [22] un resultado de acotamiento en espacios de Hardy para estos operadores. Muy recientemente, en el año 2020, los matemáticos Karapetrovic y Mashreghi obtuvieron en [18] el resultado análogo en espacios de Bergman. Sin embargo, como en la obtención de resultados previos, el estudio en estos espacios resultó más complicado y requirió del análisis de operadores de derivada fraccionaria para funciones analíticas, (ver [11] y [17]).

Este trabajo de tesis tiene como objetivo principal recopilar, organizar, desarrollar y dar a conocer parte de la teoría básica de espacios de Bergman y los resultados obtenidos por Karapetrovic y Mashreghi para el operador producto de Hadamard en dichos espacios.

En el capítulo 1 llevaremos a cabo un análisis de la estructura general de los espacios de Bergman y estudiaremos las proyecciones de Bergman que se pueden definir en ellos. Para esto último obtendremos una serie de estimaciones para operadores integrales muy particulares.

A raíz del estudio de las proyecciones de Bergman, surge como imagen de ellas el espacio de Bloch, el cuál también estudiaremos.

En el capítulo 2, estudiaremos los espacios duales de los espacios de Bergman. Dividimos nuestro estudio en dos casos: el caso $1 < p < \infty$ y el caso $0 < p \leq 1$. El primer caso resulta sencillo de obtener a partir de los resultados obtenidos en el capítulo 1, mientras que para el segundo caso será necesario introducir un operador continuo en el espacio de las funciones analíticas. Es importante mencionar que este operador guardará cierta relación con el operador derivada fraccionaria.

Finalmente, en el capítulo 3 veremos la generalización a espacios de Bergman del resultado de Pavlovic para el producto de Hadamard en espacios de Hardy. Para ello deberemos estudiar el comportamiento de los promedios de una función analítica sobre compactos del disco unitario, así como introducir el concepto de derivada fraccionaria para funciones analíticas.

También incluimos un apéndice acerca de funciones subarmónicas, ya que usaremos este concepto repetidamente en la tesis.

Capítulo 1

Espacios de Bergman

Para que la lectura de este trabajo sea relativamente autosuficiente, empezamos con un primer capítulo donde estudiaremos la teoría de los espacios de Bergman con peso en el disco unitario.

En la primera sección de este capítulo llevaremos a cabo un análisis de las propiedades básicas de estos espacios y construiremos los núcleos de Bergman, los cuales serán una herramienta muy útil ya que nos permitirán obtener una fórmula integral reproductora para las funciones en los espacios de Bergman. A partir de los núcleos reproductores definiremos las proyecciones de Bergman, las cuales, como veremos en el capítulo 2, serán indispensables para obtener un resultado de dualidad para espacios de Bergman.

En la segunda sección presentaremos algunas estimaciones para operadores integrales con el fin de encontrar condiciones para el acotamiento de las proyecciones de Bergman. Dichas estimaciones también nos serán utiles a lo largo de todo este trabajo.

En la última sección estudiaremos al espacio de Bloch, ya que éste surge naturalmente como la imagen de las funciones acotadas en el disco bajo la proyección de Bergman y adicionalmente como el dual de ciertos espacios de Bergman.

Los resultados estudiados en este capítulo pueden consultarse en [25], [14] y [21].

1.1. Espacios de Bergman

A lo largo de este trabajo denotamos como $\mathbb{C}$ al plano complejo y

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$
$$\partial\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Denotaremos la medida de área normalizada en $\mathbb{D}$ como dA, de modo que en términos de coordenadas reales rectangulares y polares tenemos:

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} rdrd\theta$$

donde $z = x + iy = re^{i\theta}$.

Utilizaremos los operadores diferenciales de Wirtinger:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

También utilizaremos el símbolo“ $\sim$ ”para indicar que dos cantidades tienen el mismo comportamiento de manera asintótica. Es decir, $A \sim B$ quiere decir que existen dos constantes positivas tales que $\frac{A}{B}$ es acotado superior e inferiormente por ellas en el proceso límite en cuestión.

Definición 1.1.1. Para $0 < p < \infty$ y $-1 < \alpha < \infty$, definimos el ***espacio de Bergman con peso*** del disco, $A^p_\alpha(\mathbb{D})$, como el espacio de funciones analíticas en el disco que pertenecen a $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, donde

$$dA_\alpha(z) := (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z).$$

Si $f \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ definimos:

$$||f||_{p,\alpha} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z)\right)^{1/p}. \tag{1.1}$$

Observación 1.1.2. Si $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ es un espacio de Banach con la norma definida anteriormente. En el caso $0 < p < 1$, $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ es un espacio métrico completo con métrica definida por

$$d(f, g) := ||f - g||^p_{p,\alpha}.$$

Esta métrica es invariante y p-homogénea, esto es para $\lambda \in \mathbb{C}$

$$d(\lambda f, 0) = |\lambda|^p d(f, 0),$$

se sigue entonces que dicho espacio métrico es cuasi-Banach.

Sea $L^\infty(\mathbb{D})$ el ***espacio de funciones esencialmente acotadas*** en el disco unitario. Para $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ definimos

$$||f||_\infty := inf\{a > 0 : |\{z \in \mathbb{D} : |f(z)| > a\}| = 0\}. \tag{1.2}$$

Denotamos por $H^\infty(\mathbb{D})$ al ***espacio de funciones analíticas y acotadas*** en el disco unitario.

Observación 1.1.3. El espacio $L^\infty(\mathbb{D})$ con la norma dada es un espacio de Banach y $H^\infty(\mathbb{D})$ es un espacio cerrado en $L^\infty(\mathbb{D})$, por lo tanto es un espacio de Banach con esa misma norma.

Proposición 1.1.1. Sea $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea K un subconjunto compacto del disco unitario. Entonces existe una constante C (que solo depende de n, K, p, α) tal que

$$sup\{|f^{(n)}(z)| : z \in K\} \leq C||f||_{p,\alpha}, \tag{1.3}$$

para toda $f \in A^p_\alpha$. En particular, cada evaluación puntual en $\mathbb{D}$ es una funcional lineal acotada en A^p_α.

Demostración.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$K = \{z \in \mathbb{C}\, |z| \leq r\}$$

para algún $0 < r < 1$. Probaremos el resultado primero para el caso $n = 0$.

Sea $\delta = \frac{1-r}{2}$ y sea $D(z, \delta)$ el disco euclideano de centro z y radio δ. Por subarmonicidad de la función $|f|^p$, para $z \in K$

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{D(z,\delta)} |f(w)|^p dA(w).$$

(Para más información sobre el concepto de subarmonicidad, ver Apéndice). Ahora, notemos que si $w \in D(z,\delta)$

$$|w| < \delta + |z| \leq \delta + r,$$

de aquí que

$$(1-|w|^2)^\alpha > (1-(\delta+r))^\alpha,$$

entonces para $z \in K$

$$\begin{aligned}
|f(z)|^p &\leq \frac{1}{\delta^2}\int_{D(z,\delta)} |f(w)|^p dA(w) \\
&\leq \frac{1}{\delta^2}\int_{D(z,\delta)} \frac{|f(w)|^p}{(1-|w|^2)^\alpha(\alpha+1)} dA_\alpha(w) \\
&\leq \int_{D(z,\delta)} \frac{|f(w)|^p}{\delta^2(1-(\delta+r))^\alpha(\alpha+1)} dA_\alpha(w).
\end{aligned}$$

Tomando $C := (\delta^2(1-(\delta+r))^\alpha(\alpha+1))^{-1/p}$, tenemos que para $z \in K$

$$\begin{aligned}
|f(z)|^p &\leq C^p \int_{D(z,\delta)} |f(w)|^p dA_\alpha(w) \\
&\leq C^p \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA_\alpha(w)
\end{aligned}$$

y por lo tanto si $z \in K$

$$|f(z)| \leq C||f||_{p,\alpha}.$$

Hemos probado el resultado para $n = 0$. Ahora probemos el resultado para $n \in \mathbb{N}$, para ello notemos que por lo que acabamos de mostrar existe $M > 0$ tal que

$$|f(\zeta)| \leq M||f||_{p,\alpha},$$

para toda $\zeta \in \mathbb{D}$ tal que $|\zeta| = \frac{1+r}{2}$. Por la fórmula integral de Cauchy, si tomamos $z \in K$

$$
\begin{aligned}
|f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\zeta|=\frac{1+r}{2}} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} d\zeta \\
&\leq \frac{n!(1+r)M||f||_{p,\alpha}}{2\delta^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Haciendo $C = \frac{n!(1+r)M}{2\delta^{n+1}}$, tenemos que si $z \in K$

$$
|f^{(n)}(z)| \leq C||f||_{p,\alpha}.
$$

■

A continuación, como consecuencia del resultado previo, mostraremos que el espacio de Bergman A^p_α es un espacio de Banach en el caso $1 \leq p < \infty$, y un espacio métrico completo en el caso $0 < p < 1$.

Proposición 1.1.2. Para $0 < p < \infty$ y $-1 < \alpha < \infty$, el espacio de Bergman con peso A^p_α es cerrado en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ y por lo tanto es completo.

Demostración.
Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en A^p_α y supongamos que existe $f \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ tal que

$$
f_n \longrightarrow f \qquad \text{en } \; L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha).
$$

En particular, $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, entonces si K es un compacto en $\mathbb{D}$, utilizando la Proposición 1.1.1, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$

$$
\sup\{|f_n(z) - f_m(z)| : z \in K\} \leq C||f_n - f_m||_{p,\alpha} < \epsilon.
$$

Se sigue entonces que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. Combinando este hecho y la suposición $f_n \longrightarrow f$ en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ concluimos que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$, por lo tanto f es analítica en $\mathbb{D}$ y asi $f \in A^p_\alpha$. ■

Proposición 1.1.3. Sea f una función analítica en $\mathbb{D}$. Para $0 < r < 1$, definimos la función

$$
f_r(z) := f(rz) \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{1.4}
$$

Entonces si $f \in A^p_\alpha$ tenemos:

1. $||f_r - f||_{p,\alpha} \to 0$ cuando $r \to 1^-$.
2. Existe una sucesión $(p_n)_{n=1}^\infty$ de polinomios tal que $||p_n - f||_{p,\alpha} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración.

Sea $f \in A^p_\alpha$, para $0 < \delta < 1$

$$\int_{\mathbb{D}} |f_r(z) - f(z)|^p dA_\alpha(z) \leq \int_{|z|\leq\delta} |f_r(z) - f(z)|^p dA_\alpha(z) + \int_{\delta<|z|<1} \left(|f_r(z)| + |f(z)|\right)^p dA_\alpha(z). \tag{1.5}$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, es posible elegir r suficientemente cercano a 1 de modo que para toda $z \in \mathbb{D}$

$$|f_r(z) - f(z)| < \left(\frac{\epsilon}{\alpha+1}\right)^{1/p}. \tag{1.6}$$

Para esta r fija elegimos $\delta > 0$ suficientemente cercana a 1 de modo que

$$\int_{\delta<|z|<1} |f_r(z)|^p dA_\alpha(z) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_{\delta<|z|<1} |f(z)|^p dA_\alpha(z) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tenemos entonces que para estas r y δ fijas

$$\int_{\delta<|z|<1} \left(|f_r(z)| + |f(z)|\right)^p dA_\alpha(z) < \epsilon. \tag{1.7}$$

Por otro lado notemos que por (1.6) para esta r fija

$$\int_{|z|\leq\delta} |f_r(z) - f(z)|^p dA_\alpha(z) < \epsilon. \tag{1.8}$$

De (1.5), (1.7), (1.8) se sigue que $||f_r - f||_{p,\alpha} \to 0$ cuando $r \to 1^-$, probando así la primera parte de la proposición.

Para probar la segunda parte notemos que si $f \in A^p_\alpha$, por lo que acabamos de mostrar, dado $\epsilon > 0$ existe $0 < r < 1$ suficientemente cercano a 1 tal que

$$||f_r - f||_{p,\alpha} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora, para esta r fija f_r es analítica en todo $\mathbb{D}$, entonces por el teorema de Taylor existe una sucesión de polinomios $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que para n suficientemente grande

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_r(z) - p_n(z)| < \frac{\epsilon}{2(\alpha+1)^{1/p}}.$$

Notemos entonces que para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}||p_n - f_r||_{p,\alpha} &= \left(\int_{z\in\mathbb{D}} |f_r(z) - p_n(z)|^p dA_\alpha(z)\right)^{1/p} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(\alpha+1)^{1/p}}(\alpha+1)^{1/p} = \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

por lo tanto para la r fija escogida al inicio y para n suficientemente grande

$$||p_n - f||_{p,\alpha} \leq ||p_n - f_r||_{p,\alpha} + ||f_r - f||_{p,\alpha} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

quedando demostrada así la segunda parte de la proposición.

■

La Proposición 1.1.3 nos dice que podemos aproximar cualquier función en A^p_α por una sucesión de polinomios, sin embargo estos polinomios no son necesariamente los polinomios de Taylor de la función, como podemos observar en la demostración, ya que requerimos de una función auxiliar que si puede ser aproximada por sus polinomios de Taylor en el disco.

A continuación, nos concentraremos en el espacio de Bergman A^2_α, que por la Proposición 1.1.2 es un espacio de Hilbert. Definiremos a continuación, una base ortonormal para este espacio.

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos para $z \in \mathbb{D}$

$$e_n(z) := \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}}z^n, \tag{1.9}$$

donde Γ es la función gamma.

Observación 1.1.4. La sucesión de funciones $(e_n)_{n=1}^\infty$ es un conjunto ortonormal en A^2_α.

Demostración.
Para probar esto definimos para $n \in \mathbb{N}$, $a_n(z) = z^n$. Mostraremos que la sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty$ es ortogonal y que $||a_n||_{2,\alpha} = \sqrt{\frac{n!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)}}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En efecto, supongamos que $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, entonces si $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ representa el producto interior en A^2_α tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle a_n, a_m\rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{D}} z^n \bar{z}^m dA_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} z^n \bar{z}^m (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}(\alpha+1)(1-r^2)^\alpha r d\theta dr \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r^{n+m+1}(\alpha+1)(1-r^2)^\alpha \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta dr = 0.
\end{aligned}
$$

Además utilizando las propiedades de la función Γ y su relación con la función β podemos ver que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
||a_n||_{2,\alpha}^2 &= \int_{\mathbb{D}} z^n \bar{z}^n dA_\alpha(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r^{2n+1}(\alpha+1)(1-r^2)^\alpha \int_0^{2\pi} 1 d\theta dr \\
&= \frac{2\pi}{\pi}\int_0^1 r^{2n+1}(\alpha+1)(1-r^2)^\alpha dr \\
&= (\alpha+1)\int_0^1 r^{2n}(1-r^2)^\alpha 2r dr \\
&= (\alpha+1)\int_0^1 s^n(1-s)^\alpha ds \\
&= (\alpha+1)\beta(n+1,\alpha+1) \\
&= (\alpha+1)\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)} \\
&= \frac{n!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)}.
\end{aligned}
$$

Esto muestra que la sucesión de funciones $(e_n)_{n=1}^\infty$ es un conjunto ortonormal en A_α^2. ■

Ahora, notemos que por la Proposición 1.1.3 los polinomios son densos en A_α^2, por lo tanto el conjunto de funciones $(e_n)_{n=1}^\infty$ es total en A_α^2, y así hemos probado que $(e_n)_{n=1}^\infty$ es una base ortonormal de A_α^2.

Sean $f, g \in A_\alpha^2$, entonces ambas funciones tienen su respectiva representación en serie de Taylor en el disco, digamos

$$
f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \quad y \quad g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n,
$$

se sigue entonces de las propiedades de los espacios de Hilbert y la observación previa que

$$||f||_{2,\alpha}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} |a_n|^2 \tag{1.10}$$

y

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} a_n \overline{b_n}. \tag{1.11}$$

Como el espacio de Bergman A_α^2 es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, entonces existe una proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sobre A_α^2. A continuación presentamos una fórmula explícita para dicha proyección. Más adelante, esta fórmula nos será de ayuda para obtener una representación para toda función en el espacio de Bergman.

Proposición 1.1.4. Sea $-1 < \alpha < \infty$, y sea P_α la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sobre A_α^2. Entonces para $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w), \tag{1.12}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$.

Demostración.
Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ la base ortonormal que definimos en (1.9), entonces para $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ tenemos

$$P_\alpha f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_\alpha f, e_n \rangle_\alpha e_n$$

en $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Ahora, notemos que por propiedades de la proyección ortogonal y convergencia uniforme para $z \in \mathbb{D}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\langle P_\alpha f, e_n\rangle_\alpha e_n(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, P_\alpha e_n\rangle_\alpha e_n(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, e_n\rangle_\alpha e_n(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{e_n(w)}dA_\alpha(w)\right) e_n(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{D}} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} f(w) z^n \overline{w}^n dA_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}(z\overline{w})^n\right) dA_\alpha(w).
\end{aligned}
$$

Mostraremos a continuación que para $z \in \mathbb{D}$ fijo

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}(z\overline{w})^n = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \tag{1.13}
$$

uniformemente en el disco unitario. En efecto, definimos la función analítica en $\mathbb{D}$

$$
g(\zeta) := \frac{1}{(1-\zeta)^{2+\alpha}}.
$$

Es sencillo verificar que la serie de Taylor de g alrededor del cero es

$$
g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+\alpha)(2+\alpha+1)\cdots(2+\alpha+(n-1))}{n!}\zeta^n,
$$

y por propiedades de la función Γ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)} &= \frac{(2+\alpha)(2+\alpha+1)\cdots(2+\alpha+n)}{\Gamma(2+\alpha+n+1)}\Gamma(n+2+\alpha) \\
&= (2+\alpha)(2+\alpha+1)\cdots(2+\alpha+(n-1)),
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}\zeta^n
$$

y la serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Se sigue entonces que para $z, w \in \mathbb{D}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} (z\overline{w})^n = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \tag{1.14}$$

y la serie converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$, así tenemos que para $z \in \mathbb{D}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle P_\alpha f, e_n \rangle_\alpha e_n(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\bar{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w),$$

donde el intercambio entre integración y límite está justificado por la convergencia uniforme de la serie de Taylor.

Ahora, como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \langle P_\alpha f, e_n \rangle_\alpha e_n$ converge en $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ a $P_\alpha f$ y uniformemente en compactos entonces concluimos que para $z \in \mathbb{D}$

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\bar{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w).$$

■

Los operadores $P_\alpha : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \to A^p_\alpha$ se llaman ***proyecciones de Bergman (con peso)*** en $\mathbb{D}$, y las funciones

$$K_\alpha(z, w) := \frac{1}{(1-z\bar{w})^{2+\alpha}} \qquad z, w \in \mathbb{D} \tag{1.15}$$

se llaman ***núcleos de Bergman (con peso)*** en $\mathbb{D}$. Estos núcleos serán de especial interés a lo largo de este trabajo ya que juegan un papel esencial en el estudio de la teoría de espacios de Bergman.

Originalmente, la proyección de Bergman P_α está definida para funciones en $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, sin embargo ya que obtuvimos su fórmula explícita podemos observar que ésta se puede extender a $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. En particular, podemos extender la definición de P_α a $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ siempre que $1 \leq p < \infty$.

Si f es una función en A^2_α por definición de la proyección ortogonal $P_\alpha f = f$, entonces de (1.12) obtenemos la representación

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\bar{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w)$$

para toda $f \in A^2_\alpha$.

Nuestro siguiente resultado muestra que esta representación es válida para cualquier función en A^p_α siempre que $1 \leq p < \infty$.

Corolario 1.1.5. Sea f una función en A^1_α, entonces tenemos la siguiente fórmula reproductora

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) \tag{1.16}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ y la integral converge uniformemente en z en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$.

A la fórmula (1.16) le llamaremos ***fórmula reproductora***.

Demostración.
Sea $f \in A^1_\alpha$, entonces para $0 < r < 1$ y $z \in \mathbb{D}$, digamos que $|z| \leq \rho$ para algún $0 < \rho < 1$, tenemos

$$\begin{aligned} |P_\alpha f(z) - f(z)| &\leq |P_\alpha f(z) - P_\alpha f_r(z)| + |P_\alpha f_r(z) - f_r(z)| + |f_r(z) - f(z)| \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w) - f_r(w)|}{|1 - z\overline{w}|^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) + |f_r(z) - f(z)|, \end{aligned} \tag{1.17}$$

donde hemos utilizado que para toda $0 < r < 1$, $f_r \in A^2_\alpha$ por ser ésta una función analítica y acotada en un abierto que contiene a $\mathbb{D}$.

Ahora, notemos que como f es analítica en $\mathbb{D}$, $f_r \to f$ cuando $r \to 1^-$ uniformemente en $\mathbb{D}$. Además, la función $K_\alpha(z, w)$ para $|z| \leq \rho$ es acotada en $\mathbb{D}$ como función de w y $\mathbb{D}$ con la medida dA_α es un espacio de medida finita, por lo tanto de (1.17) podemos concluir que para $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w),$$

con convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{D}$.

■

Denotamos al espacio de Bergman sin peso, es decir el caso $\alpha = 0$ como A^p y le llamaremos espacio de Bergman ordinario. La correspondiente proyección de Bergman la denotaremos P y el núcleo de Bergman en este caso lo escribimos como

$$K(z,w) := \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} \tag{1.18}$$

para $z, w \in \mathbb{D}$.

Los núcleos de Bergman están relacionados fuertemente con el grupo de Möbius $Aut(\mathbb{D})$. Para estudiar esta relación, dado $z \in \mathbb{D}$, consideremos la transformación de Möbius ϕ_z que intercambia a z con el origen, es decir $\phi_z : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que para $w \in \mathbb{D}$

$$\phi_z(w) := \frac{z-w}{1-\overline{z}w}. \tag{1.19}$$

Proposición 1.1.5. La transformación de Möbius ϕ_z posee las siguientes propiedades:

1. $\phi_z^{-1} = \phi_z$,
2. El determinante Jacobiano real de ϕ_z en $w \in \mathbb{D}$ es
$$|\phi_z'(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}, \tag{1.20}$$
3. $1 - |\phi_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\overline{w}|^2}$.

Demostración.
Para $z, w \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}\phi_z'(w) &= \frac{d}{dw}\left(\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right)\\ &= \frac{(-1+\overline{z}w)+(z\overline{z}-w\overline{z})}{(1-\overline{z}w)^2}\\ &= \frac{-1+|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2},\end{aligned}$$

se sigue entonces que

$$|\phi_z'(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4},$$

lo cual muestra (2).

Sea $\zeta = \phi_z(w)$, es decir

$$\zeta = \frac{z-w}{1-\overline{z}w},$$

entonces

$$\zeta - z = -w + \overline{z}w\zeta = w(-1+\overline{z}\zeta),$$

de aquí que

$$w = \frac{\zeta - z}{-1+\overline{z}\zeta} = \frac{z-\zeta}{1-\overline{z}\zeta},$$

por lo tanto $\phi_z^{-1} = \phi_z$, lo cual muestra (1).

Finalmente

$$\begin{aligned}
1-|\phi_z(w)|^2 &= 1-\frac{|z-w|^2}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= 1-\left(\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right)\left(\frac{\overline{z}-\overline{w}}{1-\overline{w}z}\right) \\
&= 1-\left(\frac{|z|^2 - z\overline{w} - w\overline{z} + |w|^2}{1-z\overline{w}-\overline{z}w+|zw|^2}\right) \\
&= \frac{1-z\overline{w}-\overline{z}w+|zw|^2-|z|^2+z\overline{w}+w\overline{z}-|w|^2}{1-z\overline{w}-\overline{z}w+|zw|^2} \\
&= \frac{1+|zw|^2-|z|^2-|w|^2}{1-z\overline{w}-\overline{z}w+|zw|^2} \\
&= \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}.
\end{aligned}$$

■

Como un ejemplo de la aplicación de las propiedades mencionadas anteriormente, la fórmula para los núcleos de Bergman se puede obtener mediante un sencillo cambio de variable en lugar de utilizar la serie que involucra la función gamma.

Sea $f \in A_\alpha^1$ con $-1 < \alpha < \infty$, haciendo un cambio a coordenadas polares y utilizando la propiedad del valor medio para funciones analíticas obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} f(w)dA_\alpha(w) &= \int_{\mathbb{D}} f(w)(\alpha+1)(1-|w|^2)^\alpha dA(w)\\ &= (\alpha+1)\int_0^1 (1-r^2)^\alpha 2r\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta\right)dr\\ &= (\alpha+1)f(0)\int_0^1 (1-r^2)^\alpha 2rdr,\end{aligned}$$

ahora, hacemos el cambio de variable $u = 1-r^2, du = -2rdr$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} f(w)dA_\alpha(w) &= (\alpha+1)f(0)\int_1^0 -u^\alpha du\\ &= (\alpha+1)f(0)\left(-\frac{(1-r^2)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\Big|_0^1\\ &= f(0).\end{aligned}$$

Tenemos por consecuencia que si $f \in A^1_\alpha$ entonces

$$f(0) = \int_{\mathbb{D}} f(w)dA_\alpha(w). \tag{1.21}$$

En (1.21) consideremos $f\circ\phi_z$ para $z \in \mathbb{D}$ fija, se sigue que

$$f(z) = (f\circ\phi_z)(0) = \int_{\mathbb{D}} f\circ\phi_z(w)dA_\alpha(w),$$

haciendo el cambio de variable $w = \phi_z(w)$ y utilizando las propiedades mostradas en la Proposición 1.1.5, obtenemos

$$\begin{aligned}f(z) &= \int_{\mathbb{D}} f(\phi_z(w))(\alpha+1)(1-|w|^2)^\alpha dA(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w)(\alpha+1)(1-|\phi_z(w)|^2)^\alpha\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}dA(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w)(\alpha+1)\left(\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}\right)^\alpha\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}dA(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}{|1-\overline{z}w|^{4+2\alpha}}dA_\alpha(w)\\ &= (1-|z|^2)^{\alpha+2}\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)}{(1-\overline{z}w)^{2+\alpha}(1-\overline{w}z)^{2+\alpha}}dA_\alpha(w).\end{aligned}$$

A continuación sustituimos la función f por la función en A^1_α, $w \mapsto (1-w\overline{z})^{2+\alpha} f(w)$, entonces

$$(1-|z|^2)^{\alpha+2} f(z) = (1-|z|^2)^{\alpha+2} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-w\overline{z})^{2+\alpha} f(w)}{(1-\overline{z}w)^{2+\alpha}(1-\overline{w}z)^{2+\alpha}} dA_\alpha(w),$$

de aquí se sigue finalmente que para $f \in A^1_\alpha$ y $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w).$$

1.2. Algunas estimaciones en L^p

La gran mayoría de los problemas de teoría de operadores que surgirán en nuestro estudio de los espacios de Bergman involucran la estimación de operadores integrales cuyo núcleo es una potencia del núcleo de Bergman.

En esta sección, presentamos algunas estimaciones para operadores integrales de este tipo que nos serán de gran utilidad a lo largo de todo este trabajo. En particular, nos ayudará a encontrar condiciones para el acotamiento del operador P_α en el espacio $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Teorema 1.2.1. Sea $-1 < \alpha < \infty$ y $\beta \in \mathbb{R}$, definimos para $z \in \mathbb{D}$ las funciones

$$I_{\alpha,\beta}(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha+\beta}} dA(w) \tag{1.22}$$

y

$$J_\beta(z) := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-ze^{-i\theta}|^{1+\beta}}. \tag{1.23}$$

Tenemos que

$$I_{\alpha,\beta}(z) \sim J_\beta(z) \sim \begin{cases} 1 & \beta < 0, \\ \log \frac{1}{1-|z|^2} & \beta = 0, \\ \frac{1}{(1-|z|^2)^\beta} & \beta > 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

cuando $|z| \to 1^-$.

Demostración.

Notemos primero que la condición $-1 < \alpha < \infty$ asegura la convergencia de las integrales $I_{\alpha,\beta}(z)$ y $J_\beta(z)$ para cada $z \in \mathbb{D}$ fija. En efecto, supongamos primero el caso $2+\alpha+\beta > 0$, entonces tenemos que para $z \in \mathbb{D}$

$$I_{\alpha,\beta}(z) \leq \frac{1}{(1-|z|)^{2+\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^\alpha dA(w),$$

y la condición $-1 < \alpha < \infty$ nos da la convergencia de la integral en el lado derecho. Para el caso $2+\alpha+\beta \leq 0$ tenemos que para $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta}(z) &= \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^\alpha |1-z\overline{w}|^{-2-\alpha-\beta} dA(w) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^\alpha dA(w). \end{aligned}$$

Análogamente $J_\beta(z)$ converge para cada $z \in \mathbb{D}$ fija.

Procedemos con la prueba de (1.24), para ello definimos $\lambda = \frac{2+\alpha+\beta}{2}$. Notemos que si $\lambda \in \mathbb{Z}^-$ o $\lambda = 0$, entonces $\beta < 0$ y ya vimos que si $2+\alpha+\beta \leq 0$

$$I_{\alpha,\beta}(z) \leq \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^\alpha dA(w),$$

para toda $z \in \mathbb{D}$. Ahora, si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \notin \mathbb{Z}^-$ mostramos previamente que

$$\frac{1}{(1-\overline{z}w)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!\Gamma(\lambda)} (\overline{z}w)^n \qquad z, w \in \mathbb{D}.$$

Entonces si $w = re^{i\theta}$

$$\frac{1}{(1-\overline{z}re^{i\theta})^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!\Gamma(\lambda)} \overline{z}^n r^n e^{in\theta} \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{1.25}$$

Haciendo el cambio a coordenadas polares $w = re^{i\theta}$, para $z \in \mathbb{D}$ tenemos que

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta}(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha+\beta}} dA(w) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)^\alpha}{|1-\overline{z}re^{i\theta}|^{2\lambda}} r \frac{d\theta}{\pi} dr \\ &= \int_0^1 (1-r^2)^\alpha 2r \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\overline{z}re^{i\theta}|^{2\lambda}} \right) dr. \end{aligned}$$

Notemos ahora que para $z \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$ fijas

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\overline{z}re^{i\theta}|^{2\lambda}} = \left\| \frac{1}{(1-\overline{z}re^{i\bullet})^{\lambda}} \right\|_{L^2[0,2\pi]},$$

se sigue entonces por la representación (1.25) que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\overline{z}re^{i\theta}|^{2\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!^2\Gamma(\lambda)^2}|z|^{2n}r^{2n}$$

para $z \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$ fijas, y de la convergencia uniforme de esta serie para $0 < r < 1$ tenemos que

$$I_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!^2\Gamma(\lambda)^2}|z|^{2n}\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha} r^{2n} 2rdr \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Realizando el cambio de variable $s = r^2, ds = 2rdr$ y utilizando las propiedades de las funciones β y Γ, obtenemos

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!^2\Gamma(\lambda)^2}|z|^{2n}\int_0^1 (1-s)^{\alpha} s^n ds \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!^2\Gamma(\lambda)^2}|z|^{2n}\beta(\alpha+1,n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!^2\Gamma(\lambda)^2}|z|^{2n}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\lambda)^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!\Gamma(n+2+\alpha)}|z|^{2n} \qquad z \in \mathbb{D}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Notemos que por la fórmula de Stirling

$$\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \sim (n+1)^{\lambda-\alpha-2}$$

cuando $n \to \infty$, y

$$\frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!} \sim (n+1)^{\lambda-1}$$

cuando $n \to \infty$, por lo tanto

$$\frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!\Gamma(n+2+\alpha)} \sim (n+1)^{\beta-1}.$$

Se sigue entonces de (1.26) que

$$I_{\alpha,\beta}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\beta-1}|z|^{2n}$$

si $|z| \to 1^-$.

Notemos que si $\beta < 0$ entonces para $z \in \mathbb{D}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\beta-1}|z|^{2n} < \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\beta-1},$$

y la serie en el lado derecho es convergente, por lo tanto para este caso tenemos

$$I_{\alpha,\beta}(z) \sim 1$$

cuando $|z| \to 1^-$.

Si $\beta = 0$ entonces

$$I_{\alpha,0}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2(n+1)}}{n+1} = \log \frac{1}{1-|z|^2}$$

cuando $|z| \to 1^-$.

Si $\beta > 0$ entonces notemos que otra vez por la fórmula de Stirling

$$(n+1)^{\beta-1} \sim n^{\beta-1} \sim \frac{\Gamma(n+\beta)}{n!},$$

de aquí se sigue que

$$I_{\alpha,\beta}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)}|z|^{2n} = \frac{1}{(1-|z|^2)^{\beta}}$$

cuando $|z| \to 1^-$.

La estimación para $J_\beta(z)$ es análoga. ∎

El resultado que presentamos a continuación se llama criterio de Schur, y es una herramienta muy efectiva para mostrar el acotamiento en L^p de operadores integrales.

Teorema 1.2.2. Sea (X, μ) un espacio de medida donde μ es una medida positiva. Sea $T(x, y)$ una función medible en el espacio de medida producto $X \times X$ y $\mathbb{T}$ el siguiente operador integral asociado

$$\mathbb{T}f(x) = \int_X T(x,y)f(y)d\mu(y) \qquad x \in X, \tag{1.27}$$

definido en un espacio de funciones para las cuales la integral converja.

Si para alguna $1 < p < \infty$ existe una función medible h estrictamente positiva en X y $M > 0$ tales que

$$\int_X T(x,y)h(y)^q d\mu(y) \leq Mh(x)^q \qquad x \in X \tag{1.28}$$

y

$$\int_X T(x,y)h(x)^p d\mu(x) \leq Mh(y)^p \qquad y \in X, \tag{1.29}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $\mathbb{T}$ es acotado en $L^p(X, d\mu)$ y $||\mathbb{T}|| \leq M$.

Demostración.
Sea $f \in L^p(X, d\mu)$ y $x \in X$

$$\begin{aligned}|\mathbb{T}f(x)|^p &\leq \left(\int_X |T(x,y)||f(y)|d\mu(y)\right)^p \\ &= \left(\int_X |T(x,y)|^{1/q}h(y)|T(x,y)|^{1/p}h(y)^{-1}|f(y)|d\mu(y)\right)^p,\end{aligned}$$

por la desigualdad de Hölder y la suposición (1.28) tenemos que

$$\begin{aligned}|\mathbb{T}f(x)|^p &\leq \left(\int_X |T(x,y)|h(y)^q d\mu(y)\right)^{p/q}\left(\int_X |T(x,y)||f(y)|^p h(y)^{-p}d\mu(y)\right) \\ &\leq M^{p/q}h(x)^p\left(\int_X |T(x,y)||f(y)|^p h(y)^{-p}d\mu(y)\right).\end{aligned}$$

Tomando ahora integral sobre X en ambos lados, utilizando el teorema de Fubini y la suposición (1.29) tenemos

$$\begin{aligned}\int_X |\mathbb{T}f(x)|^p d\mu(x) &\leq M^{p/q}\int_X h(x)^p\left(\int_X |T(x,y)||f(y)|^p h(y)^{-p}d\mu(y)\right)d\mu(x)\\ &= M^{p/q}\int_X h(y)^{-p}|f(y)|^p\left(\int_X |T(x,y)|h(x)^p d\mu(x)\right)d\mu(y)\\ &\leq M^{(p/q)+1}\int_X |f(y)|^p h(y)^{-p}h(y)^p d\mu(y)\\ &= M^p\int_X |f(y)|^p d\mu(y).\end{aligned}$$

Concluimos entonces que para $f \in L^p(X, d\mu)$

$$||\mathbb{T}f||_p \leq M||f||_p,$$

por lo tanto el operador $\mathbb{T}$ es acotado en $L^p(X, d\mu)$ y $||\mathbb{T}|| \leq M$.

■

El siguiente es el resultado más importante de esta sección ya que nos permitirá encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre α y p para el acotamiento de las proyecciones P_α en ciertos espacios L^p. Para la prueba utilizaremos fuertemente el Teorema 1.1.1 y el criterio de Schur mostrado previamente.

Teorema 1.2.3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $d\mu(z) := (1-|z|^2)^c dA(z)$. Sean $\mathbb{T}$ y $\mathbb{S}$ los operadores integrales definidos por

$$\mathbb{T}f(z) = (1-|z|^2)^a\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^b f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+a+b}}dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}$$

y

$$\mathbb{S}f(z) = (1-|z|^2)^a\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^b f(w)}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces si $1 \leq p < \infty$ los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\mathbb{T}$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$.
2. $\mathbb{S}$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$.
3. $-pa < c+1 < p(b+1)$.

Demostración.
Notemos que (2) $\Rightarrow$ (1) es inmediato ya que para toda $f \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$

$$\|\mathbb{T}f\|_p \leq \|\mathbb{S}f\|_p .$$

Probaremos ahora (1) $\Rightarrow$ (3). Supongamos entonces que $\mathbb{T}$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, es decir existe $C > 0$ tal que

$$\|\mathbb{T}f\|_p \leq C \|f\|_p .$$

Definimos $f(z) := (1-|z|^2)^N$ para $z \in \mathbb{D}$, donde $N \in \mathbb{N}$ es tal que $a+b+N > -2$ y $b+N > -1$. Notemos que $f \in L^p(\mathbb{D}, d\mu)$ y

$$\mathbb{T}f(z) = (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{b+N}}{(1-z\overline{w})^{2+a+b+N}} (1-z\overline{w})^N dA(w).$$

Por la representación en serie de Taylor que obtuvimos para $(1-z\overline{w})^{-(2+a+b+N)}$ en (1.25) tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}f(z) &= (1-|z|^2)^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+a+b+N)}{n!\Gamma(2+a+b+N)} z^n \int_{\mathbb{D}} (1-z\overline{w})^N (1-|w|^2)^{b+N} \overline{w}^n dA(w) \\
&= (1-|z|^2)^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+a+b+N)}{n!\Gamma(2+a+b+N)} z^n \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-zre^{-i\theta})^N (1-r^2)^{b+N} r^{n+1} e^{-in\theta} \frac{d\theta}{\pi} dr.
\end{aligned}$$

Notemos ahora que por el teorema del binomio podemos escribir

$$(1-zre^{-i\theta})^N = 1 - \binom{N}{1} zre^{-i\theta} + \binom{N}{2} z^2 r^2 e^{-2i\theta} + ... + (-1)^N z^N r^N e^{-Ni\theta}.$$

Si $n \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = 0,$$

y para todo $1 \leq k \leq N$

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(n+k)\theta} d\theta = 0.$$

Se sigue entonces que si $n \neq 0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-zre^{-i\theta})^N(1-r^2)^{b+N}r^{n+1}e^{-in\theta}d\theta = 0,$$

para toda $0 < r < 1$, y si $n = 0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-zre^{-i\theta})^N(1-r^2)^{b+N}r^{n+1}e^{-in\theta}d\theta = (1-r^2)^{b+N}2r,$$

para toda $0 < r < 1$. Por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{T}f(z) &= (1-|z|^2)^a\frac{\Gamma(2+a+b+N)}{\Gamma(2+a+b+N)}\int_0^1(1-r^2)^{b+N}2rdr\\ &= (1-|z|^2)^a\int_0^1(1-r^2)^{b+N}2rdr\\ &= \frac{(1-|z|^2)^a}{b+N+1}.\end{aligned}$$

Ya que tenemos una representación explícita para $\mathbb{T}f$ calculemos su norma en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$

$$\begin{aligned}\|\mathbb{T}f\|_p^p &= \int_D \frac{(1-|w|^2)^{ap}}{(b+N+1)^p}(1-|w|^2)^c dA(w)\\ &= \frac{1}{(b+N+1)^p}\int_D(1-|w|^2)^{ap+c}dA(w).\end{aligned}$$

Como por hipótesis tenemos que $\mathbb{T}f \in L^p(\mathbb{D}, d\mu)$ de la ecuación arriba observamos que debe ocurrir $ap + c > -1$, equivalentemente $-pa < c + 1$ y tenemos la primera desigualdad.

Para obtener la desigualdad $c+1 < p(b+1)$, consideremos primero el caso $p > 1$ y sea q su exponente conjugado. Sea $\mathbb{T}^*$ el operador adjunto de $\mathbb{T}$ con respecto a la acción dual inducida por el producto interior de $L^2(\mathbb{D}, d\mu)$. Sabemos que $\mathbb{T}^*$ es un operador en $L^q(\mathbb{D}, d\mu)$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}}\mathbb{T}^*g(z)\overline{f(z)}d\mu(z) = \int_D g(z)\overline{\mathbb{T}f(z)}d\mu(z)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{D}, d\mu)$ y toda $g \in L^q(\mathbb{D}, d\mu)$. Desarrollando el lado derecho de la ecuación y aplicando el teorema de Fubini obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \mathbb{T}^* g(z)\overline{f(z)}d\mu(z) &= \int_{\mathbb{D}} g(z)(1-|z|^2)^{a+c}\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{(1-\overline{z}w)^{2+a+b}}\overline{f(w)}dA(w)dA(z)\\ &= \int_{\mathbb{D}} \overline{f(w)}(1-|w|^2)^b\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{a+c}}{(1-\overline{z}w)^{2+a+b}g(z)}dA(z)dA(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} \overline{f(w)}(1-|w|^2)^{b-c}\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{a+c}}{(1-\overline{z}w)^{2+a+b}g(z)}dA(z)d\mu(w).\end{aligned}$$

Por unicidad de la representación dual se sigue entonces que

$$\mathbb{T}^* g(z) = (1-|z|^2)^{b-c}\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{a+c}}{(1-z\overline{w})^{2+a+b}}g(w)dA(w) \qquad z\in\mathbb{D}.$$

Ahora, como por hipótesis $\mathbb{T}$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$, entonces $\mathbb{T}^*$ es un operador acotado en $L^q(\mathbb{D}, d\mu)$. Definimos $g(z) := (1-|z|^2)^N$ para $z\in\mathbb{D}$, donde $N\in\mathbb{N}$ es tal que $a+b+N > -2$ y $a+c+N > -1$. Notemos que $g\in L^q(\mathbb{D}, d\mu)$ y procediendo de manera análoga al caso del operador $\mathbb{T}$, obtenemos

$$\mathbb{T}^* g(z) = \frac{(1-|z|^2)^{b-c}}{a+c+N+1} \qquad z\in\mathbb{D}$$

entonces

$$\begin{aligned}\|\mathbb{T}g\|_q^q &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{bq-cq}}{(a+c+N+1)^q}(1-|w|^2)^c dA(w)\\ &= \frac{1}{(b+N+1)^q}\int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{q(b-c)+c+1}dA(w).\end{aligned}$$

Como por hipótesis tenemos que $\mathbb{T}g\in L^q(\mathbb{D}, d\mu)$ de la ecuación arriba observamos que debe ocurrir $q(b-c)+c > -1$, o equivalentemente, $c+1 < p(b+1)$ y tenemos la segunda desigualdad para el caso $p > 1$.

Consideremos a continuación el caso $p = 1$. Para este caso, el operador $\mathbb{T}^*$ es acotado en $L^\infty(\mathbb{D})$, entonces como $g(z) := (1-|z|^2)^N \in L^\infty(\mathbb{D})$ debe ocurrir que

$$\|\mathbb{T}^* g\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{b-c}}{a+c+N+1} < \infty,$$

claramente esto implica $b \geq c$. Para ver que la desigualdad es estricta consideremos funciones de la forma

$$f_z(w) := \frac{(1-z\overline{w})^{2+a+b}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} \qquad z,w \in \mathbb{D}.$$

Claramente para toda $z \in \mathbb{D}$

$$\|f_z\|_\infty = 1.$$

Supongamos $b = c$, entonces por el Teorema 1.2.1

$$\mathbb{T}^* f_z(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{a+c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+c}} dA(w) \sim \log \frac{1}{1-|z|^2}$$

si $|z| \to 1^-$. Esto implica que $\|\mathbb{T}^* f_z\|_\infty \to \infty$ cuando $|z| \to 1^-$, lo cual contradice el acotamiento de $\mathbb{T}^*$ en $L^\infty(\mathbb{D})$, por tanto $b > c$.

Probemos ahora la última implicación (3) $\Rightarrow$ (2). Para ello consideremos primero el caso $p = 1$. Sea $f \in L^1(\mathbb{D}, d\mu)$, aplicando el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{S}f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{a+c} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} |f(w)| dA(w) dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |f(w)|(1-|w|^2)^b \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{a+c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} dA(z) dA(w).
\end{aligned}$$

Notemos que como $b - c > 0$ por hipótesis, entonces por el Teorema 1.2.1 para toda $z \in \mathbb{D}$

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{a+c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} dA(z) \sim \frac{1}{(1-|w|^2)^{b-c}}$$

cuando $|w| \to 1^-$, como consecuencia existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{S}f\|_1 &\leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{(1-|w|^2)^{b-c}} |f(w)| dA(w) \\
&= C \int_{\mathbb{D}} |f(w)| d\mu(w) \\
&= C \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{S}$ es un operador acotado en $L^1(\mathbb{D}, d\mu)$.

Para el caso $p > 1$ utilizaremos el criterio de Schur. Entonces buscamos una función positiva h definida en $\mathbb{D}$ que satisfaga

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^a \frac{(1-|w|^2)^{b-c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} h(w)^q d\mu(w) \leq Mh(z)^q \qquad z \in \mathbb{D} \tag{1.30}$$

y

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^a \frac{(1-|w|^2)^{b-c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} h(z)^p d\mu(z) \leq Mh(w)^p \qquad w \in \mathbb{D}, \tag{1.31}$$

para alguna constante $C > 0$. La función que nos servirá para esto tiene la forma $h(z) := (1-|z|^2)^s$ donde debemos elegir $s \in \mathbb{R}$ de modo que se cumpla

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{b+qs}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} dA(w) \leq \frac{M}{(1-|z|^2)^{a-sq}} \qquad z \in \mathbb{D}$$

y

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{a+ps+c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} dA(z) \leq \frac{M}{(1-|w|^2)^{b-ps-c}} \qquad z \in \mathbb{D}.$$

De nuevo por el Teorema 1.2.1 esto ocurre si y solo si

$$\begin{aligned} a - qs &> 0, \\ b + qs &> -1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b - ps - c &> 0, \\ a + ps + c &> -1. \end{aligned}$$

Podemos reescribir estas cuatro desigualdades como

$$-\frac{(b+1)}{q} < s < \frac{a}{q}, \qquad -\frac{(a+c+1)}{p} < s < \frac{b-c}{p}.$$

Para probar la existencia de $s \in \mathbb{R}$ que cumpla tales condiciones mostraremos que

$$\left(-\frac{(b+1)}{q}, \frac{a}{q}\right) \cap \left(-\frac{(a+c+1)}{p}, \frac{b-c}{p}\right) \neq \emptyset,$$

lo cual se reduce a probar las siguientes dos desigualdades

$$-\frac{(b+1)}{q} < \frac{b-c}{p}, \qquad -\frac{(a+c+1)}{p} < \frac{a}{q}.$$

Para probar la primera notemos que por hipótesis tenemos que $\frac{1}{p} < \frac{b+1}{c+1}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{b+1}{q} &= (b+1)\left(1-\frac{1}{p}\right)\\ &> (b+1)\left(1-\frac{b+1}{c+1}\right)\\ &= \left(\frac{b+1}{c+1}\right)(c-b)\\ &> \frac{1}{p}(c-b),\end{aligned}$$

de aquí que

$$-\frac{(b+1)}{q} < \frac{b-c}{p}.$$

Para probar la segunda desigualdad notemos que por hipótesis tenemos que $-pa < c+1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{a+c+1}{p} &> \frac{a(1-p)}{p}\\ &= -\frac{a}{q},\end{aligned}$$

por tanto tenemos

$$\frac{(a+c+1)}{p} < \frac{a}{q}.$$

Hemos probado finalmente como consecuencia del criterio de Schur que $\mathbb{S}$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$ para $1 < p < \infty$.

■

Mostraremos a continuación un resultado que muestra que existen muchas proyecciones de $L^1(\mathbb{D}, dA)$ sobre el espacio de Bergman $A^1(\mathbb{D})$. Esta es una ventaja muy importante que tiene la teoría de espacios de Bergman sobre la teoría de espacios de Hardy ya que un resultado conocido es que no existe una proyección acotada de $L^1(\mathbb{D}, dA)$ sobre el espacio de Hardy $H^1(\mathbb{D})$.

Teorema 1.2.4. Sea $\alpha > -1$, $\beta < \infty$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces la proyección P_β es un operador acotado de $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sobre A^p_α si y solo si $\alpha + 1 < (\beta + 1)p$.

Demostración.
Recordemos que para $f \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$

$$\begin{aligned} P_\beta f(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^{2+\beta}} dA_\beta(w) \\ &= (\beta + 1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2|^\beta}{(1 - z\overline{w})^{2+\beta}} dA(w), \end{aligned}$$

entonces por el Teorema 1.2.3 P_β es un operador acotado en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ si y solo si $\alpha + 1 < p(\beta + 1)$. ■

Como consecuencia del teorema previo tenemos las siguientes observaciones.

Observación 1.2.5. P_α es un operador acotado de $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ en A^p_α si y solo si $p > 1$. En particular la proyección de Bergman sin peso P es acotada de $L^p(\mathbb{D}, dA)$ sobre el espacio de Bergman sin peso A^p.

Observación 1.2.6. P_β es un operador acotado de $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sobre A^1_α si y solo si $\alpha < \beta$. En particular P_β es una proyección acotada de $L^1(\mathbb{D}, dA)$ sobre A^1 cuando $\beta > 0$.

La siguiente proposición es una caracterización de las funciones en A^p_α que obtenemos gracias al Teorema 1.2.4.

Proposición 1.2.1. Sea $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$ y n un entero positivo. Una función analítica f en $\mathbb{D}$ es tal que $f \in A^p_\alpha$ si y solo si la función $(1 - |z|^2)^n f^n(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Demostración.
Sea $f \in A^p_\alpha$ y sea $\beta > \alpha$. Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA_\beta(w) &= (\beta + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p (1 - |w|^2)^\beta dA(w) \\ &\leq (\beta + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p (1 - |w|^2)^\alpha dA(w) \\ &= \frac{(\beta + 1)}{(\alpha + 1)} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA_\alpha(w). \end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in A^p_\beta$. Entonces por el Corolario 1.1.5

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\bar{w})^{2+\beta}} dA_\beta(w) \\ &= (\beta+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\beta}}(1-|w|^2)^\beta dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Derivando n veces ambos lados de la ecuación y multiplicando por $(1-|z|^2)^n$ obtenemos

$$(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) = C(1-|z|^2)^n \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-z\overline{w})^{2+n+\beta}} g(w) dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}$$

donde $g(w) = \overline{w}^n f(w)$ y $C = (\beta+1)\cdots(\beta+n+1)$. Notemos que $g \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, entonces por el Teorema 1.2.3, $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Recíprocamente, supongamos que f es analítica en $\mathbb{D}$ y $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Probaremos que $f \in A^p_\alpha$, para ello sin pérdida de generalidad supongamos que los primeros $2n+1$ coeficientes de Taylor de f alrededor de cero son cero, es decir

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad k = 0, 1, ..., 2n.$$

Notemos que entonces $f^n(z) = z^{n+1}\phi(z)$, con ϕ analítica en $\mathbb{D}$. Definimos la función

$$h(z) = \frac{C(1-|z|^2)^n f^n(z)}{\overline{z}^n} \qquad z \in \mathbb{D}$$

donde $C = (\beta+1)^{-1} \cdot ... \cdot (\beta+n)^{-1}$.
Por hipótesis tenemos que $(1-|z|^2)^n z^{n+1}\phi(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\int_{1-\delta<|z|<1} \left|(1-|z|^2)^n z^{n+1}\phi(z)\right|^p dA_\alpha(z) < \epsilon,$$

de aquí que

$$\int_{1-\delta<|z|<1} (1-|z|^2)^{np}|z\phi(z)|^p dA_\alpha(z) < \frac{\epsilon}{(1-\delta)^{np}},$$

y puesto que $(1-|z|^2)^{np}|z\phi(z)|^p$ es una función continua en el compacto $\{z \in \mathbb{D} : |z| \leq 1-\delta\}$, entonces concluimos que $(1-|z|^2)^n|z\phi(z)| \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Notemos ahora que

$$\frac{(1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)|}{|\overline{z}|^n} = \frac{(1-|z|^2)^n|z|^{n+1}|\phi(z)|}{|\overline{z}|^n}$$
$$= (1-|z|^2)^n|z\phi(z)|,$$

por lo tanto $h \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Sea $\beta > \alpha$, podemos definir por lo mostrado previamente $g := P_\alpha h$, es decir

$$g(z) := (\beta+1)C\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\beta+n} f^{(n)}(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\beta}\overline{w}^n} dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}$$

y por el Teorema 1.2.4 $g \in A^p_\alpha$. Derivando n veces ambos lados obtenemos

$$g^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f^{(n)}(w)}{(1-z\bar{w})^{2+\beta+n}} dA_{\beta+n}(w) \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{1.32}$$

Por otro lado notemos que por hipótesis $f^{(n)} \in L^p(\mathbb{D}, dA_{\alpha+n}) \subset L^p(\mathbb{D}, dA_{\beta+n})$, entonces del Corolario 1.1.5 se sigue que

$$f^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f^{(n)}(w)}{(1-z\bar{w})^{2+\beta+n}} dA_{\beta+n}(w) \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{1.33}$$

De (1.32) y (1.33) se sigue entonces que f y g difieren por un polinomio y como $g \in A^p_\alpha$ entonces $f \in A^p_\alpha$.

■

1.3. El Espacio de Bloch

En esta sección estudiaremos el espacio de Bloch que surge de una manera muy natural, como veremos más adelante, en el estudio de las proyecciones de Bergman. Para ello comencemos definiendo este espacio.

Definición 1.3.1. Definimos el ***espacio de Bloch*** $\mathcal{B}$ como el espacio de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ tales que

$$\|f\|_* := \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

La seminorma $\|\cdot\|_*$ es Möbius-invariante. En efecto, sea

$$\phi_w(z) = \frac{w - z}{1 - z\overline{w}} \qquad z, w \in \mathbb{D},$$

y sea $f \in \mathcal{B}$, entonces por la Proposición 1.1.5

$$\begin{aligned} \|f \circ \phi_w\|_* &= \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|(f \circ \phi_w)'(z)| \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|\phi_w'(z)||f'(\phi_w(z))| \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |\phi_w(z)|^2)|f'(\phi_w(z))| \\ &= \|f\|_* . \end{aligned}$$

Definimos para $f \in \mathcal{B}$ la norma

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \|f\|_* ,$$

tenemos entonces el siguiente resultado para el espacio de Bloch con esta norma.

Teorema 1.3.2. El espacio de Bloch $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$.

Demostración.
Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}$, es decir dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}} = |f_n(0) - f_m(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f_n'(z) - f_m'(z)| < \epsilon \tag{1.34}$$

si $n, m \geq N$.

Esto implica que $(f_n(0))_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ por lo que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} |f_n(0)|.$$

Por otro lado (1.34) implica también que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f_n'(z)-f_m'(z)|<\epsilon \qquad n,m\geq N$$

de aquí que para cada $z\in\mathbb{D}$ fija

$$|f_n'(z)-f_m'(z)|<\frac{\epsilon}{(1-|z|^2)} \qquad n,m\geq N.$$

Por lo tanto $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy en compactos de $\mathbb{D}$ y así existe una función g analítica en $\mathbb{D}$ tal que $f_n'\to g$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$.

Ahora, como $\mathbb{D}$ es un conjunto simplemente conexo, existe una función f analítica en $\mathbb{D}$ tal que

$$f'(z)=g(z) \qquad z\in\mathbb{D}$$

y $f(0)=z_0$. Haciendo $m\to\infty$ en (1.34) tenemos que

$$|f_n(0)-f(0)|+\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f_n'(z)-f'(z)|\leq\epsilon$$

si $n\geq N$, de aquí que $\|f_n-f\|_{\mathcal{B}}\to 0$ cuando $n\to\infty$.

Notemos además que $f\in\mathcal{B}$ dado que $f_N-f\in\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es un espacio vectorial. Concluimos entonces que $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach con la norma definida.

■

Proposición 1.3.1. Si $f\in H^\infty$ entonces $f\in\mathcal{B}$. Además tenemos que para toda $f\in H^\infty$

$$\|f\|_{\mathcal{B}}\leq\|f\|_\infty.$$

Demostración.
Sea $f\in H^\infty$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\|f\|_\infty=1$, entonces $f(\mathbb{D})\subset\overline{\mathbb{D}}$.

Definimos la función

$$g(z)=\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)} \qquad z\in\mathbb{D}.$$

Notemos que para esta función tambien ocurre que $g(\mathbb{D})\subset\overline{\mathbb{D}}$, g es analítica y además $g(0)=0$, entonces por el lema de Schwarz tenemos que

$$|g(z)| \leq |z| \qquad z \in \mathbb{D},$$

de aquí que

$$\frac{|f(z) - f(0)|}{|z|} \leq |1 - \overline{f(0)} f(z)| \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Tomando límite cuando $z \to 0$ en ambos lados tenemos

$$|f'(0)| \leq |1 - |f(0)|^2| = 1 - |f(0)|^2 \leq 1,$$

por tanto

$$|f'(0)| \leq \|f\|_\infty \tag{1.35}$$

para toda $f \in H^\infty$.

Ahora reemplazando $f \in H^\infty$ por $f \circ \phi_z \in H^\infty$ en (1.35), donde ϕ_z es la función que definimos en (1.19) y utilizando que la norma $\|\cdot\|_\infty$ tambien es Möbius invariante obtenemos

$$|(f \circ \phi_z)'(0)| \leq \|f\|_\infty .$$

Notemos que por la Proposición 1.1.5

$$|(f \circ \phi_z)'(0)| = |f'(\phi_z(0))||\phi_z'(0)| = |f'(z)|(1 - |z|^2),$$

se sigue entonces que si $f \in H^\infty$

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \|f\|_\infty \qquad z \in \mathbb{D},$$

por lo tanto $\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \|f\|_\infty$. ∎

Definimos a continuación un subespacio del espacio de Bloch que tiene propiedades muy importantes y nos será de utilidad a lo largo de esta sección.

Definición 1.3.3. Definimos el ***espacio de Bloch pequeño*** $\mathcal{B}_0$ como el espacio de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ tales que

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)|f'(z)|=0.$$

Una de las propiedades más importantes del espacio $\mathcal{B}_0$ es que éste es la cerradura del conjunto de polinomios en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$, como probaremos a continuación. Para ello probamos primero dos resultados auxiliares.

Proposición 1.3.2. El espacio de Bloch pequeño $\mathcal{B}_0$ es cerrado en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$.

Demostración.
Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{B}_0$ y sea $f\in\mathcal{B}$ tal que $\|f_n-f\|_{\mathcal{B}}\to 0$, entonces dado $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$(1-|z|^2)|f'(z)-f_N'(z)|<\frac{\epsilon}{2}\qquad z\in\mathbb{D}.$$

Además, como $f_N\in\mathcal{B}$ entonces existe $\delta>0$ tal que

$$(1-|z|^2)|f_N'(z)|<\frac{\epsilon}{2}\qquad \delta<|z|<1,$$

de aquí que si $\delta<|z|<1$

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|f'(z)| &\le (1-|z|^2)|f'(z)-f_N'(z)|+(1-|z|^2)|f_N'(z)|\\ &<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\end{aligned}$$

Por tanto hemos probado que $f\in\mathcal{B}_0$. ∎

Proposición 1.3.3. Sea $f\in\mathcal{B}$, entonces $f\in\mathcal{B}_0$ si y solamente si

$$\|f_r-f\|_*\to 0\qquad r\to 1^-$$

donde $f_r(z)=f(rz)$ para toda $z\in\mathbb{D}$ y $0<r<1$.

Demostración.

Supongamos primero que $\|f_r - f\|_* \to 0$ cuando $r \to 1^-$. Notemos que si $f \in \mathcal{B}$, entonces $f_r \in \mathcal{B}_0$ para toda $0 < r < 1$, por ser f_r una función acotada en todo $\overline{\mathbb{D}}$. Por lo tanto como probamos previamente que $\mathcal{B}_0$ es cerrado en $\mathcal{B}$ entonces $f \in \mathcal{B}_0$.

Recíprocamente, supongamos que $f \in \mathcal{B}_0$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \delta^2 < |z| < 1.$$

Ahora, para este $0 < \delta < 1$ fijo tenemos que

$$\|f_r - f\|_* \leq \sup_{\delta < |z| < 1} (1 - |z|^2)|rf'(rz) - f'(z)| + \sup_{|z| \leq \delta} (1 - |z|^2)|rf'(rz) - f'(z)|. \tag{1.36}$$

Como f' es uniformemente continua en compactos de $\mathbb{D}$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que si $M < r < 1$ tal que

$$(1 - |z|^2)|rf'(rz) - f'(z)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad |z| \leq \delta,$$

se sigue entonces que si $M < r < 1$

$$\sup_{|z| \leq \delta} (1 - |z|^2)|rf'(rz) - f'(z)| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.37}$$

Por otro lado, si $\delta < r < 1$ y $\delta < |z| < 1$ entonces $\delta^2 < r|z| < 1$ y así por hipótesis

$$(1 - |z|^2)|rf'(rz)| \leq (1 - r^2|z|^2)|f'(rz)| < \frac{\epsilon}{2},$$

por lo tanto si $\delta < r < 1$

$$\sup_{\delta < |z| < 1} (1 - |z|^2)|rf'(rz) - f'(z)| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.38}$$

De (1.36), (1.37) y (1.38) se sigue que si $r_0 < r < 1$ donde $r_0 = \max\{\delta, M\}$, entonces

$$\|f_r - f\|_* \leq \epsilon.$$

Concluimos entonces que $\|f_r - f\|_* \to 0$ cuando $r \to 1^-$. ∎

Como consecuencia de estos dos resultados tenemos el siguiente teorema que caracteriza al espacio $\mathcal{B}_0$.

Teorema 1.3.4. El espacio de Bloch pequeño $\mathcal{B}_0$ es la cerradura en $\mathcal{B}$ del conjunto de polinomios. En particular tenemos que $\mathcal{B}_0$ es separable.

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$, por la Proposición 1.3.3 existe $0 < r_0 < 1$ tal que

$$\|f_{r_0} - f\|_* < \frac{\epsilon}{2}$$

Ahora, recordemos que por el teorema de Taylor para esta r_0 fija existe una sucesión de polinomios $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que existe $N \in \mathbb{N}$ que verifica

$$\|f_{r_0} - p_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} \qquad n \geq N.$$

Se sigue de la Proposición 1.3.1 que

$$\|f_{r_0} - p_n\|_* < \frac{\epsilon}{2} \qquad n \geq N,$$

por lo tanto tenemos que si $n \geq N$

$$\|f - p_n\|_* \leq \|f - f_{r_0}\|_* + \|f_{r_0} - p_n\|_* < \epsilon.$$

De esto último se sigue que $\mathcal{B}_0$ está contenido en la cerradura del conjunto de polinomios, ahora como el conjunto de polinomios claramente está en $\mathcal{B}_0$ y ya probamos que este es cerrado entonces concluimos que $\mathcal{B}_0$ es la cerradura en $\mathcal{B}$ del conjunto de polinomios. ■

A continuación presentamos un par de resultados técnicos que nos perimitirán ver al espacio de Bloch y al espacio pequeño de Bloch como la imagen bajo proyecciones de Bergman de ciertos espacios canónicos.

Proposición 1.3.4. Sea $\alpha > -1$, $n \in \mathbb{N}$ y f una función analítica en $\mathbb{D}$ tal que

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

y

$$(1 - |z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$$

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{(\alpha+1)...(\alpha+n)} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)}{\overline{w}^n (1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) \tag{1.39}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$, siempre que la integral exista.

Demostración.
Denotamos como h a la función en el lado derecho de la ecuación (1.39). Es sencillo checar, por ejemplo utilizando coordenadas polares que

$$h(0) = h'(0) = ... = h^{(n-1)}(0) = 0. \tag{1.40}$$

Ahora, derivando n veces la función h obtenemos

$$h^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f^{(n)}(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha+n}} dA_{\alpha+n}(w) \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Por otro lado, como $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, se sigue que $f^{(n)}(z) \in L^1(\mathbb{D}, dA_{\alpha+n})$ y entonces por el Corolario 1.1.5

$$f^{(n)}(z) = h^{(n)}(z) \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{1.41}$$

Finalmente, de (1.40) y (1.41) concluimos que para $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \frac{1}{(\alpha+1)...(\alpha+n)} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)}{\overline{w}^n (1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w).$$

■

Proposición 1.3.5. Sea $\alpha > -1$ y N un entero positivo, entonces existe $\lambda_N > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2) w^N}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) = \lambda_N z^N \qquad z \in \mathbb{D}$$

Demostración.
Sea N un entero positivo, entonces haciendo cambio a coordenadas polares tenemos que para $z \in \mathbb{D}$

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2) w^N}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) = \frac{(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 (1-r^2)^{\alpha+1} r^{N+1} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iN\theta}}{(1-zre^{-i\theta})^{2+\alpha}} d\theta dr.$$

Ahora, de la representación que tenemos en (1.21) y de la convergencia uniforme en compactos de la serie se sigue que para $z \in \mathbb{D}$

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)w^N}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) = \frac{(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 (1-r^2)^{\alpha+1} r^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+n)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(N-n)\theta} d\theta dr$$
$$= (\alpha+1) \frac{\Gamma(2+\alpha+N)}{N!\Gamma(2+\alpha)} z^N \int_0^1 (1-r^2)^{\alpha+1} r^{2N} 2r dr.$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $s = r^2, ds = 2rdr$ y utilizando las propiedades de las funciones β y Γ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)w^N}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) &= (\alpha+1) \frac{\Gamma(2+\alpha+N)}{N!\Gamma(2+\alpha)} z^N \int_0^1 (1-s)^{\alpha+1} s^N ds \\
&= (\alpha+1) \frac{\Gamma(2+\alpha+N)}{N!\Gamma(2+\alpha)} z^N \beta(\alpha+2, N+1) \\
&= (\alpha+1) \frac{\Gamma(2+\alpha+N)}{N!\Gamma(2+\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(N+1)}{\Gamma(\alpha+N+3)} z^N \\
&= \frac{(\alpha+1)}{(2+\alpha+N)} z^N,
\end{aligned}$$

tomando entonces $\lambda_N = \frac{(\alpha+1)}{(2+\alpha+N)} > 0$ tenemos el resultado deseado. ■

Denotamos por $C(\overline{\mathbb{D}})$ al espacio de funciones continuas en el disco unitario cerrado y por $C_0(\mathbb{D})$ el subespacio de $C(\overline{\mathbb{D}})$ que consiste de funciones cuyo valor tiende a cero en la frontera del disco unitario. Es claro que ambos son subespacios cerrados de $L^\infty(\mathbb{D})$. Con estas definiciones estamos listos para probar un nuevo resultado de acotamiento para las proyecciones de Bergman P_α.

Teorema 1.3.5. Sea $\alpha > -1$ y P_α la proyección de Bergman correspondiente. Tenemos entonces los siguientes resultados

1. P_α es un operador acotado de $L^\infty(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{B}$.
2. P_α es un operador acotado de $C(\overline{\mathbb{D}})$ sobre $\mathcal{B}_0$.
3. P_α es un operador acotado de $C_0(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{B}_0$.

Demostración.
Supongamos que $f \in L^\infty(\mathbb{D})$, mostraremos que $P_\alpha f \in \mathcal{B}$. En efecto, por definición tenemos que

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\bar{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Derivando y multiplicando por $(1-|z|^2)$ ambos lados de la ecuación obtenemos

$$(1-|z|^2)(P_\alpha f)'(z) = C_\alpha(1-|z|^2)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha \overline{w}}{(1-z\overline{w})^{3+\alpha}} f(w)dA(w) \qquad z\in\mathbb{D},$$

donde $C_\alpha = (\alpha+1)(\alpha+2)$. Ahora, como $f\in L^\infty(\mathbb{D})$ se sigue entonces que

$$(1-|z|^2)|(P_\alpha f)'(z)| \leq C_\alpha(1-|z|^2)\,\|f\|_\infty \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{3+\alpha}} dA(w)$$

Aplicando de nuevo el Teorema 1.2.1 tenemos que existe $C_1>0$ tal que

$$(1-|z|^2)|(P_\alpha f)'(z)| \leq C_1\,\|f\|_\infty \qquad z\in\mathbb{D},$$

por lo tanto $P_\alpha f\in\mathcal{B}$ y

$$\|P_\alpha f\|_* \leq C_1\,\|f\|_\infty \tag{1.42}$$

para toda $f\in L^\infty(\mathbb{D})$. Por otro lado

$$\begin{aligned}|P_\alpha f(0)| &= \left|\int_{\mathbb{D}} f(w)dA_\alpha(w)\right| \\ &\leq (\alpha+1)\,\|f\|_\infty \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^\alpha dA(w),\end{aligned}$$

y como $\alpha>-1$ entonces existe $C_2>0$ tal que

$$|P_\alpha f(0)| \leq (\alpha+1)C_2\,\|f\|_\infty\,. \tag{1.43}$$

De (1.42) y (1.43) se sigue que existe $C>0$ tal que para toda $f\in L^\infty(\mathbb{D})$

$$\|P_\alpha f\|_{\mathcal{B}} \leq C||f||_\infty.$$

Hemos probado entonces que P_α es un operador acotado en $L^\infty(\mathbb{D})$.

A continuación supongamos que $f\in C(\overline{\mathbb{D}})$, mostraremos que $P_\alpha f\in\mathcal{B}_0$. En efecto, por el Teorema de Stone-Weierstrass f se puede aproximar uniformemente en $\mathbb{D}$ por combinaciones lineales finitas de la forma

$$f_{n,m}(z) = z^n \overline{z}^m \qquad n, m \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{D}.$$

Si mostramos que $P_\alpha f_{n,m} \in \mathcal{B}_0$, entonces por la continuidad de P_α en $C(\overline{\mathbb{D}})$ y por ser $\mathcal{B}_0$ cerrado en $\mathcal{B}$ y por tanto en $L^\infty(\mathbb{D})$, podremos concluir que $P_\alpha f \in \mathcal{B}_0$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $n - m \geq 0$ y veamos que $P_\alpha f_{n,m} \in B_0$. Notemos que por la definición de P_α, haciendo el cambio a coordenadas polares y usando (1.25) obtenemos

$$\begin{aligned}
P_\alpha f_{n,m}(z) &= (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{w^n \overline{w}^m}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}(1-|w|^2)^\alpha dA(w) \\
&= (\alpha+1)\int_0^1 r^{(n+m+1)}(1-r^2)^\alpha \left[\sum_{N=0}^\infty \frac{\Gamma(2+\alpha+N)}{N!\Gamma(2+\alpha)} z^N r^N \int_0^{2\pi} e^{i(n-m-N)\theta}\frac{d\theta}{\pi}\right] dr \\
&= (\alpha+1)\int_0^1 r^{(n+m+1)}(1-r^2)^\alpha z^{n-m} r^{n-m} \frac{\Gamma(2+\alpha+n-m)}{(n-m)!\Gamma(2+\alpha)} 2dr \\
&= (\alpha+1)\frac{\Gamma(2+\alpha+n-m)}{(n-m)!\Gamma(2+\alpha)} z^{n-m}\int_0^1 r^{(2n+1)}(1-r^2)^\alpha 2dr.
\end{aligned}$$

Del cambio de variable $s = r^2, ds = 2rdr$ y las propiedades de las funciones β y Γ se sigue que

$$\begin{aligned}
P_\alpha f_{n,m}(z) &= (\alpha+1)\frac{\Gamma(2+\alpha+n-m)}{(n-m)!\Gamma(2+\alpha)} z^{n-m}\int_0^1 s^n(1-s)^\alpha ds \\
&= (\alpha+1)\frac{\Gamma(2+\alpha+n-m)}{(n-m)!\Gamma(2+\alpha)}\beta(n+1,\alpha+1) z^{n-m} \\
&= (\alpha+1)\frac{\Gamma(2+\alpha+n-m)}{(n-m)!\Gamma(2+\alpha)}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)} z^{n-m} \\
&= \frac{\Gamma(2+\alpha+n-m)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)(n-m)!} z^{n-m} \\
&= a^\alpha_{n,m} z^{n-m}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $P_\alpha f_{n,m}$ es un polinomio y así claramente $P_\alpha f_{n,m} \in \mathcal{B}_0$.

Ahora probaremos la sobreyectividad, para ello dada $g \in \mathcal{B}$ escribimos

$$g(z) = g(0) + g'(0)z + \frac{g''(0)}{2}z^2 + g_1(z) \qquad z \in \mathbb{D}$$

donde

$$g_1(z) := \sum_{n=3}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad z \in \mathbb{D}$$

Definimos

$$f(z) = \begin{cases} (1-|z|^2)\left[\frac{g(0)}{\lambda_o} + \frac{1}{\lambda_1} g'(0)z + \frac{1}{\lambda_2} g''(0)z^2 + \frac{g_1'(z)}{\overline{z}(\alpha+1)}\right] & z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \\ \frac{g(0)}{\lambda_0} & z = 0. \end{cases}$$

Donde $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ son como en la Proposición 1.3.5. De la definición de f y la Proposición 1.3.4 es claro que $P_\alpha f = g$.

Notemos además que por definición f es una función continua en $\mathbb{D}$. Para ello basta ver que

$$\lim_{z \to 0} \frac{(1-|z|^2)|g_1'(z)|}{|\overline{z}|(\alpha+1)} = 0.$$

En efecto, podemos escribir a g_1' como

$$g_1'(z) = z^2 \phi(z) \qquad z \in \mathbb{D}$$

donde ϕ es una función analítica en $\mathbb{D}$ y $\phi(0) \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 0} \frac{(1-|z|^2)|g_1'(z)|}{|\overline{z}|(\alpha+1)} &= \lim_{z \to 0} \frac{(1-|z|^2)|z|^2|\phi(z)|}{|\overline{z}|(\alpha+1)} \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{(1-|z|^2)|z||\phi(z)|}{(\alpha+1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Adicionalmente por como definimos nuestra función f, ésta es tal que $f \in L^\infty(\mathbb{D})$, porque para cualquier $0 < r < 1$

$$\sup_{r<|z|<1} \frac{(1-|z|^2)|g_1'(z)|}{|\overline{z}|(\alpha+1)} \leq \sup_{r<|z|<1} \frac{(1-|z|^2)|g_1'(z)|}{r(\alpha+1)} < \infty,$$

donde la última desigualdad se sigue de que $g_1 \in \mathcal{B}$. Hemos probado entonces que P_α es un operador acotado de $L^\infty(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{B}$.

Supongamos ahora que $g \in \mathcal{B}_0$ y veamos que en este caso $f \in C_0(\mathbb{D})$. Claramente

$$\lim_{|z| \to 1^-} \frac{(1-|z|^2)|g_1'(z)|}{|\overline{z}|(\alpha+1)} = 0,$$

ya que $g_1 \in \mathcal{B}_0$. De esto se sigue de inmediato de la definición de f que

$$\lim_{|z| \to 1^-} |f(z)| = 0$$

y por tanto concluimos que $f \in C_0(\mathbb{D})$, probando así que P_α es un operador acotado de $C_0(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{B}_0$.

■

Proposición 1.3.6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y f una función analítica en $\mathbb{D}$. Entonces $f \in \mathcal{B}$ si y solo si la función $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^\infty(\mathbb{D})$, y $f \in \mathcal{B}_0$ si y solo si la función $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in C_0(\mathbb{D})$.

Demostración.
Supongamos primero que $f \in \mathcal{B}$, entonces por el Teorema 1.3.5 existe una función $g \in L^\infty(\mathbb{D})$ tal que

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{1.44}$$

Derivando n veces ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$f^{(n)}(z) = (n+1)! \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)\overline{w}^n}{(1-z\overline{w}^{2+n}} dA(w),$$

se sigue entonces que

$$|f^{(n)}(z)| \leq (n+1)! ||g||_\infty \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1+-z\overline{w}|^{2+n}} dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Así por el Teorema 1.2.1

$$(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)| \sim 1$$

cuando $|z| \to 1^-$. Por lo tanto $(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)| \in L^\infty(\mathbb{D})$.

Ahora, supongamos que $f \in \mathcal{B}_0$, de nuevo por el Teorema 1.3.5 existe $g \in C_0(\mathbb{D})$ tal que

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Como toda función en $C_0(\mathbb{D})$ se puede aproximar uniformemente por funciones continuas con soporte compacto en $\mathbb{D}$, entonces bastará probar que si g es una función continua con soporte compacto en $\mathbb{D}$ entonces $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in C_0(\mathbb{D})$. En efecto, supongamos que sop$g \subseteq \overline{D(0,r)}$ para algún $0 < r < 1$, entonces

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &\leq (n+1)! \sup_{|w|\leq r} |g(w)| \int_{\overline{D(0,r)}} \frac{1}{|1-z\overline{w}|^{2+n}} dA(w) \\ &\leq \frac{(n+1)! r^2}{(1-r)^{2+n}} \end{aligned}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$. Se sigue entonces que $|f^{(n)}(z)| \in L^\infty(\mathbb{D})$ y por lo tanto $(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)| \in C_0(\mathbb{D})$.

Recíprocamente, supongamos que $(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)| \in L^\infty(\mathbb{D})$ y sin pérdida de generalidad supongamos también que los primeros $2n+1$ coeficientes de Taylor de f son cero. Definimos

$$g(z) := \begin{cases} \frac{(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z)}{n! \overline{z}^n} & z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

Por definición, g es una función continua en $\mathbb{D}$ ya que podemos escribir

$$f^{(n)}(z) = z^{n+1} \phi(z) z \in \mathbb{D},$$

donde ϕ es una función analítica en $\mathbb{D}$ y $\phi(0) \neq 0$, y entonces se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \frac{(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)|}{n! |\overline{z}|^n} &= \lim_{z\to 0} \frac{(1-|z|^2)^n |z|^{n+1} |\phi(z)|}{n! |\overline{z}|^n} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{(1-|z|^2)^n |z| |\phi(z)|}{n!} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, por definición $g \in L^\infty(\mathbb{D})$, porque para cualquier $0 < r < 1$

$$\sup_{r<|z|<1} \frac{(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)|}{n! |\overline{z}|^n} \leq \sup_{r<|z|<1} \frac{(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)|}{n! r^n} < \infty,$$

donde la última desigualdad se sigue de la hipótesis $(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)| \in L^\infty(\mathbb{D})$.
Por el Teorema 1.3.5 $Pg \in \mathcal{B}$ y notemos que

$$(Pg)^{(n)}(z) = (n+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)}{(1-z\overline{w})^{2+n}} dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Por otro lado, $f^{(n)}(z) \in L^1(\mathbb{D}, dA_n)$ de aquí que por el Corolario 1.1.5

$$(Pg)^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) \qquad z \in \mathbb{D},$$

como consecuencia tenemos que Pg y f difieren por un polinomio y así concluimos que $f \in \mathcal{B}$.

Finalmente si consideramos $(1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)| \in C(\overline{\mathbb{D}})$, entonces claramente $g \in C_0(\mathbb{D})$ y por el Teorema 1.3.5 $Pg \in \mathcal{B}_0$. Como ya vimos que Pg y f difieren por un polinomio, tenemos que $f \in \mathcal{B}_0$.

■

Como consecuencia del resultado previo y la Proposición 1.2.1 tenemos que el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ está contenido en todo espacio de Bergman A^p_α con $p \geq 1$ y $\alpha > -1$. Usando esto y el resultado que presentamos a continuación, podemos construir funciones no triviales en espacios de Bergman con peso. En particular, se puede mostrar que todo espacio de Bergman con peso contiene funciones que no tienen ningún valor frontera, (ver [1]).

Definición 1.3.6. Una sucesión $(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ de enteros positivos es una ***sucesión con huecos*** si existe una constante $\lambda > 1$ tal que

$$\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq \lambda \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Además, llamamos ***serie lacunaria*** a una serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n} \qquad z \in \mathbb{D} \tag{1.45}$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ para toda $n = 0, 1, ...$

Teorema 1.3.7. Una serie lacunaria define una función en $\mathcal{B}$ si y sólo si sus coeficientes están acotados. Análogamente, una serie lacunaria define una función en $\mathcal{B}_0$ si y sólo si sus coeficientes tienden a cero.

Demostración.

Supongamos primero que $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$ que está acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leq M \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Supongamos además que $(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión con huecos y definamos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n} \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Claramente f es analítica en $\mathbb{D}$ y

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n z^{\lambda_n - 1} \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Sea $C = \frac{\lambda}{\lambda-1} > 1$, entonces

$$\lambda_{n+1} \leq C(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.46}$$

En efecto, notemos que por hipótesis

$$-\lambda_n \lambda \geq -\lambda_{n+1} \qquad n \in \mathbb{N},$$

de aquí que para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda_{n+1} - \lambda_n) &= \lambda\lambda_{n+1} - \lambda\lambda_n \\ &\geq \lambda\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1} \\ &= \lambda_{n+1}(\lambda - 1), \end{aligned}$$

lo cual implica (1.46). Ahora, de (1.46) se sigue que

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}|z|^{\lambda_{n+1}-1} &\leq C(\lambda_{n+1} - \lambda_n)|z|^{\lambda_{n+1}-1} \\ &\leq C(|z|^{\lambda_n} + \ldots + |z|^{\lambda_{n+1}-1}) \end{aligned} \tag{1.47}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ y $n \in \mathbb{N}$, donde la segunda desigualdad se obtiene de que

$$|z|^{\lambda_{n+1}-1} \leq |z|^j \qquad 0 \leq j \leq \lambda_{n+1} - 1.$$

Trivialmente, tenemos también

$$\begin{aligned}\lambda_1|z|^{\lambda_1-1} &\leq 1+|z|+...+|z|^{\lambda_{n+1}-1} \\ &\leq C(1+|z|+...+|z|^{\lambda_{n+1}-1}) \end{aligned} \tag{1.48}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$. Se sigue entonces de (1.47) y (1.48) que

$$\begin{aligned}|f'(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||\lambda_n||z|^{\lambda_n-1} \\ &\leq MC\sum_{n=0}^{\infty}(|z|^{\lambda_n}+...+|z|^{\lambda_n-1}) \\ &\leq \frac{MC}{1-|z|}\end{aligned}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$. Por tanto

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|f'(z)| &\leq (1-|z|^2)\frac{MC}{1-|z|} \\ &= MC(1+|z|) \\ &\leq 2MC\end{aligned}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ probando así que $f \in \mathcal{B}$.

Supongamos ahora que $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que tiende a cero, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n| < \epsilon \qquad n \geq N.$$

Usando lo probado en el caso anterior tenemos

$$\begin{aligned}|f'(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||\lambda_n||z|^{\lambda_n-1} \\ &< \sum_{n=0}^{N-1}|a_n||\lambda_n||z|^{\lambda_n-1}+\epsilon C\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}|a_n||\lambda_n||z|^{\lambda_n-1}+\frac{\epsilon C}{1-|z|}\end{aligned}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)|f'(z)| &\leq \lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)\sum_{n=0}^{N-1}|a_n||\lambda_n||z|^{\lambda_n-1}\\ &+\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|)\epsilon C\\ &=\epsilon C.\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $f \in \mathcal{B}_0$.

Recíprocamente, sea

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \qquad z\in\mathbb{D}$$

una función en el espacio de Bloch, veremos que sus coeficientes deben estar acotados. En efecto, por el Corolario 1.1.5

$$f'(z)=2\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)}{(1-z\overline{w})^3}f'(w)dA(w) \qquad z\in\mathbb{D}.$$

Se sigue entonces al derivar $n-1$ veces ambos lados de la ecuación

$$f^{(n)}(z)=(n+1)!\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)\overline{w}^{n-1}}{(1-z\overline{w})^{3+n-1}}f'(w)dA(w) \qquad z\in\mathbb{D},$$

y evaluando en cero la n-ésima derivada obtenemos

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(n+1)\int_{\mathbb{D}}(1-|w|^2)\overline{w}^{n-1}f'(w)dA(w).$$

Entonces

$$\begin{aligned}|a_n| \leq (n+1)&\int_{|w|\leq 1-\frac{1}{n}}(1-|w|^2)|\overline{w}|^{n-1}|f'(w)|dA(w)\\ +(n+1)&\int_{1-\frac{1}{n}<|w|<1}(1-|w|^2)|\overline{w}|^{n-1}|f'(w)|dA(w)\end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como por hipótesis $f \in \mathcal{B}$, entonces

$$\begin{aligned}(n+1)\int_{|w|\leq 1-\frac{1}{n}}(1-|w|^2)|\overline{w}|^{n-1}|f'(w)|dA(w) &\leq \|f\|_* (n+1)\int_{|w|\leq 1-\frac{1}{n}}|w|^{n-1}dA(w)\\ &= \|f\|_*\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &\leq \|f\|_* . \end{aligned} \tag{1.49}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(n+1)\int_{1-\frac{1}{n}<|w|<1}(1-|w|^2)|\overline{w}|^{n-1}|f'(w)|dA(w) &\leq \|f\|_* (n+1)\int_{1-\frac{1}{n}<|w|<1} dA(w)\\ &= \|f\|_* \frac{(n+1)(2n-1)}{n^2}, \end{aligned}$$

de aquí que existe $C > 0$ tal que

$$(n+1)\int_{1-\frac{1}{n}<|w|<1}(1-|w|^2)|\overline{w}|^{n-1}|f'(w)|dA(w) \leq C\|f\|_* \tag{1.50}$$

para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por consecuencia de (1.49) y (1.50) la sucesión de coeficientes $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ está acotada.

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{B}_0$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$(1-|w|^2)|f'(w)| < \epsilon \qquad \delta < |w| < 1. \tag{1.51}$$

Entonces

$$\begin{aligned}|a_n| \leq (n+1)&\int_{|w|\leq\delta}(1-|w|^2)|\overline{w}|^{n-1}|f'(w)|dA(w)\\ &+ (n+1)\int_{\delta<|w|<1}(1-|w|^2)|\overline{w}|^{n-1}|f'(w)|dA(w)\end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $f \in \mathcal{B}$ entonces

$$
\begin{aligned}
(n+1)\int_{|w|\leq\delta}(1-|w|^2)|\overline{w}|^{n-1}|f'(w)|dA(w) &\leq (n+1)\delta^{n-1}\int_{|w|\leq 1}(1-|w|^2)|f'(w)|dA(w)\\
&\leq (n+1)\delta^{n-1}\left\|f\right\|_* . \qquad (1.52)
\end{aligned}
$$

Por otra parte por (1.51)

$$
\begin{aligned}
(n+1)\int_{\delta<|w|<1}(1-|w|^2)|\overline{w}|^{n-1}|f'(w)|dA(w) &\leq \epsilon(n+1)\int_{\delta<|w|<1}|w|^{n-1}dA(w)\\
&= 2\epsilon(1-\delta^{n+1})\\
&< 2\epsilon. \qquad (1.53)
\end{aligned}
$$

De (1.52) y (1.53) se sigue que

$$|a_n| \leq (n+1)\delta^{n-1}\left\|f\right\|_* + 2\epsilon \qquad n\in\mathbb{N},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| \leq 2\epsilon,$$

por tanto $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

■

Capítulo 2

Dualidad en Espacios de Bergman

En este capítulo abordaremos el tema de la dualidad en los espacios de Bergman A^p_α. En la primera sección estudiaremos el caso $p > 1$, el cual, utilizando resultados ya conocidos de análisis funcional será sencillo de obtener. En la segunda sección nos concentraremos en el caso $0 < p \leq 1$, éste requerirá del estudio de un operador continuo en el espacio de funciones analíticas en el disco con respecto a la topología de la convergencia uniforme en compactos.

Los resultados estudiados en este capítulo fueron tomados de [14] y [26].

Sea $0 < p < \infty$ y $-1 < \alpha < \infty$. Recordemos que una funcional lineal $\Lambda : A^p_\alpha \to \mathbb{C}$ es acotada si existe $C > 0$ tal que

$$|\Lambda(f)| \leq C||f||_{p,\alpha} \qquad f \in A^p_\alpha.$$

En la Proposición 1.1.1 probamos que cada evaluación puntual es una funcional lineal acotada en A^p_α, por lo tanto siempre existe una funcional acotada no trivial en A^p_α.

Sea $A^{p\,*}_\alpha$ el espacio de funcionales lineales acotadas en A^p_α, llamamos a $A^{p\,*}_\alpha$ el espacio dual de A^p_α. Entonces $A^{p\,*}_\alpha$ con la norma definida por

$$\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda(f)| : ||f||_{p,\alpha} \leq 1\}$$

es un espacio de Banach si $p > 1$.

2.1. Dualidad en el caso $p > 1$

A continuación probamos un primer resultado de dualidad para el espacio de Bergman A^p_α en el caso $p > 1$. El caso $0 < p \leq 1$ requiere de una serie de resultados previos y lo desarrollaremos más adelante.

Teorema 2.1.1. Sea $1 < p < \infty$ y $\alpha > -1$, entonces

$$A^{p\,*}_\alpha \cong A^q_\alpha$$

bajo el emparejamiento integral

$$\langle f, g\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA_\alpha(z) \qquad f \in A^p_\alpha, g \in A^q_\alpha \tag{2.1}$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$. El isomorfismo no es necesariamente isometría para $p \neq 2$.

Demostración.
Sea $g \in A^q_\alpha$, probaremos que (2.1) define una funcional lineal acotada en A^p_α. En efecto, por la desigualdad de Hölder tenemos

$$|\langle f, g\rangle_\alpha| \leq ||f||_{p,\alpha} \, \|g\|_{q,\alpha} \qquad f \in A^p_\alpha,$$

de aquí que (2.1) define una funcional lineal acotada en A^p_α.

Recíprocamente, supongamos que $\Lambda \in A^{p\,*}_\alpha$, por el Teorema de Hahn-Banach Λ se puede extender a una funcional lineal en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ con la misma norma. Ahora, por el resultado conocido de dualidad que tenemos en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, existe $\phi \in L^q(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ tal que

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{\phi(z)}dA_\alpha(z) \qquad f \in A^p_\alpha.$$

Por el Corolario 1.1.5 y el teorema de Fubini tenemos que para toda $f \in A^p_\alpha$

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) &= \int_{\mathbb{D}} P_\alpha f(z)\overline{\phi(z)}dA_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w)\right) \overline{\phi(z)}dA_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\overline{\int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(z)}{(1 - w\overline{z})^{2+\alpha}} dA_\alpha(z)}\right) dA_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{P_\alpha\phi(w)}dA_\alpha(w).
\end{aligned}$$

Definamos $g = P_\alpha \phi$, tenemos entonces por el Teorema 1.2.4 que $g \in A^q_\alpha$ y

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA_\alpha(z) \qquad f \in A^p_\alpha.$$

Por lo tanto tenemos que $A^{p\,*}_\alpha \cong A^q_\alpha$.

■

2.2. Dualidad en el caso $0 < p \leq 1$

Para establecer un resultado de dualidad en A^p_α con $0 < p \leq 1$ introduciremos a continuación una familia de operadores en A^p_α que nos será de utilidad.

Sea $H(\mathbb{D})$ el espacio de funciones analíticas en $\mathbb{D}$, le daremos a este espacio la topología de la convergencia uniforme en compactos. Es decir, un operador lineal T en $H(\mathbb{D})$ es continuo si y solamente si $Tf_n \to Tf$ uniformemente en compactos siempre que $f_n \to f$ uniformemente en compactos.

Teorema 2.2.1. Sea $\alpha > -1$ y sea $f \in H(\mathbb{D})$, supongamos que f tiene la siguiente representación en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Definimos el operador $\mathcal{H}^\alpha : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ tal que

$$\mathcal{H}^\alpha f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} z^n \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{2.2}$$

El operador $\mathcal{H}^\alpha$ tiene la propiedad de que si $z \in \mathbb{D}$ está fija entonces

$$\mathcal{H}^\alpha(K_0(z,w)) = K_\alpha(z,w) \qquad w \in \mathbb{D}, \tag{2.3}$$

donde $K_\alpha(z,w) = (1 - z\overline{w})^{-(2+\alpha)}$.

Demostración.
Veamos primero que el operador $\mathcal{H}^\alpha$ está bien definido, es decir que si $f \in H(\mathbb{D})$ entonces $\mathcal{H}^\alpha f \in H(\mathbb{D})$. En efecto, el radio de convergencia de la serie que define a $\mathcal{H}^\alpha f$ es

$$R = \limsup_{n\to\infty} \left(a_n \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} \right)^{-1/n},$$

y por la fórmula de Stirling

$$\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} \sim n^{\alpha}$$

cuando $n \to \infty$, por lo tanto

$$\begin{aligned} R &= \limsup_{n\to\infty} \left(a_n n^{\alpha}\right)^{-1/n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{-1/n} \left(n^{-1/n}\right)^{\alpha} \\ &= \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{-1/n}. \end{aligned}$$

Ahora, como el radio de convergencia R' de la serie de Taylor para f es tal que $R' \geq 1$, entonces de lo anterior se sigue que $R \geq 1$ y por tanto $\mathcal{H}^{\alpha} f$ es una función analítica en todo el disco unitario.

Ahora probaremos la propiedad (2.3) de $\mathcal{H}^{\alpha}$. Recordemos que tenemos las siguientes representaciones en $\mathbb{D}$

$$K_0(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \overline{w}^n, \qquad K_{\alpha}(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \overline{w}^n,$$

entonces para $z \in \mathbb{D}$ fija

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\alpha}(K_0(z,w)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} (n+1) z^n \overline{w}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \overline{w}^n \\ &= K_{\alpha}(z,w) \qquad w \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

■

Observación 2.2.2. Sea $\alpha > -1$, el operador $\mathcal{H}^{\alpha}$ se puede representar con la siguiente fórmula integral

$$\mathcal{H}^{\alpha} f(z) = \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{2.4}$$

Demostración.

Para z$\in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$ fija tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w) &= \int_{\mathbb{D}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} f(rw) z^n \overline{w}^n dA(w) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \int_{\mathbb{D}} f(rw) \overline{w}^n dA(w) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\rho e^{i\theta}) \rho^{n+1} e^{-in\theta} d\theta d\rho \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \int_0^1 r^{n+1} \rho^{2n+1} \left(\frac{1}{i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r\rho e^{i\theta}) r\rho i e^{i\theta}}{r^{n+1}\rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} d\theta \right) d\rho.
\end{aligned}$$

Definimos la curva $\gamma(\theta) = r\rho e^{i\theta}$ para $r, \rho \in (0,1)$ fijas y $\theta \in [0, 2\pi)$, obtenemos entonces

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \int_0^1 r^{n+1} \rho^{2n+1} \left(\frac{1}{i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right) d\rho,$$

y por la fórmula integral de Cauchy

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \int_0^1 \frac{r^{n+1}\rho^{2n+1}}{i\pi} \left(\frac{2\pi i f^{(n)}(0)}{n!} \right) d\rho \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \frac{2r^{n+1} f^{(n)}(0)}{2(n+1)n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n r^{n+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tomando límite cuando $r \to 1^-$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w) &= \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n r^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,
\end{aligned}$$

donde el límite puede intercambiarse con la serie debido a la convergencia uniforme de la serie en $r \in (0,1)$. De esto último se sigue por definición

$$\mathcal{H}^\alpha f(z) = \lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w).$$

■

Notemos que si $f \in A^1$ de la observación previa se sigue que

$$\mathcal{H}^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w). \tag{2.5}$$

Proposición 2.2.1. Sea $\alpha > -1$, el operador $\mathcal{H}^\alpha$ es continuo en $H(\mathbb{D})$.

Demostración.
Sea $f \in H(\mathbb{D})$ y sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $H(\mathbb{D})$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. Entonces claramente para cada $0 < r < 1$, $f_n(rz) \to f(rz)$ uniformemente en todo $\mathbb{D}$. Ahora, notemos que por la Observación 2.2.2 y un cambio de variable tenemos que para $0 < r < 1$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\alpha f_n(rz) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f_n(rw)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f_n(\sqrt{r}w)}{(1 - \sqrt{r}z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w) \qquad z \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\alpha f(rz) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\sqrt{r}w)}{(1 - \sqrt{r}z\overline{w})^{2+\alpha}} dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Entonces para cada $0 < r < 1$ tenemos

$$\mathcal{H}^\alpha f_n(rz) \longrightarrow \mathcal{H}^\alpha f(rz)$$

uniformemente en $\mathbb{D}$, por lo tanto se sigue que $\mathcal{H}^\alpha f_n \to \mathcal{H}^\alpha f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. Esto completa la prueba.

■

Lema 2.2.3. Sea $\alpha > -1$, el operador $\mathcal{H}^\alpha$ definido en (2.2) es invertible en $H(\mathbb{D})$.

Demostración.

Definimos $\mathcal{H}_\alpha : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ tal que si f tiene la representación en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad z \in \mathbb{D},$$

entonces

$$\mathcal{H}_\alpha f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} a_n z^n \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{2.6}$$

Análogamente a la prueba del Teorema 2.2.1 se puede ver que $\mathcal{H}_\alpha$ es un operador bien definido, es lineal y continuo en $H(\mathbb{D})$. También, claramente es el inverso de $\mathcal{H}^\alpha$.

■

Observación 2.2.4. Sea $\alpha > -1$, el operador $\mathcal{H}_\alpha$ se puede representar con la siguiente fórmula integral

$$\mathcal{H}_\alpha f(z) = \lim_{r\to 1^-} (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^2} f(rw)dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{2.7}$$

Demostración.

Para z$\in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$ fija tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^2} f(rw)dA(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \int_{\mathbb{D}} \overline{w}^n (1-|w|^2)^\alpha f(rw)dA(w) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r\rho e^{i\theta})\rho^{n+1} e^{-in\theta} d\theta \right) d\rho \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n r^{n+1} \int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha \rho^{2n+1} \left(\frac{1}{i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r\rho e^{i\theta}) ir\rho e^{i\theta}}{r^{n+1}\rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} d\theta \right) d\rho.
\end{aligned}$$

Definimos nuevamente la curva $\gamma(\theta) = r\rho e^{i\theta}$ para $r, \rho \in (0,1)$ fijas y $\theta \in [0, 2\pi)$, obtenemos entonces

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^2} f(rw)dA(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n r^{n+1} \int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha \rho^{2n+1} \left(\frac{1}{i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right) d\rho,$$

y de la fórmula integral de Cauchy se sigue

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^2} f(rw)dA(w) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n r^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^\alpha \rho^{2n+1}}{i\pi}\left(\frac{2\pi i f^{(n)}(0)}{n!}\right) d\rho \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n r^{n+1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha \rho^{2n} 2\rho d\rho.
\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $s = \rho^2$, $ds = 2\rho d\rho$ y utilizando las propiedades de las funciones β y Γ, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^2} f(rw)dA(w) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n r^{n+1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 (1-s)^\alpha s^n ds \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n r^{n+1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \beta(\alpha+1, n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n r^{n+1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+1)n!}{\Gamma(n+2+\alpha)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)! z^n r^{n+1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+2+\alpha)},
\end{aligned}$$

de aquí que

$$(\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^2} f(rw)dA(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)(n+1)!}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n r^{n+1}.$$

Por lo tanto tomando límite cuando $r \to 1^-$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1^-}(\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^2} f(rw)dA(w) &= \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)(n+1)!}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n r^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)(n+1)!}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,
\end{aligned}$$

donde el límite puede intercambiarse con la serie debido a la convergencia uniforme de la serie en $r \in (0,1)$. De esto último se sigue por definición

$$\mathcal{H}_\alpha f(z) = \lim_{r\to 1^-}(\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^2} f(rw)dA(w)$$

■

A continuación presentamos tres lemas que serán de suma importancia para identificar el espacio dual de A^p_α en el caso $0 < p \leq 1$.

Lema 2.2.5. Sea $0 < p \leq 1$ y $\alpha > -1$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|(1-|z|^2)^{-2+\frac{(2+\alpha)}{p}} dA(z) \leq C||f||_{p,\alpha} \tag{2.8}$$

para toda $f \in A^p_\alpha$.

Demostración.
Sea $f \in A^p_\alpha$ y sea $z \in \mathbb{D}$, denotamos el disco con centro en z y radio $r = \frac{(1-|z|)}{2}$ como $D(z,r)$. Por la subarmonicidad de $|f|^p$ tenemos que

$$|f(z)|^p \leq \frac{4}{(1-|z|)^2} \int_{D(z,r)} |f(w)|^p dA(w),$$

se sigue entonces que

$$|f(z)| \leq \frac{4^{1/p}}{(1-|z|)^{2/p}} \left[\int_{D(z,r)} |f(w)|^p dA(w) \right]^{1/p}. \tag{2.9}$$

Notemos ahora que si $w \in D(z,r)$ entonces

$$|w| < \frac{1}{2} + \frac{|z|}{2},$$

de aquí que

$$1 - |w| > \frac{1}{2}(1-|z|).$$

Por lo tanto para $w \in D(z,r)$ tenemos la estimación

$$\frac{1}{(1-|w|)^\alpha} < \frac{2^\alpha}{(1-|z|)^\alpha}. \tag{2.10}$$

De (2.9) y (2.10) se sigue que

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{4^{1/p}(\alpha+1)^{-1/p}}{(1-|z|)^{2/p}}\left[\int_{D(z,r)} \frac{|f(w)|^p}{(1-|w|^2)^\alpha} dA_\alpha(w)\right]^{1/p} \\
&\leq \frac{4^{1/p}(\alpha+1)^{-1/p}}{(1-|z|)^{2/p}}\left[\int_{D(z,r)} \frac{|f(w)|^p}{(1-|w|)^\alpha} dA_\alpha(w)\right]^{1/p} \\
&\leq \frac{2^{(2+\alpha)/p}(\alpha+1)^{-1/p}}{(1-|z|)^{(2+\alpha)/p}}\left[\int_{D(z,r)} |f(w)|^p dA_\alpha(w)\right]^{1/p} \\
&\leq \frac{2^{(2+\alpha)/p}(\alpha+1)^{-1/p}}{(1-|z|)^{(2+\alpha)/p}}||f||_{p,\alpha}.
\end{aligned}$$

Utilizando la estimación $(1-|z|)^{-1} \leq 2(1-|z|^2)^{-1}$ para $z \in \mathbb{D}$, obtenemos

$$|f(z)| \leq \frac{4^{(2+\alpha)/p}(\alpha+1)^{-1/p}}{(1-|z|^2)^{(2+\alpha)/p}}||f||_{p,\alpha}.$$

Sea

$$C_{\alpha,p} := 4^{(2+\alpha)/p}(\alpha+1)^{-1/p}, \tag{2.11}$$

tenemos entonces la siguiente estimación

$$|f(z)| \leq C_{\alpha,p}(1-|z|^2)^{-(2+\alpha)/p}||f||_{p,\alpha} \tag{2.12}$$

para toda $f \in A^p_\alpha$.

Ahora, utilizando (2.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |f(z)|^p |f(z)|^{1-p} \\
&\leq C^{1-p}_{\alpha,p}|f(z)|^p(1-|z|^2)^{-\frac{(2+\alpha)}{p}+2+\alpha}||f||^{1-p}_{p,\alpha},
\end{aligned}$$

de aquí que

$$|f(z)|(1-|z|^2)^{-2+(2+\alpha)/p} \leq C^{1-p}_{\alpha,p}|f(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha||f||^{1-p}_{p,\alpha}.$$

Integrando sobre $\mathbb{D}$ ambos lados de la ecuación previa obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|(1-|z|^2)^{-2+(2+\alpha)/p}dA(z) &\leq \frac{C_{\alpha,p}^{1-p}}{(\alpha+1)}||f||_{p,\alpha}^p||f||_{p,\alpha}^{1-p}\\ &= \frac{C_{\alpha,p}^{1-p}}{(\alpha+1)}||f||_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Finalmente definimos $C := \frac{C_{\alpha,p}^{1-p}}{(\alpha+1)}$ y obtenemos el resultado deseado

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|(1-|z|^2)^{-2+(2+\alpha)/p}dA(z) \leq C||f||_{p,\alpha}.$$

■

Lema 2.2.6. Sea $\alpha > -1$ y f una función analítica en $\mathbb{D}$. Si $f(z)$ o $(1-|z|^2)^{-\alpha}f(z)$ es acotada, entonces la función $(1-|z|^2)^{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}f(z)$ es integrable en $\mathbb{D}$ y tenemos que

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA(z) = (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \mathcal{H}^{\alpha}f(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^{\alpha}dA(z)$$

para toda $g \in H^{\infty}(\mathbb{D})$.

Demostración.
El caso $\alpha = 0$ es trivial ya que por definición para $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^0 f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+2)}{(n+1)!\Gamma(2)} z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\\ &= f(z).\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $-1 < \alpha < 0$ y f es acotada en $\mathbb{D}$, entonces por la Observación 2.2.2

$$\mathcal{H}^{\alpha}f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}dA(w) \qquad z \in \mathbb{D},$$

se sigue entonces que

$$|\mathcal{H}^{\alpha}f(z)| \leq ||f||_{\infty}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha}}dA(w).$$

Por el Teorema 1.2.1 concluimos que

$$|\mathcal{H}^\alpha f(z)| \sim 1$$

cuando $|z| \to 1^-$, y así la función $(1-|z|^2)^\alpha \mathcal{H}^\alpha f(z)$ es integrable en $\mathbb{D}$.

Si $-1 < \alpha < \infty$ y $(1-|z|^2)^{-\alpha} f(z)$ es acotada en $\mathbb{D}$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq C(1-|z|^2)^\alpha \qquad z \in \mathbb{D}.$$

De esto obtenemos la estimación

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)^\alpha |\mathcal{H}^\alpha f(z)| &\leq (1-|z|^2)^\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w)|}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha}} dA(w) \\ &\leq C(1-|z|^2)^\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha}} dA(w).\end{aligned}$$

Por el Teorema 1.2.1 concluimos que

$$(1-|z|^2)^\alpha |\mathcal{H}^\alpha f(z)| \sim (1-|z|^2)^\alpha \log \frac{1}{1-|z|^2}$$

cuando $|z| \to 1^-$. Notemos que si $0 < \delta < 1$ entonces

$$\int_{\delta<|z|<1} (1-|z|^2)^\alpha \log \frac{1}{1-|z|^2} dA(z) < \infty.$$

En efecto, bastará mostrar que

$$\int_0^\delta (1-r^2)^\alpha \log \frac{1}{1-r^2} r dr < \infty.$$

Haciendo el cambio de variable $s = 1-r^2, ds = -2rdr$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\delta (1-r^2)^\alpha \log \frac{1}{1-r^2} r dr &= -\frac{1}{2} \int_1^{1/\delta^2} s^\alpha \log \frac{1}{s} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{1/\delta^2} s^\alpha \log s ds,\end{aligned}$$

luego integrando por partes tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\delta (1-r^2)^\alpha \log\frac{1}{1-r^2}rdr &= \frac{1}{2}\left[\frac{s^{\alpha+1}\log s}{(\alpha+1)}\Big|_1^{1/\delta^2} - \int_1^{1/\delta^2}\frac{s^\alpha}{(\alpha+1)}ds\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1-r^2)^{\alpha+1}\log(1-r^2)}{(\alpha+1)}\Big|_0^{1/\delta} - \frac{(1-r^2)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\Big|_0^{1/\delta}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1-\frac{1}{\delta^2})^{\alpha+1}}{(\alpha+1)}\left\{\log\left(1-\frac{1}{\delta^2}\right) - \frac{1}{(\alpha+1)}\right\} + \frac{1}{(\alpha+1)^2}\right],\end{aligned}$$

de aquí se sigue entonces que

$$\int_{\delta<|z|<1}(1-|z|^2)^\alpha \log\frac{1}{1-|z|^2}dA(z) < \infty.$$

Por lo tanto concluimos que $(1-|z|^2)^\alpha|\mathcal{H}^\alpha f(z)|$ es integrable en $\mathbb{D}$.

Finalmente, para el caso $0<\alpha<\infty$ y f acotada en $\mathbb{D}$, tenemos por la Observación 2.2.2

$$(1-|z|^2)^\alpha|\mathcal{H}^\alpha f(z)| \le (1-|z|^2)^\alpha||f||_\infty \int_{\mathbb{D}}\frac{1}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha}}dA(w).$$

Nuevamente usando el Teorema 1.2.1 concluimos que

$$(1-|z|^2)^\alpha|\mathcal{H}^\alpha f(z)| \sim 1$$

cuando $|z|\to 1^-$, y así la función $(1-|z|^2)^\alpha\mathcal{H}^\alpha f(z)$ es acotada y por tanto integrable en $\mathbb{D}$.

Ahora, sea $g\in H^\infty(\mathbb{D})$ y f una función analítica en $\mathbb{D}$ que cumpla cualquiera de las condiciones de la hipótesis, entonces

$$\int_{\mathbb{D}}\mathcal{H}^\alpha f(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\alpha dA(z) = \int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}dA(w)\right)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\alpha dA(z).$$

Aplicando el Teorema de Fubini al lado derecho y usando el Corolario 1.1.5 obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}}\mathcal{H}^\alpha f(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\alpha dA(z) &= \frac{1}{(\alpha+1)}\int_{\mathbb{D}}f(w)\left(\overline{\int_{\mathbb{D}}\frac{g(z)}{(1-w\overline{z})^{2+\alpha}}dA_\alpha(z)}\right)dA(w)\\ &= \frac{1}{(\alpha+1)}\int_{\mathbb{D}}f(w)\overline{g(w)}dA(w),\end{aligned}$$

lo cual es justamente lo que queríamos mostrar.

■

Lema 2.2.7. Sea $\Lambda \in A^{p\,*}_{\alpha}$ y $\beta > -1$ entonces

$$\mathcal{H}^{\beta}\Lambda(K_0(z,w)) = \Lambda(K_{\beta}(z,w)) \qquad z, w \in \mathbb{D}. \tag{2.13}$$

Demostración.
Notemos que $\Lambda(K_0(z,w))$ posee una representación en serie de potencias en $\mathbb{D}$ la cuál converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. Como Λ es continua en A^p_α entonces por la Proposición 1.1.1 Λ es continua con respecto a la topología de la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{D}$.

Recordemos que tenemos la representación

$$K_0(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\overline{w}^n \qquad z, w \in \mathbb{D}$$

y la serie converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$, por lo que

$$\Lambda(K_0(z,w)) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\overline{w}^n\Lambda(z^n) \qquad z, w \in \mathbb{D}.$$

Por la continuidad de $\mathcal{H}^{\beta}$ con respecto a la topología de la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{D}$ tenemos que

$$\mathcal{H}^{\beta}\Lambda(K_0(z,w)) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\overline{w}^n\Lambda(z^n) \qquad z, w \in \mathbb{D}.$$

Bastará ver entonces que

$$\mathcal{H}^{\beta}\Lambda(z^n) = \Lambda(\mathcal{H}^{\beta}z^n) \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

En efecto, por la linealidad de Λ obtenemos que para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathcal{H}^\beta z^n) &= \Lambda\left(\frac{\Gamma(n+2+\beta)}{(n+1)!\Gamma(2+\beta)}z^n\right)\\ &= \frac{\Gamma(n+2+\beta)}{(n+1)!\Gamma(2+\beta)}\Lambda(z^n)\\ &= \frac{\Gamma(n+2+\beta)}{(n+1)!\Gamma(2+\beta)}\Lambda(1)z^n\\ &= \mathcal{H}^\beta(\Lambda(1)z^n)\\ &= \mathcal{H}^\beta\Lambda(z^n).\end{aligned}$$

■

Utilizando fuertemente estos lemas nos es posible obtener finalmente un resultado de dualidad para A^p_α en el caso $0 < p \leq 1$.

Teorema 2.2.8. Sea $0 < p \leq 1$, $\alpha > -1$ y $\beta = \frac{(2+\alpha)}{p} - 2$. Entonces

$$A^{p\,*}_\alpha \simeq \mathcal{B},$$

bajo el emparejamiento integral

$$\langle f, g\rangle = \lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}} f(rz)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\beta dA(z) \qquad f\in A^p_\alpha, g\in\mathcal{B}. \tag{2.14}$$

Demostración.
Supongamos que $g \in \mathcal{B}$, definimos

$$\Lambda_g(f) = \lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}} f(rz)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\beta dA(z) \qquad f\in A^p_\alpha.$$

Probaremos que $\Lambda_g \in A^{p\,*}_\alpha$. Por el Teorema 1.3.5 existe una función $\phi \in L^\infty(\mathbb{D})$ tal que

$$g(z) = (\beta+1)\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-z\overline{w})^{2+\beta}}\phi(w)dA(w) \qquad z\in\mathbb{D}.$$

Entonces por el Teorema de Fubini y el Corolario 1.1.5

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} f_r(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^{\beta} dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} f_r(z) \left[(\beta+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\beta}\overline{\phi(w)}}{(1-w\overline{z})^{2+\beta}} dA(w)\right](1-|z|^2)^{\beta} dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\beta}\overline{\phi(w)}\left[\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{\beta}(\beta+1)}{(1-w\overline{z})^{2+\beta}} f_r(z) dA(z)\right] dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\beta}\overline{\phi(w)} f_r(w) dA(w).
\end{aligned}
$$

Ahora, por el Lema 2.2.5

$$\int_{\mathbb{D}} |f_r(z) - f(z)|(1-|z|^2)^{\beta} dA(z) \leq C||f_r - f||_{p,\alpha} \qquad 0 < r < 1,$$

y entonces por la Proposición 1.1.3 $f_r \to f$ cuando $r \to 1^-$ en A^1_{β}. De esto se sigue que

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} f_r(z)\overline{\phi(z)}(1-|z|^2)^{\beta} dA(z) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{\phi(z)}(1-|z|^2)^{\beta} dA(z).$$

Por lo tanto

$$\Lambda_g(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{\phi(z)}(1-|z|^2)^{\beta} dA(z) \qquad f \in A^p_{\alpha}.$$

Usando esta representación probaremos que Λ_g define una funcional lineal acotada en A^p_{α}. En efecto, una vez más por el Lema 2.2.5

$$
\begin{aligned}
|\Lambda_g(f)| &\leq ||\phi||_{\infty} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|(1-|z|^2)^{\beta} dA(z) \\
&\leq C||\phi||_{\infty}||f||_{p,\alpha},
\end{aligned}
$$

para toda $f \in A^p_{\alpha}$. Por lo tanto $\Lambda_g \in A^{p}_{\alpha}{}^{*}$.

Recíprocamente, supongamos que $\Lambda \in A^{p}_{\alpha}{}^{*}$ y $f \in A^p_{\alpha}$. Por la Proposición 1.1.3 $f_r \to f$ en cuando $r \to 1^-$ en A^p_{α}, entonces se sigue que

$$\Lambda(f) = \lim_{r\to 1^-} \Lambda(f_r) \qquad f \in A^p_{\alpha}.$$

Recordemos que por el Corolario 1.1.5 tenemos la representación

$$f_r(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f_r(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w) \qquad z \in \mathbb{D}, 0 < r < 1.$$

Como la integral converge en A^p_α entonces la continuidad de Λ implica que

$$\Lambda(f_r) = \int_{\mathbb{D}} f_r(w)(\Lambda \circ \psi)(w)dA(w) \qquad 0 < r < 1,$$

donde

$$\psi(w) = K_w \qquad w \in \mathbb{D}$$

y

$$K_w = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2} \qquad w \in \mathbb{D}.$$

Notemos que la función $\psi : \mathbb{D} \to A^p_\alpha$ es analítica en $\mathbb{D}$, así la función $\Lambda \circ \psi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ también lo es y

$$\frac{d}{dz}(\Lambda \circ \psi) = \Lambda \left(\frac{d}{dz}\psi \right).$$

Sea $\beta = \frac{(2+\alpha)}{p} - 2$, por el Lema 2.2.6

$$\int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{\Lambda \circ \psi(w)}dA(w) = (\beta + 1)\int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{\mathcal{H}^\beta(\overline{\Lambda \circ \psi)(w)}}(1 - |w|^2)^\beta dA(w),$$

para toda $0 < r < 1$. Pudimos utilizar el Lema 2.2.6 ya que $f_r \in H^\infty(\mathbb{D})$ y además $\Lambda \circ \psi(z) \in L^\infty(\mathbb{D})$ ó $(1 - |z|^2)^{-\beta}\Lambda \circ \psi(z) \in L^\infty(\mathbb{D})$. En efecto,

$$\begin{aligned} |\Lambda \circ \psi(w)| &\leq \|\Lambda\| \, ||K_w||_{p,\alpha} \\ &= \|\Lambda\| \, (\alpha + 1)^{1/p} \left[\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^\alpha}{|1 - z\overline{w}|^{2p}} dA(z) \right]^{1/p} \end{aligned}$$

para toda $w \in \mathbb{D}$. Sea $\gamma = -2 - \alpha + 2p$, supongamos que $\gamma > 0$ (los casos restantes son análogos). Por la Proposición 1.2.1

$$\begin{aligned} (1 - |w|^2)^{-\beta}|\Lambda \circ \psi(w)| &\sim (1 - |w|^2)^{-\beta}(1 - |w|^2)^{-\gamma/p} \\ &= (1 - |w|^2)^{-\beta}(1 - |w|^2)^\beta \\ &= 1 \end{aligned}$$

cuando $|w| \to 1^-$, probando así que $(1-|z|^2)^{-\beta}\Lambda \circ \psi(z) \in L^\infty(\mathbb{D})$.

Tenemos entonces que

$$\Lambda(f_r) = (\beta+1)\int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{\mathcal{H}^\beta\overline{(\Lambda\circ\psi)(w)}}(1-|w|^2)^\beta dA(w) \qquad 0<r<1.$$

Sea $g = (\beta+1)\mathcal{H}^\beta(\overline{\Lambda\circ\psi})$, mostraremos que $g \in \mathcal{B}$. En efecto, por el Lema 2.2.7

$$\begin{aligned}\overline{g(w)} &= (\beta+1)\mathcal{H}^\beta(\Lambda(K_w))\\ &= (\beta+1)\Lambda(\mathcal{H}^\beta(K_w))\\ &= (\beta+1)\Lambda\left(\frac{1}{(1-z\overline{w})^{(2+\alpha)/p}}\right)\end{aligned}$$

para toda $w \in \mathbb{D}$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{g'(w)} &= (\beta+1)\Lambda\left[\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{(1-z\overline{w})^{(2+\alpha)/p}}\right)\right]\\ &= (\beta+1)(\beta+2)\Lambda\left(\frac{z}{(1-z\overline{w})^{(2+\alpha)/p+1}}\right)\\ &= \frac{(\beta+1)(\alpha+2)}{p}\Lambda\left(\frac{z}{(1-z\overline{w})^{(2+\alpha)/p+1}}\right)\end{aligned}$$

para toda $w \in \mathbb{D}$. Utilizando la linealidad y continuidad de Λ obtenemos

$$\begin{aligned}(1-|w|^2)|g'(w)| &= \frac{(\beta+1)(\alpha+2)}{p}\left|\Lambda\left(\frac{(1-|w|^2)z}{(1-z\overline{w})^{(2+\alpha)/p+1}}\right)\right|\\ &\leq \frac{(\beta+1)(\alpha+2)}{p}\|\Lambda\|\left[\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^p|z|^p}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha+p}}dA_\alpha(z)\right]^{1/p}\\ &\leq \frac{(\alpha+1)^{1/p}(\beta+1)(\alpha+2)}{p}\|\Lambda\|(1-|w|^2)\left[\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-w\overline{z}|^{2+\alpha+p}}\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

Por la Proposición 1.2.1 tenemos que

$$\begin{aligned}(1-|w|^2)|g'(w)| &\sim (1-|w|^2)\left[\frac{1}{(1-|w|^2)^p}\right]^{1/p} \\ &= 1\end{aligned}$$

cuando $|w| \to 1^-$, por lo tanto $g \in \mathcal{B}$ y

$$\Lambda(f) = (\beta+1)\lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{g(w)}(1-|w|^2)^{\beta}dA(w) \qquad f \in A^p_\alpha.$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

Productos de Hadamard en Espacios de Bergman

En este capítulo estudiaremos el producto de Hadamard de funciones en espacios de Bergman. Nuestro propósito principal es obtener un resultado de acotamiento para operadores producto de Hadamard en espacios de Bergman, para ello analizaremos un resultado de este tipo en espacios de Hardy y lo replicaremos con ciertas diferencias. Para obtener un resultado análogo será necesario introducir los operadores derivada fraccionaria, los cuales están estrechamente relacionados con los operadores $\mathcal{H}^\alpha$ que definimos en el capítulo 2.

Los resultados presentados en este capítulos fueron tomados de [18], [22], [9] y [24].

3.1. Productos de Hadamard

Empezamos definiendo el producto de Hadamard de dos funciones analíticas.

Definición 3.1.1. Sean $f, g \in H(\mathbb{D})$ con las siguientes representaciones en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad y \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Definimos la función ***producto de Hadamard*** de f y g como

$$(f * g)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{3.1}$$

Notemos que $f * g \in H(\mathbb{D})$ está bien definida, para ello calculemos su radio de convergencia R. Sean R_f y R_g los radios de convergencia de f y g respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} R &= \limsup_{n\to\infty} |a_n b_n|^{-1/n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n} \limsup_{n\to\infty} |b_n|^{-1/n} \\ &= R_f R_g, \end{aligned}$$

y como $R_f, R_g \geq 1$, entonces $R \geq 1$ y $f * g \in H(\mathbb{D})$.

Observación 3.1.2. Podemos escribir el producto de Hadamard $f * g$ como una convolución en el siguiente sentido:

$$(f * g)(r^2 e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{-i\theta}) g(re^{i(\theta+t)}) d\theta \qquad r \in (0,1), t \in (0, 2\pi]. \tag{3.2}$$

En efecto, por la convergencia uniforme de las representaciones en serie de Taylor de f y g tenemos que para $0 < r < 1$ y $0 < t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{-i\theta}) g(re^{i(\theta+t)}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{-in\theta} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m r^m e^{im(\theta+t)} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m r^{n+m} e^{imt} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n r^{2n} e^{int} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n (r^2 e^{it})^n \\ &= (f * g)(r^2 e^{it}). \end{aligned}$$

3.2. Productos de Hadamard en Espacios de Hardy

En esta sección estudiaremos un resultado de acotamiento para el producto de Hadamard en espacios de Hardy, para ello recordemos primero algunas definiciones importantes.

Definición 3.2.1. Sea $0 < p < \infty$, $0 < r < 1$ y f una función analítica en $\mathbb{D}$. Definimos el ***promedio de orden*** p ***de*** f ***en el círculo*** $C_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ como

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}|^p d\theta \right)^{1/p}. \tag{3.3}$$

Una función f analítica en $\mathbb{D}$ está en el ***espacio de Hardy*** $H^p(\mathbb{D})$ si y solo si

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty. \tag{3.4}$$

De hecho, la función $r \mapsto M_p(r,f)$ es creciente ([9], teorema 2.16), por lo cual se sigue que para toda $f \in H^p(\mathbb{D})$

$$\|f\|_{H^p} = \lim_{r\to 1^-} M_p(r,f). \tag{3.5}$$

A continuación presentamos un resultado de acotamiento en la norma del espacio de Hardy para el producto de Hadamard de dos funciones con ciertas condiciones. Su prueba puede consultarse en [22]. Este teorema es nuestra motivación para la obtención de un resultado análogo en el caso de espacios de Bergman.

Teorema 3.2.2. Sean $f \in H^1$ y $g \in H^q$ con $1 \leq q < \infty$, entonces

$$M_q(r, f * g) \leq \|f\|_{H^1} \|g\|_{H^q} \qquad 0 < r < 1 \tag{3.6}$$

y consecuentemente

$$\|f * g\|_{H^q} \leq \|f\|_{H^1} \|g\|_{H^q}. \tag{3.7}$$

De hecho, si $f \in H^p$ y $g \in H^q$, donde $0 < p \leq 1$ y $p \leq q < \infty$, entonces

$$M_q(r, f * g) \leq (1-r)^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{H^p} \|g\|_{H^q} \qquad 0 < r < 1. \tag{3.8}$$

3.3. Productos de Hadamard en Espacios de Bergman

Análogamente a (3.3), podemos definir promedios de orden p en discos contenidos en el disco unitario como lo hacemos a continuación.

Definición 3.3.1. *Sea $0 < p < \infty$, $0 < r \leq 1$ y f una función analítica en $\mathbb{D}$. Definimos el* ***promedio de orden*** p ***de*** f ***en el disco*** $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ *como*

$$E_p(r,f) = \left(\frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{D}_r} |f(z)|^p dA(z)\right)^{1/p}. \tag{3.9}$$

Notemos que para $0 < r \leq 1$, podemos escribir

$$E_p(r,f) = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(rz)|^p dA(z)\right)^{1/p}. \tag{3.10}$$

En efecto, cambiando a coordenadas polares tenemos

$$\int_{\mathbb{D}} |f(rz)|^p dA(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |f(r\rho e^{i\theta})|^p \rho d\rho \frac{d\theta}{\pi}$$

y haciendo el cambio de variable $s = r\rho, ds = rd\rho$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |f(rz)|^p dA(z) &= \frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 |f(se^{i\theta}|^p s ds \frac{d\theta}{\pi} \\ &= \frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{D}_r} |f(z)|^p dA(z) \\ &= E_p(r,f)^p.\end{aligned}$$

Como en el caso de los espacios $H^p(\mathbb{D})$, puede mostrarse que la función $r \mapsto E_p(r,f)$ es creciente, (ver [24]).

Si denotamos para $f \in A^p$, $\|f\|_{A^p} = \|f\|_{p,0}$, se sigue de la observación previa que si $0 < r < 1$

$$\|f\|_{A^p} = E_p(1,f) \geq E_p(r,f) = \|f_r\|_{A^p}. \tag{3.11}$$

Ahora, tenemos también que si $\rho \leq 1$

$$E_p(r, f_\rho) = E_p(r\rho, f). \tag{3.12}$$

Al definir los promedios de funciones analíticas en discos nos podemos preguntar de manera natural si una desigualdad de tipo (3.7) se cumple en el contexto de espacios de Bergman. O incluso si podemos obtener un resultado análogo al presentado en el Teorema 3.2.2. Resulta que la respuesta a esta pregunta es negativa, es decir, si $f \in A^1$, $g \in A^q$ con $1 \leq q < \infty$, entonces la desigualdad

$$\|f * g\|_{A^q} \leq \|f\|_{A^1} \|g\|_{A^q}$$

no es cierta en general. Mostramos esto en nuestro siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.2. Sean $f \in A^1$ y $g \in A^q$ tales que

$$f(z) = g(z) = z \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\|f\|_{A^1} &= \int_{\mathbb{D}} |z| dA(z) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta dr \\ &= \int_0^1 2r^2 dr \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|g\|_{A^q} &= \left(\int_{\mathbb{D}} |z|^q dA(z) \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r^{q+1} d\theta dr \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^1 2r^{q+1} dr \right)^{1/q} \\ &= \left(\frac{2}{q+2} \right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Notemos por otro lado que por definición del producto de Hadamard de dos funciones

$$(f * g)(z) = z \qquad z \in \mathbb{D}$$

y así

$$\|f * g\|_{A^q} = \|g\|_{A^q} = \left(\frac{2}{q+2}\right)^{1/q}.$$

Por lo tanto en este caso particular tenemos

$$\|f * g\|_{A^q} > \|f\|_{A^1} \|g\|_{A^q}.$$

Para tratar de obtener un resultado de la misma naturaleza que el Teorema 3.2.2 introducimos las derivadas fraccionarias. Veremos más adelante como éstas nos permiten tener una estimación similar a la que obtuvimos en espacios de Hardy.

Definición 3.3.3. Sea f una función analítica en $\mathbb{D}$ cuya representación en serie de Taylor es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Definimos la ***derivada fraccionaria de orden*** α ***de*** f como la función

$$\mathcal{D}^\alpha f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^\alpha a_n z^n \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{3.13}$$

La derivada fraccionaria de orden α de f es tal que $\mathcal{D}^\alpha f \in H(\mathbb{D})$. En efecto, sea R_f el radio de convergencia de f entonces el radio de convergencia R de $\mathcal{D}^\alpha f$ es

$$\begin{aligned} R &= \limsup_{n\to\infty} \left((n+1)^\alpha |a_n|\right)^{-1/n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(n^{-1/n}\right)^\alpha \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n} \\ &= R_f, \end{aligned}$$

por lo tanto $\mathcal{D}^\alpha f \in H(\mathbb{D})$.

Observación 3.3.4. Presentamos ahora algunas observaciones importantes de la derivada fraccionaria.

1. Si $\alpha = 1$, $\mathcal{D}^1 f(z) = (zf(z))'$.

2. Si $\alpha = 0$, $\mathcal{D}^0 f(z) = f(z)$.

3. Si $f(z) = z^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{D}^\alpha f(z) = (n+1)^\alpha z^n$.

Observación 3.3.5. Tenemos la siguiente relación entre el operador derivada fraccionaria de orden α $\mathcal{D}^\alpha$ y el operador $\mathcal{H}^\alpha$ que definimos en (2.2) para obtener el espacio dual de A^p_α con $0 < p \leq 1$.

$$|\mathcal{D}^\alpha(z^n)| \sim |\mathcal{H}^\alpha(z^n)| \qquad n \to \infty.$$

Demostración.
Por la fórmula de Stirling

$$\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} \sim n^\alpha \sim (n+1)^\alpha$$

si $n \to \infty$. De aquí que existen $N \in \mathbb{N}$ y $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_2(n+1)^\alpha < \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} < C_2(n+1)^\alpha \qquad n \geq N,$$

luego, para $z \in \mathbb{D}$

$$C_2(n+1)^\alpha |z|^n < \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)}|z|^n < C_2(n+1)^\alpha |z|^n,$$

si $n \geq N$. Concluimos entonces por la Observación 3.3.4

$$C_1|\mathcal{D}^\alpha(z^n)| < |\mathcal{H}^\alpha(z^n)| < C_2|\mathcal{D}^\alpha(z^n)| \qquad n \geq N,$$

que era lo que queríamos mostrar.

■

A continuación probaremos dos lemas auxiliares para el resultado principal de este capítulo.

Lema 3.3.6. Sea $f \in A^p$ donde $0 < p \leq q < \infty$. Entonces existe una constante $C_{p,q} > 0$ tal que

$$E_q(r, f) \leq C_{p,q}(1-r^2)^{2(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{A^p} \qquad 0 < r < 1. \tag{3.14}$$

Demostración.

Sea $0 < r < 1$, vimos en (2.12) que existe $C_p > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq C_p(1 - |z|^2)^{-2/p} \|f\|_{A^p} \qquad z \in \mathbb{D}.$$

De aquí que si $|z| = r$, entonces

$$|f(z)| \leq C_p(1 - r^2)^{-2/p} \|f\|_{A^p},$$

por lo tanto del Teorema del Módulo Máximo se sigue

$$\max_{z \in \overline{\mathbb{D}_r}} |f(z)| = C_p(1 - r^2)^{-2/p} \|f\|_{A^p}.$$

Entonces de lo anterior y (3.11) tenemos

$$\begin{aligned}
(E_q(r, f))^q &= \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{D}_r} |f(z)|^q dA(z) \\
&= \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{D}_r} |f(z)|^{q-p} |f(z)|^p dA(z) \\
&\leq \max_{z \in \overline{\mathbb{D}_r}} |f(z)|^{q-p} \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{D}_r} |f(z)|^p dA(z) \\
&\leq C_p^{q-p}(1 - r^2)^{2(1-q/p)} \|f\|_{A^p}^{q-p} (E_p(r, f))^p \\
&\leq C_p^{q-p}(1 - r^2)^{2(1-q/p)} \|f\|_{A^p}^{q-p} \|f\|_{A^p}^p \\
&\leq C_p^{q-p}(1 - r^2)^{2(1-q/p)} \|f\|_{A^p}^q.
\end{aligned}$$

Tomando raíces q-ésimas y haciendo $C_{p,q} := C_p^{1-\frac{p}{q}}$ concluimos lo deseado

$$E_q(r, f) \leq C_{p,q}(1 - r^2)^{2(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|f\|_{A^p}.$$

■

Lema 3.3.7. Sean f, g analíticas en $\mathbb{D}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Definimos la función

$$H(z, w) := \overline{\mathcal{D}^\alpha f(\overline{w})} \mathcal{D}^\beta g(zw) \qquad z, w \in \mathbb{D}.$$

Entonces para $0 < p \leq 1$ existe $C_p > 0$ tal que

$$|\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f*g)(rz)| \leq C_p(1-r^2)^{2(1-1/p)} \|H(z,\cdot)\|_{A^p}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ y toda $0 < r < 1$.

Demostración.
Sean $f, g \in H(\mathbb{D})$ cuyas representaciones en serie de Taylor son

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Sea $0 < r < 1$ fijo y $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f*g)(r^2 z) = \frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{D}_r} \mathcal{D}^{\alpha} f(\overline{w})\mathcal{D}^{\beta} g(zw)dA(w), \tag{3.15}$$

En efecto, usando las representaciones en serie de f y g y haciendo el cambio a coordenadas polares obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}_r} \mathcal{D}^{\alpha} f(\overline{w})\mathcal{D}^{\beta} g(zw)dA(w) &= \int_{\mathbb{D}_r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(n+1)^{\alpha}a_n\overline{w}^n(m+1)^{\beta}b_m z^m w^m\right]dA(w)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(n+1)^{\alpha}(m+1)^{\beta}a_n b_m z^m \rho^{m+n+1}e^{i(m-n)\theta}\right]d\theta d\rho.\end{aligned}$$

Por la convergencia uniforme de las series en ρ y θ se sigue

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}_r} \mathcal{D}^{\alpha} f(\overline{w})\mathcal{D}^{\beta} g(zw)dA(w) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(n+1)^{\alpha}(m+1)^{\beta}a_n b_m z^m\int_0^r \rho^{m+n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta d\rho\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\alpha+\beta}a_n b_n z^n\int_0^r 2\rho^{2n+1}d\rho\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\alpha+\beta-1}a_n b_n z^n r^{2n+2},\end{aligned}$$

dividiendo ambos lados entre r^2, utilizando la definición de $f*g$ y de derivada fraccionaria obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{D}_r} \mathcal{D}^{\alpha} f(\overline{w})\mathcal{D}^{\beta} g(zw)dA(w) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\alpha+\beta-1}a_n b_n z^n r^{2n}\\ &= \mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f*g)(r^2 z),\end{aligned}$$

probando así lo deseado.

Ahora, de (3.15) se sigue

$$|\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f*g)(r^2z)| \leq \frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{D}_r} |H(z,w)|dA(w),$$

es decir, para $z \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$

$$|\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f*g)(r^2z)| \leq E_1(r, H(z,\cdot)).$$

Por el Lema 3.3.6, existe $C_p > 0$ tal que

$$|\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f*g)(r^2z)| \leq C_p(1-r^2)^{2(1-1/p)} \|H(z,\cdot)\|_{A^p}.$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$.

■

El siguiente resultado es la generalización que buscábamos del Teorema 3.2.2 en el contexto de espacios de Bergman.

Teorema 3.3.8. Sean f y g analíticas en $\mathbb{D}$ tales que $\mathcal{D}^\alpha f \in A^p$ y $\mathcal{D}^\beta g \in A^q$ con $0 < p \leq 1$, $p \leq q < \infty$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces existe $C_p > 0$ tal que

$$E_q(r, D^{\alpha+\beta-1}(f*g)) \leq C_p(1-r^2)^{2(1-1/p)}||\mathcal{D}^\alpha f||_{A^p}||\mathcal{D}^\beta g||_{A^q} \qquad 0 < r < 1. \tag{3.16}$$

Demostración.
Definamos $h := \mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f*g)$. Por el Lema 3.3.7

$$\begin{aligned} E_q(r,h)^q &= \int_{\mathbb{D}} |h(rz)|^q dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f*g)(rz)|^q dA(z) \\ &\leq C_p^q(1-r^2)^{2q(1-1/p)} \int_{\mathbb{D}} \|H(z,\cdot)\|_p^q \, dA(z) \\ &= C_p^q(1-r^2)^{2q(1-1/p)} \int_{\mathbb{D}} \left[\int_{\mathbb{D}} |H(z,w)|^p dA(w)\right]^{q/p} dA(z) \end{aligned}$$

para toda $0 < r < 1$. Se sigue entonces

$$E_q(r,h) \leq C_p(1-r^2)^{2(1-1/p)} \left(\int_{\mathbb{D}} \left[\int_{\mathbb{D}} |H(z,w)|^p dA(w) \right]^{q/p} dA(z) \right)^{1/q}.$$

Elevando ambos lados de la desigualdad a la p obtenemos

$$E_q(r,h)^p \leq C_p^p(1-r^2)^{2(p-1)} \left(\int_{\mathbb{D}} \left[\int_{\mathbb{D}} |H(z,w)|^p dA(w) \right]^{q/p} dA(z) \right)^{p/q}$$

para toda $0 < r < 1$. Aplicando la desigualdad de Minkowski con $p_0 = q/p$ se tiene

$$\begin{aligned}
E_q(r,h)^p &\leq C_p^p(1-r^2)^{2(p-1)} \int_{\mathbb{D}} \left[\int_{\mathbb{D}} |H(z,w)|^q dA(z) \right]^{p/q} dA(w) \\
&= C_p^p(1-r^2)^{2(p-1)} \int_{\mathbb{D}} \left[\int_{\mathbb{D}} |\mathcal{D}^\alpha f(\overline{w})|^q |\mathcal{D}^\beta g(zw)|^q dA(z) \right]^{p/q} dA(w) \\
&= C_p^p(1-r^2)^{2(p-1)} \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{D}^\alpha f(\overline{w})|^p \left[\int_{\mathbb{D}} |\mathcal{D}^\beta g(zw)|^q dA(z) \right]^{p/q} dA(w).
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que para toda $w \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |\mathcal{D}^\beta g(zw)|^q dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{D}^\beta g(|w|z)|^q dA(z) \\
&= E_q^q(|w|, \mathcal{D}^\beta g),
\end{aligned}$$

de aquí que

$$\int_{\mathbb{D}} |\mathcal{D}^\beta g(zw)|^q dA(z) \leq ||\mathcal{D}^\beta g||_{A^q}^q.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
E_q(r,h)^p &\leq C_p^p(1-r^2)^{2(p-1)} \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{D}^\alpha f(\overline{w})|^p ||\mathcal{D}^\beta g||_{A^q}^p dA(w) \\
&= C_p^p(1-r^2)^{2(p-1)} ||\mathcal{D}^\beta g||_{A^q}^p ||\mathcal{D}^\alpha f||_{A^p}^p
\end{aligned}$$

para toda $0 < r < 1$, y tomando raíz p-ésima a ambos lados de la desigualdad obtenemos el resultado deseado

$$E_q(r,h) \leq C_p(1-r^2)^{2(1-1/p)}||\mathcal{D}^\beta g||_{A^q}||\mathcal{D}^\alpha f||_{A^p}$$

para toda $0 < r < 1$.

■

Corolario 3.3.9. Sean f y g analíticas en $\mathbb{D}$ tales que $\mathcal{D}^\alpha f \in A^p$ y $\mathcal{D}^{1-\alpha} g \in A^q$ con $0 < p \leq 1$, $p \leq q < \infty$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces existe $C_p > 0$ tal que

$$E_q(r, f * g) \leq C_p(1-r^2)^{2(1-1/p)}||\mathcal{D}^\alpha f||_{A^p}||\mathcal{D}^{1-\alpha} g||_{A^q} \tag{3.17}$$

para toda $0 < r < 1$.

Demostración.
Aplicamos el Teorema 3.3.8 con $\beta = 1-\alpha$. ■

Corolario 3.3.10. Sean f y g analíticas en $\mathbb{D}$ tales que $\mathcal{D}^1 f \in A^p$ y $g \in A^q$ con $0 < p \leq 1$, $p \leq q < \infty$. Entonces existe $C_p > 0$ tal que

$$E_q(r, f * g) \leq C_p(1-r^2)^{1(1-1/p)}||\mathcal{D}^1 f||_{A^p}||g||_{A^q} \tag{3.18}$$

para toda $0 < r < 1$.

Demostración.
Aplicamos el Corolario 3.3.9 con $\alpha = 1$. ■

Corolario 3.3.11. Sean f y g analíticas en $\mathbb{D}$ tales que $\mathcal{D}^\alpha f \in A^1$ y $\mathcal{D}^\beta g \in A^q$ con $1 \leq q < \infty$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f * g) \in A^q$$

y existe $C > 0$ tal que

$$||\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f * g)||_{A^q} \leq C||\mathcal{D}^\alpha f||_{A^1}||\mathcal{D}^\beta g||_{A^q} \tag{3.19}$$

Demostración.
Se sigue del Teorema 3.3.8 que existe $C > 0$ tal que

$$E_q(r, \mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f * g)) \leq C(1-r^2)^{2(1-1/p)}||\mathcal{D}^\alpha f||_{A^1}||\mathcal{D}^\beta g||_{A^q}$$

para toda $0 < r < 1$. Por tanto, tomando límite cuando $r \to 1^-$ obtenemos

$$||\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f*g)||_{A^q} \leq C||\mathcal{D}^{\alpha}f||_{A^1}||\mathcal{D}^{\beta}g||_{A^q}$$

y así hemos probado que $\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f*g) \in A^q$. ∎

Corolario 3.3.12. Sean f y g analíticas en $\mathbb{D}$ tales que $\mathcal{D}^1 f \in A^1$ y $g \in A^q$ con $1 \leq q < \infty$. Entonces

$$f * g \in A^q$$

y existe $C > 0$ tal que

$$||f*g||_{A^q} \leq C||\mathcal{D}^1 f||_{A^1}||g||_{A^q}. \tag{3.20}$$

Demostración.
Aplicamos el Corolario 3.3.11 con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. ∎

Corolario 3.3.13. Sea f una función analítica en $\mathbb{D}$ tal que $\mathcal{D}^1 f \in A^1$y sea $1 \leq q < \infty$. El ***operador producto de Hadamard*** $T_f : A^q \to A^q$ definido como

$$T_f(g) = f * g \qquad g \in A^q \tag{3.21}$$

es acotado y tiene norma

$$\|T_f\|_{L(A^q)} \leq C||\mathcal{D}^1 f||_{A^1}, \tag{3.22}$$

donde $C = C_{1,1}$ es la constante dada en (2.11).

Demostración.
Se sigue del Corolario 3.3.12. ∎

Finalmente, utilizando la estimación que obtuvimos en el Corolario 3.3.12 probaremos el siguiente resultado de aproximación.

Teorema 3.3.14. Sea $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$

$$f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} z^n \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Supongamos que la sucesión satisface el siguiente par de condiciones:

1. $\sup_{m\in\mathbb{N}}||\mathcal{D}^1 f_m||_{A^1} < \infty$.

2. Para cada $n \geq 0$, $\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = 1$.

   Entonces para toda $g \in A^q$ con $q \geq 1$

$$f_m * g \longrightarrow g \tag{3.23}$$

cuando $m \to \infty$ en la norma de A^q.

Demostración.
Primero notemos que la primera suposición implica que para todo polinomio p

$$\|f_m * p - p\|_{A^q} \to 0$$

cuando $m \to \infty$. En efecto, sea $p(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_N z^N$, entonces para toda $m \in \mathbb{N}$

$$(f_m * p)(z) = \sum_{n=0}^{N} a_{m,n} b_n z^n \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Definimos

$$I = \sup_{z\in\mathbb{D}} \sum_{n=0}^{N} |b_n||z|^n.$$

Sea $\epsilon > 0$, por hipótesis existe $M_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_{m,n} - 1| < \frac{\epsilon}{I} \qquad m \geq M_n.$$

Hacemos $M = \max\{M_n : n = 0, 1, \cdots, N\}$, y tenemos que

$$|a_{m,n} - 1| < \frac{\epsilon}{I} \qquad m \geq M$$

para $n = 0, 1, \cdots, N$. De esto se sigue que si $m \geq M$

$$\begin{aligned}|(f_m * p)(z) - p(z)| &= \left|\sum_{n=0}^{N}(a_{m,n}-1)b_n z^n\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}-1||b_n||z|^n < \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto si $m \geq M$

$$\|f_m * p - p\|_{A^q} < \epsilon,$$

probando así que $f_m * p \to p$ cuando $m \to \infty$ en la norma de A^q.

Probaremos ahora que para toda $g \in A^q$

$$\|f_m * g\|_{A^q} \to 0$$

cuando $m \to \infty$. Sea $g \in A^q$ y sea

$$S = \sup_{m\in\mathbb{N}} ||\mathcal{D}^1 f_m||_{A^1},$$

vimos en la Proposición 1.1.3 que los polinomios son densos en A^q, por lo tanto existe un polinomio p tal que

$$\|g-p\|_{A^q} < \frac{\epsilon}{(1+CS)}$$

donde C es la constante obtenida en el Corolario 3.3.11. Entonces por el Corolario 3.3.12, para toda $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|f_m * g - g\|_{A^q} &\leq \|f_m * (g-p)\|_{A^q} + \|f_m * p - p\|_{A^q} + \|g-p\|^{A^q} \\ &\leq C||\mathcal{D}^1 f_m||_{A^1}\,\|g-p\|^{A^q} + \|f_m * p - p\|_{A^q} + \|g-p\|^{A^q} \\ &\leq (CS+1)\,\|g-p\|^{A^q} + \|f_m * p - p\|_{A^q} \\ &< \epsilon + \|f_m * p - p\|_{A^q}.\end{aligned}$$

Tomando límite superior cuando $m \to \infty$ obtenemos

$$\limsup_{m\to\infty} \|f_m * g - g\|_{A^q} \leq \epsilon,$$

lo cual implica que $f_m * g \to g$ cuando $m \to \infty$ en la norma de A^q.

∎

Definamos para $m \in \mathbb{N}$ los operadores $T_{f_m} \in L(A^q)$ tales que

$$T_{f_m}(g) := f_m * g \qquad g \in A^q.$$

El Teorema 3.3.14 nos dice que si I es el operador identidad en A^q, entonces

$$T_{f_m} \longrightarrow I$$

cuando $m \to \infty$ en la topología fuerte de operadores.

Conclusiones

En este trabajo de tesis hemos estudiado a fondo la estructura y propiedades básicas de los espacios de Bergman con pesos A^p_α donde $0 < p < \infty$ y $\alpha > -1$. Primero vimos que A^p_α posee una estructura de espacio de Banach en el caso $1 \leq p < \infty$ y de espacio métrico completo en el caso $0 < p < 1$. También observamos que toda función en A^p_α se puede aproximar en la norma del espacio por una sucesión de polinomios, lo cual fue de bastante utilidad en la obtención de resultados posteriores.

Luego, definimos los núcleos de Bergman, también llamados núcleos reproductores y las proyecciones de Bergman P_α para funciones en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ con $1 \leq p < \infty$. A partir de estas proyecciones obtuvimos la siguiente fórmula reproductora para funciones $f \in A^p_\alpha$

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) \qquad z \in \mathbb{D},$$

la cual converge uniformemente en z en subconjuntos compactos de disco unitario.

A continuación, utilizando la estimación para el operador integral $I_{\alpha,\beta}$ y el criterio de Schur, demostramos el acotamiento de la proyección de Bergman P_β de $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sobre A^p_α siempre que $\alpha + 1 < (\beta + 1)p$. Este resultado es una ventaja importante que tiene la teoría de espacios de Bergman sobre la de espacios de Hardy, ya que no existen proyecciones acotadas de $L^1(\mathbb{D}, dA)$ sobre el espacio de Hardy $H^1(\mathbb{D})$.

Por otro lado, mostramos que la proyección de Bergman P_α es un operador acotado de $L^\infty(\mathbb{D})$ sobre el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ y de $C_0(\mathbb{D})$ sobre el espacio pequeño de Bloch $\mathcal{B}_0$. Con este resultado obtuvimos también una caracterización para las funciones en los espacios $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_0$ a partir de sus derivadas, y con ayuda de las series lacunarias y el hecho de que $\mathcal{B} \subset A^p_\alpha$ vimos que es posible construir funciones no triviales en A^p_α.

En la cuestión de la dualidad en espacios de Bergman obtuvimos en primer lugar que

$$A^{p\,*}_\alpha \simeq A^q_\alpha,$$

cuando $1 < p < \infty$ y $p^{-1} + q^{-1} = 1$. En segundo lugar, para el caso $0 < p \leq 1$ obtuvimos el resultado

$$A_\alpha^{p\,*} \simeq \mathcal{B}.$$

Finalmente, establecimos un resultado de acotamiento en espacios de Bergman A^p para el producto de Hadamard $f * g$, análogo a aquel conocido para espacios de Hardy H^p. Específicamente, probamos que si las derivadas fraccionarias $\mathcal{D}^\alpha f \in A^p$ y $\mathcal{D}^\beta g \in A^q$ donde $0 < p \leq 1$ y $p \leq q < \infty$, entonces los promedios de orden q de la derivada fraccionaria $\mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f * g)$ satisfacen

$$E_q(r, \mathcal{D}^{\alpha+\beta-1}(f * g)) \leq C_p(1-r^2)^{2(1-1/p)}||\mathcal{D}^\alpha f||_p||\mathcal{D}^\beta g||_q \qquad 0 < r < 1,$$

para una constante $C_p > 0$. Como consecuencia de este resultado observamos que si la derivada fraccionaria $\mathcal{D}^1 f \in A^1$ y $g \in A^q$ donde $1 \leq q < \infty$, entonces $f * g \in A^q$ y

$$\|f * g\|_q \leq C||\mathcal{D}^1 f||_1||g||_q$$

para una constante $C > 0$.

Para finalizar, a partir de esta última estimación deducimos un resultado de aproximación para funciones en A^q a partir de la sucesión de sus productos de Hadmard con funciones analíticas muy particulares.

El resultado de acotamiento para el producto de Hadmard $f * g$ se puede extender a los espacios de Bergman con peso A_α^p, llevando a cabo un desarrollo análogo. Sin embargo, los cálculos para estos espacios resultan más complicados, especialmente cuando los parámetros implicados no son números enteros. Este resultado y su desarrollo puede consultarse en [19].

Apéndice
Funciones Subarmónicas

Definición A1. Una función $v : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es ***subarmónica en un abierto*** $A \subset \mathbb{R}^n$ si $v : A \to [-\infty, \infty)$ y satisface las siguientes condiciones:

1. v es semicontinua superiormente en A.

2. Para cada $x_0 \in A$ existe $r(x_0) > 0$ tal que $B(x_0, r(x_0)) \subset A$ y para cada $0 < r < r(x_0)$

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} v(x_0 + r\sigma) d\sigma. \tag{A1}$$

La condición A1 puede también reemplazarse por la siguiente condición:
Para cada $x_0 \in A$ y cada $r > 0$ tal que $\overline{B(x_0, r)} \subset A$

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} v(x) dx. \tag{A1'}$$

Recordemos que v es semicontinua superiormente en $A \subset \mathbb{R}^n$ si y solo si para cada $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in A : v(x) < t\}$ es abierto. Equivalentemente, para cada $x_0 \in A$

$$\limsup_{x \to x_0} v(x) \leq v(x_0). \tag{A2}$$

Observemos que la semicontinuidad superior de v y la condición $v(x) < \infty$ para $x \in A$, implican que v es acotada superiormente en cada subconjunto compacto $K \subset A$. En efecto, para $j \in \mathbb{N}$ sea $K_j = \{x \in K : v(x) \geq j\}$, tenemos que $K \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$. Como por hipótesis $\cap_{j=1}^{\infty} K_j = \{x \in K : v(x) = \infty\} = \emptyset$, entonces debe ocurrir que $K_j = \emptyset$ para algún

$j \in \mathbb{N}$, es decir $v(x) < j$ para toda $x \in K$.

Lo anterior permite que las integrales en (A1) estén bien definidas, ya que cada una de ellas está definida como la integral de la parte positiva de la función $v(x_0 + r\sigma)$ menos la integral de su parte negativa, y esta diferencia tiene sentido porque la integral de la parte positiva es finita por ser la integral de una función acotada.

Notemos también que para v subarmónica (A1) implica que

$$v(x_0) \leq \limsup_{x \to x_0} v(x),$$

y consecuentemente tenemos igualdad en (A2).

Tenemos la siguiente caracterización para las funciones subarmónicas, la cual es la mejor justificación para su nombre. Su demostración puede consultarse en [9] (capítulo 1, teorema 2.7).

Teorema A1. Sea $v : A \to [-\infty, \infty)$ una función semicontinua superiormente en el abierto A. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. v es subarmónica en A.

2. Si u es una función continua en $\overline{G}$ que toma valores en $\mathbb{R}$, armónica en G, donde G es un abierto con $\overline{G} \subset A$, y u satisface

$$v(x) \leq u(x) \qquad x \in \partial G,$$

entonces

$$v(x) \leq u(x) \qquad x \in G.$$

La prueba del siguiente resultado puede consultarse en [9] (capítulo 1, teorema 2.11).

Teorema A2. Sea v una función subarmónica en el abierto A, y supongamos que Φ es una función creciente y convexa en $\mathbb{R}$. Entonces la función $\Phi \circ v$ también es subarmónica (definimos $\Phi(-\infty)$ de manera que Φ sea continua en $-\infty$).

A continuación, daremos nuestro primer ejemplo de función subarmónica, a saber, $\log|F(z)|$ para F una función analítica no idénticamente cero. La subarmonicidad de esta función será una de nuestras herramientas principales. Si F es diferente de cero en todo el dominio, entonces $|F(z)| = Re(\log F(z))$, donde $\log F(z)$ se puede definir como una función analítica localmente. Se sigue que para F analítica y sin ceros en el dominio, $\log|F(z)|$ es de hecho una función armónica. En el caso general debemos hacer un poco mas de trabajo para tratar con los ceros.

Teorema A3. (Fórmula de Jensen). Sea F analítica en $D(0,R)$ y supongamos que $F(0) \neq 0$. Sean $0 < r < R$ y $z_1, z_2, ..., z_n$ los ceros de F en $\overline{D(0,R)}$ enlistados tantas veces como su multiplicidad. Entonces

$$\log|F(0)| + \sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{z_j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|F(re^{it})| dt.$$

La prueba del teorema previo puede consultarse en [9] (capítulo 1, teorema 2.14).

Corolario A4. Sea F analítica, no idénticamente cero en un abierto $A \subset \mathbb{C}$. Entonces, las siguientes funciones son subarmónicas en A:

1. $\log|F(z)|$.
2. $\log^+|F(z)| := \text{máx}(\log|F(z)|, 0)$.
3. $|F(z)|^p$ para $0 < p < \infty$.

Demostración.
Veamos primero que la función $\log|F(z)|$ es subarmónica. Notemos que es una función continua y toma valores en $[-\infty, \infty)$. Además, tenemos que si $\overline{D(z_0, r)} \subset A$, entonces

$$\log|F(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|F(z_0 + re^{it})| dt.$$

En efecto, esto es claro si $F(z_0) = 0$. En otro caso, se sigue del Teorema A3 aplicado a la función $z \mapsto F(z_0 + z)$ la cual es analítica en $D(0, r + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$ y no se anula en 0.

El resultado para las funciones $\log^+|F(z)|$ y $|F(z)|^p$ para $p > 0$ se sigue del Teorema A2 al componer $\log|F(z)|$ con las funciones crecientes y convexas $\Phi(t) = \text{máx}(t, 0)$ y $\Phi(t) = e^{pt}$, respectivamente.

∎

Bibliografía

[1] J.M. Ash, M. T. Karaev. On the Boundary Behavior of Special Classes of C^{∞}-Functions and Analytic Functions. *International Mathematical Forum*, Vol. 7, 2012, pp. 153-166.

[2] S. Bergman, M. Schiffer. Kernel Functions and Conformal Mapping. *Compositio Math*, Vol. 8, 1951, pp. 205-249.

[3] S. Bergman, M. Schiffer. *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*. Academic Press, 1953.

[4] A. Beurling. On two problems concerning linear transformations in Hilbert Space. *Acta Math.*, Vol. 81, 1949, pp. 239-255.

[5] L. Carleson. An interpolation problem for bounded analytic functions. *Amer. J. Math.*, Vol. 80, 1958, pp. 921-930.

[6] L. Carleson. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem. *Ann. of Math.*, Vol. 76, 1962, pp. 547-559.

[7] P. Duren, D. Khavinson, H. S. Shapiro, C. Sundberg. Contractive zero-divisors on Bergman Spaces. *Pacific J. Math.*, Vol. 157, 1993, pp. 37-56

[8] P. Duren, D. Khavinson, H. S. Shapiro, C. Sundberg. Invariant subspaces in Bergman spaces and the biharmonic equation. *Michingan Math. J.*, Vol. 41, 1994, pp. 247-259.

[9] J. Garcia-Cuerva, J.L. Rubio De Francia. *Weighted norm inequalities and related topics.* Notas de matematica 104 North-Holland mathematics studies 116. North-Holland, 1985.

[10] G. H. Hardy. On the mean value of the modulus of an analytic function. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 14, 1915, pp. 269-277.

[11] G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some properties of fractional integrals. *II. Math. Z.* , Vol. 34 (1), 1932, pp. 403-439.

[12] H. S. Hedenmalm. A factorization theorem for square area-integrable analytic functions. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 422, 1991, pp. 45-68.

[13] H. S. Hedenmalm. An invariant subspace of the Bergman space having the codimension two property. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 449, 1993, pp. 1-9.

[14] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu. *Theory of Bergman Spaces*. Springer-Verlag, 2000.

[15] C. Horowitz. Factorization theorems for functions in the Bergman spaces. *Duke Math. J.*, Vol. 44, 1977, pp. 201-213.

[16] C. Horowitz. Some conditions on Bergman space zero sets. *J. Analyse Math.*, Vol. 62, 1994, pp. 323-348.

[17] M. Jevtic, D. Vukotic, M. Arsenovic. Taylor Coefficients and Coefficient Multipliers of Hardy and Bergman-Type Spaces. *RSME Springer Series*, Vol. 2, 2016, pp. 403-439.

[18] B. Karapetrovic, J. Mashreghi. Hadamard Convolution and Area Integral Means in Bergman Spaces. *Results in Mathematics*, Vol. 75: 70, 2020.

[19] B. Karapetrovic, J. Mashreghi. Hadamard products in weighted Bergman spaces. *J. of Math. Anal. App.*, Vol. 494 (2), 2021.

[20] B. Korenblum. A Beurling-type theorem. *Acta Math.*, Vol. 138, 1977, pp. 265-293.

[21] N. N. Lebedev. *Special Functions and their Applications*. Prentice-Hall, 1965.

[22] M. Pavlovic. An inequality for the integral means of a Hadamard product. *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 103, 1988, pp. 404-406.

[23] H. S. Shapiro, A. L. Shields. On some interpolation problems for analytic functions. *Amer. J. Math.*, Vol. 83, 1961, pp. 513-532.

[24] J. Xiao, K. Zhu. Volume integral means of holomorphic functions. *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 139 (4), 2011, pp. 1455–1465.

[25] K. Zhu. *Operator Theory in Function Spaces*. Mathematical Surveys and Monographs 138. American Mathematical Society, 2007.

[26] K. Zhu. Bergman and Hardy spaces with small exponents. *Pacific J. Math.*, Vol. 162 (1), 1994, pp. 189-199.